Müller

Phys. g. 303 lk (1

<36642133180010 S

<36642133180010

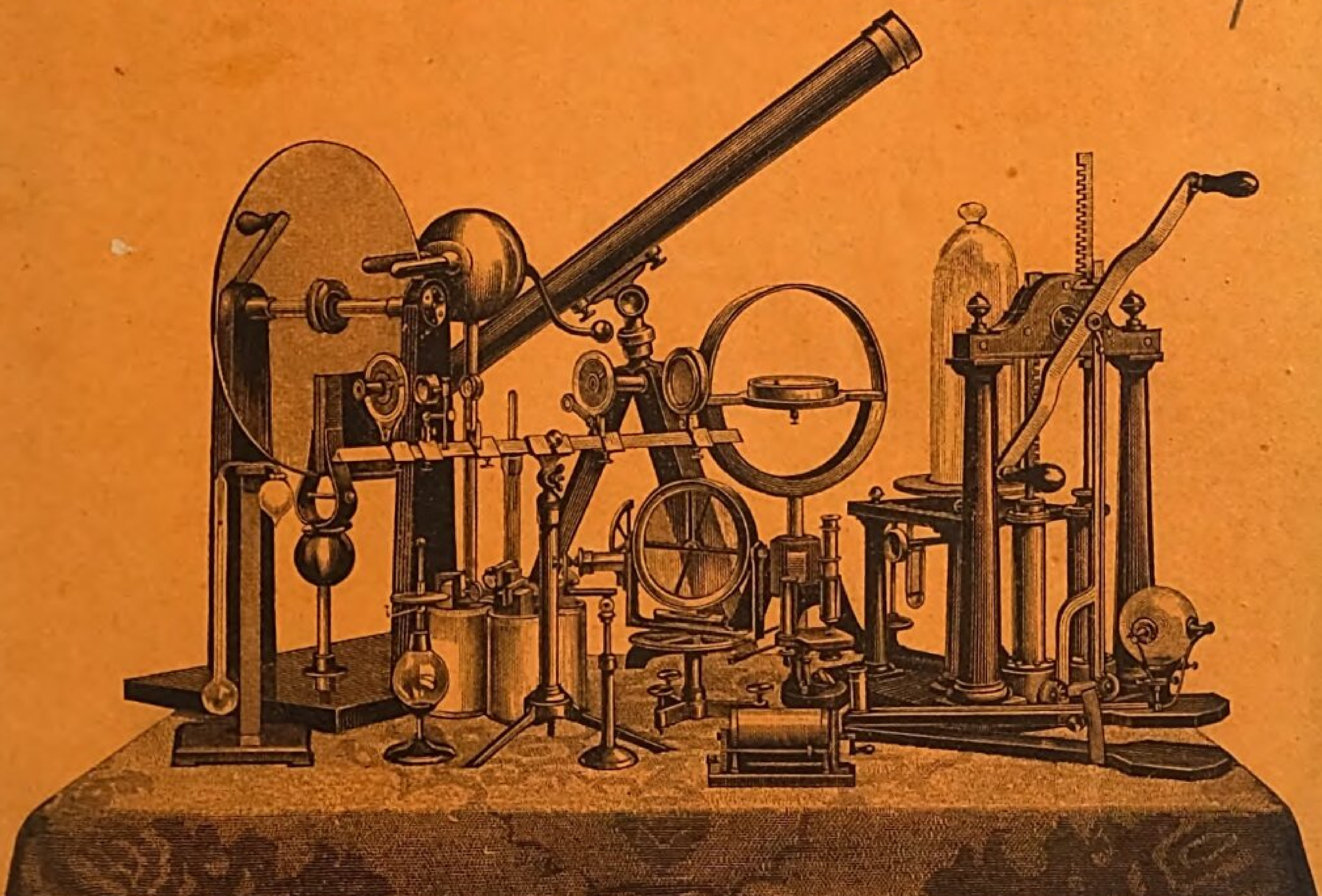
Bayer. Staatsbibliothek

MÜLLER-POUILLET'S
LEHRBUCH DER PHYSIK
UND
METEOROLOGIE.

NEUNTE
UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE
VON

DR. LEOP. PFAUNDLER,
Professor der Physik an der Universität Innsbruck.

1



IN DREI BÄNDEN.

MIT GEGEN 2000 HOLZSTICHEN, TAFELN, ZUM THEIL IN FARBENDRUCK, UND EINER PHOTOGRAPHIE.

ERSTER BAND.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1886.

21/9. 92. 2592 1/2

B... ...A
...
M... ...IS

ANKÜNDIGUNG.

Das unter dem Namen Müller-Pouillet's bekannte, seit der vorigen Auflage von L. Pfaundler neubearbeitete Lehrbuch der Physik hat sich die Aufgabe gestellt, in leichtfasslicher Weise und mit Zuhilfenahme derjenigen mathematischen Kenntnisse, welche bei jedem Gebildeten vorauszusetzen sind, die Hauptlehren der Experimentalphysik weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Dieser Aufgabe hat dasselbe in acht auf einander folgenden Auflagen seit dem Jahre 1844 mit Erfolg entsprochen und demselben Zwecke hofft es auch in dieser neunten nach den neuesten Fortschritten der Wissenschaft ergänzten Auflage zu dienen.

In besonderer Rücksicht auf alle die zahlreichen Liebhaber unserer Wissenschaft, welche nicht Gelegenheit finden, akademische Vorträge mit Experimenten zu besuchen, bietet das vorliegende Lehrbuch eine ausführlichere Beschreibung der Apparate und der damit anzustellenden Versuche, als in den meisten Compendien zu finden ist, und unterstützt das Verständniss durch eine grosse Anzahl vorzüglicher Abbildungen im Texte und auf beigefügten Tafeln. Dasselbe gewinnt dadurch auch Bedeutung für die Mechaniker, welche oft ihre Arbeiten nach diesen Abbildungen ausführen können.

Das Buch wird, wie bei der vorigen Auflage, drei Bände umfassen, von denen der erste die allgemeine Physik und Akustik enthält, der zweite (in zwei Abtheilungen) Optik und Wärmelehre, der dritte Elektricität und Magnetismus enthalten wird. Von diesen wird der erste Band sofort erscheinen, die spätern werden nach Maassgabe des Bedürfnisses und des Fortschreitens der Ueberarbeitung nachfolgen.

MÜLLER-POUILLET'S

LEHRBUCH DER PHYSIK

UND

METEOROLOGIE.

ERSTER BAND.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

MÜLLER-POUILLET'S

LEHRBUCH DER PHYSIK

UND

METEOROLOGIE.

NEUNTE

UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE

VON

LEOP. PFAUNDLER,

Dr. der Philosophie,

Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Professor der Physik an der Universität Innsbruck, correspondirendem Mitgliede der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften.

IN DREI BÄNDEN.

MIT GEGEN 2000 HOLZSTICHEN, TAFELN, ZUM THEIL IN FARBENDRUCK, UND EINER PHOTOGRAPHIE.

ERSTER BAND.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1886.

Alle Rechte vorbehalten.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

VORREDE

ZUR

FÜNFTEN AUFLAGE.

Wenn von einem Werke, wie das vorliegende, in verhältnissmässig kurzer Zeit (die erste Auflage wurde im Jahre 1844 vollendet) mehrere Auflagen erscheinen, so ist das Publicum wohl berechtigt, an jede folgende höhere Anforderungen zu stellen als an die vorhergehenden. — Dies anerkennend, war ich auch bei Ausarbeitung dieser fünften Auflage nach Kräften bemüht, in derselben die Physik nicht allein in einer dem jetzigen Stande der Wissenschaft entsprechenden Weise, sondern auch in einer Form darzustellen, welche das Eindringen in die Erkenntniss physikalischer Gesetze möglichst erleichtert, ohne jedoch der wissenschaftlichen Strenge und Consequenz etwas zu vergeben.

Die eben angedeutete Tendenz ist für ein Lehrbuch der Physik, welches einigermaassen Erfolg haben soll, durch die Verhältnisse der Wissenschaft und des Lebens gebieterisch vorgezeichnet; denn während das Material der Physik von Tag zu Tag anwächst, gewinnen ihre Lehren auch täglich einen grösseren Einfluss auf das Leben. Auf der einen Seite wird also die Erlangung umfassender und gründlicher physikalischer Kenntnisse immer schwieriger, auf der anderen Seite wird aber möglichste Verbreitung derselben immer nothwendiger.

Diese Gegensätze zu vermitteln, ist die Aufgabe der Lehrbücher.

Um diese Aufgabe zu lösen, schien es mir vor Allem nothwendig, die Fundamentalerscheinungen als die Basis des ganzen Lehr-

gebäudes mit möglichster Treue und Klarheit darzustellen und dann in möglichst präciser und verständlicher Form den Zusammenhang zwischen der Thatsache und der Theorie zu entwickeln, dabei aber auf der einen Seite eine breitspurige Pedanterie zu vermeiden, welche den Leser langweilt und die Klarheit des Ueberblickes stört; auf der anderen Seite aber auch ein allzu flüchtiges, nach dem Schein der Genialität haschendes Hinwerfen der Gedanken, welches den Leser täuscht und eine gründliche Erkenntniss nicht aufkommen lässt.

Alle physikalischen Erscheinungen entwickeln sich in Zeit und Raum, und zwar sind sie in solcher Weise Functionen derselben, dass ohne mathematische Anschauung ein richtiges Verständniss der Naturgesetze vollkommen unmöglich ist. Daraus folgt nun auch, dass ein Lehrbuch der Physik sich einer mathematischen Betrachtungsweise nicht entschlagen darf, dass es im Gegentheil so viel als irgend möglich auf eine solche hinleiten muss. In einem Werke aber, welches physikalische Kenntnisse in weiteren Kreisen verbreiten soll, muss man sich auf die Anwendung der Elementarmathematik beschränken und wo Formeln nothwendig sind, müssen dieselben gehörig eingeführt und entwickelt werden, damit auch der weniger Geübte dem Gange folgen kann.

Wenn es auch öfters unmöglich ist, ein physikalisches Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit mit elementaren Hülfsmitteln darzustellen, so gelingt es doch oft, ein solches in concreten Fällen unter einfachen Verhältnissen anschaulich zu machen und eine richtige Vorstellung des Grundprincips zu entwickeln. — Auf diesem Wege ist es mir, wie ich hoffe, gelungen, eine oder die andere Partie der Naturlehre einem allgemeineren Verständniss zu eröffnen, welche demselben bisher verschlossen war.

Da alle naturwissenschaftliche Erkenntniss von der Anschauung ausgehen muss, da ferner zum Verständniss der Experimente die Kenntniss der Apparate bis zu einem gewissen Grade unerlässlich ist, so sind gute Abbildungen für ein Lehrbuch der Physik von wesentlicher Bedeutung; ich habe ihnen deshalb die grösste Sorgfalt gewidmet und der Umstand, dass ich fast alle Figuren selbst gezeichnet habe, sichert dem Werke den grossen Vortheil, dass dieselben vollkommen dem Bedürfniss des Textes entsprechen, was kaum zu erreichen ist, wenn Verfasser und Zeichner verschiedene Personen sind. — Die zahlreichen in den Text eingedruckten Holz-

schnitte befördern aber nicht allein das Verständniss, sie erleichtern auch dem Leser die Orientirung im Buch und unterstützen das Gedächtniss, indem der Anblick der Figuren unwillkürlich an den Gegenstand erinnert, zu dessen Erläuterung sie dienen.

Für die vortreffliche Ausführung der Holzschnitte, welche zu dem Ausgezeichnetsten gehören, was in diesem Fache geleistet wurde und welche für die fünfte Auflage fast sämmtlich neu gestochen wurden, fühle ich mich meinem Freunde Eduard Vieweg um so mehr verpflichtet, als der Preis dieses Lehrbuches im Verhältniss der Bogenzahl nicht höher gestellt ist, als der ähnlicher aber ungleich schlechter ausgestatteter Werke.

Ausser den zahlreichen Holzschnitten sind dem Buche noch zwölf grösstentheils zur Erläuterung dienende, theils in Farbendruck ausgeführte Tafeln beigegeben.

Den Ausgangspunkt für das vorliegende Lehrbuch bilden Pouillet's „Éléments de physique expérimentale et de Météorologie“, deren Bearbeitung ich übernommen hatte. War aber bereits diese erste Bearbeitung eine ganz selbständige, so wurden in den folgenden Auflagen allmälig die Spuren französischer Abkunft vollständig verwischt. Das Werk ist in seiner gegenwärtigen Form nicht allein dem Lehrgange deutscher Unterrichtsanstalten angepasst, sondern es sind in demselben vorzugsweise solche Apparate abgebildet und beschrieben, wie sie sich in unseren physikalischen Sammlungen finden und wie sie aus den Werkstätten deutscher Mechaniker hervorgehen.

Obgleich nun, wie jeder Sachverständige anerkennt, dieses Werk in seiner gegenwärtigen Form durchaus meine eigene selbständige Arbeit ist, so schien es doch nicht zweckmässig, den Titel zu ändern, unter welchem es bereits eine so grosse Verbreitung gefunden hat. Möge auch diese Auflage eine wohlwollende Aufnahme finden und zur Verbreitung gründlicher physikalischer Kenntnisse beitragen.

Freiburg, im Juli 1857.

Dr. J. Müller.

VORREDE
ZUR
ACHTEN AUFLAGE.

Die siebente Auflage dieses Lehrbuches war vergriffen, der geistvolle Verfasser desselben eben beschäftigt, die achte Auflage desselben zu bearbeiten, als ihn der Tod dieser verdienstlichen Aufgabe entriss und damit der deutschen Gelehrtenwelt einen tüchtigen Forscher, der studirenden Jugend einen ausgezeichneten Lehrer raubte, der es so gut verstanden hat, seine Wissenschaft durch Wort und Schrift in weite Kreise zu verbreiten.

Nicht ohne schmerzliche Bewegung kann man aus den hinterlassenen Blättern des Dahingeschiedenen ersehen, mit welcher Sorgfalt derselbe bestrebt war, sein Lehrbuch auch in dieser neuen Auflage zu ergänzen und zu verbessern und um so tiefer müssen wir seinen Verlust beklagen und bestrebt sein, dem Verewigten ein dankbares Andenken zu sichern.

Welch' schöneres Denkmal konnte dem Dahingeschiedenen gewidmet werden, als die Erhaltung seines eigenen vieljährigen Werkes, indem dessen Verleger sich entschloss, dasselbe im Geiste und in der Behandlungsweise seines Verfassers forterscheinen und bearbeiten zu lassen.

Nicht ohne schwere Bedenken habe ich diese Aufgabe übernommen; die Schwierigkeit der Neubearbeitung eines Lehrbuches ist kaum geringer, als die der Abfassung eines neuen. Der erste Entwurf des vorliegenden Lehrbuches wurde vor mehr als 30 Jahren gemacht, und wenn auch sein Verfasser in jeder neuen Auflage be-

müht war, dasselbe dem jeweiligen Stande der Wissenschaft anzupassen, so dürfte doch bald das Bedürfniss einer gründlichen Umarbeitung nicht mehr abzuweisen sein.

Der Umstand, dass die ersten zwanzig Bogen bereits gedruckt sind, und das Manuscript bis zum Schlusse der Akustik fertig vorliegt, lässt eine solche tiefer eingreifende Umarbeitung nicht mehr zu. Meine Aufgabe besteht demnach darin, unter Beibehaltung der Anordnung des Ganzen etwa Veraltetes zu ersetzen und Fehlendes zu ergänzen.

Ueber einen Punkt muss ich mich noch näher aussprechen. Es wurde dem Buche manchmal der Vorwurf gemacht, dass dasselbe die mathematische Begründung allzuwenig berücksichtige. Um zu beurtheilen, ob dieser Vorwurf begründet ist, muss man die Entwickelung unserer physikalischen Lehrbücher überhaupt ins Auge fassen.

Die glänzenden Erfolge der mathematischen Physik und die immer grössere Ausbreitung mathematischer Kenntnisse haben das Bestreben wachgerufen, in die Lehrbücher der Physik immer mehr von jener Disciplin aufzunehmen. Indem man sich hierbei anfangs auf die elementaren mathematischen Methoden beschränkte, aber doch versuchte, mit Hilfe derselben so weit als möglich vorzudringen, konnte man eine gewisse Weitschweifigkeit der Rechnungen nicht vermeiden, welche, nachdem sie einen gewissen Grad erreicht, nur dazu diente, die minder mathematisch gebildeten Leser abzuschrecken, ohne die höher mathematisch unterrichteten zu befriedigen, welche letzteren bei Anwendung der höheren Analysis viel einfachere Mittel fanden, um schneller zu denselben und noch höheren Zielen zu gelangen.

Wir sehen daher einige Lehrbücher, wie z. B. das vortreffliche Lehrbuch von Wüllner, bereits sich dieser Methoden bemächtigen und zweifeln nicht, dass die Entwickelung diesen Verlauf nehmen wird, dass die eine Klasse der Lehrbücher, welche auf höhere Anforderungen und höhere Vorkenntnisse berechnet ist, sich der Analysis bedienen, während die auf eine Vorstufe berechneten sich auf jene mathematische Begründung beschränken wird, welche sich mit den elementaren mathematischen Mitteln einfach und ohne Weitschweifigkeiten erreichen lässt. Dafür wird der letzteren Klasse die ausführlichere Darstellung mancher experimentellen Einzelheiten,

insbesondere in Bezug auf Apparate obliegen, welche die Lehrbücher der ersten Klasse als bekannt voraussetzen werden.

Mit einem Worte, es muss auch hier eine Arbeitstheilung eintreten. Weit entfernt, eine Concurrenz zu versuchen, welche durch die Sachlage selbst ausgeschlossen erscheint, wird es das Streben des vorliegenden Buches sein, dem Bedürfnisse jenes Kreises von Lesern, dem dasselbe bisher genügt hat, auch künftig zu entsprechen, indem es eine dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechende leicht fassliche Darstellung der Hauptlehren der Experimentalphysik zu bieten versucht.

Innsbruck, April 1876.

Leop. Pfaundler.

VORREDE ZUR NEUNTEN AUFLAGE

DES

ERSTEN BANDES.

Zehn Jahre sind verflossen, seit ich die Vorrede zur achten Auflage dieses Buches niederschrieb. Dass unsere Wissenschaft in diesem Zeitraume genug Fortschritte gemacht habe, um eine neue Bearbeitung des Buches zu rechtfertigen, braucht wohl nicht des Längeren erörtert zu werden. Es wird genügen, auf die überraschende Entwickelung der angewandten Elektricitätslehre hinzuweisen, welche in diesem Decennium stattgefunden hat. Allerdings hätte aus diesem Grunde der dritte Band zuerst einer Umarbeitung bedurft; allein es erschien zweckmässiger, mit derselben von Anfang zu beginnen und zwar um so mehr, als der erste Band noch theilweise von meinem Vorgänger Prof. J. Müller bearbeitet war und in demselben noch vielfach die alten Maasssysteme gebraucht wurden.

Es würde zu weit führen, die Aenderungen und Zusätze hier aufzuzählen, welche sich auf die Mehrzahl der Paragraphen erstrecken. Nur die Hauptpunkte mögen hier angeführt werden.

Vor Allem wurde die Statik der Dynamik ein- und untergeordnet, das Gleichgewicht nur als specieller Fall, in welchem die resultirende Geschwindigkeit gleich Null ist, behandelt. Hierdurch wurde es einerseits möglich, Manches, was früher aus einander gerissen war, in Zusammenhang zu bringen, andererseits die grundlegende Definition der Kraft, auf welcher das absolute Maasssystem beruht, rechtzeitig einzuführen. Es scheint mir an

der Zeit, dieses Maasssystem von jetzt an nicht bloss bei den magnetischen und elektrischen Messungen, sondern in allen Theilen der Physik gleichmässig und consequent zur Anwendung zu bringen, denn nur unter dieser Voraussetzung ist es möglich, die quantitativen Beziehungen aller Theile zu einander und das Princip der Erhaltung der Energie in klarer Weise darzustellen. Ich bin zwar darauf gefasst, dass die Anwendung der Maasse Dyne und Ergon nicht sofort allgemeinen Anklang finden werde, da alles Neue eine gewisse Zeit braucht, um sich einzubürgern; aber endlich muss einmal damit der Anfang gemacht werden.

Dass demgemäss der Darstellung der Maasssysteme und der ihnen zu Grunde liegenden Definitionen besondere Sorgfalt gewidmet wurde — mehr als künftig nöthig sein wird — brauche ich unter diesen Umständen wohl kaum zu rechtfertigen. Consequenter Weise musste auch den wichtigsten Messinstrumenten, welche zur Messung von Längen (Höhen), Zeiten (Winkeln), Massen (Gewichten) dienen, also dem Kathetometer, dem Theodoliten, der Wage eine eingehendere Behandlung zu Theil werden als bisher.

In der Mechanik wurden erweiterte Anwendungen der Atwood'schen Fallmaschine zur Darstellung der ungleichförmig beschleunigten und der schwingenden Bewegung eingefügt, die Lehre von den Drehpaaren besser begründet, insbesondere die Begriffe der Arbeit, der lebendigen Kraft und der Energie möglichst klar zu entwickeln versucht. Die Maschinen sind unter dem Gesichtspunkte der Energieübertragung aufgefasst und demgemäss classificirt. Die Lehre vom physischen Pendel, vom Schwingungspunkte und dem Reversionspendel wurde wesentlich umgearbeitet und ergänzt.

Eine erhebliche Ergänzung erfuhr ferner die Lehre von den Capillarerscheinungen durch Berücksichtigung der Arbeiten von Quincke u. A. sowie der Paragraph über die Reibung der Flüssigkeiten.

In der Aerostatik wurde dem Barometer eine ausführlichere Behandlung zu Theil und eine Reihe von Verbesserungen desselben beschrieben; ebenso erfuhren die Quecksilberluftpumpen der verschiedenen Systeme eine Ergänzung und eingehendere Darstellung.

Verhältnissmässig noch mehr wurde die Akustik bereichert. Die Darstellung der fortschreitenden und stehenden Wellen und ihrer Interferenz, die Beschreibung der Wellenmaschinen von Weinhold, Mach u. A., das Princip der Coëxistenz der kleinen Bewegungen und die Abweichungen hiervon, die Ableitung der Tonleitern, die Stimmgabel, die stroboskopischen Methoden, die Erklärung der Chladni'schen Figuren, die Mach'schen Versuche mit Funkenwellen, das Fourier'sche Theorem, die Zusammensetzung der Wellen, die Bewegung schwingender Saiten, die Sirenen von Dove und Helmholtz, die Combinationstöne, die Klanganalyse und Klangsynthese, die Analyse der Sprachlaute, der Phonograph von Edison, das Gehörorgan, die akustischen Bewegungserscheinungen — alle diese und viele andere hier nicht aufgezählte Gegenstände wurden theils ganz neu eingefügt, theils überarbeitet oder ergänzt. Diese Bereicherungen konnten selbstverständlich nicht ohne Vergrösserung des Umfanges des Bandes durchgeführt werden, welcher um etwa 20 Bogen zugenommen hat. Die Anzahl der Paragraphen ist von 205 auf 238, die der Figuren von 646 auf 861 gestiegen. Von den letzteren sind die neuhinzugekommenen der Mehrzahl nach Originalzeichnungen, einige wenige sind anderen Werken entlehnt; ihre Ausführung darf wohl als eine vorzüglich gelungene bezeichnet werden.

Um dem Leser Gelegenheit zu geben, sich über einzelne Gegenstände eingehender zu unterrichten und unvermeidliche Lücken selbst auszufüllen, habe ich zahlreiche Literaturangaben beigefügt, welche, um nicht den Text zu stören, in die Anmerkungen verwiesen wurden. Vollständigkeit konnte dabei nicht angestrebt werden.

Dass trotz der eingetretenen Erweiterung des Umfanges noch immer Vieles ohne Berücksichtigung bleiben musste, was eine solche verdient hätte, muss ich leider zugestehen. Es gilt dies insbesondere von den äusserst zahlreichen Publicationen, welche mir von Fachcollegen des In- und Auslandes in freundlichster Weise zugesendet worden sind, für welche ich hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Die Berücksichtigung solcher Arbeiten in diesem Lehrbuche ist gewiss nie aus Unterschätzung unterblieben. Wenn nicht Raummangel, so war es die Scheu, That-

sachen oder Ansichten aufzunehmen, die noch der Bestätigung oder Klärung bedürftig schienen, welche mir Zurückhaltung auferlegte oder endlich — warum soll ich es nicht offen eingestehen? — es war ein Uebersehen, welches bei dem ausserordentlichen Umfange des Materials und der beschränkten Zeit, welche mir meine Berufspflichten übrig liessen, entschuldigt werden wolle.

Zu besonderem Danke bin ich meinem verehrten Collegen Prof. E. Mach in Prag verpflichtet, dessen freundschaftliche Rathschläge und dessen Publicationen mir besonders förderlich waren.

Innsbruck, im April 1886.

Dr. Leop. Pfaundler.

INHALTSVERZEICHNISS

ZUM

ERSTEN BANDE.

Einleitung.

		Seite
1.	Aufgabe der Naturwissenschaften	1
2.	Eintheilung der Naturwissenschaften, Begriff der Physik	2
3.	Quellen des physikalischen Wissens	5
4.	Methode der physikalischen Forschung	7
5.	Die wahre Bedeutung der physikalischen Hypothesen und Theorien	10
6.	Nutzen des physikalischen Studiums	13
7.	Eintheilung der Physik	14
8.	Physikalische Grundbegriffe	16
9.	Mechanische und chemische Theilbarkeit; Moleküle, Atome	20
10.	Atomgewichte, Gesetz der multiplen Proportionen	23
11.	Aggregatzustände	27
12.	Krystallisation	28
13.	Krystallsysteme	30
14.	Die Hemiëdrie	37
15.	Undurchdringlichkeit und Porosität der Körper, Veränderlichkeit ihres Volumens	40
16.	Das metrische Maasssystem	43
17.	Hülfsmittel beim Längenmessen	48
18.	Messung von Verticalabständen; Kathetometer	51
19.	Rectification des Kathetometers	55
20.	Messung von Winkeln, Theodolit	63
21.	Zeitmessung und Zeitbestimmung	69

Erstes Buch.

Die Mechanik.

Erstes Capitel.

Von den Bewegungen und den Kräften im Allgemeinen und der Schwerkraft insbesondere.

22.	Eintheilung der Bewegungen; gleichförmige Bewegung, Begriff der Geschwindigkeit	75
23.	Die gleichmässig veränderliche Bewegung; Begriff der Beschleunigung	78

Seite

24. Begriff der Masse und der Kraft 82
25. Beziehungen zwischen Masse, Kraft und Beschleunigung 88
26. Einheiten der Masse und der Kraft im absoluten und im irdischen Maasssystem . 91
27. Definition des Gewichts und Maasseinheit desselben 96
28. Specifisches Gewicht, Dichte 99
29. Die sogenannte momentane Kraft. Beziehung zwischen den Kräften und den Bewegungen . 106
30. Die Schwere als angenähert constante Kraft, Grösse und Richtung derselben; Libelle . 109
31. Princip der Wechselwirkung; der freie Fall 114
32. Die Fallmaschine von Atwood 120
33. Unabhängigkeitsprincip, Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten 125
34. Zusammensetzung gleichmässig beschleunigter Bewegungen; Parallelogramm der Beschleunigungen 130
35. Zerlegung einer Geschwindigkeit oder einer Kraft in ihre Componenten 134
36. Fall über die schiefe Ebene 138
37. Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmässig beschleunigten von gleicher Richtung; verticaler Wurf . 142
38. Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmässig beschleunigten von anderer Richtung; horizontaler und schiefer Wurf . 148
39. Centralbewegung . 152
40. Fliehkraft . 157
41. Die ungleichmässig veränderliche Bewegung; Bewegung in Folge einer Kraft, die sich proportional der Zeit ändert 167
42. Bewegung in Folge einer Kraft, welche sich proportional dem Wege verändert; schwingende oder harmonische Bewegung 176
43. Theoretische Ableitung der Gesetze der schwingenden Bewegung . . . 181
44. Das einfache Pendel . 185

Zweites Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen fester Körper.

45. Zusammensetzung zweier in einer Ebene liegender Componenten, welche an fest verbundenen Punkten angreifen 193
46. Drehpaare; deren Eigenschaften und Zusammensetzung 197
47. Zusammensetzung beliebiger, einen starren Körper angreifender Kraftcomponenten . 201
48. Schwerpunkt . 203
49. Vom Gleichgewicht fester Körper 206
50. Die gleicharmige Wage; Richtigkeit derselben 212
51. Empfindlichkeit der Wage . 218
52. Construction und Rectification einer genauen Wage 224
53. Gebrauch der Wage . 233
54. Einfluss verticaler Beschleunigung auf den Druck oder Zug einer Masse; Poggendorff's Wage . 238
55. Kraftantrieb, Bewegungsgrösse, Arbeit und lebendige Kraft 243
56. Begriff der Arbeit und Maass derselben 247
57. Lebendige Kraft . 251
58. Begriff der Energie . 255

Seite
59. Die Maschinen . 258
60. Die Seilmaschine als Rolle; Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 260
61. Die Seilmaschine als Flaschenzug und als Wellrad; Räderwerke, Schneckenrad . 267
62. Die Hebelmaschine . 276
63. Die schiefe Ebene oder die Gleitmaschine 283
64. Die constructiven Elemente der Maschinen; Unmöglichkeit des Perpetuum mobile . 295
65. Das Trägheitsmoment . 297
66. Berechnung des Trägheitsmomentes 301
67. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes oscillirender Körper 304
68. Rollen über die schiefe Ebene 306
69. Der Schwingungspunkt . 309
70. Das Reversionspendel . 315
71. Beziehungen der Lage der Drehachse zur Lage des Schwingungspunktes und zur Schwingungsdauer eines Pendels 317
72. Die Pendeluhr . 322
73. Erhaltung der Schwingungsebene des Pendels; Foucault's Pendelversuch . 324
74. Verhalten rotirender Körper 326

Drittes Capitel.

Von den Molekularkräften in festen Körpern.

75. Molekularkräfte, Cohäsion, Elasticität 334
76. Elasticitätscoefficient und Elasticitätsmodulus 335
77. Volumveränderung durch Zug 341
78. Torsionselasticität . 343
79. Festigkeit . 344
80. Adhäsion . 346
81. Vom Stoss . 347
82. Vom Stoss unelastischer Körper 348
83. Stoss elastischer Körper . 350
84. Gleitende Reibung . 352
85. Wälzende Reibung . 356
86. Nutzen und Anwendung der Reibung 359

Viertes Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen tropfbar flüssiger Körper.

87. Gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in flüssigen Körpern 363
88. Communicirende Gefässe . 367
89. Freie Oberfläche der Flüssigkeiten 368
90. Bodendruck der Flüssigkeiten 369
91. Seitendruck der Flüssigkeiten 375
92. Druck im Inneren der Flüssigkeiten, Auftrieb 376
93. Das Archimedische Princip 377
94. Bedingungen des Gleichgewichts schwimmender Körper 381
95. Anwendung des Archimedischen Princips zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester und flüssiger Körper 383
96. Gewichtsaräometer . 385

*

Seite

97. Scalenaräometer . 387
98. Aräometer für besondere Flüssigkeiten 390
99. Aräometer mit willkürlicher Scala 394
100. Toricelli's Theorem 395
101. Apparate zu Versuchen über die Ausflussgeschwindigkeit 397
102. Versuche über Ausflussgeschwindigkeit 399
103. Ausflussmenge . 401
104. Beschaffenheit des ausfliessenden Strahles 402
105. Einfluss der Ansatzröhren auf die Wassermenge 403
106. Reibungswiderstand in langen Röhren 406
107. Ausfluss durch Capillarröhren 407
108. Reaction, welche durch das Ausströmen der Flüssigkeiten erzeugt wird 408
109. Energie der Wassergefälle 408
110. Stoss des Wassers, hydraulischer Widder 410

Fünftes Capitel.

Von den Molekularkräften in flüssigen Körpern.

111. Elasticität der Flüssigkeiten 413
112. Cohäsion der Flüssigkeiten 417
113. Adhäsion zwischen festen und flüssigen Körpern 419
114. Oberflächenspannung, erstes Capillaritätsgesetz 420
115. Der Randwinkel, zweites Capillaritätsgesetz 425
116. Erscheinungen in Haarröhrchen 429
117. Abhängigkeit der Steighöhen in derselben Röhre von verschiedenen Umständen . 434
118. Haarröhrchen von verschieden gestaltetem Querschnitt 435
119. Anziehung und Abstossung, durch Capillarität hervorgebracht . . . 437
120. Erklärung der Erscheinungen in Haarröhrchen, drittes Capillaritätsgesetz . 438
121. Die Bestimmung der Capillaritätsconstanten 441
122. Reibung der Flüssigkeiten 446
123. Die Endosmose . 451
124. Das endosmotische Aequivalent 453
125. Theorie der Endosmose . 455
126. Einfluss der Verdunstung auf die Endosmose 456
127. Diffusionsanalyse . 457

Sechstes Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen der gasförmigen Körper.

128. Begriff der Gase und Verzeichniss der wichtigsten derselben 460
129. Elasticität der Gase . 462
130. Druck der Luft . 463
131. Wasserpumpen . 468
132. Messung des Luftdrucks, Toricelli's Versuch, Barometer 471
133. Construction des Barometers 472
134. Das Gefässbarometer . 477
135. Das Heberbarometer . 479
136. Das Gefässheberbarometer 483
137. Prüfung und Correction des Barometers 485

Seite
138. Berechnung des Luftdruckes aus dem Barometerstande 489
139. Metallbarometer . 490
140. Variationen des Barometerstandes 492
141. Wirkung des Luftdruckes auf den menschlichen Körper 494
142. Das Gesetz von Boyle (Mariotte); Reduction eines Gasvolumens auf Normaldruck . 497
143. Manometer . 503
144. Stereometer und Volumenometer 508
145. Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze 513
146. Die Luftpumpe . 518
147. Die zweistiefelige Ventilluftpumpe 521
148. Die zweistiefelige Hahnluftpumpe 526
149. Einstiefelig doppelt wirkende Luftpumpen 528
150. Die wichtigsten Luftpumpenversuche 531
151. Die Quecksilberluftpumpen; Geissler's Pumpe 532
152. Töpler's Quecksilberluftpumpe ohne Hahn und Ventil 541
153. Sprengel's Quecksilberluftpumpe 545
154. Die mit Quecksilberluftpumpen erreichbaren Verdünnungen, Nebenapparate . 548
155. Bunsen's Wasserluftpumpe . 552
156. Compressionspumpen . 555
157. Heronsball und Heronsbrunnen 556
158. Die Feuerspritze . 558
159. Gasbehälter . 560
160. Gebläse . 563
161. Gesetze des Ausströmens der Gase 565
162. Ausflussgeschwindigkeit verschiedener Gase bei gleichem Druck . . 568
163. Seitendruck der Gase beim Ausströmen, aërostatisches Paradoxon . 571
164. Der Luftballon . 575
165. Steigkraft des Luftballons . 579
166. Widerstand der Flüssigkeiten und Gase 580
167. Anwendung des Wasser- und Luftwiderstandes 583

Siebentes Capitel.

Von den Molekularkräften in gasförmigen Körpern.

168. Absorption der Gase durch feste Körper; Adsorption, Occlusion . . . 588
169. Hauchbilder . 593
170. Absorption der Gase durch Flüssigkeiten 595
171. Absorption von Gasgemengen 601
172. Diffusion der Gase . 602
173. Reibung der Gase . 606

Zweites Buch.

Die Akustik.

Erstes Capitel.

Von den Schallwellen.

174. Begriff des Schalles und seiner Arten, Fundamentalversuche über seine Entstehung und Fortpflanzung 609
175. Stehende Schwingungen und fortschreitende Wellen 614

Seite
176. Wasserwellen . 615
177. Seilwellen . 619
178. Luftwellen . 620
179. Transversal- und Longitudinalwellen, Bäuche und Knoten 623
180. Wellenmaschinen . 625
181. Verschiedenheit der Schallempfindungen 632
182. Geschwindigkeit des Schalles in Luft 633
183. Beziehungen zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Schwingungszahl . 637
184. Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Dichte und der Elasticität des Mediums . 637
185. Schallgeschwindigkeit in tropfbar flüssigen und in festen Körpern . 641
186. Von der Reflexion des Schalles und dem Echo 645
187. Einfluss der Dichte des reflectirenden Mediums; Reflexion am festen und am freien Ende . 647
188. Interferenz der Wellen; Princip der Coëxistenz der kleinen Bewegungen . 652
189. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung 657
190. Interferenz sich begegnender Wellen, Bildung stehender Wellen . . 661
191. Stehende Wellen in Folge Interferenz directer fortschreitender mit reflectirten Wellen; Melde's Versuche 664
192. Stehende Luftwellen; Resonanzröhren 671
193. Singende Flammen, analysirender Spiegel, stroboskopische Untersuchungsmethode . 677
194. Orgelpfeifen, manometrische Flammen, Kundt'sche Röhren 684
195. Dichtigkeitsänderungen in den Knotenpunkten 690
196. Einfluss der Form der Pfeifen auf die Tonhöhe 692

Zweites Capitel.

Von den Tönen.

197. Die musikalischen Intervalle 695
198. Die Tonleitern . 699
199. Die Accorde, Ableitung der Dur- und Mollscala 702
200. Erweiterung der Tonleiter . 704
201. Reduction der Tonleiter, Temperatur, chromatische Scala 708
202. Absolute Schwingungszahlen der Töne 712
203. Die Stimmgabel . 716
204. Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne, graphische Methode, Vibrographie . 718
205. Bestimmung der Schwingungszahl durch die Sirene 722
206. Grenzen der Hörbarkeit . 727
207. Einfluss der Bewegung auf die Höhe des wahrgenommenen Tones . 733

Drittes Capitel.

Von den tönenden Körpern.

208. Methoden zur Untersuchung schwingender Körper; Stroboskopie . . 736
209. Optische Methode mittelst der Figuren von Lissajous 741
210. Experimentelle Darstellung der Figuren von Lissajous, drehende Bewegung derselben; Vibrationsmikroskop, Kaleidophon 748
211. Schwingungen gespannter Saiten, Obertöne 758

Seite
212. Transversalschwingungen elastischer Stäbe 765
213. Schwingende Platten, Klangfiguren von Chladni 768
214. Theorie der Klangfiguren . 774
215. Longitudinalschwingungen der Saiten und Stäbe 778
216. Die Zungenpfeifen . 782
217. Die Labial- oder Lippenpfeifen 789
218. Mittheilungen der Schallschwingungen zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern . 790

Viertes Capitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

219. Interferenz isochroner Schallwellen 793
220. Abweichungen vom Princip der Coëxistenz kleiner Bewegungen; Mach's Untersuchung der Funkenwellen 799
221. Zusammensetzung von Wellen ungleicher Wellenlänge 804
222. Obertöne, Theiltöne . 807
223. Beispiele für die Zusammensetzung ungleich langer Wellen, Saitenschwingungen . 810
224. Anwendung der graphischen und optischen Methode zur Darstellung und Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen; Phonautograph . 813
225. Genauere Untersuchung der Saitenschwingungen 817
226. Schwebungen oder Stösse, König's Stosstöne 822
227. Die mehrstimmigen Sirenen von Dove und Helmholtz 828
228. Combinationstöne . 833
229. Theorie der Consonanz und Dissonanz 836
230. Schwingungsform und Klangfarbe 841
231. Klanganalyse, Resonatoren . 843
232. Die musikalischen Instrumente und ihre Klangfarbe 848
233. Das menschliche Stimmorgan . 852
234. Stimmorgane der Thiere . 856
235. Klangfarbe der menschlichen Sprachlaute 857
236. Der Phonograph von Edison . 863
237. Das Gehörorgan . 867
238. Akustische Bewegungserscheinungen 872

EINLEITUNG.

Aufgabe der Naturwissenschaften. Sobald der Mensch zum Gebrauche seiner Vernunft kommt, wird er sich dessen bewusst, dass er Sinneseindrücke erhält, und er versetzt unwillkürlich die Ursachen dieser Eindrücke nach aussen. Alsbald gelangt er zur Vorstellung eines Trägers dieser Ursachen, eines Dinges, von welchem die Einwirkungen auf die Sinne ausgehen. Dieses Ding wird Körper genannt und die Gesammtheit aller dieser Körper heisst Natur. 1

Der Mensch ist nie im Stande, diese Körper unmittelbar wahrzunehmen und in ihrem Wesen zu erkennen*). Im Verkehr mit Seinesgleichen wird ihm offenbar, dass andere Menschen von einer parallelen Reihe von Sinneseindrücken betroffen werden und er lernt, sich mit jenen über gemeinsame Bezeichnungen dieser Eindrücke und der Körper, denen er ihre Entstehung zuschreibt, zu verständigen.

Wären die Sinnesorgane aller Menschen durchaus gleich beschaffen, so würden gleiche Einwirkungen von aussen stets auch gleiche Sinneswahrnehmungen bei allen Individuen hervorrufen. Dies ist aber nicht vollkommen der Fall. Gleichen Objecten entsprechen daher bei verschiedenen Individuen nicht immer gleiche Sinneswahrnehmungen, sowie auch umgekehrt möglich ist, dass scheinbar gleichen Wahrnehmungen ungleiche Objecte entsprechen**).

Wir werden diesen Sachverhalt an geeigneter Stelle näher auseinandersetzen und durch mehrfache Beispiele insbesondere aus der Lehre von den Farbenempfindungen erläutern.

Im Grossen und Ganzen geht jedoch der Vorgang der Sinneseindrücke, der Wahrnehmung derselben und der Bildung der Vorstellungen

*) E. Du Bois-Reymond, „Ueber die Grenzen des Naturerkennens". Leipzig 1872.

**) H. Helmholtz, „Ueber das Ziel und die Fortschritte der Naturwissenschaft". Festrede. Innsbruck 1869. (Abgedruckt im zweiten Hefte der „Populären wissenschaftlichen Vorträge", S. 181. Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1871.)

über die Ursachen derselben bei allen normal entwickelten Menschen so weit parallel von Statten, dass sie sich darüber bis ins Einzelne genau verständigen können. Hierdurch wird es möglich, dass die zusammengehörigen Sinneswahrnehmungen, das sind die Erfahrungen eines Menschen, einem andern durch Unterricht mitgetheilt werden können, der sie auf diese Weise als ein geistiges Besitzthum erwerben und verwerthen kann, ohne genöthigt zu sein, alle diese Erfahrungen selbst auf dem mühsamen und zeitraubenden Wege eigener einzelner Sinneswahrnehmungen zu sammeln.

Wollte aber jede Generation der nachfolgenden ihre Erfahrungen über die Körperwelt in der zufälligen Reihenfolge, in welcher sie gemacht wurden, mittheilen, so würde eine Aufbewahrung und Benutzung derselben an der ungeheuren Anzahl und Mannigfaltigkeit derselben scheitern. Es muss daher eine Sichtung und Ordnung dieser Erfahrungen vorgenommen werden; überflüssige Erfahrungen müssen ausgeschieden, gleichartige zusammengezogen, alle aber in ein geordnetes System und auf den einfachsten Ausdruck gebracht werden. Hierdurch wird es möglich, eine enorme, ja unbeschränkte Anzahl verwandter Einzelbeobachtungen in einen einzigen Satz oder in eine einzige Gleichung zusammenzufassen und so in die sparsamste Form zu bringen, welche gleichwohl sehr geeignet ist, alle in ähnlichen Fällen zu erwartenden Erfahrungen daraus abzuleiten.

Der Inbegriff aller systematisch geordneten und auf den einfachsten Ausdruck gebrachten Erfahrungen über die Körperwelt heissen wir Naturwissenschaft*).

Die bloss empirische, d. h. erfahrungsmässige Kenntniss der Naturerscheinungen befriedigt jedoch den menschlichen Geist noch nicht. Es ist ihm ein Bedürfniss, die Erscheinungen auch theoretisch zu erklären, d. h. für die einzelnen Beobachtungen einen ursächlichen Zusammenhang aufzusuchen und womöglich die ganze Vielheit der Erscheinungen als eine Folge einiger weniger Grunderscheinungen darzustellen.

Wir können demnach zusammenfassend sagen, es sei die Aufgabe der Naturwissenschaft, durch Beobachtungen und Versuche möglichst viele Erfahrungen über die Körperwelt zu sammeln, dieselben systematisch zu ordnen und in einfachster Form darzustellen, endlich durch Ermittelung des causalen Zusammenhangs die zusammengesetzteren Erscheinungen auf wenige einfache zurückzuführen.

2 **Eintheilung der Naturwissenschaften, Begriff der Physik.** Das Wort „Physik“, von φύσις, das Gewordene oder die Natur, abgeleitet, wird häufig mit „Naturlehre“ übersetzt. Diese

*) E. Mach, „Die ökonomische Natur der physikalischen Forschung“. Festvortrag. Almanach d. k. Akad. d. W. in Wien, 32. Jahrgang, 1882, S. 295.

etymologische Ableitung deckt sich jedoch nicht genau mit dem engeren Begriffe, welchen man gewöhnlich mit dem Worte Physik ausdrücken will.

Ueber die Stellung, welche die Physik im engeren Sinne unter den übrigen Naturwissenschaften einnimmt, dürfte das nachfolgende Schema einen übersichtlichen Aufschluss geben.

Naturwissenschaft.

Naturbeschreibung. (Systematische Naturwissenschaften)		Naturlehre. (Exacte Naturwissenschaften)	
Beschreibung der organisirten Körper: Zoologie, Botanik.	Beschreibung der unorganisirten Körper: Mineralogie, Geognosie.	Lehre von den äusserlichen Veränderungen der Körper: Physik, Astronomie.	Lehre von den innerlichen (materiellen) Veränderungen der Körper: Chemie.

Die durch dieses Schema gegebene Abgrenzung und Definition der einzelnen Wissenschaften und der Physik insbesondere ist jedoch weder erschöpfend noch vollkommen zutreffend. Es ist überhaupt ausserordentlich schwierig, eine einwurfsfreie und dennoch bündige Definition der Physik zu geben, insbesondere, wenn ihr Inhalt noch nicht als bekannt vorausgesetzt werden darf. Wir begnügen uns daher mit folgender Erläuterung.

Die Natur kann zunächst auf *zweifache* Weise erforscht werden. Einmal, indem man die Körper so, wie sie sich in der Natur befinden und bleibend darstellen, nach Gestalt, innerem und äusserem Bau und den übrigen Merkmalen untersucht, beschreibt und classificirt, d. h. in ein System bringt. Diese Wissenschaft heisst *Naturbeschreibung*, auch wohl *systematische Naturwissenschaft* oder mit einem unpassenden Namen *Naturgeschichte*.

Dann zweitens kann man die Veränderungen und Bewegungen untersuchen, welche durch die gegenseitige Einwirkung der Körper auf einander hervorgebracht werden und die dabei wahrgenommenen Erscheinungen in ihrem causalen Zusammenhange und in ihrem gesetzmässigen Verlaufe studiren und darstellen. Dieser Theil der Naturwissenschaft heisst *Naturlehre*, wohl auch *exacte Naturwissenschaft* und lässt sich wiederum in zwei Hauptgruppen theilen.

Bei der gegenseitigen Einwirkung der Körper erleiden dieselben entweder nur solche, mehr *äusserliche* Veränderungen, welche sich *nicht* auf die *materielle* Zusammensetzung beziehen, oder aber diese Veränderungen erfolgen derart, dass dabei ein Körper in Theile *ungleicher materieller* Beschaffenheit zerlegt oder aus solchen zusammengesetzt wird. Die letztere Gruppe bildet den Gegenstand der *Chemie*,

die erstere Gruppe umfasst die Physik, die Astronomie und einen Theil der Geographie. Des grossen Umfangs wegen werden die Erscheinungen und Bewegungen der Himmelskörper und unserer Erde, soweit letztere als Planet in Betracht kommt, von der Physik im engeren Sinne abgetrennt behandelt.

Es möge das Vorgetragene noch durch ein Beispiel näher erläutert werden.

Ein Naturforscher findet ein Mineral, welches er an seiner rhombischen Krystallgestalt, seiner gelben Farbe, seiner Härte vom Grade 2, seinem specifischen Gewichte = 2,07, seinem Knistern beim Erwärmen und seinem Geruche beim Zerreiben als natürlichen Schwefel erkennt. Als beschreibender Naturforscher hat er mit dieser Betrachtung der Eigenschaften und der Erkennung des Minerals, der Constatirung des Fundortes und der Art des Vorkommens, endlich mit der Einreihung des Minerals in die systematische Sammlung seine Aufgabe erfüllt.

Der Physiker nimmt die Untersuchung der Eigenschaften wieder auf, aber in anderer Weise und Richtung. Er bringt an dem Stück Schwefel äusserliche Veränderungen hervor, indem er dasselbe der Einwirkung verschiedener Agentien aussetzt. Durch Reiben wird der Schwefel elektrisch, durch Erwärmen dehnt er sich zuerst aus, dann schmilzt und verdampft er, durch Abkühlen wird er wieder in feste Krystallform gebracht u. s. w. Aber bei keiner dieser Veränderungen zerfällt der Schwefel in zweierlei materiell verschiedene Bestandtheile oder geht mit einem fremden Körper eine Verbindung ein; immer behält er den Namen „Schwefel“.

Noch weiter aber geht der Chemiker; er entzündet den Schwefel, wobei derselbe mit dem Sauerstoff der Luft zu schwefliger Säure verbrennt, oder er wirft ihn auf glühendes Eisen, mit welchem er sich zu Schwefeleisen verbindet; er reibt ihn mit Quecksilber zusammen, mit welchem er sich zu Zinnober vereinigt u. s. w.; kurz, der Chemiker nimmt solche Veränderungen vor, während welcher der Schwefel aufhört, Schwefel zu sein oder zu heissen.

Die Arbeiten des Mineralogen, des Physikers und des Chemikers greifen jedoch vielfach in einander über. Auch der Mineralog zersetzt die Mineralien, um sie zu erkennen, und der Chemiker interessirt sich um deren Vorkommen, da er sie zur Herstellung seiner Präparate benöthigt. Allein dadurch wird die obige Abgrenzung nicht umgestossen; denn indem der Mineralog die Mineralien zersetzt, fungirt er eben als Chemiker und benutzt die Chemie als Hilfswissenschaft der Mineralogie. Ebenso macht der Chemiker für seine Zwecke physikalische Messungen, und der Physiker führt chemische Operationen aus oder benutzt chemische Processe zur Erzeugung von Wärme oder Elektricität.

Physik und Chemie insbesondere sind einander ganz unentbehrlich. Ein ziemlich grosses Gebiet der Wissenschaft, welches häufig als physikalische Chemie bezeichnet wird, ist ihnen gemeinschaftlich angehörig.

Quellen des physikalischen Wissens. Das menschliche Wissen wird im Allgemeinen aus drei verschiedenen Quellen geschöpft; diese sind: die *Autorität*, die *Speculation* und die *Erfahrung*. 3

Die *Autorität* von Personen oder von Schriftwerken galt früher überhaupt und gilt heute noch dem Theologen als Hauptquelle für wissenschaftliche Wahrheiten. Für die physikalische Forschung ist sie nicht allein ohne Werth, sondern geradezu von schädlichem Einflusse, wie dies die Geschichte der Physik mehrfach bewiesen hat.

So z. B. zogen die Kirchenväter, gestützt auf die Autorität der heiligen Schrift, physikalische Schlüsse über die Gestalt und Beschaffenheit der Erde, sowie über deren Stellung zum Weltall, welche sich als gänzlich unhaltbar und irrig erwiesen haben. Ebenso war die Autorität des *Aristoteles* und seiner Schule auf Jahrhunderte hinaus ein Hemmschuh für die Entwickelung der Wissenschaft. Der Kampf gegen das Kopernikanische System und die Verfolgung seines geistreichen Vorkämpfers *Galiläi* war der hoffentlich letzte gewaltsame Versuch, der Autorität auf physikalischem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem dieser Versuch so gründlich gescheitert ist, nahm die Physik erst ihren ungehemmten Aufschwung. Selbst das unbedingte Vertrauen auf die Autorität berühmter Physiker ist verwerflich und hat nicht selten geschadet. Wenn wir heute den Aussprüchen eines hervorragenden Physikers ein gewisses Vertrauen entgegenbringen, so geschieht es strenge genommen nicht, weil wir seine Autorität anerkennen, sondern weil wir uns auf seine Beobachtungen, Messungen und Rechnungen verlassen, die wir ja wiederholen und controliren können. Auch wenn diese Controle zeitweilig fehlte, so würde die Annahme, dass ein vielerfahrener Physiker genauer beobachtet und sicherer rechnet als ein wenig erfahrener, daher mehr Vertrauen verdient, selbst als ein Erfahrungssatz zu betrachten sein, welcher mit dem eigentlichen Autoritätsglauben nichts gemein hat.

Die physikalische Gelehrtenwelt hat daher keinerlei hierarchische Verfassung mit Abstufungen von höherer und geringerer Autorität, sie bildet vielmehr eine Republik von gleichberechtigten Bürgern, wo auch der Geringste dasselbe Recht hat, gehört zu werden, wie der Grösste, und berechtigt ist, den letzteren zu widerlegen, wenn er es vermag.

Die *Speculation*, d. h. die reine Forschung mittelst des Denkens ohne Zuhilfenahme der Erfahrung hat in der Mathematik unbestrittene, in der Philosophie weniger sichere Erfolge aufzuweisen. In der Physik ist sie ebenfalls nur in so weit als Quelle neuen Wissens zulässig, als sie sich auf mathematischem Boden bewegt. Wo letzteres nicht der Fall ist, ist sie unfruchtbar oder schädlich. Belege hierfür sind die Misserfolge der griechischen Philosophen auf physikalischem Gebiete, die Unfruchtbarkeit jener Jahrhunderte, während welcher die Aristotelische Metaphysik Geltung hatte, ohne dass der Boden der Erfahrung betreten wurde, endlich die unglaublichen Absurditäten, zu denen die neueren Naturphilosophen *Hegel*, *Schelling*, *Fichte* geführt wurden, als sie

versuchten, auf rein speculativem Wege physikalische Wahrheiten zu ergründen.

Die Erfahrung bleibt somit die einzige zulässige Quelle der physikalischen Forschung. Diese Behauptung ist schon in dem enthalten, was wir am Schlusse des §. 1 als Aufgabe der Naturwissenschaft überhaupt bezeichnet haben. Die Physik ist als Theil der Naturwissenschaft eben auch nur ein System von geordneten und einfach dargestellten Erfahrungen, verbunden mit dem Versuche, diese Erfahrungen unter einander in causalen Zusammenhang zu bringen.

Die Erfahrungen können auf zweierlei Weise gewonnen werden, entweder durch Wahrnehmungen von Erscheinungen, welche uns die Natur ohne unser Dazuthun unmittelbar darbietet, oder indem wir die Körper absichtlich in solche Umstände versetzen, welche sie nöthigen, jene Erscheinungen hervorzubringen, welche wir beobachten oder messen wollen. Im ersten Falle machen wir nur Beobachtungen, im zweiten stellen wir Versuche an, wir experimentiren. Die letztere Methode ist natürlich die fruchtbarere und wird überall dort angewendet, wo es überhaupt möglich ist. Den Blitz z. B. können wir nur beobachten, mit dem elektrischen Funken können wir experimentiren. Da wir in der Lage sind, den letzteren beliebig oft, unter den verschiedensten Umständen und insbesondere dann hervorzurufen, wenn unsere Aufmerksamkeit bereits gespannt ist und alle Mittel zur genauen Beobachtung vorbereitet sind, so ist es nicht zu verwundern, dass wir über die Natur des elektrischen Funkens viel früher und genauer unterrichtet sind als über den Blitz, obwohl letzterer um Tausende von Jahren länger beobachtet wurde als der künstliche elektrische Funke.

Zur Anstellung der Versuche benutzen die Physiker eigenartige Vorrichtungen, die physikalischen Apparate. Diejenigen Apparate, welche ihre Zusammensetzung bei verschiedenen Experimenten beibehalten und insbesondere dazu dienen, die hervorgerufenen Erscheinungen messend zu beobachten, heissen speciell noch physikalische Instrumente, z. B. die Wage, das Fernrohr, das Thermometer. Demonstrationsapparate heissen jene Apparate, welche nicht dazu bestimmt sind, eine noch nicht untersuchte Erscheinung zu erforschen, sondern eine bereits bekannte Erscheinung zum Zwecke des Unterrichts womöglich mehreren Beobachtern zugleich vorzuführen.

Die zur physikalischen Forschung bestimmten Apparate und Instrumente kommen aus den Händen des Mechanikers nicht in vollkommenem Zustande, sie besitzen, worauf der Physiker von vorn herein gefasst ist, gewisse, schwer vermeidliche Fehler, welche derselbe entweder durch die Art des Experimentirens selbst unschädlich zu machen, zu eliminiren sucht, oder welche er zum Zwecke der Correction ausmittelt. Häufig ist das Instrument so eingerichtet, dass seine Fehler durch Verstellung seiner Theile weggeschafft werden können. Diese Operation wird als Adjustirung oder Rectification des Instruments bezeichnet.

Die richtige Behandlung der Apparate überhaupt, die Adjustirung und Rectification der Messinstrumente, die Eliminirung der Beobachtungsfehler durch sinnreiche Gruppirung der Messungen, kurz, das Experimentiren erfordert nicht allein theoretische Kenntnisse, sondern auch technische Geschicklichkeit, welche selbstverständlich nur im physikalischen Laboratorium praktisch angeeignet werden kann. Dennoch soll nicht versäumt werden, den Leser dieses Buches, so weit dies thunlich, an geeigneten Stellen auf das Wichtigste aufmerksam zu machen.

Methode der physikalischen Forschung. Bei der physi- 4
kalischen Erforschung einer Gruppe von Erscheinungen lassen sich mehrere Stufen unterscheiden.

Die erste Stufe, welche wir die qualitative nennen können, beschäftigt sich mit der Beobachtung des allgemeinen Verlaufes der Erscheinungen, mit der Feststellung derjenigen Elemente oder Grössen, welche dabei eine Veränderung erleiden und mit der experimentellen Erforschung der gegenseitigen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der beobachteten Veränderungen.

Wenn z. B. das freie Fallen von Körpern Gegenstand der Erforschung wäre, so würde zuerst die senkrechte Richtung des Falls, dann die Zunahme der Geschwindigkeit mit der Verlängerung der Fallzeit oder des Fallraumes zur Beobachtung gelangen; auch würde man durch gleichzeitiges Fallenlassen mehrerer Körper von ungleicher Grösse und Beschaffenheit sich überzeugen, dass die Fallgeschwindigkeit von diesen letzteren nicht merklich abhängt.

Die zweite Stufe ist die der quantitativen Erforschung. Man sucht die von einander als abhängig erkannten veränderlichen Grössen zu messen, wobei man die Umstände der Beobachtungen so auswählt, beziehungsweise die Experimente so abändert, dass alle möglichen Hauptfälle zur Beobachtung gelangen. Das Resultat dieses Theils der Untersuchung erscheint demnach in Form von Zahlentabellen, welche die zusammengehörigen Werthe der von einander abhängigen veränderlichen Grössen enthalten.

In dem angegebenen Beispiele würde also eine Anzahl Fallzeiten und die diesen entsprechenden Fallräume theils ohne, theils mit Anfangsgeschwindigkeit gemessen werden.

Die dritte Stufe beschäftigt sich mit der Aufstellung eines empirischen Gesetzes, beziehungsweise einer empirischen Gleichung, das heisst eines Satzes (einer Regel) oder einer Gleichung, welche, wie man sich ausdrückt, „die Beobachtungen wiedergiebt". Jede solche Gleichung enthält zwei oder mehrere veränderliche Grössen und eine Anzahl constanter Zahlenwerthe, kurzweg Constante genannt. Je weniger Constante die Gleichung enthält, desto einfacher lautet das Gesetz. Man sucht daher mit der möglichst kleinsten Anzahl von Constanten auszukommen und greift nicht früher zu einer grösseren Anzahl

derselben, als bis man sich überzeugt hat, dass die kleinere Anzahl nicht ausreicht, um sämmtliche Beobachtungen mit derselben Genauigkeit darzustellen, mit der sie gemessen sind.

In dem gewählten Beispiele würde man also allenfalls zuerst versuchen, die Fallzeit t und den zugehörigen Fallraum s durch eine Gleichung von der Form:

$$s = at$$

zu verknüpfen, wonach das empirische Gesetz lauten würde: die Fallräume sind proportional den Fallzeiten. Man würde dann aber sofort finden, dass es keinen Werth der Constanten a giebt, welcher allen Beobachtungen genügt, dass mithin dieses Gesetz ungenügend oder unrichtig ist. Man wird folglich ein weniger einfaches Gesetz, z. B. jenes entsprechend der Gleichung:

$$s = at + bt^2$$

anzuwenden versuchen und sich bald überzeugen, dass dieses bis auf die Beobachtungsfehler genau sämmtlichen Messungsresultaten sich anschliesse, indem bei geeigneter Wahl der Constanten a und b sämmtliche beobachtete Werthe von t der Reihe nach in die Gleichung eingesetzt, die zugehörigen beobachteten Werthe von s mit genügender Annäherung ergeben.

Zur Berechnung der zwei Constanten a und b würde zwar eine ebensogrosse Anzahl von Beobachtungen ausreichen. Man benutzt aber zur Controle mehrere und bedient sich am besten der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleiteten Regeln zur Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe dieser Constanten. Indem man dieselben in die Gleichung einsetzt, hat man ein empirisches Gesetz aufgestellt und damit die Aufgabe der dritten Stufe gelöst.

Die aufgestellte Gleichung ist aber nicht allein der kürzeste Ausdruck sämmtlicher gemachter Beobachtungen; sie ist noch etwas Wesentliches mehr. Sie ist zugleich der Ausdruck sämmtlicher Beobachtungen, welche überhaupt über dieses Experiment noch gemacht werden könnten, denn sie lässt uns die Fallräume für alle die unendlich vielen Fallzeiten berechnen, die ausser den wirklich beobachteten noch versucht werden könnten. Indem wir aber diese Bedeutung der Gleichung zulassen, haben wir bereits stillschweigend auf eine Annahme gestützt einen Schluss gezogen, der zwar höchst wahrscheinlich, aber dessen Berechtigung doch erst nachzuweisen ist.

Der Schluss, den wir gezogen, ist der, dass für die nicht beobachteten Fallräume dieselbe Abhängigkeit von den Fallzeiten gelte, welche wir an den beobachteten vorgefunden haben.

Ein solcher Schluss heisst ein Inductionsschluss, die ihm zu Grunde liegende Annahme heisst eine Hypothese.

Die vierte Stufe der physikalischen Forschung hängt unmittelbar mit der Aufstellung der erwähnten Hypothese zusammen.

Ihre Zulassung beruht nämlich offenbar auf der Erwägung, dass

sämmtliche den Fall der Körper betreffende Erscheinungen aus ein und derselben gemeinsamen Ursache, welche wir Schwerkraft nennen, hervorgehen und dass deshalb für alle diese Erscheinungen ein gemeinsames Gesetz gelten müsse.

Indem wir so eine zusammengehörige Gruppe von Erscheinungen als die Wirkung einer Ursache zu erklären versuchen, bauen wir eine Theorie.

Auf einige wenige Axiome (Grundsätze) gestützt, ist es uns möglich, durch mathematische Schlüsse das früher aufgefundene empirische Gesetz jetzt als nothwendige Folge der einheitlichen Ursache darzustellen.

Die Constanten der früheren empirischen Gleichung, welche bisher nichts Anderes waren, als blosse aus der Erfahrung abgeleitete Zahlenwerthe, treten jetzt als Grössen mit physikalischer Bedeutung auf. So z. B. erkennen wir in der obigen Constanten a die Anfangsgeschwindigkeit, in der Grösse b die halbe Beschleunigung, welche zugleich als das Maass der Kraft erkannt wird.

Die physikalische Methode schlägt von da an einen umgekehrten Weg ein. Aus der gewonnenen Theorie werden Folgerungen gezogen und Beobachtungsresultate vorausberechnet. An die Stelle des Inductionsschlusses tritt der Deductionsschluss; statt von den Resultaten der Einzelbeobachtungen auf das allgemeine Gesetz wird jetzt umgekehrt aus diesem auf jene geschlossen. Statt empirischer Entdeckungen auf dem Wege der Beobachtungen werden jetzt theoretische Entdeckungen auf dem Wege der Rechnung gemacht, welche zu Erweiterungen unserer Kenntniss führen. Indem wir z. B. der Anfangsgeschwindigkeit a einen positiven oder negativen Werth oder den Werth Null geben, erhalten wir die Gesetze für den senkrechten Wurf nach abwärts und nach aufwärts und erkennen in dem freien Fall nur einen Specialfall des senkrechten Wurfes.

Diese theoretischen Entdeckungen veranlassen uns dann zu neuen Versuchen, die wir anstellen, um alle Folgerungen unserer Theorie zu prüfen und die letztere dadurch immer mehr zu befestigen. Mit dem Nachweise, dass wirklich keine dieser Folgerungen mit den beobachteten Thatsachen im Widerspruche steht, hat die physikalische Forschung der untersuchten Erscheinungsgruppe ihren vorläufigen Abschluss gefunden.

Wir sagen: ihren vorläufigen Abschluss, denn wir müssen im Allgemeinen stets darauf gefasst sein, dass wir später genöthigt sein werden, die Theorie und das Gesetz zu ergänzen, zu modificiren oder auch gänzlich zu verwerfen und zu erneuern.

Die häufigste Veranlassung hierzu giebt der Umstand, dass feinere und genauere Messungsmethoden uns für die Beobachtungen Werthe ergeben, die von den aus der bisherigen Theorie berechneten um Mehr abweichen, als die wahrscheinlichen oder zulässigen Beobachtungsfehler betragen. So würde z. B. eine genauere Messung der Fallräume er-

geben, dass dieselben nicht ganz unabhängig seien von der Beschaffenheit des fallenden Körpers, von der absoluten Höhe und von dem Orte, an welchem das Experiment angestellt wird. Durch Nachdenken werden wir darauf geführt, diese Abweichungen durch den Widerstand der Luft und die Aenderung der Schwerkraft zu erklären. Es gelingt uns, die Theorie entsprechend zu erweitern und eine viel complicirtere Gleichung mit einer grösseren Anzahl von Veränderlichen und Constanten aufzustellen, welche nun mit den neuen Beobachtungen übereinstimmt.

In anderen Fällen sehen wir uns manchmal genöthigt, die frühere Theorie gänzlich fallen zu lassen.

Fassen wir das hier Gesagte kurz zusammen, so finden wir die Methode der physikalischen Forschung durch vier Stufen gegliedert, auf deren *erster* wir *beobachten*, auf deren *zweiter* wir *messen*, auf deren *dritter* wir die Messresultate *berechnen* und auf deren *letzter* wir dieselben zu *erklären* versuchen. Wir beginnen also mit der *Erfahrung*, schreiten durch einen *Inductionsschluss* zu einer *Hypothese* und bauen auf derselben durch *Deduction* eine *Theorie* auf, die wir wiederum durch die Erfahrung bestätigen.

Ausnahmsweise geht die Construction einer Theorie auf Grund einer Hypothese voraus und wird erst nachher durch die Erfahrung bestätigt oder verworfen. In den meisten Fällen wird auf Veranlassung einiger grundlegender Beobachtungen die Theorie geschaffen und dann durch nachfolgende Beobachtungen immer mehr befestigt.

Die Physik zeigt auf ihrem heutigen Standpunkte in ihren einzelnen Theilen alle Stufen der Entwickelung. Ein Theil der Erscheinungen befindet sich noch im Stadium qualitativer Beobachtung, andere sind bereits gemessen und nach empirischen Gesetzen geordnet, wieder andere sind bereits theoretisch erklärt. Auch fehlt es nicht an Theorien, welche neuerdings angegriffen wurden und auf dem Wege sind, durch neue ersetzt zu werden.

Den hohen Werth einer richtigen Methode lernen wir schätzen, wenn wir nur einen flüchtigen Blick auf die Geschichte der Wissenschaft werfen. Die rasche Entwickelung, deren sich in der neueren Zeit die Lehre vom Lichte, von der Wärme und von der Elektricität etc. erfreute, war nur möglich, weil sich bei dem Studium der Astronomie und Mechanik bereits die wahren Grundsätze der Naturforschung entwickelt hatten. *Kepler*, *Galiläi* und *Newton* haben nicht allein grosse astronomische und physikalische Wahrheiten entdeckt, sie haben den späteren Naturforschern auch den Weg gezeigt, welchen man verfolgen muss, um neue Entdeckungen zu machen.

5 **Die wahre Bedeutung der physikalischen Hypothesen und Theorien.** In Laienkreisen wird häufig unter einer Hypothese eine unbegründete Annahme verstanden und dieselbe demnach als in den exacten Wissenschaften unzulässig bezeichnet, indem man der Ansicht

huldigt, dass durch die Zulassung der Hypothesen das wissenschaftliche Gebäude unsicher und haltlos werden müsse.

Diese Ansicht beruht auf einem Missverständnisse der eigentlichen Bedeutung der Hypothese und auf einem Irrthume über die Ansprüche, welche der Physiker in Bezug auf die Giltigkeit seiner Theorien erhebt.

Indem der Physiker eine Hypothese und eine darauf gegründete Theorie aufstellt, ist er weit davon entfernt, dieselbe für eine unumstössliche Wahrheit zu erklären; er nimmt für dieselbe vielmehr nur eine bedingungsweise Giltigkeit in Anspruch. Er sagt nämlich nie: „so ist es“, sondern nur: „so kann es nach den bisher bekannten Erfahrungen sein“. Sowie neue widersprechende Erfahrungen gemacht werden, ist er sofort bereit, seine Hypothese zu modificiren oder aufzugeben und eine neue Theorie auszuarbeiten. Indem also der Physiker von vornherein darauf verzichtet, die volle, absolute Wahrheit über die Natur der Dinge aussprechen zu wollen, erwirbt er andererseits eine gewisse Art von Unfehlbarkeit. Damit ist natürlich nicht gemeint, dass er nicht auch falsch beobachten oder in der Berechnung einen Fehler begehen könne, sondern damit soll nur gemeint sein, dass er sich durch die bedingungsweise Formulirung seiner Schlüsse davor schützt, dieselben als Unwahrheit zurücknehmen zu müssen.

Kehren wir, um dies näher zu erläutern, zu unserem Beispiele zurück. Die Messungen der Fallräume und der zugehörigen Fallzeiten haben solche Werthe ergeben, welche der empirischen Gleichung:

$$s = at + bt^2$$

bis auf die Beobachtungsfehler genau entsprechen. Um dieses empirische Gesetz zu erklären, nimmt der Physiker die Hypothese an, dass eine constante, d. h. immer gleich stark wirkende Kraft den fallenden Körper gegen den Mittelpunkt der Erde ziehe. Diese Annahme ist geeignet, die beobachteten Erscheinungen theoretisch zu erklären. Der Physiker sagt nun: „Nach den mir vorliegenden Beobachtungen werden die fallenden Körper von der Erde mit constanter Kraft angezogen“.

Wenn nun später sich herausstellt, dass dies nicht genau richtig ist, dass vielmehr diese Anziehungskraft mit der Höhe über der Erdoberfläche abnimmt, so wird dadurch der frühere Ausspruch gar nicht zu einem unrichtigen, denn „nach den damals vorliegenden Beobachtungen“ war die Kraft wirklich als eine constante anzunehmen.

Hierauf könnte nun der Laie einwenden, dass Theorien, denen die Physiker selbst nur eine ephemere Giltigkeit zusprechen, keinen wissenschaftlichen Werth hätten und keinen erheblichen Nutzen gewähren könnten, und dass es Aufgabe einer Wissenschaft sei, nicht nach Möglichkeiten, sondern nach Wahrheiten zu suchen.

Darauf wäre zunächst zu erwidern, dass der Physiker nicht nach etwas Anderem suchen kann und soll, als was überhaupt zu finden ist. Nun wird es aber nie gelingen, die Natur zu erkennen so, wie sie ist, sondern

so, wie sie uns erscheint, wie sie sich unserem Sinne, unserer Beobachtung darstellt. So lange also noch die Möglichkeit besteht, genauer oder richtiger als bisher zu beobachten, wird auch die andere Möglichkeit fortbestehen, die Natur genauer oder richtiger zu erkennen, als wir sie bisher erkannt haben. Ebenso lange werden wir also gezwungen sein, allen unseren Schlüssen und Theorien eine nur bedingungsweise Giltigkeit zuzugestehen.

Ist es überhaupt möglich, der wahren Erkenntniss der Natur näher zu rücken, dann ist auch sichere Aussicht, dass wir mit jeder Vervollkommnung der Beobachtungsmethoden, mit jeder den genaueren Messungen angepassten neuen Hypothese und Theorie uns diesem Ziele nähern.

Aber auch ganz abgesehen von dieser Frage ist der Nutzen der Hypothesen und der darauf gebauten Theorien in praktischer Beziehung ein ganz unzweifelhafter. Die Hypothese ist es ja, welche uns in den Stand setzt, an Stelle einer umfangreichen Tabelle eine einfache Gleichung zu setzen. Wäre ihre Leistung auch gar keine andere als die, dass sie uns in Stand setzt, eine ganze Gruppe von Erfahrungen im kleinsten Formate aufzubewahren, eine ganze Menge von Erscheinungen aus einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte überschauen zu können, so wäre ihr Nutzen, ja ihre Unentbehrlichkeit schon gesichert.

Es hat dies zur Folge, dass wir es unter Umständen zweckmässig finden, sogar eine solche Hypothese, welche wir entschieden für falsch erklären müssen, weil sie mit einem Theile der beobachteten Thatsachen im Widerspruche steht, dennoch einstweilen in Gebrauch zu behalten, um durch sie die nicht mit ihr im Widerspruche befindlichen Beobachtungen vorläufig in Ordnung und Zusammenhang zu erhalten. Solche theoretisch längst aufgegebene, aber aus Nützlichkeitsgründen noch beibehaltene Hypothesen finden sich in fast allen Theilen der Physik; nach ihrem gänzlichen Fallenlassen bleibt dann oft noch die derselben entstammende Nomenclatur erhalten. So z. B. sprechen wir heute noch vom Abfliessen der Wärme, obwohl wir längst die Hypothese, dass die Wärme eine Flüssigkeit sei, aufgegeben haben.

Wir wollen endlich auch darauf hinweisen, dass viele Hypothesen und darauf gebaute Theorien durch fort und fort angehäufte Bestätigungen nach und nach einen Grad von Wahrscheinlichkeit erlangt haben, der sich von der Gewissheit, so weit eine solche in naturwissenschaftlichen Dingen überhaupt zugestanden werden kann, nicht mehr zu unterscheiden vermag.

Seit vielen tausend Jahren folgt jedesmal auf die Nacht ein Tag, auf den Winter ein Sommer.

Wird das auch das nächste Mal geschehen?

Niemand zweifelt daran; und doch ist es nur ein Inductionsschluss, wenn wir dies voraussetzen, gegründet auf die Hypothese, dass das Eintreten des Tages und des Sommers eine Ursache habe und

dass dieselbe Ursache fortdauern und den nächsten Tag und den nächsten Sommer hervorbringen werde.

Wenn man uns sagt, das Eintreten des Tages und des Sommers sei gewiss, weil es aus der Rotation der Erde und ihrer Bewegung um die Sonne nothwendig folgen müsse, so erwidern wir, dass eben die Annahme der Rotation der Erde und ihrer jährlichen Bewegung die Hypothese ist, die wir auf Grund des Erscheinens der Tages- und Jahreszeiten uns erdacht und auf welche wir die Theorie dieser Erscheinungen gegründet haben. Was haben wir für Stützpunkte für diese Hypothese? Offenbar keine anderen als den Umstand, dass keine der bisherigen Beobachtungen ihr widerspricht und dass die auf sie gegründete Theorie die einfachste von allen möglichen ist.

Wir sehen also, dass die Stützpunkte dieser Hypothese, an deren Wahrheit und Nützlichkeit Niemand mehr zweifelt, keiner anderen Art sind, als die irgend einer anderen physikalischen Hypothese. Der Unterschied besteht nur in der Anzahl der dieselbe stützenden Beobachtungen, ist also nur ein gradueller. Somit sind wir berechtigt, für die Hypothesen überhaupt ihren hohen Werth, ja ihre Unentbehrlichkeit als unzweifelhaft zu beanspruchen.

In §. 4 haben wir in der physikalischen Methode vier auf einander folgende Stufen unterschieden. Die beiden ersten dieser Stufen beschäftigen vorzugsweise die Sinne, sie erfordern vor Allem Ausdauer und Geschicklichkeit. Die geistige, wir möchten sagen, die schöpferische Thätigkeit des Forschers, zu welcher seine Einbildungskraft und sein Genie im vollen Maasse in Anspruch genommen werden, beginnt erst auf der dritten Stufe mit der Aufstellung der geeignetsten Hypothese und setzt sich in der vierten Stufe fort, wo die aufgebaute Theorie sein Werk krönen muss. Man würde demnach den Physiker gerade seiner schönsten Aufgabe entziehen, wollte man ihm die Hypothesen und Theorien verbieten und würde die Physik zu einer Aufbewahrungsstätte einer Unmasse von Einzelerfahrungen erniedrigen, denen wegen Mangels an Uebersicht, Ordnung und Zusammenhang auch fast jeder Nutzen abgesprochen werden müsste.

Nutzen des physikalischen Studiums. Im Gegensatze zu 6
den Thieren, welche unmittelbar mit Allem ausgerüstet sind, was sie zu einer gedeihlichen Entwickelung bedürfen, würde der Mensch nur ein kümmerliches Dasein fristen können, wenn er lediglich auf seine körperlichen Fähigkeiten angewiesen wäre. Ohne natürliche Bekleidung, ohne natürliche Waffen würde er die zu seinem Unterhalte nöthige Nahrung nur in wenigen besonders glücklichen Landstrichen jederzeit fertig bereitet vorfinden. Von Hunger gepeinigt, den Unbilden der Witterung schutzlos preisgegeben, von reissenden Thieren verfolgt, wäre der Mensch ohne Zweifel längst im Kampfe ums Dasein zu Grunde gegangen, wenn ihn nicht seine intellectuellen Fähigkeiten in den Stand gesetzt hätten,

der Natur abzugewinnen, was sie ihm nicht freiwillig bietet und dieselbe bis zu einem gewissen Grade zu beherrschen.

So ist denn der Mensch schon wegen seiner physischen Existenz darauf angewiesen, die Natur und ihre Kräfte kennen zu lernen, um dieselben für seine materiellen Zwecke verwerthen zu können; er ist gewissermaassen zum Naturforscher geboren.

Was den materiellen Nutzen der Physik und ihres Studiums betrifft, so erschiene es uns beinahe kleinlich, darüber viele Worte zu machen. Angesichts unserer Dampfmaschinen und Eisenbahnen, unserer Blitzableiter und Telegraphen, unserer Photographie und Telephonie, angesichts all der zahlreichen anderen physikalischen Entdeckungen und Erfindungen sind wir einer weiteren Ausführung dieses Punktes wohl überhoben.

Auch brauchen wir wohl kaum eingehender auseinanderzusetzen, dass das Studium der Physik die unentbehrliche Grundlage einer ganzen Reihe anderer Studien ist. Sämmtliche übrige Naturwissenschaften, die Medicin und ihre Zweige, insbesondere die Physiologie, sämmtliche technische Disciplinen, Landwirthschaft, Bergbaukunde, Nationalökonomie und so weiter, können der Physik als Vorbereitung und Hilfswissenschaft nicht mehr entbehren.

Aber auch in formeller Beziehung ist das Studium der Physik von der höchsten Wichtigkeit. Unter allen verwandten Wissenschaften ist sie nebst der Astronomie in theoretischer Beziehung am ausgebildetsten; sie ist also vorzugsweise geeignet, uns in den Geist der inductiven Methode einzuführen, welche sich ja vorzugsweise an physikalischen Problemen entwickelt hat. Die Physik lehrt uns klar den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung auffassen; in verwickelten Phänomenen die bedingenden und wesentlichen Umstände von den zufälligen zu unterscheiden, sie lehrt uns vorurtheilsfrei zu beobachten und die Thatsachen von der subjectiven Meinung getrennt zu halten. Das Studium der Physik ist daher als eine Schule des Geistes anzusehen, deren didaktische Bedeutung weit über den Werth ihres materiellen Inhalts hinausgeht.

7 **Eintheilung der Physik.** Die Physik wird meistens eingetheilt in folgende Hauptabschnitte:

I. Die Mechanik oder die Lehre von der Bewegung.
II. Die Akustik oder die Lehre vom Schalle.
III. Die Optik oder die Lehre vom Lichte.
IV. Die Lehre von der Wärme.
V. Die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität.

Diese Eintheilung ist nicht stichhaltig, denn sie ist nicht strenge systematisch. So ist z. B. auch der Schall auf einer Bewegung materieller Körper beruhend, weshalb denn auch von Vielen die Akustik mit der

Mechanik vereinigt wird. Aber auch die Erscheinungen der Wärme sind grossentheils auf Bewegungen der Körpertheile zurückgeführt worden, wären also ebenfalls der Mechanik angehörig; endlich finden wir auch in der Lehre vom Licht und der Elektricität mechanische Principien zur Anwendung gebracht. Es stellt sich also eigentlich heraus, dass nicht die Mechanik ein Theil der Physik, sondern umgekehrt die einzelnen physikalischen Disciplinen Theile oder Anwendungen der Mechanik sind. Diese selbst hat andererseits theils in ihrer mathematischen Ausbildung, theils in ihrer technischen Anwendung solche Fortschritte gemacht und einen solchen Umfang erreicht, dass sie als eine von der übrigen Physik getrennte Disciplin besonders gelehrt wird.

Der Versuch, die Physik nach der Beschaffenheit des Substrates, an welchem die Bewegungen vor sich gehen, einzutheilen, führt zur Gliederung in die Physik der Ponderabilien (der wägbaren Materie) und in die Physik der Imponderabilien (der nicht wägbaren Substrate). Zur ersteren wird dann Mechanik und Akustik, zur letzteren das Uebrige gerechnet. Allein auch diese Eintheilung ist nicht stichhaltig und scheint uns keine genügenden Vortheile vor der im Eingange aufgestellten zu gewähren.

Die letztere ist, wie sich beim näheren Ueberlegen ergiebt, eigentlich eine physiologische oder subjective Eintheilung, deren Eintheilungsprincip auf der Beachtung der Sinne beruht, auf welche die Erscheinungen einwirken.

Wir fassen also Alles, was vom Ohre wahrgenommen wird, in die Akustik zusammen, Alles, was vom Auge wahrgenommen wird, in die Optik. Die greifbaren Vorgänge bilden den ersten Abschnitt; diejenigen, welche wir mit dem vom mechanischen Tastsinn wesentlich verschiedenen Wärmesinne wahrnehmen, bilden den Inhalt der Wärmelehre. Es bleiben dann noch die magnetischen und elektrischen Erscheinungen übrig, denen kein specifisches Sinnesorgan entspricht, welche wir daher in eine letzte Abtheilung zusammenfassen.

Insofern die Physik von den Sinneswahrnehmungen ausgeht, ist diese Eintheilung als die ursprünglichste von einer gewissen historischen Berechtigung.

Sollte man auch für den Geruchs- und Geschmackssinn die zugehörigen Erscheinungen aufsuchen, so müsste man dieselben in den ursprünglichsten chemischen Beobachtungen erblicken, zu welchen die Unterscheidung gasförmiger Körper durch die Nase, die Unterscheidung von Säuren, Alkalien, Salzen, Bitterstoffen durch den Geschmack gezählt werden müssen.

Die consequent strenge Durchführbarkeit dieser physikalischen Eintheilung der Physik hat natürlicherweise von dem Augenblicke an aufgehört, wo der Mensch begonnen hat, die Wahrnehmungen mehrerer Sinne auf ein und dasselbe Object zu beziehen.

Das Vibriren einer angeschlagenen Stimmgabel z. B. wird von uns

gehört, gesehen und greifbar gefühlt. Das Experiment gehört daher demnach zugleich in die Akustik, in die Optik und in die Mechanik.

Drehen wir die Scheibe der Elektrisirmaschine, so sehen wir den Funken, hören den Knall derselben, fühlen die mechanische Erschütterung, beobachten seine Wirkung und riechen das dabei entwickelte Ozon, selbst der Geschmackssinn wird durch die chemischen Wirkungen des elektrischen Stromes erregt. Man sieht also, dass sich die elektrischen Erscheinungen wegen der Mannigfaltigkeit der durch sie hervorgerufenen Sinneseindrücke am wenigsten der Eintheilung nach den Sinnen fügen.

Aus dem Gesagten geht zur Genüge hervor, dass sich die am Eingange aufgestellte Eintheilung nach keiner Richtung als streng systematische hinstellen lasse. Wenn wir sie trotzdem beibehalten, so geschieht es, weil sie uns als die natürlichste und praktisch bewährteste erscheint.

8 **Physikalische Grundbegriffe.** Einen Begriff definiren heisst denselben auf einfachere bekannte Begriffe zurückführen. Jede Definition setzt also das Vorhandensein von einfacheren Begriffen voraus, deren Bekanntschaft selbst wieder durch weitere Definitionen vermittelt werden muss. Daraus ergiebt sich, dass das immer weiter fortgesetzte Definiren oder Zurückführen auf noch einfachere Begriffe kein Ende finden könnte, wenn man nicht endlich bei gewissen Grundbegriffen stehen bleiben würde; sei es, weil man keine weitere Zerlegung in noch einfachere Begriffe aufzufinden vermag, oder dass man diese weitere Verfolgung aus anderen Gründen aufzugeben für zweckmässig findet.

Auf solche Grundbegriffe werden wir auch in der Physik geführt. Es sind zunächst folgende: Raum, Zeit, Bewegung und Materie.

Raum. Wir können uns die Körper nicht anders als in einem Raume vorstellen, welcher drei Dimensionen (Erstreckungen) nach Länge, Breite und Höhe hat. Ob diesem Raume wirkliche Realität zukomme, oder ob er nur eine beschränkte Erkennungsweise unseres Geistes ist, ob der Raum auch mit mehr als drei Dimensionen oder von einer ganz abweichenden Beschaffenheit gedacht werden könne, das sind lauter speculative Fragen, welche mit der Physik nichts zu thun haben.

Durch Abstraction gelangen wir zur Vorstellung von Raumgebilden nur zweier oder nur einer Dimension. Die Körper selbst haben drei Dimensionen, die Grenzen der Körper, nämlich die Flächen, haben deren zwei, die Grenze der Fläche, die Linie, hat nur eine Dimension, die Grenze der Linie, der Punkt, hat keine Dimension.

Die Lage eines Punktes im Raume kann vollständig bestimmt werden, wenn wenigstens drei andere Punkte bereits gegeben sind, deren Abstände von dem zu bestimmenden Punkte dann dessen Lage definiren. Meistens bestimmt man die Lage eines Punktes im Raume durch

dessen senkrechte Abstände (Coordinaten) von drei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen (Coordinatensystem des *Cartesius*).

Man muss sich gegenwärtig halten, dass jede solche Ortsbestimmung nur eine relative ist, nämlich nur Bezug hat auf die Nachbarpunkte oder die gewählten Coordinatenachsen. Eine absolute Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume ist unmöglich, weil sich kein Theil des Raumes von einem andern Theile irgendwie unterscheidet.

Zeit. Der zweite uns unentbehrliche Grundbegriff ist die *Zeit*; sie ist ebenso schwer definirbar als der Raum. Wir können nicht anders als uns vorstellen, dass die Veränderungen der Körper und alle in uns durch sie hervorgerufenen Sinneswahrnehmungen durch ein dazwischenliegendes, nach nur einer Dimension sich erstreckendes Etwas von einander getrennt seien, was wir eben die Zeit nennen. Sie erstreckt sich in der einen Richtung von Vergangenheit zur Zukunft.

Wie es keine absolute Raumbestimmung giebt, so giebt es keine absolute Zeitbestimmung, denn so wie die Orte im Raume nur durch die daselbst anwesenden Körper, auf die wir uns beziehen, angebbar sind, so sind Zeitpunkte nur angebbar in Bezug auf Ereignisse, welche gleichzeitig erfolgten.

Auf die Vergleichung von Zeiträumen werden wir an späterer Stelle zurückkommen.

Bewegung. Wenn ein Punkt innerhalb einer Zeitdauer seine Lage im Raume continuirlich ändert, so sagt man, er sei in *Bewegung*. Aendert er seine Lage nicht, so sagt man, er sei in *Ruhe*.

Man hat zu unterscheiden zwischen *absoluter* Bewegung (absoluter Ruhe) und *relativer* Bewegung (relativer Ruhe). Eine einfache Ueberlegung lehrt uns, dass wir nur die relative Bewegung oder Ruhe eines Punktes zu erkennen im Stande sind. Gäbe es nur einen Punkt im sonst absolut leeren Raume, so könnte man eine Bewegung desselben weder erkennen, noch hätte es überhaupt einen Sinn, von einer solchen zu sprechen. Ebensowenig könnte man behaupten, dass er in Ruhe sei, weil der Begriff Ruhe fehlt, wo es keinen Gegensatz zu demselben geben kann.

Das Gesagte gilt auch von der *fortschreitenden* Bewegung eines *Systems* von Punkten oder eines Körpers. So oft wir daher in der Physik von fortschreitender Bewegung sprechen, meinen wir immer nur relative Bewegung in Bezug auf andere Körper. Wenn eine grosse Eisscholle mit einer gewissen Geschwindigkeit einen Strom abwärts getragen wird und ein Mensch auf dieser Scholle mit derselben Geschwindigkeit stromaufwärts geht, so bleibt er über demselben Punkte des Strombettes. Er ist in relativer *Bewegung* in Bezug auf die Eisscholle und zugleich in relativer *Ruhe* in Bezug auf das Strombett oder die Ufer.

Dieses Beispiel lässt zugleich einsehen, dass die relativ fortschreitende Bewegung stets gegenseitig ist. Man kann ebenso gut sagen: „der

Mensch geht über die Scholle“ als: „die Scholle bewegt sich unter dem Menschen hindurch. Sie bewegen sich eben beide gegen einander. In absoluter Ruhe sind weder Scholle noch Mensch, denn sie nehmen beide an der Rotation der Erde um ihre Achse und ihrer Bewegung um die Sonne Theil.

Ebenso verhält es sich in allen ähnlichen Fällen. Wenn wir daher von zwei Körpern, deren Abstand sich vergrössert oder verkleinert, sagen, der eine sei in Ruhe, der andere bewege sich zu oder von dem erstern, so ist dies zunächst rein willkürlich, da wir ebenso gut dem erstern die Bewegung und dem zweiten die Ruhe oder auch beiden Körpern zugleich eine entfernende oder annähernde Bewegung zuschreiben könnten. Sehr häufig ist eine grosse Anzahl von Körpern oder Körpertheilen unter sich in relativer Ruhe, daneben eine weit geringere Zahl von Körpern gegen die ersteren in relativer Bewegung. In diesem Falle betrachten wir die Majorität als ruhend, die Minorität als in Bewegung begriffen. Wir betrachten also z. B. die Erdoberfläche ruhend gegenüber dem Schiffe, das sich bewegt, aber gleichzeitig den Schiffsboden ruhend gegenüber einer Tonne, welche darauf gerollt wird, und die Oberfläche der Tonne ruhend gegenüber einer Spinne, die darüber kriecht. Das Alles ist aber nur conventionell.

Bei oberflächlicher Ueberlegung möchte man meinen, dass dieselbe Unbestimmtheit, wie bei der fortschreitenden Bewegung auch bei der rotirenden Bewegung eines Körpers gelten müsse. Merkwürdigerweise ist dies nicht ebenso der Fall; die Drehbewegung eines Körpers im Raume ist, wie Newton zuerst gezeigt, in absolutem Sinne durch physikalische Mittel bestimmbar. Rein geometrisch betrachtet wäre es ganz gleich, ob die Erde rotirt und die Sonne steht, oder die Erde feststeht und die Sonne sich um die Erde bewegt. Allein im ersten Falle entsteht Fliehkraft und Abplattung, im zweiten Falle nicht. Denken wir uns, es würde der ganze Weltraum entleert und nur die Erdkugel bliebe allein zurück; es gäbe dann keinen Fixsternhimmel, an dem wir die Rotation der Erde bemerken könnten. Dennoch könnten wir die Rotation der Erde durch physikalische Mittel nachweisen, wie später gezeigt werden wird. Durch die Rotationsachse eines rotirenden Körpers ist also im Raume auch eine Richtung fixirbar *).

Vergleichung von Raum- und Zeitgrössen. Die Gleichheit zweier Raumdistanzen oder Längen wird bekanntlich dadurch constatirt, dass man einen Körper (Maassstab) von gleicher Länge wie die erste Raumdistanz an die zweite zu vergleichende anlegt. Diese einfache Methode setzt nur voraus, dass der Raum die Eigenschaft habe, dass ein und derselbe Körper seine Dimensionen nicht ändert, wenn sein Ort im Raume geändert wird.

*) Man vergleiche dagegen die Ansichten von E. Mach, Seite 236 seines Werkes: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung.“

Schwieriger ist es, die Gleichheit zweier Zeiträume zu constatiren. Dass die Umdrehungszeit der Erde (der Sterntag), welche wir als Zeitmaass benutzen, constant sei, ist eben erst zu erweisen*). Auf diese, sowie auf unsere Uhren, die wir nach dem Sterntage richten, dürfen wir uns bei einer principiellen Behandlung der Frage nicht stützen.

Manche Physiker haben versucht, die Zeitvergleichung auf die später zu betrachtende gleichförmige Bewegung zu stützen, indem sie definirten: Gleiche Zeiträume sind jene, welche ein gleichförmig bewegter Körper braucht, um gleiche Wege zurückzulegen. Allein die gleichförmige Bewegung wird dann selbst wieder definirt als jene, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden. Dieser *circulus vitiosus* kann vermieden werden, wenn man verfährt, wie es zuerst D'Alembert angedeutet und dann Poisson näher ausgeführt hat**).

Man denkt sich, dass völlig identische Körper nach einander unter ganz genau gleichen Umständen nach irgend einem Gesetze eine Bewegung ausführen. Mag dieselbe welcher Art immer sein, sie muss gleiche Zeiträume benöthigen, falls wirklich alle Bedingungen beide Male gleich sind.

Wenn wir also z. B. ein und dasselbe Pendel zu zwei verschiedenen Malen ganz gleichweit aus der Ruhelage entfernen und eine Schwingung ausführen lassen, so wird die Zeitdauer dieser Schwingung beide Male gleich gross sein. Diese Methode, welche jener der Anlegung eines Maassstabes bei Längenvergleichungen analog ist, setzt also nur voraus, dass der Verlauf physikalischer Vorgänge von der absoluten Zeit, in der die Vorgänge stattfinden, unabhängig sei, eine Bedingung ebenfalls analog derjenigen, welche bei der Vergleichung von Raumgrössen in Bezug auf den absoluten Raum vorausgesetzt wird.

Alle Vergleichungen und Messungen in Raum und Zeit, mithin alle physikalischen Messungen überhaupt beruhen demnach auf dem obersten Grundsatze:

„Dieselben Ursachen bringen überall und immer dieselben Wirkungen hervor."

Materie. Die physikalischen Körper haben zum Unterschiede von den geometrischen Körpern nicht allein eine Form, sondern auch einen Inhalt. Dieser Inhalt ist eben die Materie. Dieselbe ist die Trägerin der Eigenschaften der Körper und die Ursache der Sinneseindrücke, die wir von den Körpern empfangen.

Wir beobachten, dass verschiedene Körper bei gleicher Form ganz abweichende Eigenschaften besitzen können, woraus wir schliessen müssen, dass es ihr Inhalt, also ihre Materie ist, welche die verschiedenen Eigenschaften bedingt. Wir erfahren hierdurch, dass es verschieden-

*) Thatsächlich nimmt die Umdrehungszeit der Erde pro Jahr um ungefähr ein Milliontelsecunde zu, und zwar in Folge der hemmenden Reibung durch Ebbe und Fluth.

**) Siehe Streintz „Die physik. Grundlagen der Mechanik", S. 86. D'Alembert's Traité de Dynamique. II. Édit. 1758, pag. 13.

artige Materien giebt. Gleichartige Materie nennen wir einen Stoff. Es ist die Aufgabe der Chemie, die verschiedenen Stoffe kennen zu lehren, zu classificiren und ihre Veränderungen zu studiren. Durch die Chemie erfahren wir, dass sich viele Stoffe in einfachere zerlegen und aus solchen zusammensetzen lassen. Diejenigen Stoffe, welche sich nicht weiter zerlegen lassen, heisst man Grundstoffe oder Elemente.

Die wichtigste Eigenschaft der Materie ist ihre Unzerstörbarkeit. Es giebt kein Mittel, um eine einmal vorhandene Menge von Materie zu vermehren, zu vermindern oder zu vernichten.

Andere Eigenschaften derselben werden an späterer Stelle besprochen werden.

9 **Mechanische und chemische Theilbarkeit; Moleküle, Atome.** Die Erfahrung lehrt, dass alle Körper durch mechanische Mittel, als: Spalten, Zerstossen, Zerreiben, Ausziehen etc. sich in kleinere Theile zerlegen lassen. Ausserdem finden wir in der Natur Körperchen von ausserordentlich geringer Grösse vor.

Wie weit die mechanische Theilbarkeit betrieben werden könne, mag aus folgenden Beispielen hervorgehen:

Spröde Körper, z. B. Glasstücke, lassen sich in einer Achatschale zunächst so weit reiben, dass weder der Finger die einzelnen Theilchen mehr fühlt, noch das Auge sie zu unterscheiden vermag. Dieselben haben dann weniger als 0,01 mm Durchmesser. Dennoch ist man im Stande, zwischen den Zähnen die einzelnen Körnchen zu fühlen. Durch fortgesetztes Zerreiben und Schlämmen kann man es dahin bringen, dass auch zwischen den Zähnen keine Körnchen wahrgenommen werden. Das Mikroskop zeigt dann aber immer noch die einzelnen Körnchen, ja mittelst geeigneter Apparate, Mikrometer genannt, lassen sich noch Körnchen messen, deren Durchmesser nur $^1/_{500}$ der Dicke eines Menschenhaares beträgt.

Der vor Kurzem verstorbene Optiker Nobert hat auf Glas mittelst seiner Theilmaschine mit einer Diamantspitze 2000 Furchen auf 1 mm Breite gezogen.

In der Technik werden Fäden von Kupfer, Eisen und Silber angewendet, welche ebenso fein sind wie ein Haar; ja Wollaston hat Platindraht dargestellt, welcher nur $^1/_{1200}$ mm dick war. Man müsste 140 solcher Drähte zusammenlegen, um nur die Dicke eines einzelnen Coconfadens zu erhalten, und obgleich das Platin der schwerste aller bekannten Stoffe ist, so würde ein solcher Draht von 100 m Länge kaum 0,07 g wiegen. Um einen solchen Draht zu erhalten, welcher wohl das Feinste sein möchte, was man herzustellen vermag, nahm Wollaston einen Platindraht, dessen Durchmesser 0,25 mm betrug, befestigte ihn in der Achse einer cylindrischen Form von 5 mm Durchmesser, goss diese Form mit geschmolzenem Silber aus und erhielt so einen Cylinder von Silber, dessen Achse aus Platin bestand. Diesen Cylinder liess er nun

durch einen Drahtzug gehen; beide Metalle verlängerten sich dabei gleichmässig. Nachdem nun der zusammengesetzte Faden bis zur äusserst möglichen Feinheit ausgezogen worden war, kochte er ihn in Salpetersäure, welche das Silber auflöste und den Kern von Platin blosslegte.

Beispiele starker Vertheilung geben insbesondere auch die Farb- und Riechstoffe. Ein Centigramm Carmin färbt einen Liter Wasser merklich roth, ebenso ein Centigramm Fuchsin eine noch grössere Menge Alkohol. Aus solchen Versuchen ist berechnet worden, dass sich ein Cubikcentimeter Indigofarbstoff in 30 Billionen sichtbare Theile vertheilen lasse. Noch weiter geht die Theilbarkeit der Riechstoffe, wie z. B. Kampher, Moschus, Asa foetida. Nach Versuchen von Kreil kann ein Cubikcentimeter des letzteren Riechstoffes 1200 Billionen wahrnehmbare Theilchen liefern.

Es ist bekannt, dass viele Thiere einen sehr entwickelten Geruchssinn haben. Die Gemse wittert den Jäger auf hundert Schritte Entfernung, wenn der Luftzug günstig ist. Wie ausserordentlich klein müssen die Theilchen sein, welche von der Körperoberfläche des Jägers bis ins Geruchsorgan des Thieres getragen werden! Auf der Fährte der Thiere und der Menschen bleiben ebenfalls verschwindend kleine Körpermengen zurück, welche durch ihre Verflüchtigung dem Hunde ermöglichen, die Spuren durch den Geruchssinn zu verfolgen. Und doch kann es nur ein kleiner Bruchtheil der auf der Spur zurückgebliebenen materiellen Theilchen sein, welche auf die Geruchsorgane des Hundes wirken.

Es drängt sich nun die Frage auf nach der Grenze der Theilbarkeit. Theoretisch kann es offenbar keine Grenze derselben geben, denn wollte man dieselbe nach Erreichung einer noch so kleinen Dimension annehmen, so könnte die letztere immer wieder halbirt gedacht werden. Die Theilchen werden immer noch Körper bleiben und deshalb eine Länge, Breite und Höhe haben, welche eine weitere Theilung in der Vorstellung zulassen müssen.

Ob aber in der Praxis die Theilbarkeit ohne Grenze sein könne, und wo die Grenze sich befindet, ist eine auf empirische Weise nicht zu lösende Frage, bei welcher auch durch Speculation kaum etwas für die Physik Nützliches herauskommen dürfte.

Die mechanische Theilung kann, so weit man sie fortsetzen wollte, nie dahin führen, einen chemisch zusammengesetzten Stoff in seine chemischen Bestandtheile zu zerlegen.

Zinnober z. B. besteht aus Quecksilber und Schwefel. Es wird nie gelingen, durch mechanisches Theilen den Zinnober in Quecksilber und Schwefel zu spalten.

Die chemische Theilbarkeit ist daher von der mechanischen strenge zu unterscheiden. Die chemische Theilung, auch Zersetzung genannt, wird entweder durch sogenannte Wahlverwandtschaft oder durch Wärme oder Elektricität herbeigeführt. So z. B. kann der Zinnober durch Eisen zerlegt werden, indem das letztere sich mit dem Schwefel

verbindet und das Quecksilber in Freiheit setzt. Quecksilberoxyd zerfällt durch blosses Erhitzen in Sauerstoff und Quecksilber. In beiden Fällen erhält man das Quecksilber allerdings zuletzt als zusammenhängende Masse. Offenbar ist dieselbe aber erst durch Zusammenfliessen aller der ausserordentlich kleinen Portionen entstanden, welche nach und nach aus der Verbindung mit dem Schwefel oder dem Sauerstoff frei geworden sind. Ebenso müssen wir uns vorstellen, dass das entweichende Sauerstoffgas aus den vielen kleinen Sauerstofftheilen sich ansammele, welche aus den kleinsten Theilen des Zinnobers einzeln frei werden.

Leitet man Wasserstoffgas über erhitztes Eisenoxyd, so trennt sich der Sauerstoff vom Eisen und verbindet sich mit dem Wasserstoff zu Wasserdampf, welcher durch den Ueberschuss des zugeführten Wasserstoffgases fortgeführt wird. Da das zurückbleibende Eisen bei dieser Temperatur nicht zusammenschmilzt, so bleibt es in dem Zustande zurück, wie es vom weggehenden Sauerstoff hinterlassen wird. Wir dürfen uns vorstellen, dass zwischen je zwei Eisentheilchen, wo früher ein Sauerstofftheilchen lagerte, eine Lücke bleibe. Das äusserst zarte Pulver von Eisen, welches man so erhält, ist deshalb sehr geeignet, den Sauerstoff wieder aufzunehmen, weil jedes seiner Theilchen demselben sofort zugänglich ist. Bringt man daher solches reducirtes Eisen mit Luft oder Sauerstoff in Berührung, so oxydirt es sich sofort unter lebhafter Glüherscheinung. Ein massives Stück Eisen zeigt diese Erscheinung nicht, es kann sich nur an der Oberfläche oxydiren und die dabei entwickelte Wärme vertheilt sich so rasch auf die benachbarten Massen des Eisens, dass sie keine merkbare Temperaturerhöhung hervorzubringen im Stande ist.

Diese und andere Erfahrungen der Chemiker haben dieselben veranlasst, die sogenannte atomistische Theorie aufzustellen. Derselben liegt die Hypothese zu Grunde, dass in den zusammengesetzten Stoffen gewisse sehr kleine Theile der einzelnen Stoffe an einander gelagert seien. Diese kleinsten Theile werden Atome genannt. Je eine Gruppe von Atomen, welche mit einander verbunden als kleinste Menge des zusammengesetzten Stoffes für sich bestehen kann, heisst eine Molekel oder ein Molekül.

Die Kenntnisse über die Moleküle sind insbesondere durch das Studium des gasförmigen Zustandes gefördert worden.

Denken wir uns einen Tropfen Wasser in Dampf verwandelt; dabei wird sein Volum um mehr als das Hundertfache vergrössert. Die kleinsten Theilchen des Wassers müssen daher entweder ebenfalls ihr Volum in diesem Verhältnisse vergrössern, oder sie müssen sich entsprechend weiter von einander entfernen, so dass im Wasserdampf die einzelnen Theilchen durch grosse Zwischenräume von einander getrennt sind. Die letztere Annahme hat nun viel mehr Wahrscheinlichkeit für sich, was wir an dieser Stelle nicht näher nachweisen können.

Die so von einander getrennt vorhandenen Wassertheilchen, welche

die kleinsten Wassermengen sind, die im freien Zustande vorkommen können, heissen wir Wassermoleküle. Die Chemie lehrt dennoch, dass jedes dieser Moleküle aus zwei Wasserstoffatomen und einem Sauerstoffatom zusammengesetzt sei. Sie lehrt ferner noch, dass (ausser beim Quecksilber und Kadmium) die Moleküle aller Stoffe aus mindestens zwei Atomen bestehen; die Moleküle der sogenannten Grundstoffe bestehen dann aus gleichen Atomen, z. B. ein Molekül Wasserstoff aus zwei Atomen Wasserstoff.

Da die festen und tropfbar flüssigen Körper sich beim Abkühlen zusammenziehen, so müsste man entweder ein sich Verkleinern der Atome oder ein gegenseitiges Durchdringen derselben annehmen, wenn man nicht auch hier das Vorhandensein von Zwischenräumen voraussetzen würde, deren Existenz übrigens auch durch andere Umstände unterstützt wird.

Unsere Vorstellung von der *Constitution der Materie* ist also, wie aus dem Gesagten hervorgeht, die, dass wir uns dieselbe durchaus *nicht als eine continuirliche*, den ganzen Raum durchaus homogen ausfüllende vorstellen; wir denken uns dieselbe vielmehr als aus *discreten* Theilchen mit Zwischenräumen bestehend.

Ob diese letztere Hypothese, welche bis heute allen chemischen und vielen physikalischen Erscheinungen in befriedigendster Weise sich anschmiegt, immer stichhaltig sich erweisen werde, ist noch zweifelhaft. Wir müssen bemerken, dass sehr beachtenswerthe Versuche vorliegen, diese Hypothese durch eine andere Annahme über die Constitution der Materie zu ersetzen.

Es giebt ferner eine grosse Gruppe von Erscheinungen, welche in der Lehre vom Licht und von der strahlenden Wärme behandelt werden, für welche wir noch ein eigenes von der gewöhnlichen (wägbaren) Materie verschiedenes materielles Substrat, den *Aether*, annehmen müssen, von dem es noch unentschieden ist, ob wir in ihm nur einen ausserordentlich vertheilten oder verdünnten Zustand der wägbaren Materie oder ein durchaus und wesentlich verschiedenes Medium zu erblicken haben.

Atomgewichte, Gesetz der multiplen Proportionen. 10

Wir haben im vorigen Paragraphen erwähnt, dass es den Chemikern gelungen sei, durch fortgesetzte chemische Theilung oder Scheidung viele Stoffe in einfachere zu zerlegen. Als nicht weiter zerlegbar haben sich bis jetzt die in folgender Tabelle*) aufgeführten 72 Grundstoffe oder Elemente auffinden lassen.

Die Bedeutung der unter der Aufschrift „Atomgewicht" aufgeführten Zahlen soll nun erklärt werden.

*) L. Meyer und K. Seubert, „Die Atomgewichte der Elemente aus den Originalzahlen neu berechnet". Leipzig 1883, S. 244.

Tabelle

der chemischen Grundstoffe und deren Atomgewichte nach
L. Meyer und K. Seubert.

Name des Grundstoffs	Chemisches Zeichen	Atomgewicht H = 1	Atomgewicht O = 1	Name des Grundstoffs	Chemisches Zeichen	Atomgewicht H = 1	Atomgewicht O = 1
Aluminium .	Al [2])	27,04	1,694	Niobium . .	Nb	93,7	5,87
Antimon . .	Sb	119,6	7,494	Norwegium	Ng	?	?
Arsen . . .	As [2])	74,9	4,693	Osmium . .	Os	195	12,2
Barium . .	Ba [2])	136,86	8,575	Palladium .	Pd [3])	106,2	6,66
Beryllium . .	Be [2])	9,08	0,569	Phosphor . .	P [1])	30,96	1,940
Blei	Pb [1])	206,39	12,932	Platin . . .	Pt [1])	194,3	12,177
Bor	B [1])	10,9	0,683	Quecksilber	Hg [2])	199,8	12,52
Brom	Br *)	79,76	4,997	Rhodium . .	Rh [3])	104,1	6,52
Cäsium . .	Cs [2])	132,7	8,315	Rubidium .	Rb [1])	85,2	5,34
Calcium . .	Ca [1])	39,91	2,501	Ruthenium .	Ru [3])	103,5	6,49
Cer	Ce	141,2	8,847	Sauerstoff .	O *)	15,96	1
Chlor	Cl *)	35,37	2,2159	Samarium .	Sa	?	?
Chrom . . .	Cr [3])	52,45	3,284	Scandium .	Sc [2])	43,97	2,755
Decipium . .	Dp	?	?	Schwefel . .	S *)	31,98	2,0037
Didym . . .	Di	145,0	9,09	Selen	Se [2])	78,87	4,942
Eisen	Fe [1])	55,88	3,501	Silber . . .	Ag *)	107,66	6,7456
Erbium . . .	E	166	10,4	Silicium . .	Si [3])	28,0	1,754
Fluor	F [1])	19,06	1,194	Stickstoff . .	N *)	14,01	0,8779
Gallium . . .	Ga [2])	69,9	4,38	Strontium .	Sr [2])	87,3	5,47
Gold	Au [3])	196,2	12,29	Tantal . . .	Ta	182	11,42
Indium . . .	In [2])	113,4	7,108	Tellur . . .	Te [3])	127,7	8,00
Iridium . .	Ir [2])	192,5	12,06	Terbium . .	Tb	?	?
Jod	J *)	126,54	7,9284	Thallium . .	Tl	203,7	12,76
Kadmium . .	Cd [2])	111,7	7,00	Thorium . .	Th	231,96	14,534
Kalium . . .	K *)	39,03	2,446	Thulium . .	Tm	?	?
Kobalt . . .	Co [3])	58,6	3,67	Titan . . .	Ti	50,25	3,15
Kohlenstoff .	C *)	11,97	0,7502	Uran	U	239,8	15,03
Kupfer . . .	Cu [2])	63,18	3,959	Vanadin . .	V [1])	51,1	3,20
Lanthan . .	La	138,5	8,680	Wasserstoff .	H *)	1	0,06265
Lithium . .	Li [1])	7,01	0,439	Wismuth . .	Bi	207,5	13,00
Magnesium .	Mg [3]	23,94	1,500	Wolfram . .	W [2])	183,6	11,50
Mangan . .	Mn [3])	54,8	3,43	Ytterbium .	Yb	172,6	10,81
Molybdän . .	Mo [2])	95,9	6,01	Yttrium . .	Y	89,6	5,61
Mosandrium .	Ms	?	?	Zink	Zn [3])	64,88	4,065
Natrium . .	Na *)	22,995	1,4408	Zinn	Sn	117,35	7,353
Nickel . . .	Ni [3])	58,6	3,67	Zirkonium .	Zr	90,4	5,66

*) Die Atomgewichte dieser Elemente sind sicher bis auf 0,05 H genau bestimmt.

[1]) Die Atomgewichte dieser Elemente sind bis auf etwa 0,1 H genau verbürgt.

[2]) Die Atomgewichte dieser Elemente sind bis auf wenigstens 0,5 H genau.

[3]) Die Atomgewichte dieser Elemente sind möglicherweise bis auf 1 H unrichtig. Die Atomgewichte der übrigen Elemente sind mit grösseren Unsicherheiten behaftet.

Indem die Chemiker die zusammengesetzten Stoffe nicht bloss in ihre Bestandtheile zerlegten, um diese kennen zu lernen (qualitative Analyse), sondern dabei auch die Mengenverhältnisse bestimmten, mit welchen die einzelnen Grundstoffe in den Verbindungen vorkommen (quantitative Analyse), erkannten sie bald ein überaus wichtiges Gesetz, welches die chemischen Verbindungen charakterisirt und von den mechanischen Gemengen wesentlich unterscheidet.

Während nämlich die mechanischen Gemenge im Allgemeinen nach unendlich vielen Mischungsverhältnissen zusammengesetzt sein können, finden sich die chemischen Verbindungen in der Regel nur nach wenigen bestimmten und constanten Verhältnissen zusammengesetzt.

Die relativen Gewichtsmengen, mit welchen die Elemente in den Verbindungen vorkommen, sind entweder durch die in der Tabelle angeführten Zahlenwerthe oder durch ganze, einfache Multipla dieser Zahlen gegeben.

So z. B. verbinden sich*):

16 Theile Sauerstoff mit 12 Theilen Kohlenstoff zu Kohlenoxyd,
16 „ „ „ 14 „ Stickstoff zu Stickoxyd,
16 „ „ „ 108 „ Silber zu Silberoxyd.

Ferner:

16 Theile Sauerstoff mit zweimal 14 = 28 Theilen Stickstoff zu Stickoxydul,
16 Theile Sauerstoff mit zweimal 108 = 216 Theilen Silber zu Silberoxydul.
16 Theile Sauerstoff mit zweimal 1 = 2 Theilen Wasserstoff zu Wasser.

Ferner:

Zweimal 16 = 32 Theile Sauerstoff mit 12 Theilen Kohlenstoff zu Kohlensäure,
Zweimal 16 = 32 Theile Sauerstoff mit 14 Theilen Stickstoff zu Untersalpetersäure.
Dreimal 16 = 48 Theile Sauerstoff mit zweimal 14 = 28 Theilen Stickstoff zu Salpetrigsäureanhydrid.
Fünfmal 16 = 80 Theile Sauerstoff mit zweimal 14 = 28 Theilen Stickstoff zu Salpetersäureanhydrid.

Es verbinden sich ferner beispielsweise unter sich:

12 Theile Kohlenstoff mit 14 Theilen Stickstoff zu Cyan.
35,5 „ Chlor „ 1 Theil Wasserstoff zu Chlorwasserstoff.
35,5 Theile Chlor mit 108 Theilen Silber zu Chlorsilber.

Als Beispiele von Verbindungen mehrerer Elemente:

*) In diesen Beispielen sind die Atomgewichte in den gebräuchlichen abgerundeten Werthen angeführt.

12 Theile Kohlenstoff mit 14 Theilen Stickstoff und 1 Theil Wasserstoff bilden Blausäure.

12 Theile Kohlenstoff mit 14 Theilen Stickstoff, 16 Theilen Sauerstoff und 1 Theil Wasserstoff bilden Cyansäure.

Aus diesen wenigen Beispielen, welche aus vielen zu Gebote stehenden herausgegriffen sind, ersieht man, dass derselbe Stoff immer von derselben constanten Zahl oder doch einem einfachen Multiplum derselben begleitet ist. Die relativen Mengen der in Verbindung tretenden Massen sind stets ganze Multipla der als Atomgewichte bezeichneten Zahlenwerthe. Bezeichnet man also der Kürze wegen eine relative Menge von 12 Gewichtstheilen Kohlenstoff mit dem Zeichen C, ebenso 1 Gewichtstheil Wasserstoff mit H (Hydrogen), 16 Gewichtstheile Sauerstoff mit O (Oxygen), so sind alle möglichen chemischen Verbindungen dieser drei Grundstoffe zusammengesetzt nach der Formel

$$a\,C + b\,H + c\,O$$

worin a, b und c ganze Zahlen sind, welche bei der Mehrzahl der Elemente selten über die Zahl 5 hinausgehen, bei den Kohlenstoffverbindungen aber häufig einen höhern Werth (bis 30 und darüber) erreichen.

Dieser Satz heisst das Gesetz der multiplen Proportionen.

Auf der Anwendung dieser abgekürzten Zeichen der Grundstoffe mit der erwähnten Bedeutung beruht die so bequeme chemische Formelsprache. In der zweiten Spalte der obigen Tabelle sind diese Zeichen angeführt. Die Chemiker pflegen dieselben unmittelbar zusammenzuschreiben, wie in der Algebra Factoren geschrieben werden und die Zahlen a, b, c als Indices der Zeichen oben oder unten beizusetzen.

Demnach bedeutet also beispielsweise SH_2O_4 eine chemische Verbindung von einmal 32 Gewichtstheilen Schwefel mit zweimal 1 Gewichtstheil Wasserstoff und viermal 16 Gewichtstheilen Sauerstoff, welche Verbindung Schwefelsäurehydrat heisst.

Das Gesetz der multiplen Proportionen ist zunächst nur ein empirisches Gesetz, allein es erhält durch die Annahme der Atome und die darauf gebaute atomistische Theorie eine sehr einfache Erklärung und dadurch einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit.

Die atomistische Theorie nimmt nämlich erstens an, dass die chemische Verbindung der Körper durch Aneinanderlagerung der Atome geschehe, und dass die relativen Gewichte der Atome eben durch die Atomgewichtszahlen ausgedrückt seien. Da sich nun beispielsweise ein Atom Sauerstoff wohl mit einem ganzen oder mit zwei ganzen Atomen Stickstoff verbinden kann, nicht aber mit einem beliebigen Bruchtheil eines solchen, so erklärt es sich, dass mit 16 Gewichtstheilen Sauerstoff wohl 14 Gewichtstheile Stickstoff oder zweimal 14 Gewichtstheile Stickstoff, nicht aber eine beliebige dazwischen gelegene Menge Stickstoff in Verbindung treten können.

Unter Atomgewicht ist also nie das absolute Gewicht eines Atoms,

sondern stets nur das relative Gewicht eines solchen zu verstehen, wobei das Atomgewicht des Wasserstoffs = 1 gesetzt wird.

Wenn man also sagt, das Atomgewicht des Kohlenstoffs ist = 12, so ist damit ausgedrückt, dass die kleinste Menge Kohlenstoffs, welche mit anderen Grundstoffen in Verbindung treten kann, 12 mal so viel wiegt, als die kleinste Menge von Wasserstoff, welche sich chemisch verbinden kann.

Das Molekulargewicht wird erhalten, indem man die Atomgewichte der in einem Molekül enthaltenen Elemente addirt. So z. B. ist das Molekulargewicht des Wassers $H_2O = 2 + 16 = 18$, das des Schwefelsäurehydrates $SH_2O_4 = 32 + 2 + 4 . 16 = 98$, das des freien Wasserstoffes $HH = 1 + 1 = 2$.

Aggregatzustände. Im Alterthum kannte man vier „Elemente“: 11
Erde, Wasser, Luft und Feuer. Es ist klar, dass diese nichts zu thun haben mit jenen Grundstoffen, die wir heute Elemente nennen. Dagegen ist es nicht unwahrscheinlich, dass wir in den drei ersten der vier alten Elemente die Repräsentanten der drei Aggregatzustände (Zusammenhangsformen) zu erblicken haben, während das vierte Element, das Feuer (die Wärme) das Agens darstellt, welches die Aggregatzustände in einander überzuführen vermag.

Diese drei Aggregatzustände sind der feste oder starre, der tropfbar flüssige und der ausdehnsam flüssige oder gasförmige Zustand. Nach dieser Nomenclatur würden die Körper zunächst in feste und flüssige und dann die letzteren in tropfbar flüssige und in ausdehnsam flüssige eingetheilt werden.

Es ist aber einfacher, direct eine Dreitheilung in feste, flüssige und gasförmige Körper anzuwenden.

Das nächstliegende Beispiel eines Körpers, welcher aller drei Zustände fähig ist, liefert das Wasser, welches als Eis oder Schnee fest, als gewöhnliches Wasser flüssig, als Dampf gasförmig ist.

Die festen Körper haben, die geringen Veränderungen abgerechnet, welche durch Wärme und Druck hervorgebracht werden, ein unveränderliches Volumen und eine selbständige Gestalt; es gehört auch eine mehr oder weniger bedeutende Kraft dazu, um einen festen Körper zu zertheilen. Es ist z. B. unmöglich, ein Stück Eisen auf die Hälfte, auf den dritten Theil seines Volumens zusammenzupressen, oder zu bewirken, dass es den doppelten, dreifachen Raum einnimmt; nur mit grosser Gewalt sind wir im Stande, seine Gestalt zu ändern oder es zu theilen.

Die Flüssigkeiten haben in demselben Sinne wie die festen Körper ein unveränderliches Volumen, d. h. wenn wir sie auch durch einen starken Druck ein klein wenig zusammendrücken können, wenn sie sich auch durch Erwärmung etwas ausdehnen, so sind diese Volumveränderungen doch immer nur sehr unbedeutend; wir können das Wasser,

welches eine Literflasche ausfüllt, nicht in eine Halbliterflasche hineinpressen, und wenn wir es in eine Zweiliterflasche hineingiessen, so füllt es diese nur zur Hälfte aus. Die Flüssigkeiten haben aber keine selbstständige Gestalt, wie die festen Körper, sondern die Gestalt des Raumes, den sie einnehmen, ist von der Form der sie umgebenden festen Körper, also von der Form der Gefässe abhängig; wenn eine Flüssigkeit ein Gefäss nicht ganz ausfüllt, so ist sie oben durch eine horizontale Oberfläche begrenzt. Endlich unterscheiden sich die flüssigen Körper von den festen noch dadurch, dass schon eine sehr geringe Kraft hinreicht, um ihre Theilchen von einander zu trennen.

Die gasförmigen Körper haben weder eine selbständige Form, noch ein bestimmtes Volumen; der Raum, den sie einnehmen, hängt nur von dem äussern Drucke ab. Man kann eine Luftmasse leicht auf $^1/_2$, $^1/_4$... $^1/_{10}$ ihres Volumens zusammenpressen; und umgekehrt, wenn man sie in einen 2, 4 ... 10 mal grössern leeren Raum bringt, so füllt sie auch diesen vollständig aus, wie wir später noch ausführlicher sehen werden; Gase haben also ein Bestreben, sich so viel wie möglich auszudehnen. Die leichte Theilbarkeit haben die Gase mit den Flüssigkeiten gemein.

Diese Unterschiede können nach unserer Ansicht von der Constitution der Körper nur darauf beruhen, dass bei den festen Körpern die Moleküle nicht allein in einer bestimmten Entfernung, sondern auch in einer bestimmten gegenseitigen Lage bleiben, während die Moleküle der Flüssigkeiten zwar auch in einer bestimmten Entfernung bleiben, aber doch sehr leicht sich an einander verschieben lassen; bei den gasförmigen Körpern endlich finden wir ein Bestreben der Atome, sich möglichst weit von einander zu entfernen.

Wir werden in der Wärmelehre auf diesen Gegenstand ausführlicher zu sprechen kommen.

12 **Krystallisation.** Wenn ein Körper aus dem flüssigen oder gasförmigen Zustande in den festen übergeht, so nimmt er sehr häufig eine gewisse regelmässige Form und Structur an; diesen Vorgang nennt man Krystallisation.

Krystalle nennt man solche feste Körper, welche sich in regelmässigen, durch ebene Flächen begrenzten Gestalten gebildet haben. In der Natur findet man eine Menge solcher Krystalle; Quarz (Bergkrystall), Kalkspath, Schwerspath, Topas, Granat etc. werden oft sehr schön krystallisirt gefunden.

Wenn ein Körper aus dem flüssigen Zustande in den festen übergeht, so bilden sich fast immer Krystalle. Der Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand findet entweder durch Erkaltung eines geschmolzenen Körpers oder durch Ausscheidung aus einer Auflösung statt.

Wenn man geschmolzenes Wismuth in eine etwas erwärmte Schale giesst, so bildet sich nach einiger Zeit auf der Oberfläche eine feste

Kruste. Wenn man nun diese Kruste durchsticht und das noch flüssige Metall abgiesst, so findet man die Höhlung, welche durch die zuerst erkaltete Kruste gebildet wird, mit würfelförmigen, oft mehrere Linien grossen Krystallen ausgekleidet.

Auf eine ähnliche Weise kann man auch Krystalle aus einer geschmolzenen Schwefelmasse erhalten.

Wenn man mit Aufmerksamkeit im Freien gefrierendes Wasser beobachtet, so sieht man, wie feine Eisnadeln auf der Oberfläche sich bilden, wie sie von einem Augenblicke zum andern sich ausbreiten und verzweigen. Freilich sieht man hierbei selten so regelmässig krystallinische Gestalten, wie man sie beim Schnee beobachtet, doch sieht man deutlich, dass die Eisbildung eine Krystallbildung ist.

Viele Stoffe lösen sich in Flüssigkeiten, namentlich in Wasser, auf, und zwar lässt sich in einer bestimmten Menge Wasser nur eine bestimmte Menge irgend eines Stoffes auflösen; doch löst sich in warmem Wasser meistens mehr auf als in kaltem. Wenn nun eine Auflösung bei hoher Temperatur gesättigt ist, wenn man z. B. in einer bestimmten Menge warmen Wassers so viel Salpeter aufgelöst hat als möglich, so kann diese Salzmasse nicht mehr ganz aufgelöst bleiben, wenn die Lösung erkaltet; ein Theil des Salzes wird sich wieder ausscheiden, und zwar schiesst es in regelmässigen Krystallen an. Auch dann bilden sich Krystalle, wenn das Wasser einer gesättigten Lösung allmälig verdunstet.

Nicht allein aus wässerigen Lösungen scheiden sich Krystalle aus; der Schwefel z. B. löst sich in Schwefelkohlenstoff, in Chlorschwefel, in Terpentinöl auf, und auch aus diesen Lösungen kann man schöne Krystalle von Schwefel erhalten.

Die Krystalle werden um so grösser und regelmässiger, je langsamer die Erkaltung oder Verdunstung vor sich geht. Bei schneller Krystallisation bilden sich kleine Krystalle, die sich zu unregelmässigen Gruppen zusammenhäufen, an denen man oft kaum ein krystallinisches Gefüge erkennen kann.

Jedem Stoffe kommt eine eigenthümliche Krystallform zu; so ist z. B. die Krystallform des Bergkrystalls eine andere als die des Alauns, und diese wieder eine andere als die des Kupfervitriols.

Die Untersuchung der Symmetriegesetze, welche zwischen den einzelnen Krystallflächen stattfinden, sowie die Beschreibung der Krystallformen überhaupt, ist ein Gegenstand, mit welchem sich die Krystallographie zu beschäftigen hat; da jedoch die äussere Gestalt der Krystalle in einem innigen Zusammenhange mit den physikalischen Eigenschaften der Körper steht, so müssen wir hier wenigstens die Grundzüge dieser Symmetriegesetze betrachten.

Wenn man zwei Krystalle desselben Stoffes untersucht, so findet man freilich keine absolute Gleichheit oder Aehnlichkeit der Gestalten im geometrischen Sinne. So haben z. B. Quarzkrystalle häufig die vollkommen regelmässige Gestalt Fig. 1 (a. f. S.), sehr oft kommen sie aber

in der Form Fig. 2 vor, und oft weichen sie noch weit mehr von dem normalen Habitus Fig. 1 ab. Wie aber auch die verschiedenen Quarzkrystalle verzerrt erscheinen mögen, so behalten sie doch immer einen selbst dem weniger Geübten leicht erkennbaren Grundtypus, sie bilden eine durch sechsseitige Pyramiden zugespitzte sechsseitige Säule; diese Pyramidenflächen erscheinen aber nicht immer ganz gleichmässig ausgebildet, sie liegen nicht immer in gleicher Entfernung vom geometrischen Mittelpunkte des Krystalls; aller dieser Unregelmässigkeiten ungeachtet sind die Winkel der entsprechenden Flächen für alle Krystallindividuen desselben Stoffes stets dieselben. So ist z. B. der Winkel, den eine Säulenfläche des Bergkrystalls mit der benachbarten macht, stets 120°, der Winkel zweier neben einander liegenden Pyramidenflächen ist stets 133° 34′ etc.

Wenn man die Krystallform eines Körpers beschreibt, wenn man sie zeichnet, so abstrahirt man von allen Zufälligkeiten, man betrachtet alle

Fig. 1.

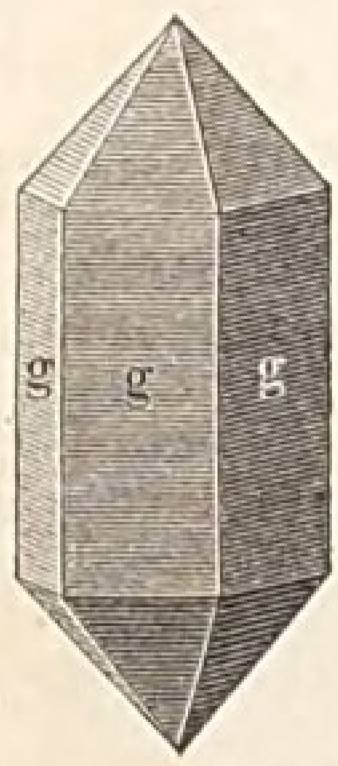


Fig. 2.

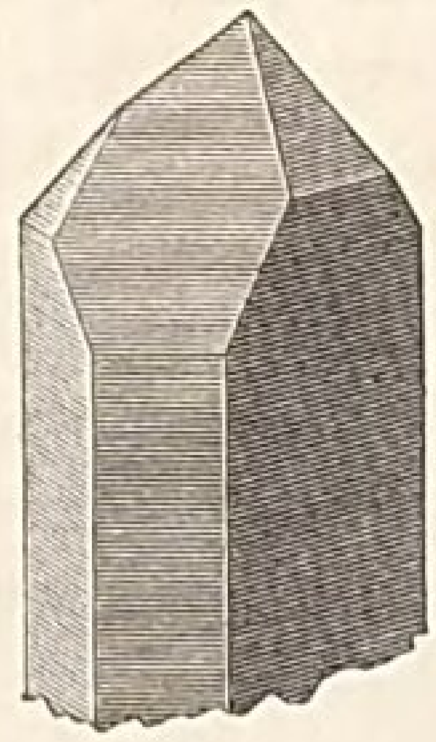
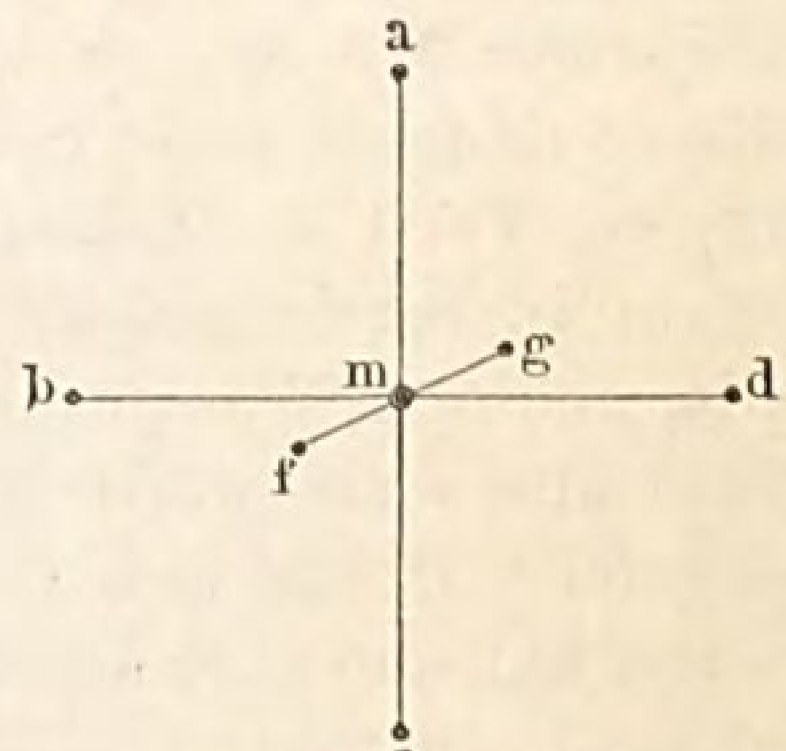


Fig. 3.



entsprechenden Flächen als gleich weit vom Mittelpunkte des Krystalls liegend. Wir wollen eine solche Krystallgestalt den idealen Krystall nennen; die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf diese idealen Formen.

13 **Krystallsysteme.** In jedem Krystalle kann man gewisse Richtungen unterscheiden, gegen welche die einzelnen Flächen eine symmetrische Lage haben; diese Richtungen sind die Achsen. In dem Krystall Fig. 1 ist offenbar die Linie, welche die Spitzen der beiden sechsseitigen Pyramiden verbindet, eine solche Achse. Die mit *g* bezeichneten Säulenflächen sind dieser Achse parallel, alle Pyramidenflächen sind gleich gegen dieselbe geneigt.

Die gegenseitige Lage und das Grössenverhältniss dieser Achsen sind aber nicht für alle Krystalle dieselben; man hat in dieser Beziehung sechs verschiedene Krystallsysteme zu unterscheiden.

1) Das reguläre System mit drei zu einander rechtwinkligen und gleichen Achsen.

Fig. 3 stellt das Achsensystem des regulären Systems dar. Die drei Achsen schneiden sich in dem Punkte *m*, und zwar steht jede der-

selben rechtwinklig auf der Ebene der beiden anderen. Zwei dieser Achsen, ac und bd, erscheinen in unserer Figur unverkürzt, dagegen erscheint die dritte, von vorn nach hinten gerichtete Achse fg verkürzt. In der Wirklichkeit ist $mf = ma = mb$.

Denken wir uns in jede der acht körperlichen Ecken des Achsenkreuzes, Fig. 3, eine Fläche gelegt, welche gegen alle drei Achsen gleich geneigt ist, also eine Fläche durch die Punkte a, f und d; eine zweite durch f, d und c; eine dritte durch f, b und a etc., so entsteht das Octaëder, Fig. 4, welches man als die Grundgestalt des regulären Systems betrachtet, weil man von ihm leicht alle anderen Gestalten dieses Systems ableiten kann.

Alle Ecken des regulären Octaëders sind unter einander gleich und jede Modification eines Ecks muss an allen übrigen in derselben Weise stattfinden.

Wird jedes Octaëdereck durch eine Fläche abgestumpft, welche auf der entsprechenden Achse rechtwinklig steht, so entsteht der Körper

Fig. 4.

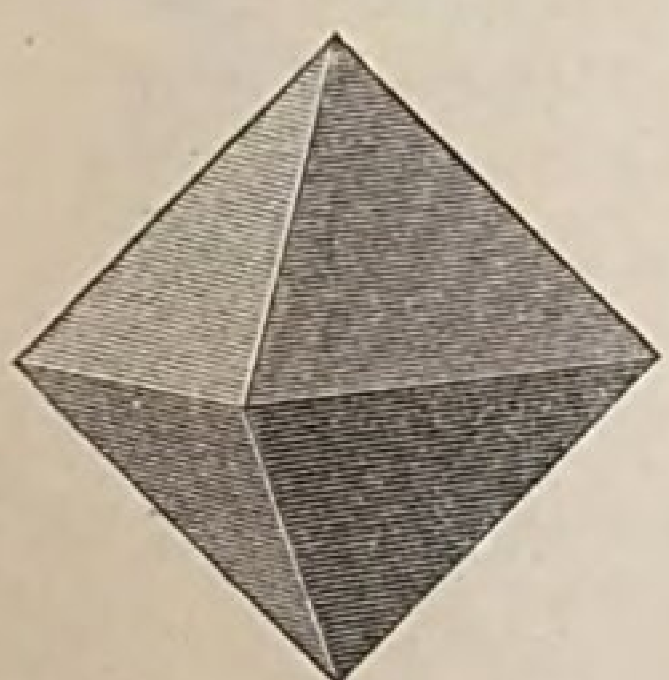


Fig. 5.

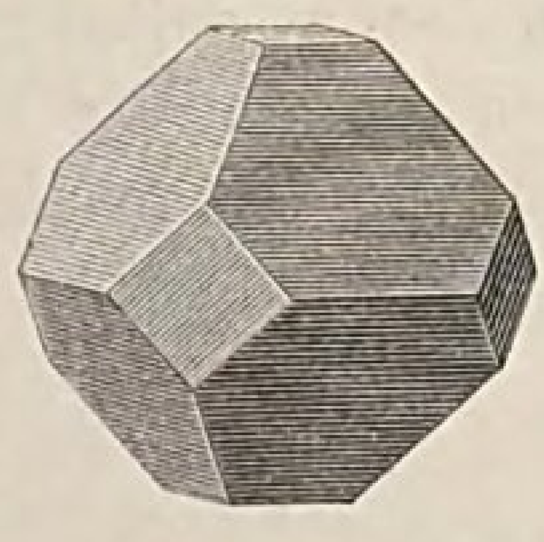


Fig. 6.

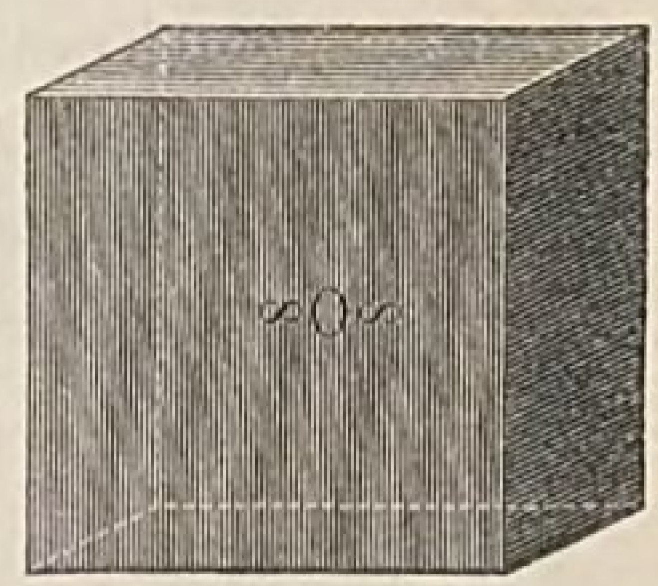


Fig. 5. Denken wir uns die Abstumpfungsflächen bis zur gegenseitigen Durchschneidung ausgedehnt, so erhält man den Würfel Fig. 6.

An dem Würfel sind wieder alle Ecken unter sich gleich; ebenso sind alle Kanten gleichartig, und jede Modification eines Ecks oder einer Kante findet sich in derselben Weise auch an den übrigen.

Die 12 Kanten des Octaëders sind ebenfalls einander gleich; denken wir uns jede Octaëderkante durch eine Fläche abgestumpft, welche mit

Fig. 7.

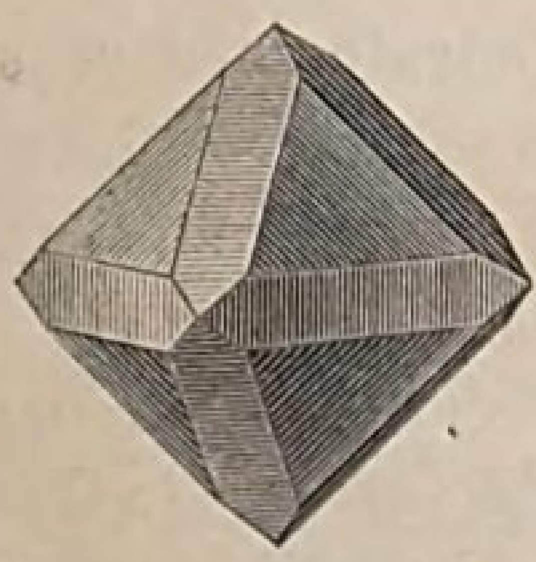
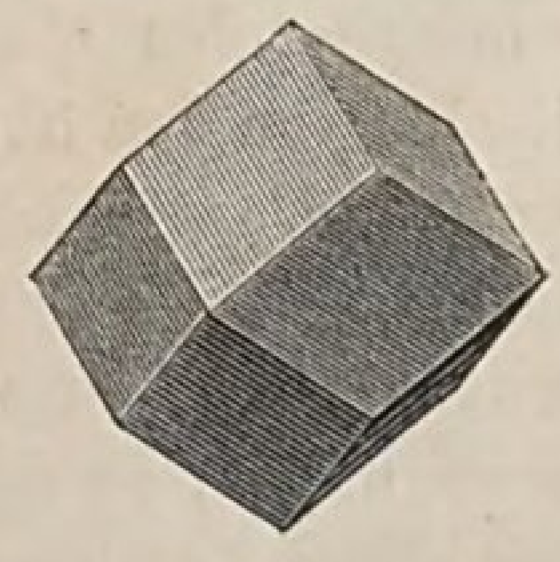


Fig. 8.



der abgestumpften Kante und einer Achse parallel läuft, so entsteht der Körper Fig. 7. Wenn die Abstumpfungsflächen der Octaëderkanten bis zu ihrer gegenseitigen Durchschneidung wachsen, so entsteht das Rhombendodekaeder Fig. 8.

Auf dieselbe Weise lassen sich auch die übrigen Formen des regulären Systems ableiten; doch würde es uns hier zu weit führen, wenn wir alle näher betrachten wollten; das Gesagte wird schon hinreichen, um zu zeigen, dass der Charakter des regulären Systems eben darin besteht, dass alle Formen desselben in Beziehung auf die drei Achsen vollkommen symmetrisch sind. Im regulären System krystallisiren Alaun, Kochsalz, Granat, Flussspath etc.

2) Das quadratische System. Die Grundform dieses Systems ist ein Quadratoctaëder, Fig. 9 und Fig. 10, d. h. ein Octaëder, welches sich von dem regulären dadurch unterscheidet, dass zwei Achsen unter sich, aber nicht der dritten gleich sind. Die letztere ausgezeichnete Achse wollen wir die Hauptachse nennen und uns dieselbe immer vertical gestellt denken.

Die Hauptachse steht zu den beiden anderen nicht in einem rationalen Verhältniss; sie ist bald grösser, bald kleiner als die horizontalen Achsen; doch ist das Achsenverhältniss für Krystalle einer und derselben Substanz stets dasselbe. Fig. 11 stellt z. B. das Achsenkreuz dar, wie es den Krystallen des arseniksauren Kalis entspricht; die Achsen fg und bd sind einander gleich. Nimmt man die Länge dieser Achsen zur Einheit, so ist für dieses Salz die verticale Achse ac gleich 0,66. Fig. 10 stellt die Grundform des Blutlaugensalzes dar, bei welchem die Hauptachse grösser ist als die Nebenachsen; und zwar verhält sich hier die Hauptachse zu den Nebenachsen wie 1,77 zu 1.

Fig. 10.

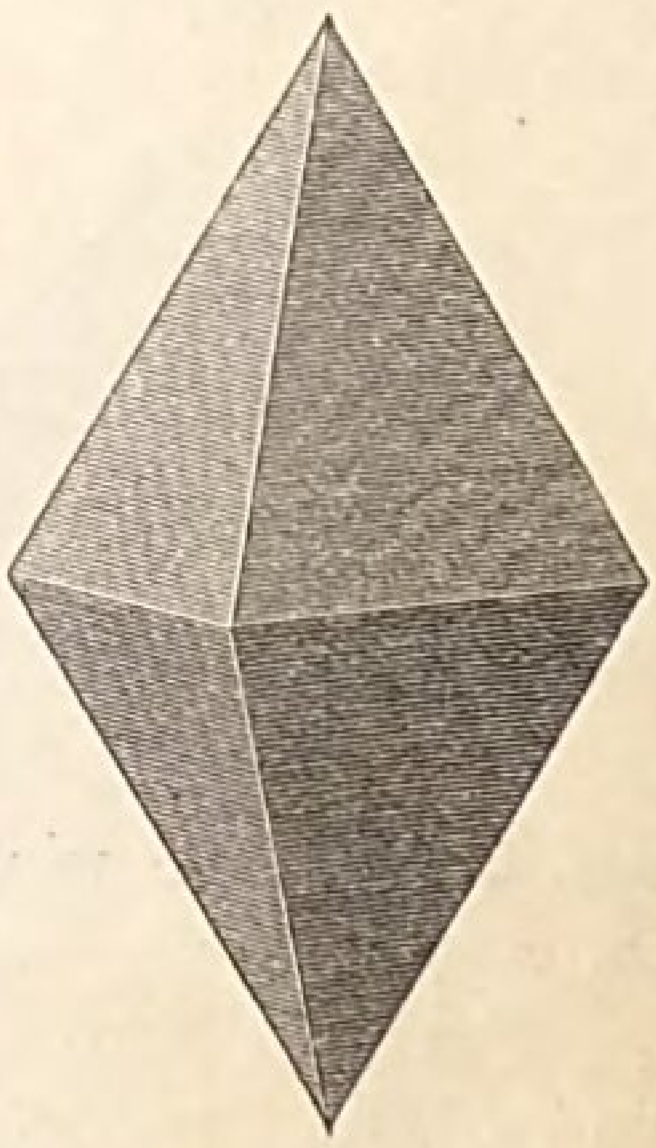


Fig. 9.

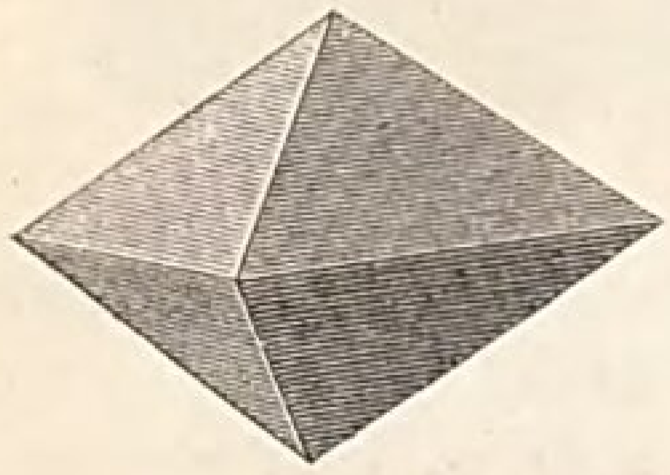
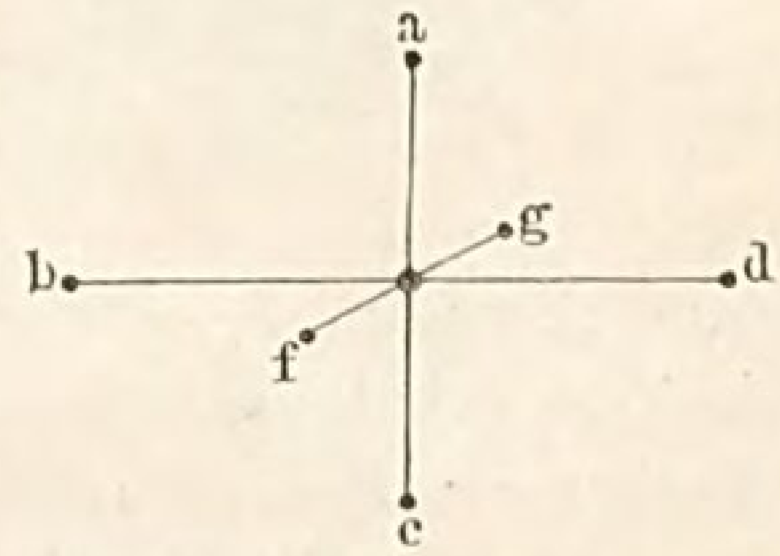


Fig. 11.



Die vier horizontalen Kanten des Quadratoctaëders sind einander gleich, aber sie sind von den übrigen Kanten dieses Octaëders verschieden; die vier horizontalen Kanten können deshalb abgestumpft sein, ohne dass es die anderen sind, und so entsteht die Combination Fig. 12. Liegen die Abstumpfungsflächen der vier horizontalen Kanten der Hauptachse verhältnissmässig näher, so dass nur ein kleinerer Theil des Octaëders bleibt, so nimmt diese Combination den Habitus Fig. 13 an, welche die gewöhnliche Gestalt des arseniksauren Kalis darstellt.

Die vier Abstumpfungsflächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine quadratische Säule, und so sind Fig. 12 und Fig. 13 Combinationen des Quadratoctaëders mit der quadratischen Säule.

Die sechs Ecken des Quadratoctaëders sind ebenfalls nicht gleichartig; die vier Ecken, in welchen die Nebenachsen endigen, sind unter sich gleich, aber sie sind verschieden von dem Eck am obern und untern Ende der Hauptachse. Deshalb können das obere und das untere Eck des Quadratoctaëders allein abgestumpft sein, wie es Fig. 14 zeigt, welches die gewöhnliche Form des Blutlaugensalzes darstellt; bei anderen

Fig. 12.

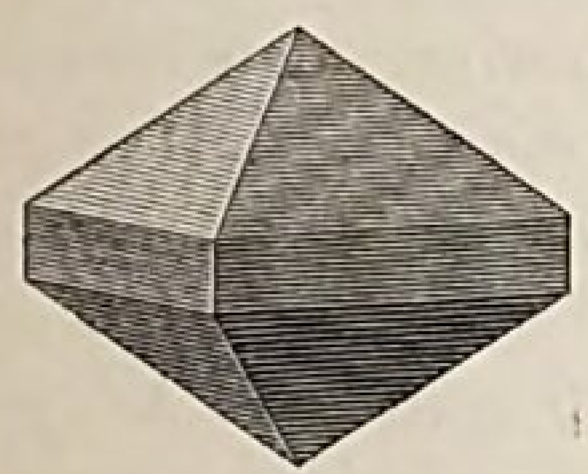


Fig. 13.

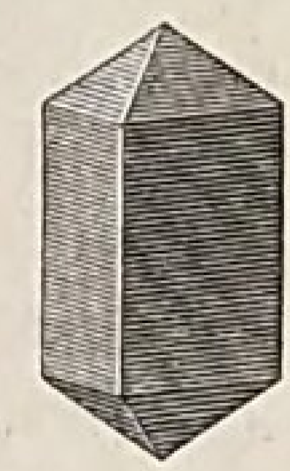
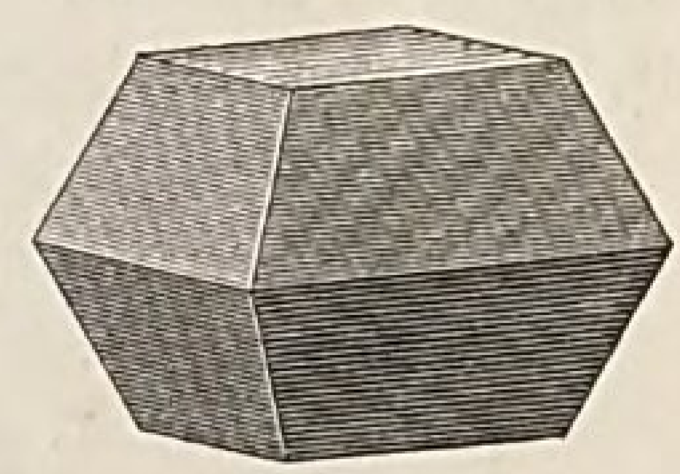


Fig. 14.



Krystallen dagegen sind die vier horizontalen Ecken abgestumpft, ohne dass es die Ecken der Hauptachse sind.

Ohne in eine weitere Betrachtung der Gestalten dieses Systems einzugehen, wird aus dem Gesagten schon klar der Grundcharakter desselben hervorgehen, welcher eben darin besteht, dass die verticale Achse von den beiden anderen, unter sich gleichartigen, ausgezeichnet ist.

Im quadratischen Systeme krystallisiren unter anderen: Vesuvian, Honigstein, Blutlaugensalz, schwefelsaures Nickeloxyd, saures arseniksaures Kali etc.

3) Das hexagonale System mit vier Achsen (Fig. 15), von denen drei, nämlich *cd*, *ef* und *hg* in einer Ebene liegend, einander gleich sind

Fig. 15.

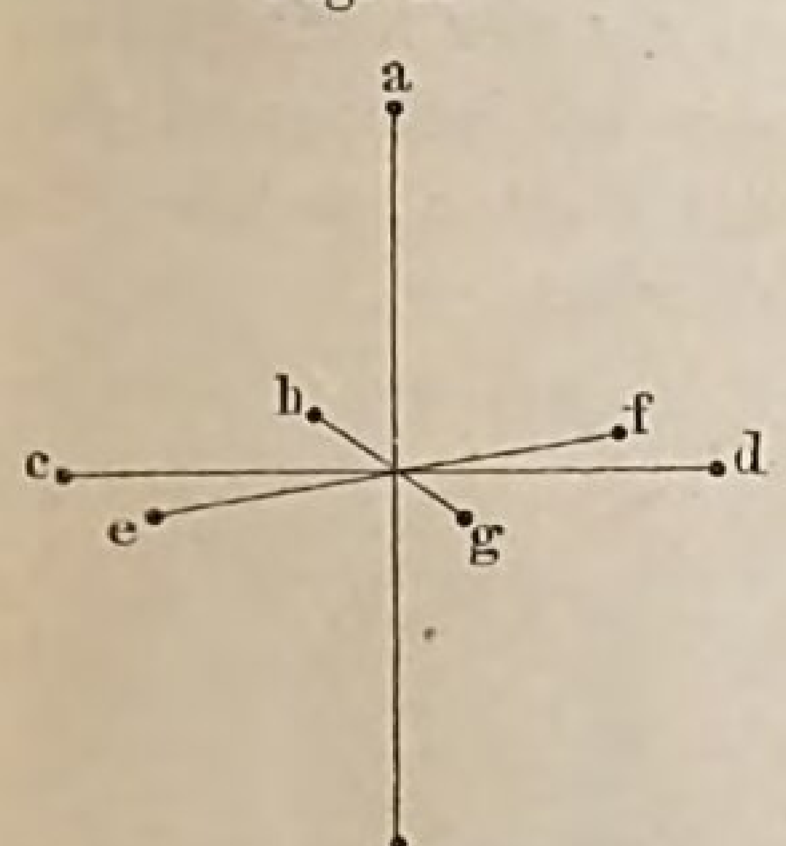


Fig. 16.

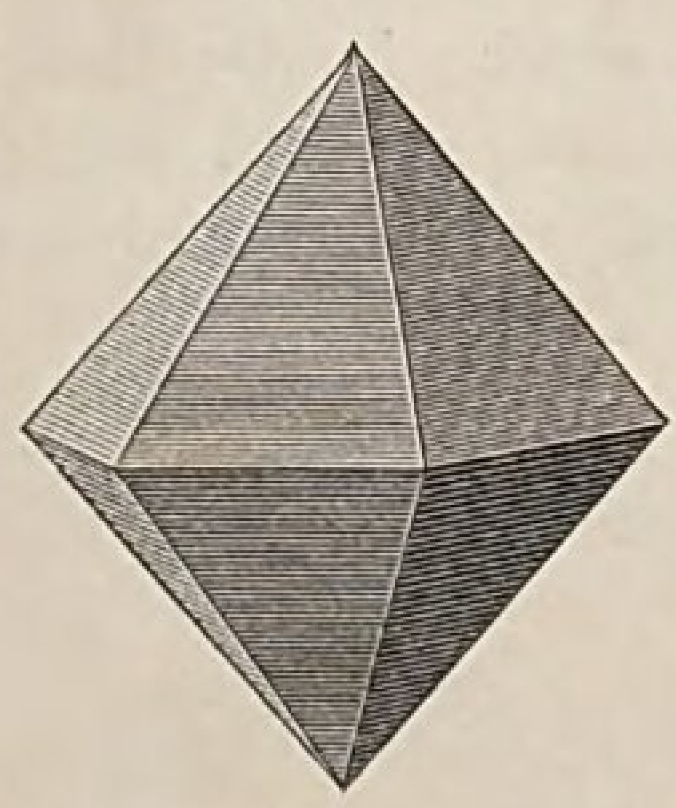


Fig. 17.

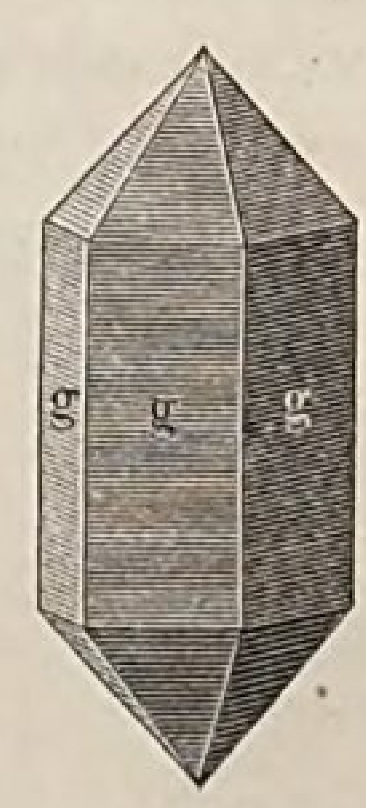
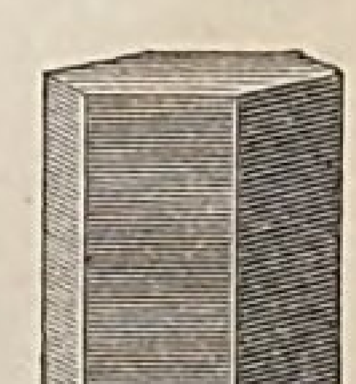


Fig. 18.



und einen Winkel von 60° mit einander machen, während die vierte ausgezeichnete Achse, die Hauptachse, rechtwinklig auf der Ebene der drei anderen steht und ihnen ungleich ist. Bezeichnen wir mit 1 die Länge der horizontalen Nebenachsen, so ist für Bergkrystall die Länge der Hauptachse 1,1, für Kalkspath aber 0,83. In dieses System gehören die regulären sechsseitigen Pyramiden (Fig. 16), welche in gleicher Weise als die Grundgestalt dieses Systems betrachtet werden können, wie die Octaëder der übrigen Systeme. Wenn die horizontalen Kanten dieser Pyramiden

durch Flächen abgestumpft werden, welche mit der Hauptachse parallel sind, so entsteht die Combination Fig. 17 (a. v. S.).

Die Abstumpfungsflächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine reguläre sechsseitige Säule, welche in Fig. 18 mit der geraden Endfläche, d. h. mit einer Fläche combinirt ist, welche rechtwinklig auf der Hauptachse steht.

4) Das rhombische System mit drei zu einander rechtwinkligen aber ungleichen Achsen. Denken wir uns eine dieser Achsen vertical gestellt, so liegen die beiden anderen in einer horizontalen Ebene, doch sind hier die beiden horizontalen Achsen nicht gleich wie beim quadratischen Systeme.

Fig. 19.

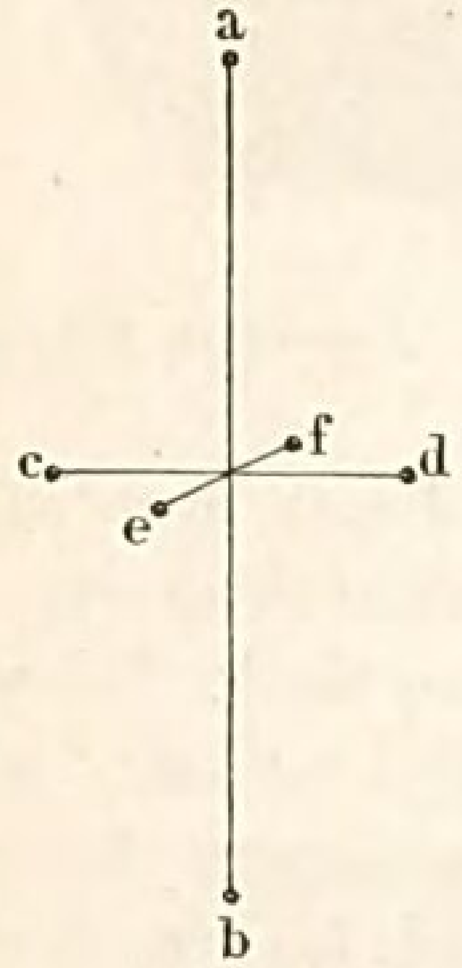


Fig. 20.

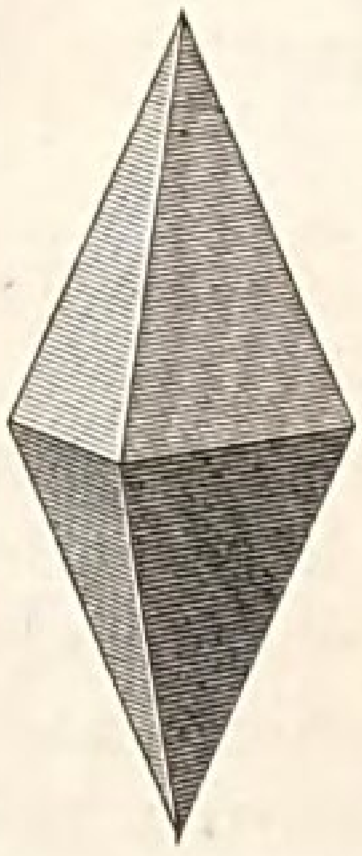


Fig. 19 stellt das Achsenkreuz des in dieses System gehörigen natürlichen Schwefels dar. Für dieses Mineral verhalten sich die Achsen *cd* : *ef* : *ab* wie 0,8 : 1 : 1,9. Fig. 20 stellt das rhombische Octaëder dar, welches diesen Achsenverhältnissen entspricht.

An dem rhombischen Octaëder, Fig. 20, sind nur immer je zwei diametral gegenüberliegende Ecken einander gleich, also das obere und untere, das vordere und hintere, das Eck rechts und das Eck links; wir haben also hier drei verschiedene Arten von Octaëderecken zu unterscheiden. Ebenso hat man am rhombischen Octaëder dreierlei Kanten zu unterscheiden: die vier horizontalen Kanten, die vier Kanten, welche in der Ebene der verticalen und der kleinern horizontalen Achse liegen, und endlich die Kanten, welche die verticale Achse mit der grössern horizontalen verbinden.

Fig. 21.

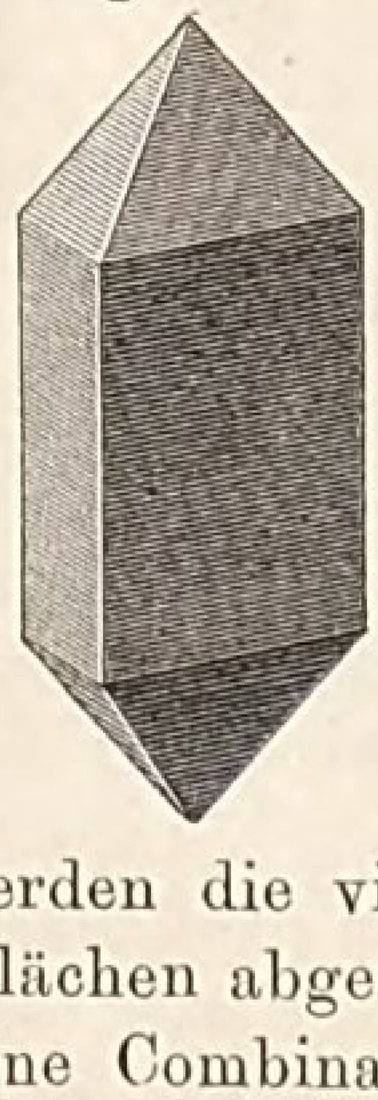


Fig. 22.

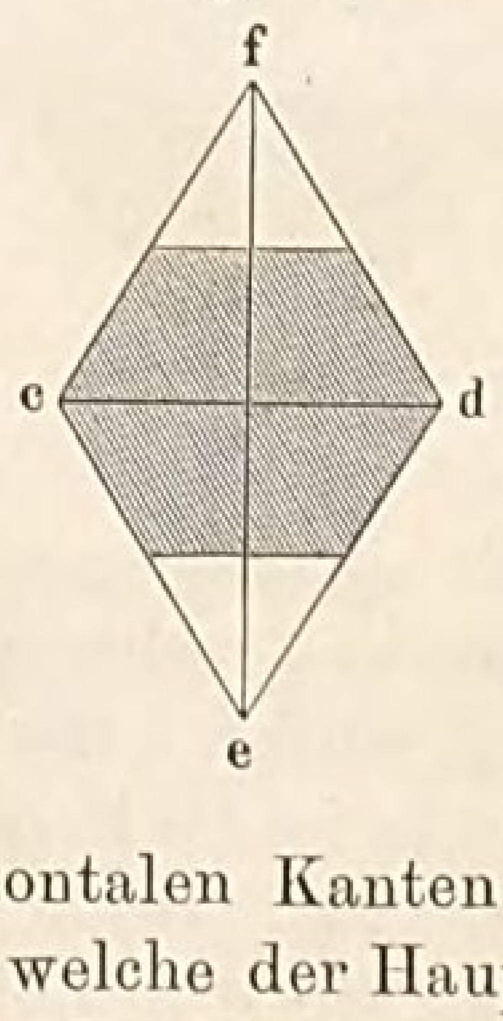
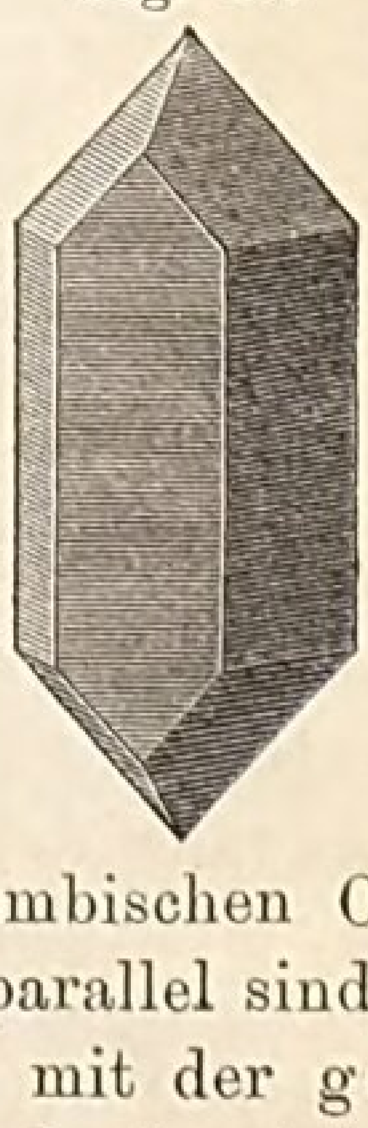


Fig. 23.



Werden die vier horizontalen Kanten des rhombischen Octaëders durch Flächen abgestumpft, welche der Hauptachse parallel sind, so entsteht eine Combination des rhombischen Octaëders mit der geraden rhombischen Säule, Fig. 21. Die Gestalt des horizontalen Quer-

schnitts, der Basis dieser Säule, hängt von dem Grössenverhältniss der beiden horizontalen Achsen ab. In Fig. 22 stellt der Rhombus *cfde* die Basis der rhombischen Säule, wie sie den Achsenverhältnissen des Salpeters entspricht, unverkürzt dar.

Die grössere Diagonale *ef* dieser Basis heisst die Makrodiagonale, die kleinere *cd* ist die Brachydiagonale.

Die verticalen Kanten der rhombischen Säule sind einander nicht alle gleich; die vordere und hintere Kante der Säule, Fig. 21, welche durch die Makrodiagonale verbunden werden, sind spitzwinklig, während die beiden Kanten rechts und links, welche rechtwinklig auf den Enden der Brachydiagonale aufgesetzt erscheinen, stumpfwinklige Kanten sind.

An einem rhombischen Octaëder kann man nach Belieben jede der drei Achsen zur Hauptachse nehmen; für eine Mineralspecies aber oder für ein Salz, welches in diesem Systeme krystallisirt, wählt man diejenige Achse zur Hauptachse, parallel welcher die Krystalle vorzugsweise säulenartig ausgedehnt sind.

Durch Abstumpfung zweier diametral gegenüberstehenden Kanten der rhombischen Säule entsteht eine sechsseitige Säule. So erscheinen an der rhombischen Säule des Salpeters meist die scharfen Kanten abgestumpft, Fig. 23, wodurch eine sechsseitige Säule entsteht, deren horizontale Basis in Fig. 22 durch Schraffirung angedeutet ist.

Fig. 24.

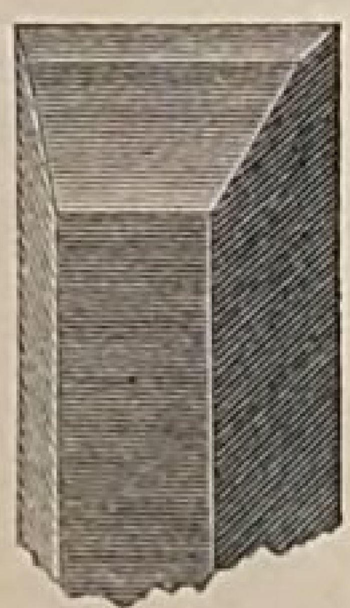


Fig. 24 stellt den gewöhnlichen Habitus der Salpeterkrystalle dar; es ist eine Combination der eben besprochenen sechsseitigen Säule mit mehreren Flächen, die parallel mit der Achse *cd* laufen und verschiedene Neigung gegen die Hauptachse haben. Die Octaëderflächen sind bei den Salpeterkrystallen meist gänzlich verschwunden.

Das rhombische System ist also dadurch ausgezeichnet, dass sich in verticaler Richtung andere Symmetrieverhältnisse zeigen als von vorn nach hinten, und in dieser Richtung wieder andere als von der Linken zur Rechten.

Ausser den schon genannten Körpern krystallisiren unter anderen im rhombischen Systeme: Zinkvitriol, schwefelsaures Kali, Arragonit, Schwerspath, Topas etc.

5) Das monoklinische System, in welchem unter anderen der Gyps, das Glaubersalz, der Eisenvitriol, das essigsaure Natron, der Zucker etc. krystallisiren, zeichnet sich vor dem rhombischen Systeme dadurch aus, dass zwei Achsen sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, während die dritte rechtwinklig auf der Ebene der beiden schiefwinkligen steht.

Fig. 25 (a. f. S.) stellt ein in dieses System gehöriges Achsenkreuz dar: die Achse *ef* steht rechtwinklig auf der Ebene der beiden anderen, dagegen schneiden sich die Achsen *ab* und *cd* nicht unter rechtem Winkel.

Die Ebene der beiden Achsen *a b* und *c d*, Fig. 25, welche sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, heisst die symmetrische Ebene, während die rechtwinklig auf der symmetrischen Ebene stehende Achse *e f* die symmetrische Achse genannt wird.

Die am meisten charakteristische und am häufigsten theils allein, theils in Combination mit anderen Flächen vorkommende Form dieses Systems ist die schiefe rhombische Säule, Fig. 26, welche sich von der geraden rhombischen Säule des vorigen Systems dadurch unterscheidet, dass die Hauptachse dieser Säule nicht rechtwinklig auf der Basis steht.

Die Säule ist in unserer Figur so gestellt, dass die Ebene der beiden schiefwinkligen Achsen unverkürzt, die dritte auf ihrer Ebene rechtwinklig stehende Achse aber, als gegen den Beschauer gerichtet, verkürzt erscheint.

Fig. 25.

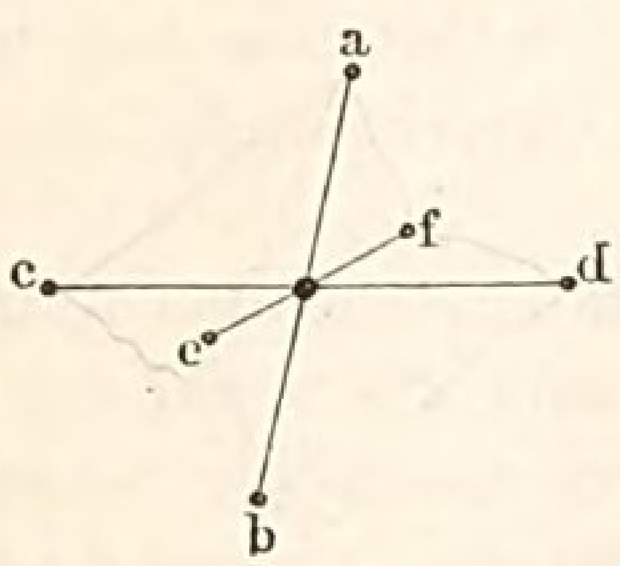
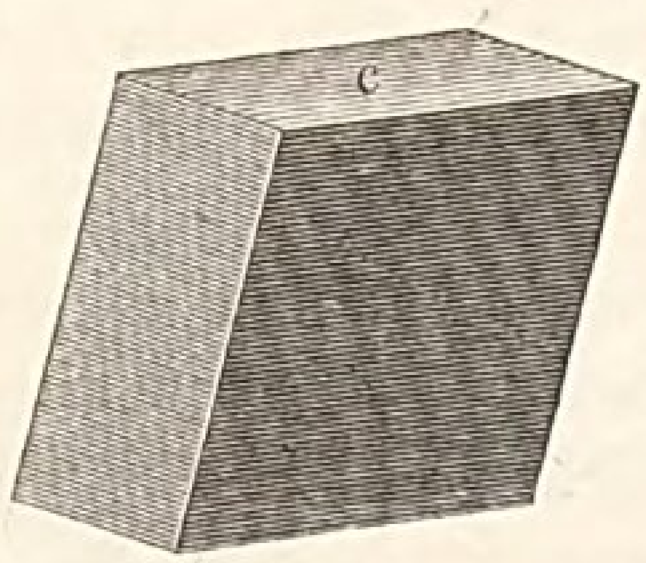


Fig. 26.



Auch hier haben wir zwei scharfe und zwei stumpfe Säulenkanten zu unterscheiden. Die Abstumpfungsfläche der vordern und hintern Säulenkante (die Fläche *a* in Fig. 27) steht rechtwinklig zu der obern Endfläche *c*; dagegen macht die Abstumpfungsfläche *b*, Fig. 28, der Säulenkanten rechts und links einen schiefen Winkel mit *c*.

Die horizontalen Kanten der durch die Fläche *c* begrenzten schiefen rhombischen Säule sind nicht gleicher Natur, wie dies bei der geraden rhombischen Säule der Fall war; an der obern Fläche, Fig. 26, sind die beiden Kanten rechts scharfe Kanten, die beiden horizontalen Kanten auf der linken Seite der obern Fläche sind dagegen stumpfe Kanten.

Fig. 27.

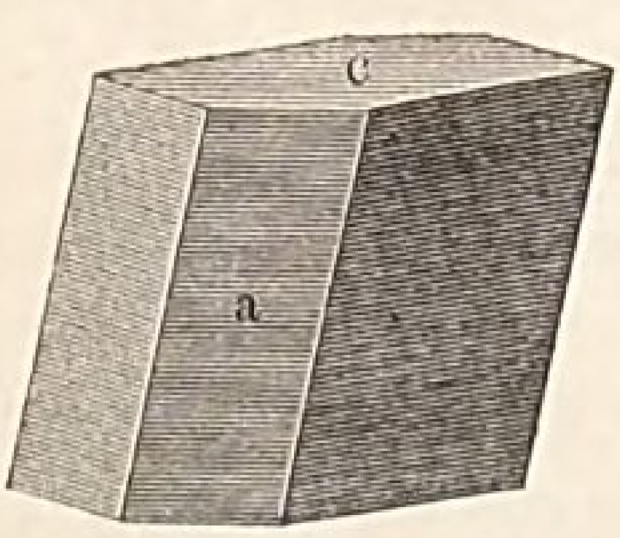


Fig. 28.

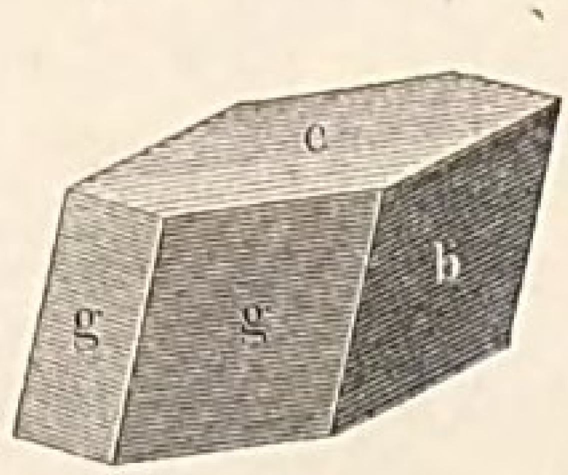
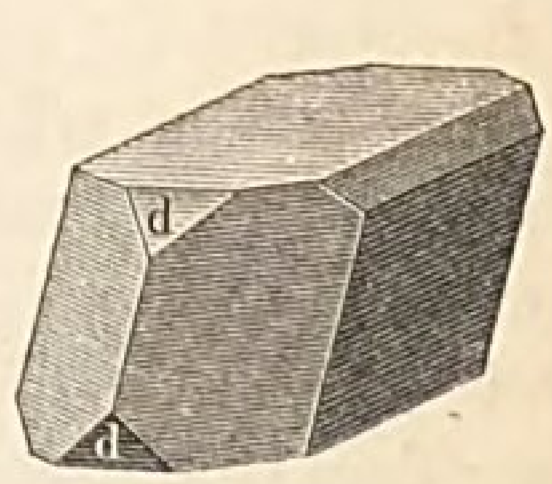


Fig. 29.



An der unteren Fläche liegen die beiden scharfen Kanten links, die stumpfen rechts.

Die scharfen horizontalen Kanten können für sich allein abgestumpft sein, während bei anderen Krystallen nur die stumpfen horizontalen Kanten abgestumpft sind.

Die schon oben besprochene Gestalt, Fig. 28, zeigt die gewöhnliche Krystallform des Zuckers. Häufig erscheinen aber an den Zuckerkrystallen

noch die spitzen Kanten zwischen *c* und *b* und die Ecken abgestumpft, in welchen die Säulenflächen *g* mit den Endflächen *c* zusammentreffen, wie dies in Fig. 29 dargestellt ist.

6) Das triklinische System ist durch drei Achsen charakterisirt, welche alle drei ungleich sind, und von denen keine mit der andern einen rechten Winkel macht. Die Krystalle dieses Systems zeigen unter allen am wenigsten Symmetrie. Hier sind nur immer je zwei Flächen, Kanten oder Ecken gleichartig, welche einander diametral gegenüberstehen.

Dem triklinischen Systeme gehören unter anderen die Krystalle des Axinits und des Kupfervitriols an.

Die Hemiëdrie. Es kommt bei Krystallen häufig vor, dass die 14
Hälfte der Flächen einer einfachen Gestalt nach bestimmten Gesetzen in solchem Maasse ausgedehnt ist, dass die andere Hälfte der Flächen vollkommen verschwindet. Solche Krystalle nennt man Halbflächner oder hemiëdrische Krystalle. Wir müssen hier der Hemiëdrie noch kurz erwähnen, weil dieselbe in einigem Zusammenhange mit einigen physikalischen Erscheinungen der Krystalle steht.

Denken wir uns an dem regulären Octaëder, Fig. 30, die Fläche *o* und die in unserer Zeichnung nicht sichtbare Fläche der obern Pyramide

Fig. 30.

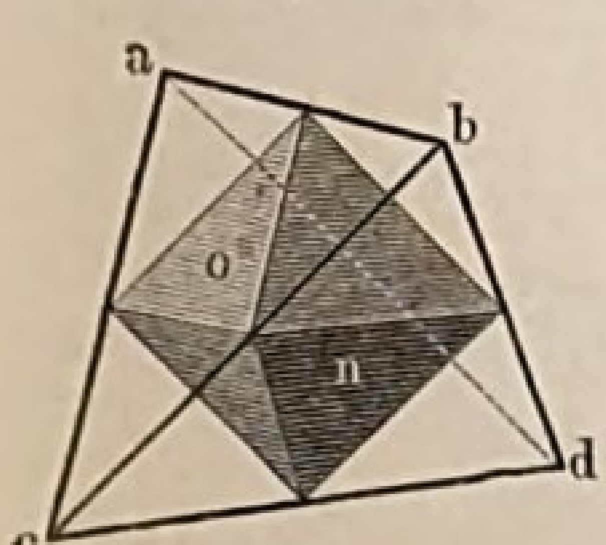


Fig. 31.

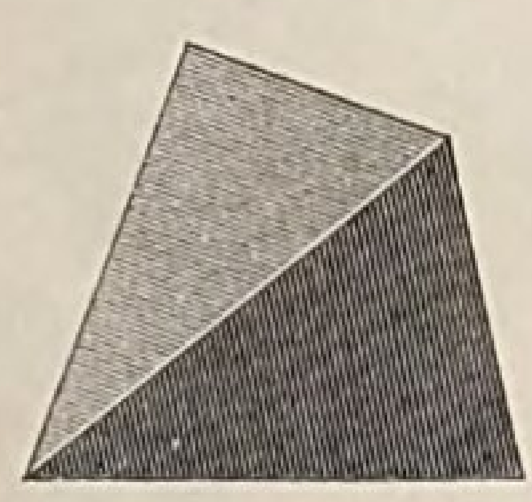


Fig. 32.

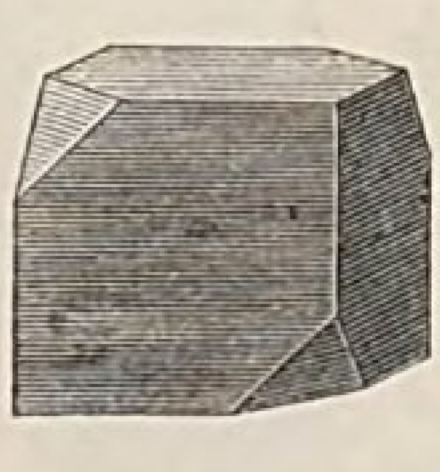
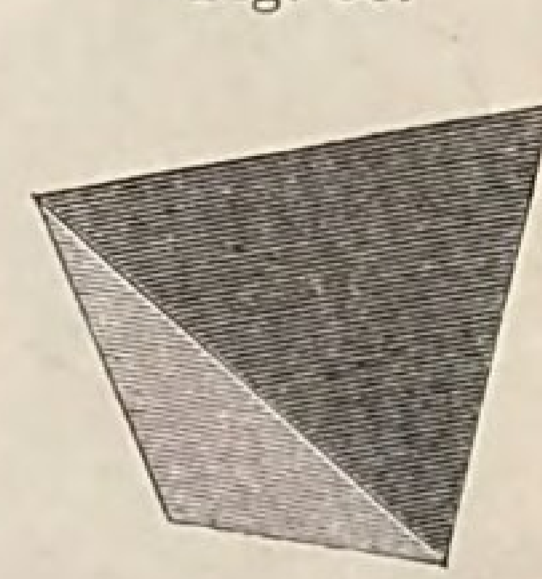


Fig. 33.



hinten rechts nach allen Seiten gewachsen, so schneiden sich diese beiden Flächen in der Kante *ab*. Wenn ferner von den vier unteren Octaëderflächen die Fläche *n* und die Fläche hinten links wächst, so schneiden sich diese in der Kante *cd*; die gewachsenen Flächen *o* und *n* schneiden sich in der Kante *bc* etc. Kurz, wenn die Fläche *o* und die drei Flächen des Octaëders, welche mit *o* nur in einer Spitze zusammentreffen, wachsen, bis diejenigen Octaëderflächen, welche mit *o* in einer Kante zusammenstossen, und diejenige Octaëderfläche, welche mit *o* parallel liegt, ganz verschwunden sind, so entsteht ein nur von vier Flächen begrenzter Körper *abcd*, Fig. 30.

Fig. 31 stellt diesen Körper, welcher das Tetraëder genannt wird, für sich allein dar.

Fig. 32 ist eine Combination des regulären Tetraëders mit dem Würfel.

Das Tetraëder, Fig. 31, kann man sich also aus dem Octaëder, Fig. 30, dadurch entstanden denken, dass die eine Hälfte der Octaëder-

flächen bis zum Verschwinden der vier übrigen Octaëderflächen gewachsen ist. Denken wir uns dagegen diese vier letzteren Octaëderflächen bis sum Verschwinden der ersteren gewachsen, so entsteht das Tetraëder, Fig. 33.

Die vier Flächen dieser Tetraëder sind gleichseitige Dreiecke, und die sechs Kanten derselben sind unter einander gleich.

Das Tetraëder, Fig. 31, unterscheidet sich von dem Tetraëder, Fig. 33, nur durch seine Stellung. Dadurch, dass man das letztere Tetraëder um seine verticale Achse um 90^0 dreht, kommt es in die Stellung des ersteren und ist nun mit ihm vollkommen congruent.

Einen solchen Fall der Hemiëdrie, bei welchem wie hier die beiden aus derselben Grundgestalt abgeleiteten hemiëdrischen Formen einander vollkommen gleich und nur durch die Stellung verschieden sind, nennt man eine congruente oder überdeckbare Hemiëdrie.

Wie aus dem regulären Octaëder das Tetraëder, so entsteht aus der doppeltsechsseitigen Pyramide des hexagonalen Systems durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboëder. Denken wir uns von der obern Pyramide, Fig. 34, die Flächen *r*, *t* und diejenige auf der

Fig. 34.

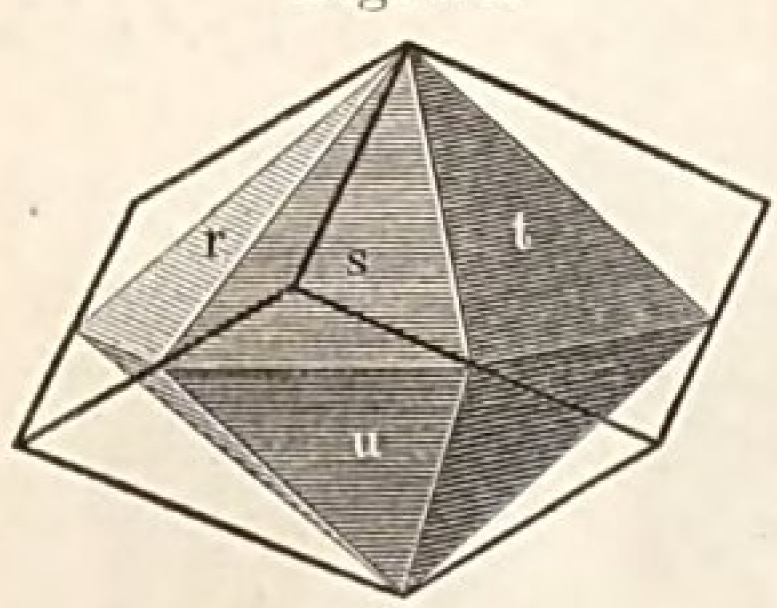


Fig. 35.

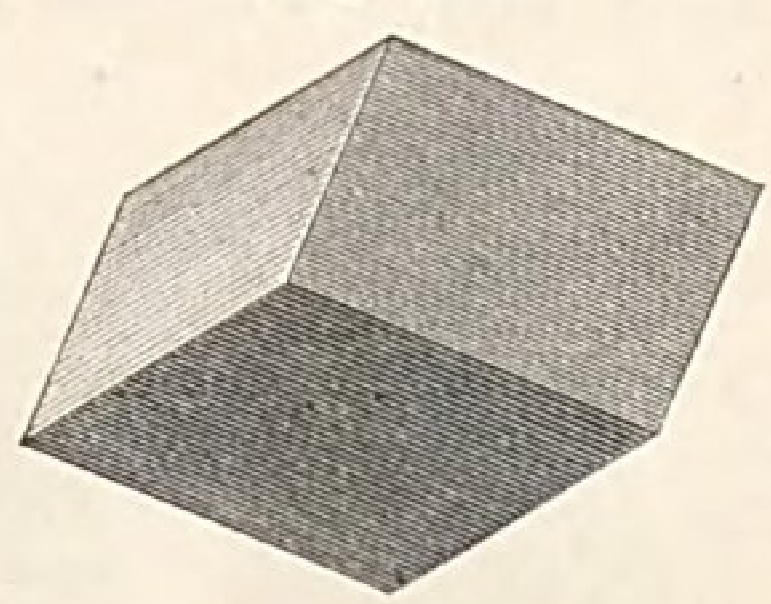
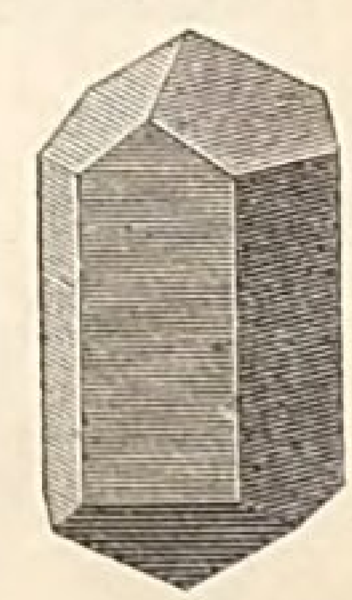


Fig. 36.



hintern Seite, welche *s* gegenüberliegt, von der untern Pyramide aber gerade diejenigen Flächen gewachsen, welche in einer Kante mit den ausgefallenen Flächen der obern Pyramide zusammenstossen, so entsteht das Rhomboëder, wie es in Fig. 34 durch die starken Linien angedeutet und welches in Fig. 35 für sich allein dargestellt ist. Es ist dies die Grundgestalt des Kalkspaths.

Fig. 36 zeigt eine Combination dieses Rhomboëders mit der regulären sechsseitigen Säule.

Während aus der doppeltsechsseitigen Pyramide, Fig. 34, durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboëder Fig. 35 entsteht, so entsteht durch Wachsen der andern Hälfte der Flächen die Grundgestalt des Rhomboëders, Fig. 37. Die beiden Rhomboëder, Fig. 35 und Fig. 37, sind nur durch ihre Stellung verschieden, im Uebrigen aber vollkommen gleich, so dass man jedes durch Drehung auch in die Stellung des andern bringen kann; wir haben also hier gleichfalls ein Beispiel der überdeckbaren Hemiëdrie.

Eine andere wichtige hemiëdrische Form des hexagonalen Systems ist das Scalenoëder, Fig. 38. Es ist die Hemiëdrie einer symmetrisch

zwölfseitigen Pyramide. Charakteristisch für diese Form ist es, dass ihre Seitenkanten wie die eines Rhomboëders liegen, dass man sich also jedes Scalenoëder leicht so vorstellen kann, als ob durch die Seitenkanten eines Rhomboëders Flächen nach einem Punkt der verlängerten Hauptachse gelegt wären, welcher um die *n* fache Länge der verticalen Halbachse des Rhomboëders von der Mitte des Krystalles absteht.

Fig. 39 und Fig. 40 stellen die unter dem Namen der Sphenoïde bekannten beiden Halbflächner eines rhombischen Octaëders (s. Fig. 20)

Fig. 37.

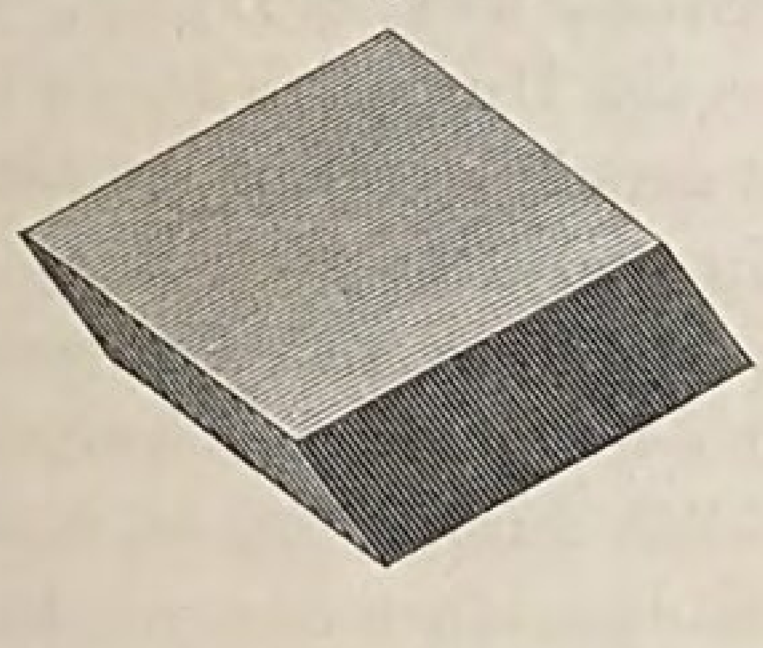


Fig. 39.

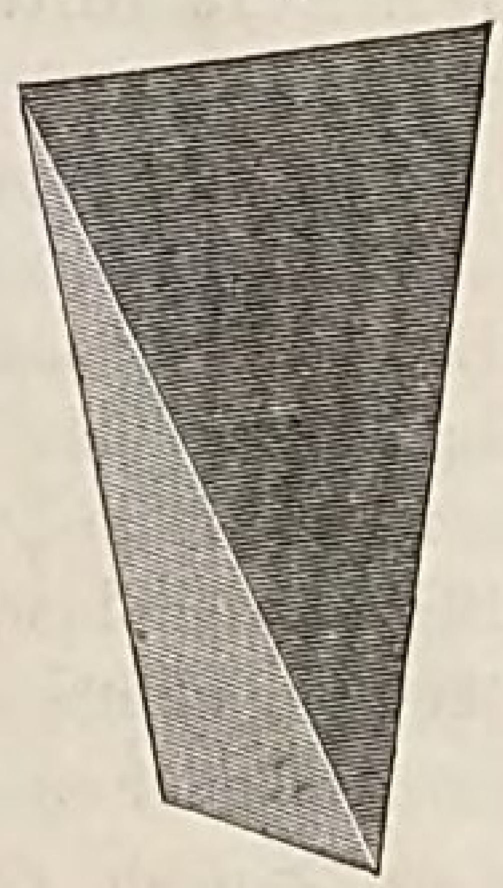


Fig. 40.

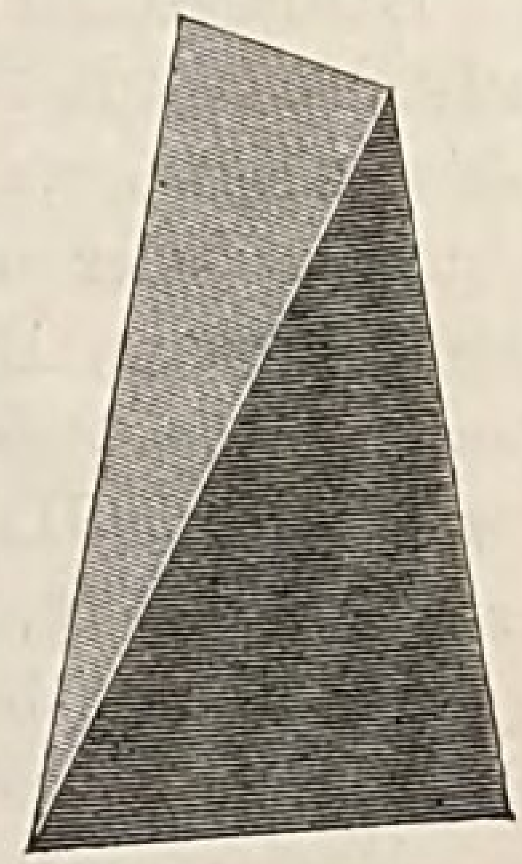


Fig. 38.

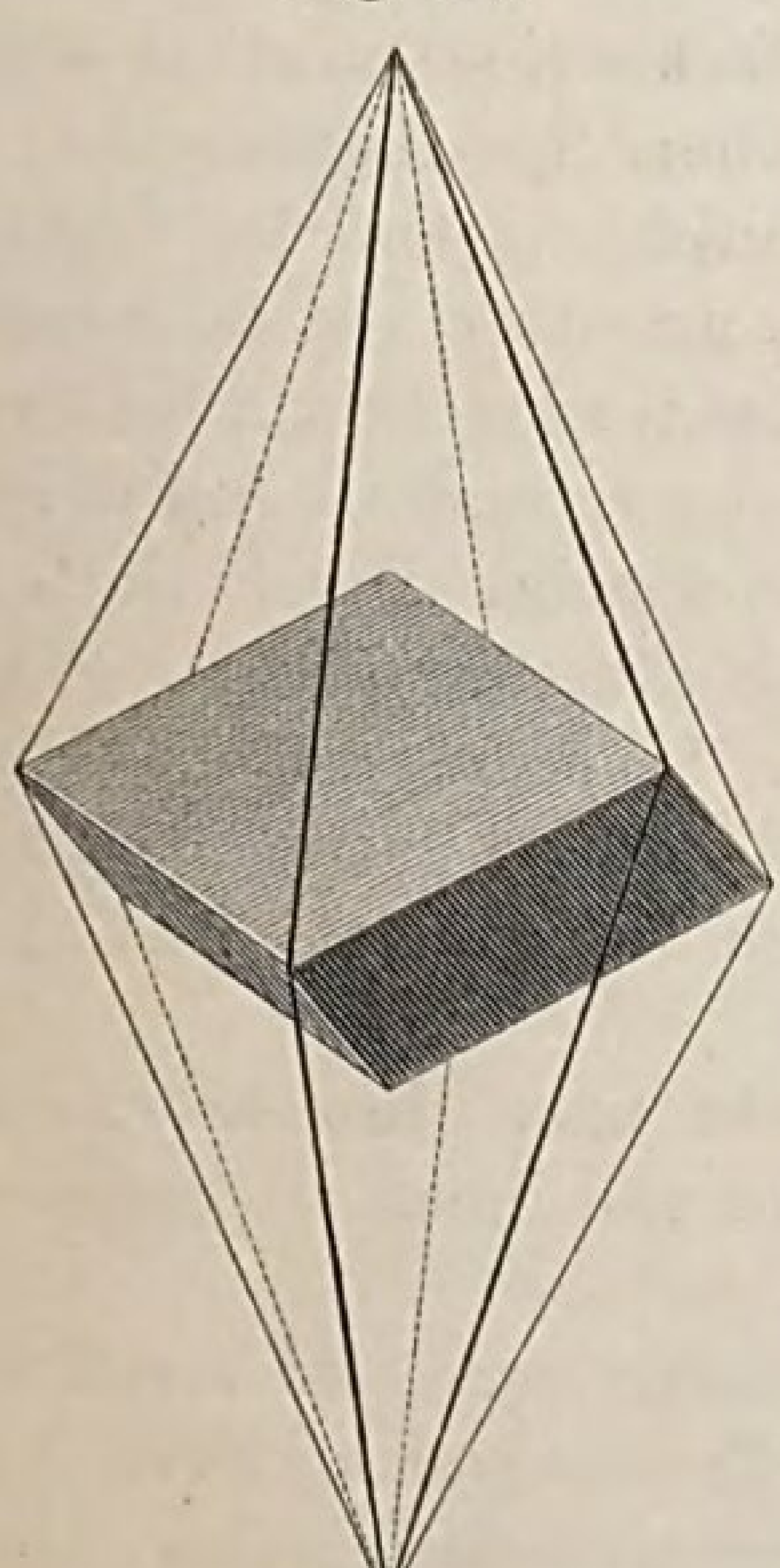


Fig. 41.

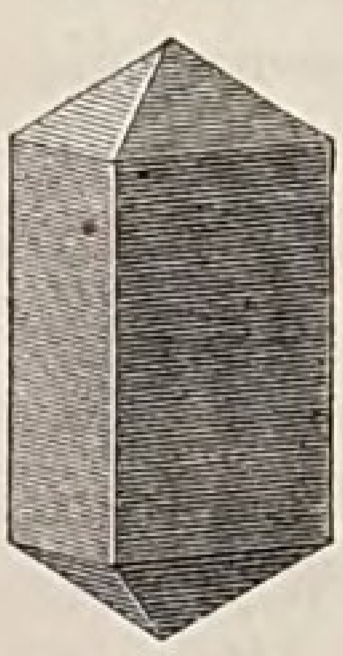
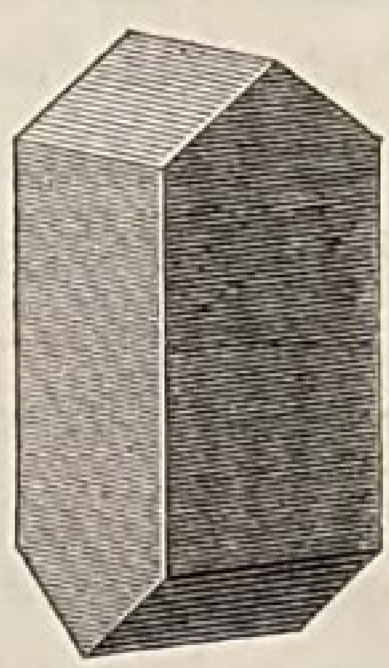


Fig. 42.



dar. Die Dreiecke, durch welche diese Tetraëder begrenzt werden, sind ungleichseitig und deshalb kann man auch das Tetraëder, Fig. 40, durch keinerlei Drehung in die Stellung Fig. 39 bringen. Die beiden Körper Fig. 39 und Fig. 40 sind nicht congruent, sie verhalten sich aber wie Gegenstand und Spiegelbild, wie rechte und linke Hand. Wir haben also hier einen Fall von nicht congruenter oder nicht überdeckbarer Hemiëdrie. Die Sphenoïde kommen nicht isolirt vor, sondern nur in Combinationen mit anderen Flächen, namentlich mit der rhombischen Säule, bei welcher Combination sich auch die Nicht-Ueberdeckbarkeit leichter übersehen lässt.

Fig. 41 stellt eine Combination der geraden rhombischen Säule mit dem rhombischen Octaëder dar, wie sie den Achsenverhältnissen des

Zinkvitriols entspricht. Wenn nun hier nach dem oben für das reguläre Octaëder angegebenen Gesetze die Hälfte der Octaëderflächen durch Wachsen der benachbarten Flächen verschwindet, so entsteht die Combination Fig. 42, welche beim Zinkvitriol und beim Bittersalze sehr häufig beobachtet wird.

Bei den Zuckerkrystallen tritt die Hemiëdrie häufig in der Weise auf, dass die Flächen *d*, Fig. 29, an der vordern Säulenkante fehlen, während sie an der hintern vorhanden sind.

15 **Undurchdringlichkeit und Porosität der Körper, Veränderlichkeit ihres Volumens.** Unter der Undurchdringlichkeit der Körper versteht man jene Eigenschaft derselben, vermöge welcher nicht zwei oder mehrere Körper zugleich ein und denselben Raum einnehmen können. Diese Behauptung darf aber nicht missverstanden werden. Wenn man mit der Hand durch das Wasser oder durch die Luft fährt, so wird weder das eine noch die andere wirklich durchdrungen, sondern nur verdrängt, bei Seite geschoben, und in demselben Raume, den die Hand einnimmt, befindet sich nichts Anderes.

Wenn ein Badeschwamm oder ein Stück Zucker eine Quantität Wasser aufsaugt, so sagt man wohl nach gewöhnlichem Sprachgebrauche, der Schwamm oder der Zucker sei von Wasser durchdrungen. In Wirklichkeit hat aber das Wasser nur die Zwischenräume des Schwammes ausgefüllt und auch beim Zucker ist dies theilweise geschehen, theilweise haben sich Wasser und Zucker zu einer Lösung vereinigt. Auf der Undurchdringlichkeit beruhen einige Vorlesungsversuche. Durch einen fest anschliessenden engen Trichter lässt sich eine Flasche nicht mit Wasser füllen, weil die Luft nicht entweichen kann. Eine unten offene Glocke, die man senkrecht unter Wasser taucht, füllt sich aus demselben Grunde nicht mit demselben an. Hierauf beruht auch die bekannte Taucherglocke.

Unter Porosität der Körper versteht man ihre Eigenschaft, Zwischenräume zu besitzen, so dass also der von ihnen eingenommene Raum nicht ganz mit Materie ausgefüllt ist.

Die Zwischenräume, Poren, sind von sehr verschiedener Grösse; bald von sichtbaren Dimensionen, wie beim Badeschwamm, Kork, Bimsstein etc., bald nur mit dem Vergrösserungsglase wahrnehmbar, wie bei vielen Holzarten und überhaupt bei organisirten Körpern, bald so fein, dass auch die schärfsten Beobachtungsmittel dieselben nicht wahrnehmen lassen, wie bei vielen Steinen, den Metallen und den tropfbaren Flüssigkeiten.

Die Porosität von Holz, Leder etc. wird erwiesen, indem man Wasser oder Quecksilber durch dieselben durchpressen kann (Quecksilberpresse).

Die Porosität von Steinen, wie Achat, Feuerstein, Marmor, wird nachgewiesen durch das Eindringen von Flüssigkeiten, insbesondere von

Oelen etc., in diese Materialien, worauf auch die künstliche Färbung derselben beruht.

Schwieriger nachweisbar ist die Porosität der Metalle. Platin und Eisen lassen im glühenden Zustande Gase hindurchgehen. Alle Metalle aber lassen sich durch Druck oder Abkühlung auf einen kleinern Raum zusammendrängen, was, wenn einmal die Undurchdringlichkeit der Körper feststeht, die Existenz von Poren nothwendig voraussetzt.

Bei den tropfbaren Flüssigkeiten wird ihre Porosität ebenfalls durch die Verminderung ihres Volumens durch Druck und Abkühlung, ausserdem durch die Thatsache bewiesen, dass häufig die Mischung zweier Flüssigkeiten ein kleineres Volumen hat, als die Summe der Volumina vor dem Mischen. Um dies zu zeigen, füllt man eine unten geschlossene Röhre zur Hälfte mit Wasser, zur Hälfte mit Alkohol bis zu einem Theilstriche am Rande. Verschliesst man dann die Oeffnung und vermischt die Flüssigkeiten durch Schütteln, so reicht dieselbe dann nicht mehr bis zu demselben Theilstriche. Will man also nicht die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit für diese Flüssigkeiten fallen lassen, so muss man annehmen, dass sie gegenseitig einen Theil ihrer Poren ausfüllen.

Bei den chemischen Verbindungsvorgängen, sei es, dass es sich um feste, flüssige oder gasförmige Körper handelt, ist das Volumen der Verbindung nicht immer gleich, sondern meistens kleiner als das der Bestandtheile. Auch daraus müssen wir schliessen, dass die Materie der Körper dieselben nicht continuirlich erfüllt, sondern Zwischenräume besitzt.

Es ist üblich und auch wohl zweckmässig, nicht allen diesen Zwischenräumen den Namen Poren zu ertheilen, sondern diesen Ausdruck auf die grösseren Zwischenräume zu beschränken, welche sich direct oder mit dem Mikroskop wahrnehmen oder doch durch Filtrirversuche nachweisen lassen.

Mit den Eigenschaften der Undurchdringlichkeit und der Porosität im engen Zusammenhange steht die Veränderlichkeit des Volumens der Körper.

Ein und derselbe Körper nimmt nicht immer genau denselben Raum ein; er kann durch Drucksteigerung und Erkaltung verkleinert, durch Druckverminderung und Erwärmung vergrössert werden.

Die Luft dehnt sich durch Erwärmung sehr stark aus, wie sich mittelst des Apparates, Fig. 43 (a. f. S.), leicht zeigen lässt. In den Kork, welcher das zum Theil mit dunkel gefärbtem Wasser gefüllte Glasgefäss *A* schliesst, ist eine im Lichten 1 bis $1\frac{1}{2}$ mm weite Glasröhre eingesteckt, welche unten in das Wasser eintaucht, oben aber mit dem ringsum verschlossenen Glasgefäss *B* endigt. — Wenn man *B* mit der warmen Hand berührt, so dehnt sich die eingeschlossene Luft aus und entweicht zum Theil in Form von Luftblasen durch das Wasser. Lässt man nun das Gefäss *B* wieder bis zur Temperatur der Umgebung erkalten, so steigt die Flüssigkeit im Rohre bis zu einer bestimmten Höhe, etwa bis *n*. An

dem so vorgerichteten Apparat wird nun die geringste Erwärmung ein Niederdrücken, jede fernere Erkaltung aber ein Steigen der Flüssigkeitssäule in der Röhre bewirken.

Die Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Wärme lässt sich an dem gewöhnlichen Thermometer zeigen.

Dass auch feste Körper durch Erwärmung ausgedehnt werden, lässt sich durch folgenden von S'Gravesande herrührenden Versuch anschaulich machen.

Eine Metallkugel, an einem Metalldraht hängend, passt kalt ganz genau in den Metallring, Fig. 44, so dass sie eben hindurchgeht, was nicht mehr der Fall ist, wenn man sie über einer Spiritusflamme stark erwärmt hat.

Fig. 43.

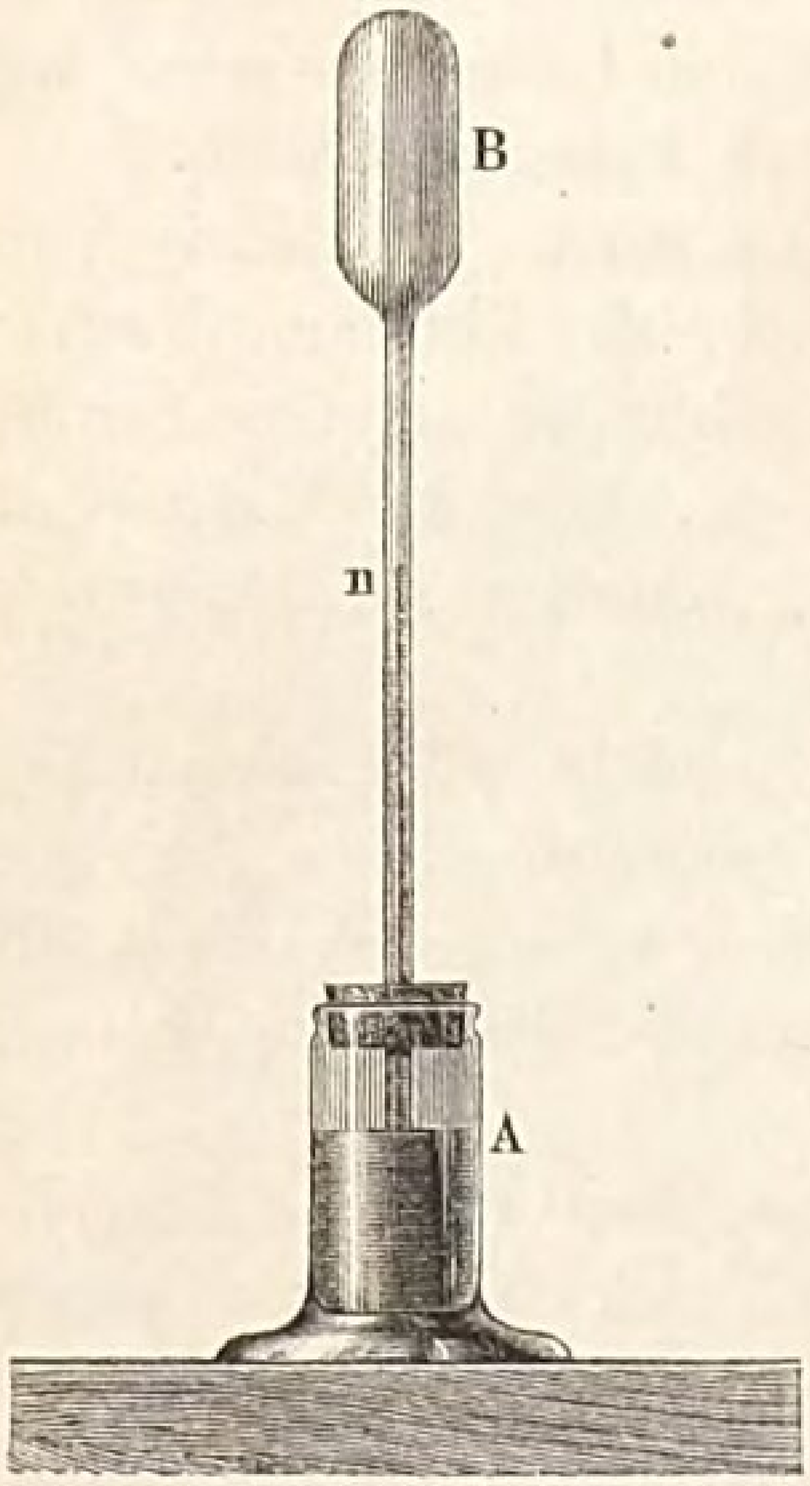
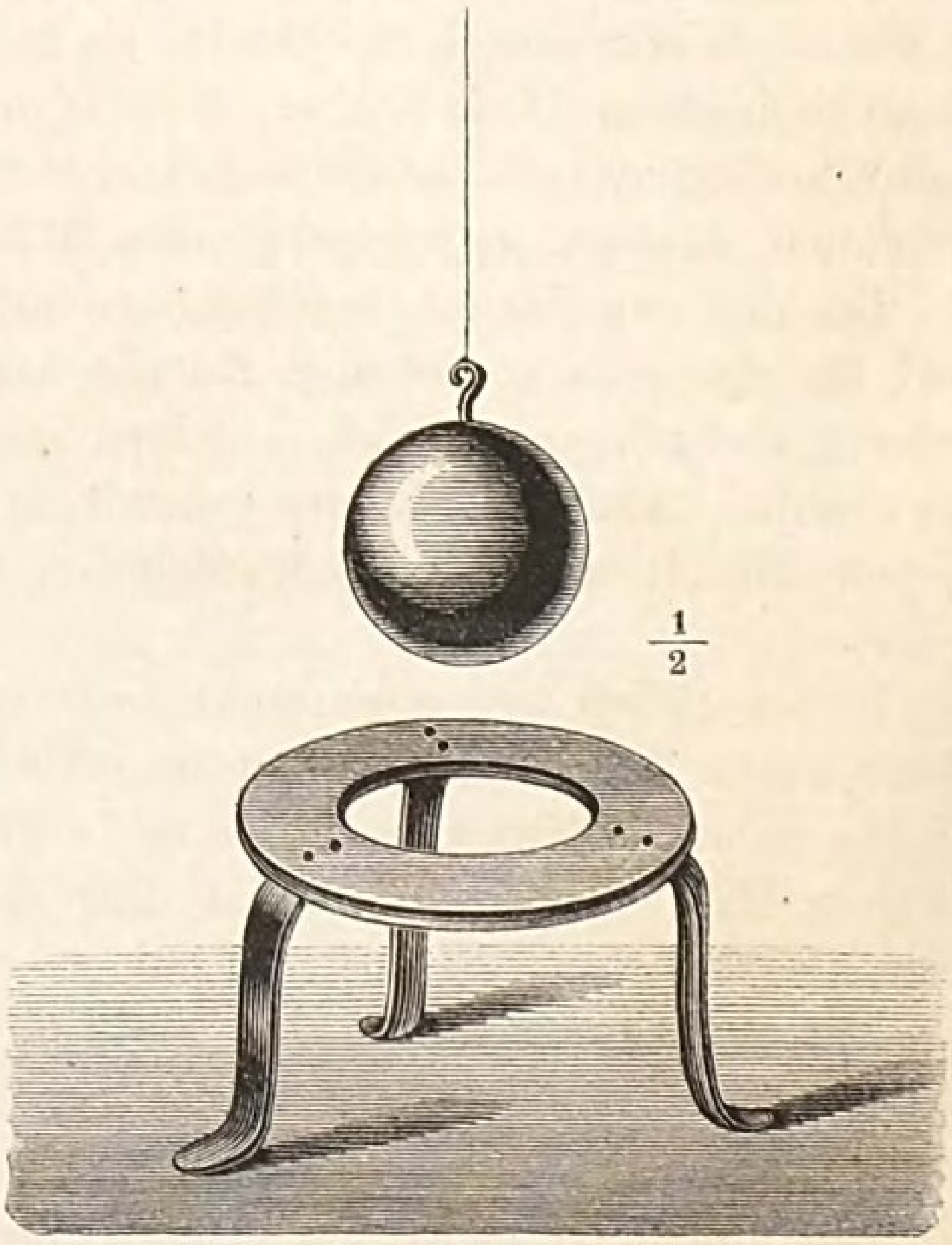


Fig. 44.



Die Gesetze der Ausdehnbarkeit werden wir in der Lehre von der Wärme näher kennen lernen.

So wie die Körper nicht gleiche Ausdehnbarkeit besitzen, so sind sie auch nicht gleich zusammendrückbar.

Münzen und Medaillen erhalten ihr Gepräge durch einen heftigen Stoss des Stempels. Die Gewalt des Stosses ist so gross, dass sich die Buchstaben und das Bild des Stempels dem Metall aufprägen, wie man weichem Wachs durch den Druck der Hand beliebige Formen aufdrücken kann. Was aber hier das Wichtigste ist, das Volumen des gemünzten Stückes ist kleiner als es vorher war. Flüssigkeiten sind im Allgemeinen weit weniger compressibel als feste Körper. Wenn man Wasser

in einen Kanonenlauf einschliesst, dessen Wände 6 cm dick sind, so wird bei Ausübung eines starken Druckes das Metall eher bersten, als man das Wasser auf $^{19}/_{20}$ seines Volumens zusammenpresst.

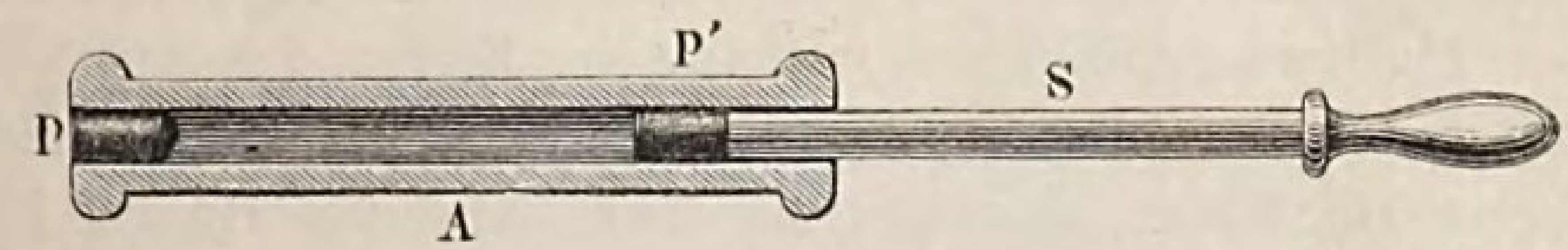
Die Luft und die Gase überhaupt lassen sich unter allen Körpern am leichtesten zusammendrücken; man kann dies durch viele Versuche beweisen, am einfachsten aber schon durch ein Kinderspielzeug, die Hollunderbüchse. Eine Röhre wird an beiden Enden durch Pfropfe p und p' (Fig. 45) verschlossen und dadurch die innere Luft abgesperrt. Wird nun der eine Pfropf mittelst des Stempels S rasch hineingedrückt, so wird die innere Luft comprimirt, bis sie endlich in Folge des wachsenden Drucks den andern Pfropf mit Gewalt hinaustreibt.

Die übrigen Gase haben in dieser Hinsicht genau dieselben Eigenschaften wie die atmosphärische Luft.

Zum Schlusse wollen wir noch auf eine Schwierigkeit aufmerksam machen, auf welche man stösst, wenn man das Volumen der Körper allgemein definiren will. Wir verstanden bis hierher darunter den Raum, den der Körper mitsammt seinen Poren einnimmt.

Wenn nun aber die Poren immer grösser angenommen werden, bis sie endlich, wie beim Bimsstein oder beim Badeschwamm, zu förmlichen

Fig. 45.



Höhlungen werden, so wird die Definition des Volumens eine ganz unbestimmte, da man nicht weiss, von welcher Grösse an diese Höhlungen nicht mehr beim Volumen mitgerechnet werden sollen. Diese Unbestimmtheit entfällt nur bei jenen Körpern, deren Poren von verschwindend kleinen Dimensionen sind gegenüber jenen, welche durch die angewendeten Messmethoden noch messbar sind.

Das metrische Maasssystem. Alle Beobachtungen räumlicher 16
Veränderungen der Körper kommen in letzter Linie auf die Messung von Längen hinaus. Hierzu bedarf man eines Längenmaasses, als welches bei wissenschaftlichen Arbeiten nunmehr fast ausschliesslich das Metermaass mit seinen decimalen Unterabtheilungen gebraucht wird. Durch Quadrirung und Cubirung desselben erhält man die Flächen- und Körpermaasse.

Die Geschichte des Metermaasses ist in Kürze folgende:

Im Jahre 1790 wurde von der französischen Nationalversammlung eine Commission von Gelehrten, zu welcher die bedeutendsten Mathematiker und Physiker Frankreichs, Laplace, Lagrange, Borda, Delambre, Prony, Méchain, Lavoisier gehörten, beauftragt, ein einheitliches Maass- und Gewichtssystem auszuarbeiten. Die Com-

mission beschloss, den 10millionsten Theil des durch die Pariser Sternwarte gesandten Erdmeridianquadranten als Längeneinheit zu wählen und zu diesem Zwecke eine neue Messung dieses Quadranten vorzunehmen. Dies geschah durch Delambre und Méchain 1792 bis 1798 auf dem Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Montjouy bei Barcellona unter Benutzung der Toise als damaliger Längeneinheit. Auf Grund dieser Messung wurde sodann am 25. Juni 1800 die Länge des neuen Maasses, des Meters, gesetzlich zu 0,513074 Toisen = 443,296 Pariser Linien festgestellt. Gleichzeitig wurde ein Stab aus Platin von 1 m Länge, 25 mm Breite und 4 mm Dicke, dessen Endflächen bei 0^0 genau den Abstand der neuen Längeneinheit haben sollten, sowie ein Platingewichtsstück von dem Gewichte eines Cubikdecimeters Massen grösster Dichte von der Commission, welche durch fremde Gelehrte, wie Tralles und van Swinden ergänzt worden war, der Regierung und dem gesetzgebenden Körper vorgelegt und im Archive aufbewahrt.

Die Vorstellung, dass es bei einem etwaigen Verluste dieses Urmaasses möglich sein werde, durch neue Messungen des Erdmeridians dieselben genau in derselben Grösse wieder aufzufinden, ist begreiflicher Weise eine illusorische, denn es ist zu erwarten, das bei jeder solchen Messung, die sich aus sehr vielen Einzelmessungen zusammensetzt, ein etwas abweichendes Resultat sich ergeben werde. In der That beträgt nach Bessel's Berechnungen die Länge des Erdquadranten 10 000 856, wenn man den Meterstab des Archivs = 1 setzt. Der letztere wäre demnach um 0,0856 mm, das ist ungefähr um eines Haares Dicke, zu kurz gerathen.

Selbstverständlich wäre es ganz unausführbar und zwecklos, nach jeder neuen, genaueren Messung der Erde jedesmal das Längenmaass abzuändern. Als Längeneinheit ist daher, strenge genommen, nicht der 10millionste Theil des Erdquadranten, sondern die Länge des Platinstabes im Archiv zu Paris bei 0^0 C. zu definiren.

Leider hat sich später herausgestellt, dass dieser Platinstab nicht gut geeignet sei, um genaue Copien von demselben anzufertigen. Als daher auf der zweiten Conferenz der Mitglieder der „Europäischen Gradmessung" in Berlin 1867 beschlossen wurde, für alle europäischen Länder das Meter als Längeneinheit einzuführen, wurde auch der Plan gefasst, zur Herstellung eines neuen, zweckmässigeren Urmeters, dessen Länge von jener des *Mètre des Archives* möglichst wenig abweichen sollte und zur Anfertigung und Vergleichung der für die verschiedenen Länder bestimmten Copien eine internationale Commission zu bestellen.

Dieser von den Franzosen anfangs mit Misstrauen aufgenommene Vorschlag kam dann endlich nach vielen Verhandlungen und durch den deutsch-französischen Krieg verursachten Störungen in erweitertem Maasse zur Ausführung, indem auch die Herstellung des neuen Normalkilogrammetalons dem von einer Conferenz von 1870 gewählten, am

3. April 1872 in Paris zusammengetretenen internationalen Comité für Maass und Gewicht übertragen wurde.

Da das Platin sich als zu weich herausstellte, so wurde beschlossen, die neuen Meter- und Kilogrammetalons aus einer Legirung von 90 Proc. Platin mit 10 Proc. Iridium, welche sich durch grosse Härte auszeichnet, herzustellen. Da ferner der frühere Platinstab wegen seiner geringen Querschnittsdimensionen zu biegsam war, so wurde für die neuen Meterstäbe eine Form gewählt, deren Querschnitt aus Fig. 46 in natürlicher Grösse ersichtlich ist. Die Länge dieser Stäbe wurde = 102 cm gewählt und die Länge des Meters durch feine Endstriche auf der mit *ab* bezeichneten Fläche markirt.

Fig. 46.



Diese Form bietet mehrfache Vortheile dar. Sie lässt nur eine sehr geringe Biegung zu und gestattet die Anbringung der Endstriche auf der sogenannten neutralen Schichte *ab*, welche bei der Biegung keine Längenänderung erleidet. Ausserdem nimmt ein solcher Stab verhältnissmässig rasch die Temperatur der Umgebung an.

Die französische Section der internationalen Commission, welche die Herstellung der neuen Prototypen des Meters übernommen hatte, kam zwar im Frühjahr 1874 dazu, aus einer auf einmal geschmolzenen Masse von 250 kg Platin - Iridium durch Ausschmieden, Walzen, Hobeln etc. eine Anzahl von Stäben der oben angegebenen Form herzustellen, welche aber wegen eines Eisengehalts von ungefähr 2 Proc. von dem internationalen Comité nicht angenommen wurden.

Die neuen Stäbe wurden dann bei Matthey u. Comp. in London bestellt und der frühere Beschluss, dass alle Stäbe aus einem Gusse stammen sollten, als unpraktisch fallen gelassen.

Im Frühjahr 1875 schlossen die Vertreter von Deutschland, Oesterreich, Ungarn, der Schweiz, Belgien, Dänemark, Frankreich, Italien, Russland, Schweden und Norwegen, Spanien, Portugal, der Türkei, der Vereinigten Staaten, Argentinien, Peru und Venezuela in Paris einen Vertrag zur Gründung eines auf gemeinsame Kosten zu gründenden Instituts unter dem Namen: „Internationales Maass- und Gewichtsbureau", welches dann auch auf der Höhe von St. Cloud bei Paris erbaut und eingerichtet wurde. Dasselbe besteht aus mehreren Beobachtungsräumen, deren Wände hohl sind und durch Einpumpen von Salzwasser auf verschiedene Temperaturen unter und über 0^0 gebracht werden können, während das Tageslicht nur durch eine Oeffnung an der Decke eintreten kann. Daneben befindet sich ein physikalisches Laboratorium zur Vornahme der nöthigen Hülfsarbeiten. Das Institut steht unter der Leitung eines Directors (gegenwärtig Dr. O. J. Broch), dem mehrere Assistenten zur Seite stehen.

Wir geben nachfolgend eine Tabelle der Bezeichnungen und der gebräuchlichen Abkürzungen für die Längenmaasse, welche aus dem

Meter durch decimale Theilung oder Vermehrung gebildet wurden, sowie für die Flächen- und Körpermaasse, welche durch Quadrirung und Cubirung aus diesen abgeleitet worden sind, endlich für die Gewichtsmaasse, deren Ableitung später besprochen werden soll.

Längenmaasse.

10000 Meter	= Myriameter		= Mm
1000 Meter	= Kilometer		= Km
100 Meter	= Hektometer		= Hm
10 Meter	= Dekameter		= Dm
Meter			= m
$\frac{1}{10}$ Meter	= Decimeter		= dm
$\frac{1}{100}$ Meter	= Centimeter		= cm
$\frac{1}{1000}$ Meter	= Millimeter		= mm
$\frac{1}{1000000}$ Meter	= Mikron		= μ

Flächenmaasse.

1000000 Quadratmeter	= Quadrat-Kilometer		= qKm
10000 Quadratmeter	= Quadrat-Hektometer	= Hektar = qHm	= (Ha)
100 Quadratmeter	= Quadrat-Dekameter	= Ar = qDm	= (a)
Quadratmeter			= qm
$\frac{1}{100}$ Quadratmeter	= Quadrat-Decimeter		= qdm
$\frac{1}{10000}$ Quadratmeter	= Quadrat-Centimeter		= qcm
$\frac{1}{1000000}$ Quadratmeter	= Quadrat-Millimeter		= qmm

Körpermaasse.

1 Billion Cubikmeter	= Cubik-Myriameter			= cb Mm
1000 Mill. Cubikmeter	= Cubik-Kilometer			= cb Km
1 Million Cubikmeter	= Cubik-Hektometer			= cb Hm
1000 Cubikmeter	= Cubik-Dekameter			= cb Dm
1 Cubikmeter	= Cubik-Meter	= Kiloliter = Stere	= cbM	= Kl
$\frac{1}{10}$ Cubikmeter		= Hektoliter	. . .	= Hl
$\frac{1}{100}$ Cubikmeter		= Dekaliter	. . .	= Dl
$\frac{1}{1000}$ Cubikmeter	= Cubik-Decimeter	= Liter	= cbdm	= l
$\frac{1}{10000}$ Cubikmeter		= Deciliter		= dl
$\frac{1}{100000}$ Cubikmeter		= Centiliter	. . .	= cl
$\frac{1}{1000000}$ Cubikmeter	= Cubikcentimeter	= Milliliter	= cbcm	= ml
$\frac{1}{1000\ \text{Millionen}}$ Cubikmeter	= Cubikmillimeter		= cbmm	

Gewichts- oder Massenmaasse.

1000000 Gramm	= 1000 Kilogramm = 1 Tonne		
1000 Gramm	= Kilogramm		= Kg
100 Gramm	= Hektogramm		= Hg
10 Gramm	= Dekagramm		= Dg
Gramm	=		= g
$\frac{1}{10}$ Gramm	= Decigramm		= dg
$\frac{1}{100}$ Gramm	= Centigramm		= cg
$\frac{1}{1000}$ Gramm	= Milligramm		= mg

Von diesen sämmtlichen Maassen und deren Bezeichnungen sind nicht alle gleich üblich. Von den Längenmaassen sind die gebräuchlichsten: Kilometer, Meter, Centimeter, Millimeter.

Die in Deutschland officiell eingeführten Namen Stab, Neuzoll und Strich, für letztere drei Längenmaasse haben sich nicht eingebürgert.

Von den Flächenmaassen sind die gebräuchlichsten: Hektar (als Feldmaass), Quadratmeter, Quadratdecimeter, Quadratcentimeter und Quadratmillimeter.

Bei den Körpermaassen sind die Cubi der Längenmaasse in ihrer Grösse zu sehr verschieden, um dem Bedürfniss zu genügen. Man hat deshalb zwischen Cubikmeter und Cubikdecimeter, sowie zwischen letzterem und Cubikcentimeter je zwei Zwischenmaasse eingeschaltet. Am gebräuchlichsten sind die Bemerkungen: Cubikmeter, Hektoliter, Liter, Cubikcentimeter.

Von den aufgeführten Gewichtsbezeichnungen werden Alle angewendet, bei physikalischen Messungen am häufigsten das Kilogramm, das Gramm und das Milligramm.

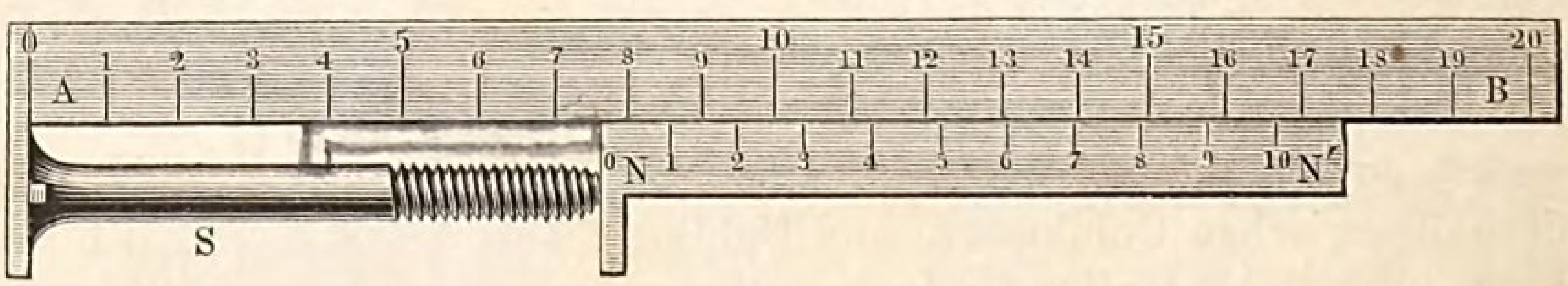
Das metrische Maass- und Gewichtssystem ist in allen europäischen Staaten mit Ausnahme Englands, Hollands und Griechenlands gesetzlich eingeführt, ausserdem in mehreren Staaten Amerikas, so dass jetzt schon ungefähr 350 Millionen Menschen sich desselben bedienen. In den übrigen civilisirten Staaten ist es bei wissenschaftlichen Messungen am meisten üblich und dürfte dessen allgemeine Einführung wohl in Bälde zu erwarten sein.

Nachstehend fügen wir eine Vergleichstabelle für die früher üblichen Längenmaasse bei.

1 Meter =	3,078444	Pariser Fuss,
	3,186199	rheinländische Fuss (Preussen, Dänemark),
	3,280899	englische, russische Fuss,
	3,163446	österreichische (Wiener) Fuss,
	3,333333	schweizerische, badensche Fuss,
	3,426310	bayerische Fuss,
	3,49052	württembergische Fuss,
	3,53120	sächsische Fuss,
	3,42355	hannoverische Fuss.

17 **Hülfsmittel beim Längenmessen.** Die bei einer Längenmessung anzuwendenden Instrumente sind je nach den Umständen sehr verschieden. Die Messung von Längen, welche die Länge der Maassstäbe vielmals übersteigen, durch Messstangen, Messketten etc. wird in geodätischen Werken behandelt, auf welche wir hier verweisen müssen *). Die Vergleichung nahezu gleich langer Maassstäbe geschieht durch Comparatoren, welche bei Endmaassen meist auf dem Princip des Fühlhebels, bei Strichmaassen auf der Anwendung von zwei Mikroskopen beruhen, die man auf die feinen Endstriche einstellt, worauf dann die zu vergleichenden Stäbe auf einer Schlittenvorrichtung abwechselnd unter die Mikroskope geschoben werden. Da ein Private selten in die Lage kommen dürfte, solche meist sehr kostbare Apparate zu benutzen, so gehen wir zur Besprechung solcher Instrumente über, welche zum täglichen Gebrauch des Physikers bestimmt sind.

Fig. 47.



Der Nonius oder Vernier ist eine ebenso einfache als sinnreiche Vorrichtung, welche an unzähligen Instrumenten angebracht wird zu dem Zwecke, die Messung einer Länge oder eines Winkels bis zu einem grössern Grade der Genauigkeit zu bringen, als es die Theilung des Maassstabes oder Kreisbogens unmittelbar gestattet.

Es sei z. B. AB, Fig. 47, ein Maassstab, an welchem die Länge eines Körpers, z. B. der Schraube S, gemessen werden soll. NN' ist der Nonius; er stellt einen kleinen Maassstab dar, welcher längs des Hauptmaassstabes verschoben werden kann. Der Abstand von 0 bis 10 dieses Nonius ist gleich dem Abstande von 0 bis 9 des Hauptmaassstabes.

Da also eine Länge von 9 Theilen des Hauptmaassstabes auf dem Nonius in 10 Theile getheilt ist, so ist jeder Theil des letzteren $= {}^9/_{10}$ eines Theiles des Hauptmaassstabes, also um ${}^1/_{10}$ kürzer als dieser.

Um die Messung auszuführen, legen wir den zu messenden Körper mit dem einen Ende an den Nullpunkt des Hauptmaassstabes bei A und sehen sofort, dass die Länge desselben zwischen 7 und 8 Theile beträgt. Nun schieben wir den Nonius mit seinem Nullpunkte an das andere Ende des zu messenden Körpers und untersuchen, welcher Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche des Hauptmaassstabes genau oder am nächsten zusammenfällt. In unserer Zeichnung ist dies der mit 7 bezeichnete; folglich ist die zu messende Länge $= 7{,}7$. Fallen

*) Z. B. K. Hunäus, Die geometrischen Instrumente etc.

nämlich die Streifen 7 und 14 genau zusammen, so differiren die Striche 6 und 13 um 0,1, die Striche 5 und 12 um 0,2 u. s. f., also endlich die Striche 0 des Nonius und 7 des Hauptmaassstabes um 0,7, welche zur Länge von 7 ganzen Theilen hinzuzurechnen sind, um die Länge des Körpers *s* zu erhalten. Es sind also immer so viele Zehntel zu dem Ganzen hinzuzuzählen, als die Nummer des Theilstriches des Nonius anzeigt, welcher mit einem Haupttheilstrich zusammenfällt.

Nicht immer braucht indess die Theilung des Nonius gerade diese zu sein. Wenn wir 99 Theile des Hauptmaassstabes am Nonius in 100 Theile getheilt hätten, würde derselbe gestatten, bis auf $^1/_{100}$ eines Theiles genau abzulesen. Ist allgemein die Theilung eine solche, dass $n - 1$ Theile des Hauptmaassstabes am Nonius in n Theile getheilt sind, so ist die Ablesung an demselben auf $^1/_n$ eines Haupttheiles genau. Liegt der Nullpunkt des Nonius bei der Ablesung zwischen den ganzen Theilstrichen p und $p + 1$, stimmt ferner der Theilstrich x des Nonius am nächsten mit einem des Hauptmaassstabes, so ist die zu messende Länge $= p + \frac{x}{n}$ Einheiten des Hauptmaassstabes. Statt den Nonius so zu theilen, dass seine Theilstriche um $\frac{1}{n}$ kürzer sind als die des Hauptmaassstabes, kann man ihn auch in der Weise eintheilen, dass sie um $\frac{1}{n}$ länger sind, dass also $n + 1$ Haupttheile $= n$ Noniustheile sind. Nur muss dann die Bezifferung des Nonius, wie leicht einzusehen ist, in umgekehrter Richtung angeschrieben werden. Man heisst diese Gattung Nonien rückwärtsgehende, die früher beschriebene vorwärtsgehende.

Der Versuch, durch Vergrösserung der Zahl n die Ablesung zu einer beliebigen Genauigkeit zu steigern, scheitert an dem Umstande, dass dann wegen der nicht verschwindend kleinen Dicke der Theilstriche immer mehrere derselben mit einander zusammenfallen, so dass man dann nicht mehr weiss, welchen man wählen soll. Es trifft dies bei nicht sehr feinen Theilstrichen schon dann ein, wenn z. B. an einem in Millimeter getheilten Stabe auf Hundertstelmillimeter abgelesen werden soll. In diesem Falle ist der richtige Theilstrich am sichersten zu ermitteln, indem man nicht auf seine Coincidenz allein, sondern auf die symmetrische Lage der Nachbarstriche achtet. Aus diesem Grunde findet man häufig am Nonius an einem oder beiden Enden überzählige Theilstriche angebracht, die man benutzt, wenn der coincirende Theilstrich nahe an eines dieser Enden zu liegen kommt.

Der Name der beschriebenen Vorrichtung stammt von Petrus Nonius oder Pero Nunez, einem Portugiesen, welcher 1492 ein Verfahren angab, um kleine Winkel zu messen, welches dem oben beschriebenen Verfahren nahe verwandt ist. Als der Erfinder der Vorrichtung in seiner jetzigen Gestalt wird meistens der niederländische Schlosshauptmann Paul Werner bezeichnet, der dieselbe 1631 in Brüssel in

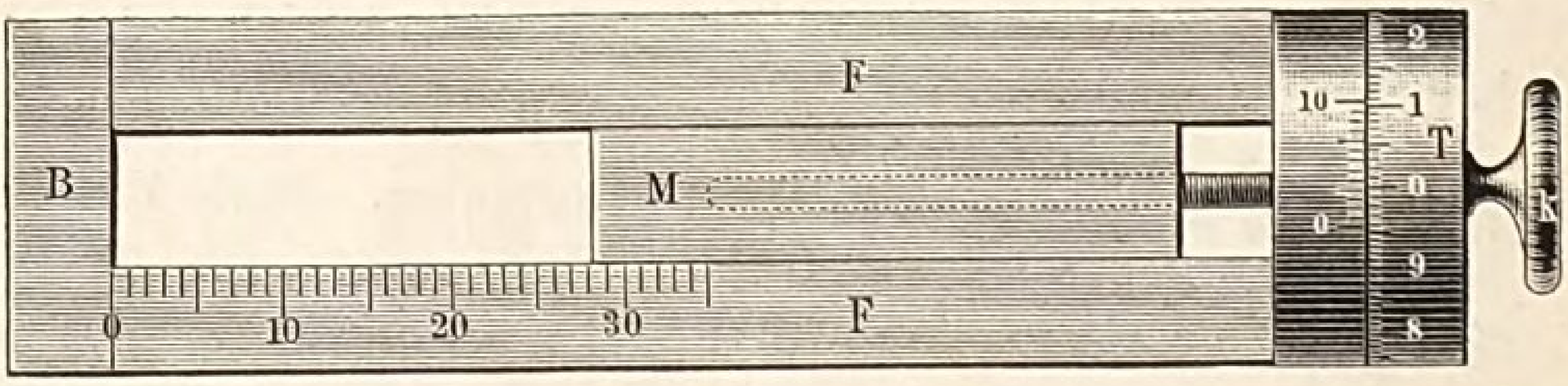
einer mit Paul Vernier unterzeichneten Abhandlung veröffentlicht hat. Breusing hat jedoch jüngst*) nachgewiesen, dass die vollständige Theorie des Nonius schon in dem 1611 erschienenen Werke des Christoph Clavius aus Bamberg enthalten ist.

Ein anderes Hülfsmittel zur Längenmessung ist die Messschraube oder Mikrometerschraube.

Obwohl wir die Schraube als Maschine erst später besprechen werden, können wir doch dieselbe hier als so weit bekannt voraussetzen, um ihre Anwendung beim Längenmessen zu erklären.

Fig. 48 zeigt eine solche Messschraube in einfachster Ausführung. Jede Umdrehung des Schraubenkopfes k hat zur Folge, dass die Schraubenmutter M, welche als Schlitten innerhalb der Führung FF beweglich

Fig. 48.



ist, um eine Strecke gleich dem Abstande der benachbarten Schraubenwindungen (Schraubenhöhe) vorwärts rückt. Die ganze Anzahl der so zurückgelegten Schraubenhöhen ist an der Scala F, die Bruchtheile derselben sind am Umfange der getheilten Trommel T abzulesen. Sobald der Schlitten an seine äusserste Stellung, wobei er an den Backen B anliegt, gelangt ist, beträgt die Ablesung an Scala und Trommel Null. Der abzumessende Körper wird zwischen B und M eingelegt, die Schraube vorsichtig angezogen und ihr Stand abgelesen. Beträgt ein Scalentheil, d. i. die Schraubenhöhe, genau einen Millimeter, so giebt die Ablesung direct die Längen in Millimetern; andernfalls kann sie auf solche reducirt werden, nachdem man den Werth eines Scalentheils ausgemittelt hat. Da es keine Schwierigkeit bietet, die Trommel direct in 100 Theile und mittelst Nonius noch weiter in Zehntel, also im Ganzen in 1000 Theile zu theilen, so lässt sich mit einer solchen Vorrichtung auf $^1/_{1000}$ mm genau messen. Dabei wird freilich vorausgesetzt, dass die Schraube mit entsprechender Genauigkeit gearbeitet und dass alle Vorsichtsmaassregeln getroffen seien, um ein genaues Anschliessen der Schraubenspindel an die Schraubenmutter zu sichern.

Die Schraubentheilmaschine, das ist eine Vorrichtung, um mittelst einer genau gearbeiteten Schraube Längentheilungen auf Maassstäben, Glasröhren u. s. w. anzubringen, beruht auf demselben Principe.

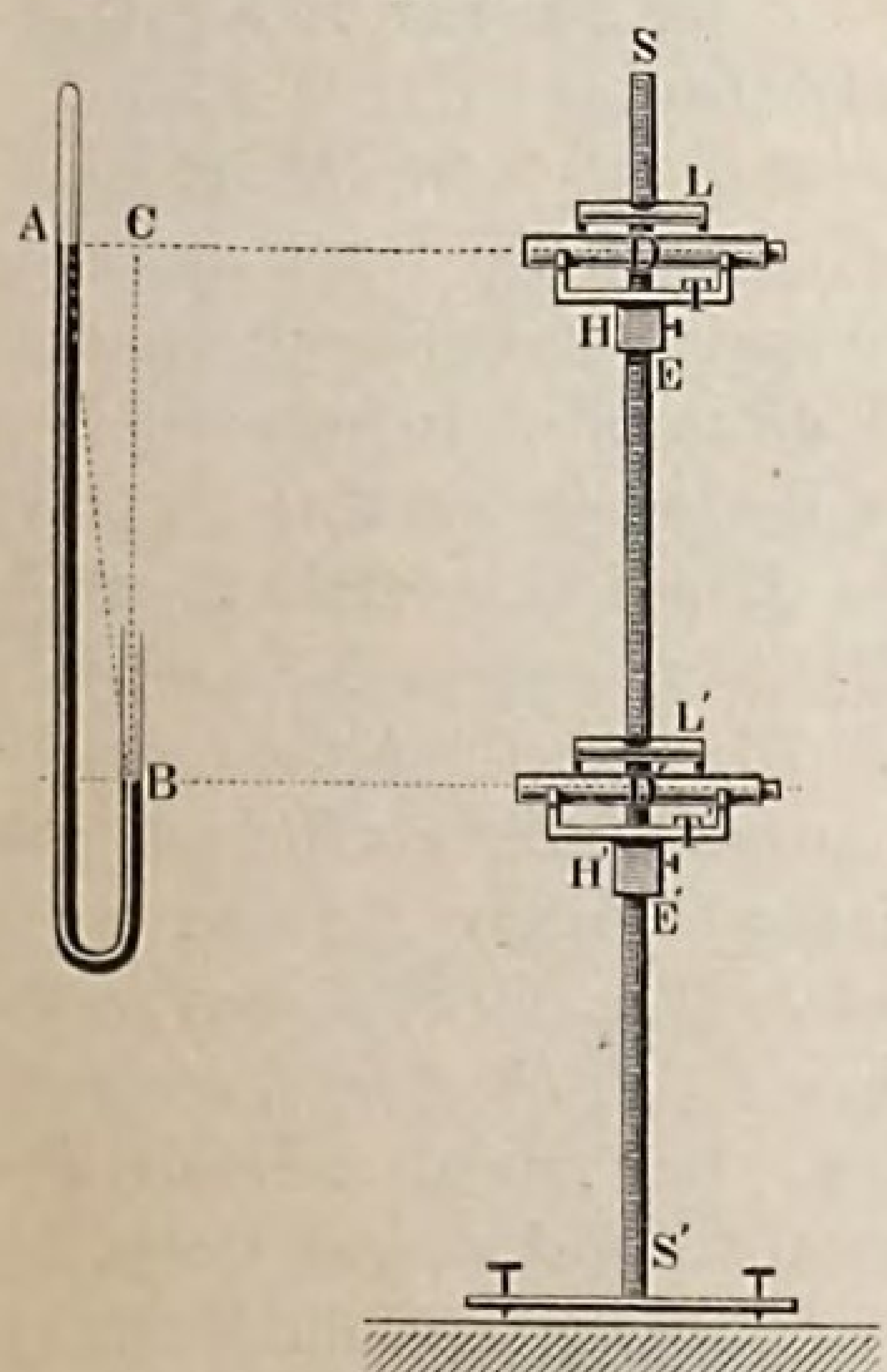
*) Carls' Repertorium XVI, p. 135.

Man erhält von einer solchen eine Vorstellung, wenn man sich in Fig. 48 die bewegliche Schraubenmutter mit einem Reisserwerk verbunden denkt, welches dem schreibenden oder schneidenden Stifte eine Bewegung in einer zur Schraubenachse senkrechten Ebene zu machen gestattet. Der einzutheilende Stab wird parallel zur Schraube auf dem feststehenden Theile des Apparates befestigt. Eigene Vorrichtungen besorgen die Begrenzung der Theilstriche in gewünschter Länge und Lage.

Die Drehung und jedesmalige richtige Einstellung der Schraube wird entweder durch jedesmalige Ablesung der berechneten Trommelstellung oder durch einen automatisch wirkenden Mechanismus bewirkt*).

Messung von Verticalabständen; Kathetometer. In der 18
praktischen Physik kommt häufig die Aufgabe vor, Verticalabstände von Punkten zu messen, welche nicht lothrecht über einander liegen. Man bedient sich zu diesem Zwecke eines Messinstrumentes Namens Kathetometer.

Fig. 49.



Dasselbe besteht in seiner einfachsten Gestalt aus einer auf Dreifuss vertical gestellten Säule, längs welcher ein Gestell verschiebbar und in beliebiger Höhe feststellbar ist.

Das Gestell trägt ein Ablesefernrohr auf kurze Distanz mit einem Fadenkreuz in seinem ausziehbaren Ocularrohr.

Die Säule ist mit einer Längentheilung, meistens in Millimetern, versehen, längs welcher ein an dem beweglichen Gestell befestigter Nonius verschiebbar ist.

Fig. 49 giebt eine schematische Ansicht des Instrumentes und seiner Anwendung.

A B stellt beispielsweise ein Heberbarometer vor, dessen Quecksilberkuppen *A* und *B* den verticalen Abstand *B C* haben. Letzterer Abstand, die Kathete im rechtwinkligen Dreiecke *A B C*, soll gemessen werden; daher der Name des Instrumentes. Die Messung geschieht in der Weise, dass man nach einander das Fernrohr in genau horizontaler Lage auf

*) Näheres über Längentheilmaschinen findet man in Rühlmann's Maschinenlehre, 2. Aufl., Bd. I, S. 257, woselbst auch die einschlägige Literatur zu finden ist.

die beiden Punkte A und B richtet und die zugehörigen Ablesungen am Nonius von einander subtrahirt.

In der einfachen Form der Fig. 49 wäre jedoch das Kathetometer nicht brauchbar. Selten liegen nämlich die beiden Visirlinien nach dem obern und untern Punkte in einer Verticalebene. Es muss also das Fernrohr sammt Gestell um eine verticale Achse drehbar sein, ohne dass dadurch der Nonius seine Stellung gegenüber der Längentheilung verliert.

Wir geben in den Figuren 50a bis f eine perspectivische Zeichnung nebst einigen Durchschnitten durch die wichtigsten Theile eines Kathetometers aus der Werkstätte des Universitätsmechanikers Fr. Müller in Innsbruck.

Man hat daran folgende Bestandtheile zu beachten:

Die cylindrische Säule S aus Eisen (Fig. 50b, c und f), welche in dem Dreifuss D befestigt ist und mittelst der Stellschrauben m, m, m vertical gestellt werden kann. An diese Säule ist der Conus C, Fig. 50b angedreht; am obern Ende (Fig. 50c) ist eine conische Vertiefung angebracht, welche die Spitze der Schraube E aufnimmt. In der Hauptfigur ist diese Säule nicht sichtbar.

Der Hohlcylinder H mit dem Maassstabe M (Figur 50 a, b, c, e, f), ebenfalls aus Eisen. Der Hohlcylinder trägt am untern Ende einen Ring R, welcher mit seiner conischen Oeffnung genau auf den massiven Conus C passt und auf demselben drehbar ist. Am obern Ende ist der Hohlcylinder durch die angeschraubte Platte P geschlossen, welche durch die Schraube E auf der Säule S aufruht. Hierdurch ist also erreicht, dass Hohlcylinder sammt Maassstab um die Mittelsäule gedreht werden können. Die Befestigung der Platte P an dem Hohlcylinder ist in der Weise ausgeführt, dass beiden gegen einander horizontale Verstellungen in jeder Richtung gegeben werden können, wozu die Schrauben s_1, s_2, s_3 und s_4 (Fig. 50d) dienen, welche auf die in Schlitzen beweglichen Schrauben s'_3, s'_4 (Fig. 50e, die andere verticale Schraube nicht sichtbar) wirken. Der mit dem Hohlcylinder ein Stück bildende Maassstab M hat einen trapezförmigen Querschnitt (Fig. 50f) und trägt auf einem eingelegten Silberstreifen die Millimetertheilung.

Der Schlitten FF' besteht in zwei Theilen aus Messing, dem oberen grösseren F und dem unteren kleineren F', welche nur durch die Differentialschraube JJ' mit einander verbunden sind und beide den prismatischen Maassstab von drei Seiten umklammern. Mittelst der Klemmschraube K kann der Theil F' an den Maassstab befestigt werden, worauf die feine Bewegung des Schlittens F mittelst der Differentialschraube J erfolgt. Ausserdem ist dieser Schlitten mittelst einer Darmsaite, welche über die Rolle T gelegt ist und ein Gewicht Q trägt, am Fallen gehindert und mit geringem Kraftaufwande vertical verschiebbar.

Der Schlitten trägt einen Vorsprung *V* mit einem horizontalen Achsenlager, worin die stählerne Achse *a* des Gestells *G' G G'* drehbar

Fig. 50 a.

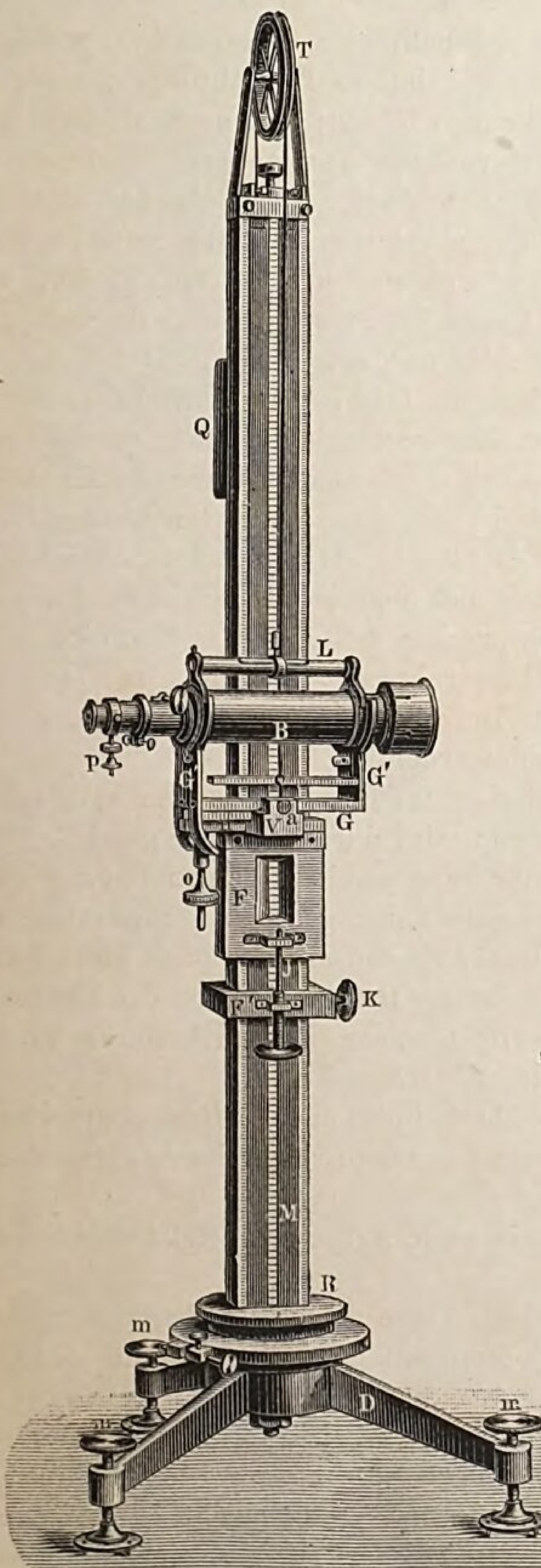


Fig. 50 c.

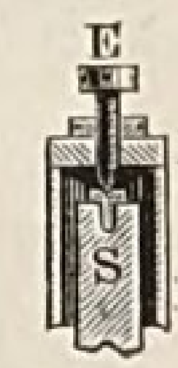


Fig. 50 d.

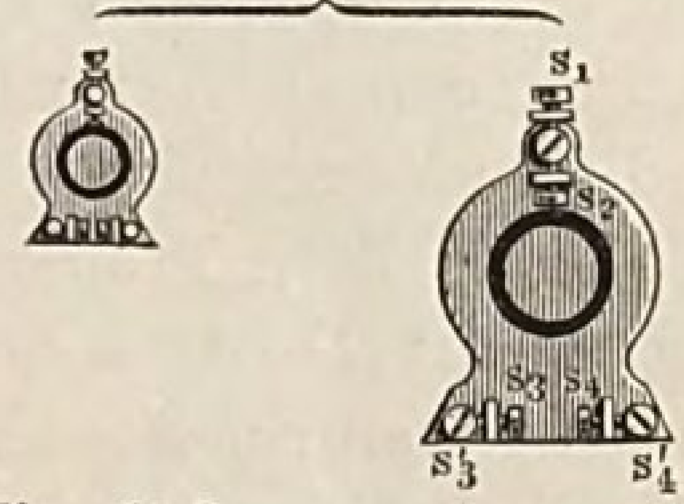


Fig. 50 f.



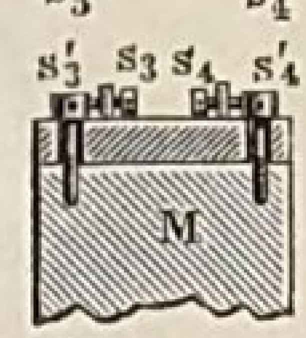
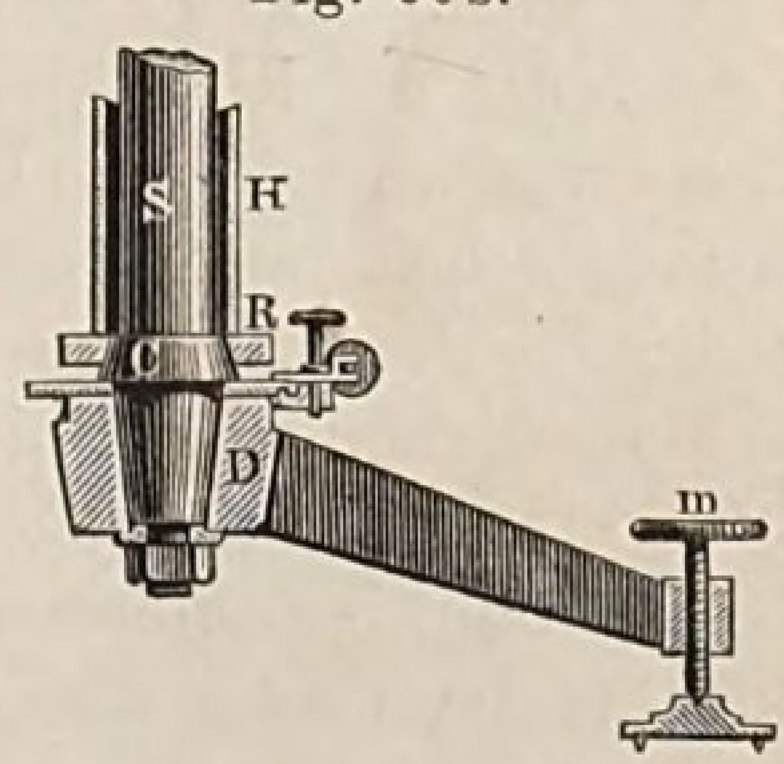


Fig. 50 e.

Fig. 50b.



ist, dessen verticale Theile $G' G'$ in die ringförmigen Träger des Fernrohrs B endigen. Mittelst der Schraube O, welche gegen den vom Schlitten nach links hervorragenden Arm n wirkt, kann das ganze Gestell um die Achse a gedreht werden.

Das Fernrohr B ist ein sogenanntes astronomisches, welches alle Gegenstände verkehrt zeigt. Die innere Einrichtung des Fernrohrs werden wir erst in der Optik kennen lernen; hier muss als bekannt vorausgesetzt werden, dass in dem vorderen ausziehbaren Theile desselben, der Ocularröhre, ein Bild des beobachteten Gegenstandes entsteht und dass in der Ebene dieses Bildes ein feines Fadenkreuz aus einem verticalen und einem horizontalen Spinnfaden ausgespannt ist, welches zugleich mit dem anvisirten Gegenstande scharf und deutlich gesehen wird, wenn man die Röhre richtig ausgezogen hat. Der Rahmen, auf welchem das Fadenkreuz aufgespannt ist, kann mittelst einer Mikrometerschraube p in verticaler Richtung gehoben oder gesenkt und der Betrag dieser Verschiebung an einer im Ocular vorhandenen Scala und an der eingetheilten Trommel der Schraube abgelesen werden.

Die Aufstellung des Fernrohrs auf seinen Trägern ist dieselbe, wie sie bei Nivellirinstrumenten und auch sonst noch häufig vorkommt, weshalb wir sie hier näher besprechen wollen. Das Fernrohr ist nämlich gegen beide Enden des Hauptrohrs mit zwei Ringen aus hartem Rothguss von genau gleichen Durchmessern versehen, welche auf der Drehbank zusammen abgedreht wurden.

Mit diesen Ringen lagert sich das Fernrohr in den halbkreisförmigen Ausschnitten des Trägers und wird durch darüber geschobene Spangen festgehalten. Das Fernrohr kann somit in seinen Lagern um eine durch die Mitte der Ringe gehende Achse gedreht werden; doch schlägt hierbei ein vorstehender stählerner Zapfen an die Spitze einer Schraube, die am Träger befestigt ist, sobald der Horizontalfaden des Fadenkreuzes genau die horizontale Lage angenommen hat. Hierdurch wird dann eine weitere Drehung nach dieser Seite verhindert.

Das Fernrohr kann also überhaupt folgende Bewegungen machen:

1. Drehung um seine eigene mechanische Achse, welche durch die Mittelpunkte der beiden Ringe geht.

2. Drehung um die horizontale Achse a mittelst der Schraube o innerhalb enger Grenzen.

3. Drehung um die verticale Achse des ganzen Instruments, welche oben durch die conische Vertiefung, unten durch die Achse des Conus C der Säule S gegeben ist.

4. Parallelverschiebung in verticaler Richtung und zwar fein mittelst der Differentialschraube J, grob nach Lüftung der Klemmschraube K.

Die Horizontalstellung des Fernrohrs geschieht entweder mittelst einer abnehmbaren Aufsatzlibelle L oder mittelst einer unterhalb des Fernrohrs mit den Trägern $G' G'$ fest verbundenen Libelle. Die Einrichtung einer solchen Libelle wird hier als bekannt vorausgesetzt.

Rectification des Kathetometers. Jedes Kathetometer muss, 19
um richtige Messungen zu ermöglichen, folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Der Maassstab und seine Längentheilung müssen genau vertical stehen.
2. Die Visirrichtung durch das Fernrohr (Collimationslinie) muss genau horizontal sein und es auch bleiben, wenn das Instrument um die verticale Achse gedreht wird. Damit dieses stets der Fall sei, muss:
3. Die verticale Drehungsachse genau senkrecht stehen.
4. Damit die Visirrichtung auch horizontal bleibe, wenn das Fernrohr gehoben oder gesenkt wird, muss der Maassstab genau geradlinig und gegen Verbiegung gesichert sein, sowie der Schlitten enge anschliessen, so dass er keine merkliche Seitenbewegung zulässt. Da letztere Bedingung fast unmöglich ganz zu erfüllen ist, so muss die genau horizontale Stellung des Fernrohrs bei jeder Ablesung ohne weitere Fehlerquelle zu bewirken sein.

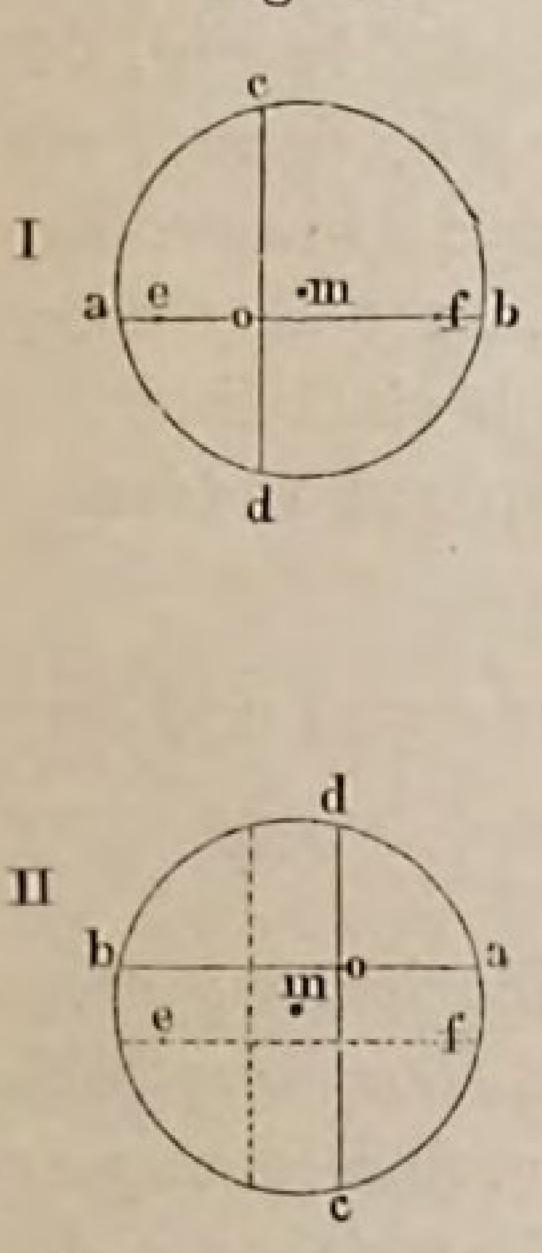
Die Prüfung, beziehungsweise Herstellung dieser Bedingungen kann durch nachfolgende Reihe von Rectificationen ausgeführt werden.

A. Rectification des Fadenkreuzes.

1. Verlegung der Visirlinie in die mechanische Achse des Fernrohrs.

Nachdem man durch Ausziehen der Ocularröhre und eventuell durch Verstellung des Fadenkreuzes in der Richtung der Rohrachse erreicht hat, dass sowohl das anzuvisirende Object als das Fadenkreuz scharf gesehen werden, stellt man durch Drehen des Fernrohrs auf seinen Lagern jenen Faden, welcher als Horizontalfaden dienen soll, vorläufig annähernd horizontal. Richtet man nun das Fernrohr so, dass irgend ein scharf sichtbarer Punkt p genau im Durchkreuzungspunkt der Fäden erscheint, so heisst man die gerade Verbindungslinie dieser beiden Punkte die Visirlinie oder die Collimationslinie des Fernrohrs (optische Achse). Dagegen heisst die Gerade, die man sich durch die Mittelpunkte der beiden Ringe, mit welchen das Fernrohr aufliegt, gezogen denkt, die mechanische Achse des Fernrohrs. Die nachfolgenden Operationen erfordern, dass die Visirlinie mit der letzteren Achse zusammenfalle. Es sei in Fig. 51 I der Kreis das Gesichtsfeld des Fernrohrs, ab der Horizontal-, cd der Verticalfaden, o ihr Durchkreuzungspunkt oder die Projection der Visir-

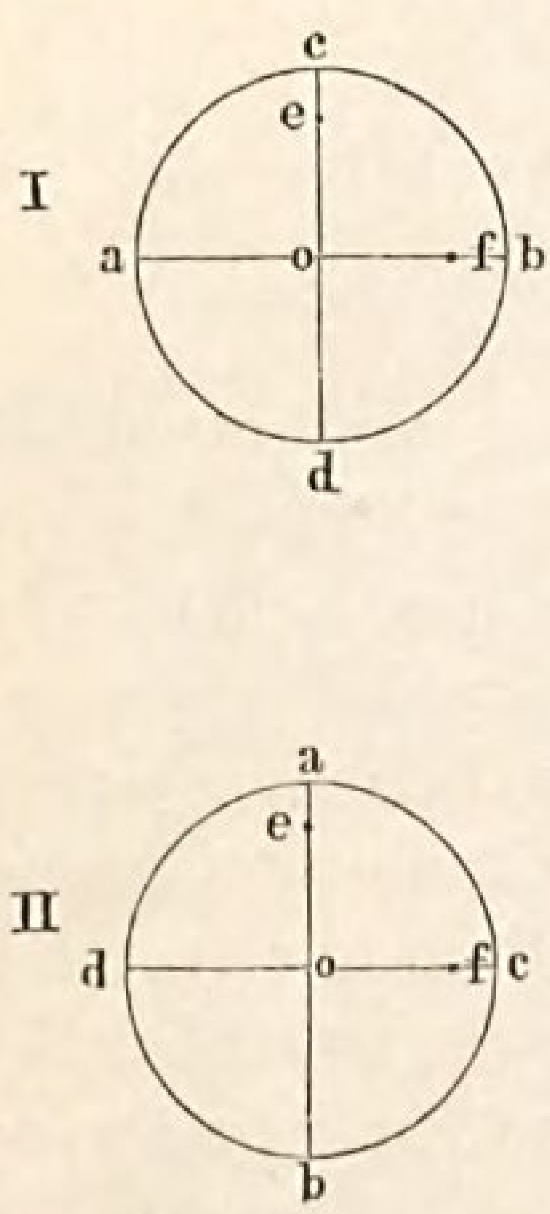
Fig. 51.



linie, *m* die Projection der mechanischen Achse, welcher Punkt natürlich im Fernrohr nicht sichtbar ist; dreht man nun das Fernrohr in seinen Lagern, so beschreibt der Punkt *o* einen Kreis um den Punkt *m*, folglich verlässt der Durchkreuzungspunkt *o* den anvisirten Punkt *p*, ausgenommen, wenn die Visirlinie und die mechanische Achse zusammenfallen. Um dies zu erreichen, stellt man den Horizontalfaden *a b* auf zwei beliebige Punkte *e* und *f*, die man sich auf einer weissen Wand in passendem Abstande angebracht hat, scharf ein, dreht sodann das Fernrohr um 180° in seinen Lagern, also so lange, bis der Faden *a b* in der Lage *b a*, Fig. 51 II, parallel mit der früheren Lage erscheint. Hierauf liest man die Stellung der Schraube *p* ab, dreht dieselbe so lange, bis der Faden *b a* wieder durch die Punkte *e* und *f* hindurchgeht, liest wieder ab und dreht um die Hälfte der Ablesungsdifferenz wiederum zurück. Der Horizontalfaden muss dann durch die mechanische Achse gehen. Auf jeden Fall wird das Verfahren wiederholt, bis dies erreicht ist und dann die Stellung der Schraube *p*, welche dieser Stellung entspricht, ein für allemal notirt.

Dasselbe Verfahren wird nun mit dem Verticalfaden durchgeführt, wobei man sich der zu seiner Verschiebung dienenden Correctionsschrauben bedient. Zum Schlusse darf der Durchkreuzungspunkt *o* den anvisirten Punkt *p* nicht verlassen, wenn das Fernrohr in seinen Lagern gedreht wird.

Fig. 52.



2. Prüfung der Rechtwinkligkeit des Fadenkreuzes.

Man visirt auf drei Punkte *e*, *p* und *f*, welche so gezeichnet sind, dass sie bei *p* einen rechten Winkel bilden. Es muss dann, wenn *o* auf *p* gerichtet wird, beim Drehen einmal wie in Fig. 52 I bei horizontaler Lage des Fadens *a b*, dann nochmals wie in Fig. 52 II bei verticaler Lage desselben Fadens gelingen, die beiden Punkte *e* und *f* durch die Fäden zu bedecken. Zeigt sich ein Fehler, so muss ein neues Fadenkreuz aufgespannt werden.

B. Verticalstellung der Umdrehungsachse des Maassstabes.

Man setzt auf das Fernrohr die Libelle *L* auf (die Einrichtung dieses Instruments wird später besprochen werden, hier jedoch der Hauptsache nach als bekannt vorausgesetzt) und bringt dieselbe durch Drehung der Schraube *o* zum Einspielen. Dreht man hierauf den Maassstab mit dem Hohlkörper um die Säule herum, so kann die Libelle nur dann überall

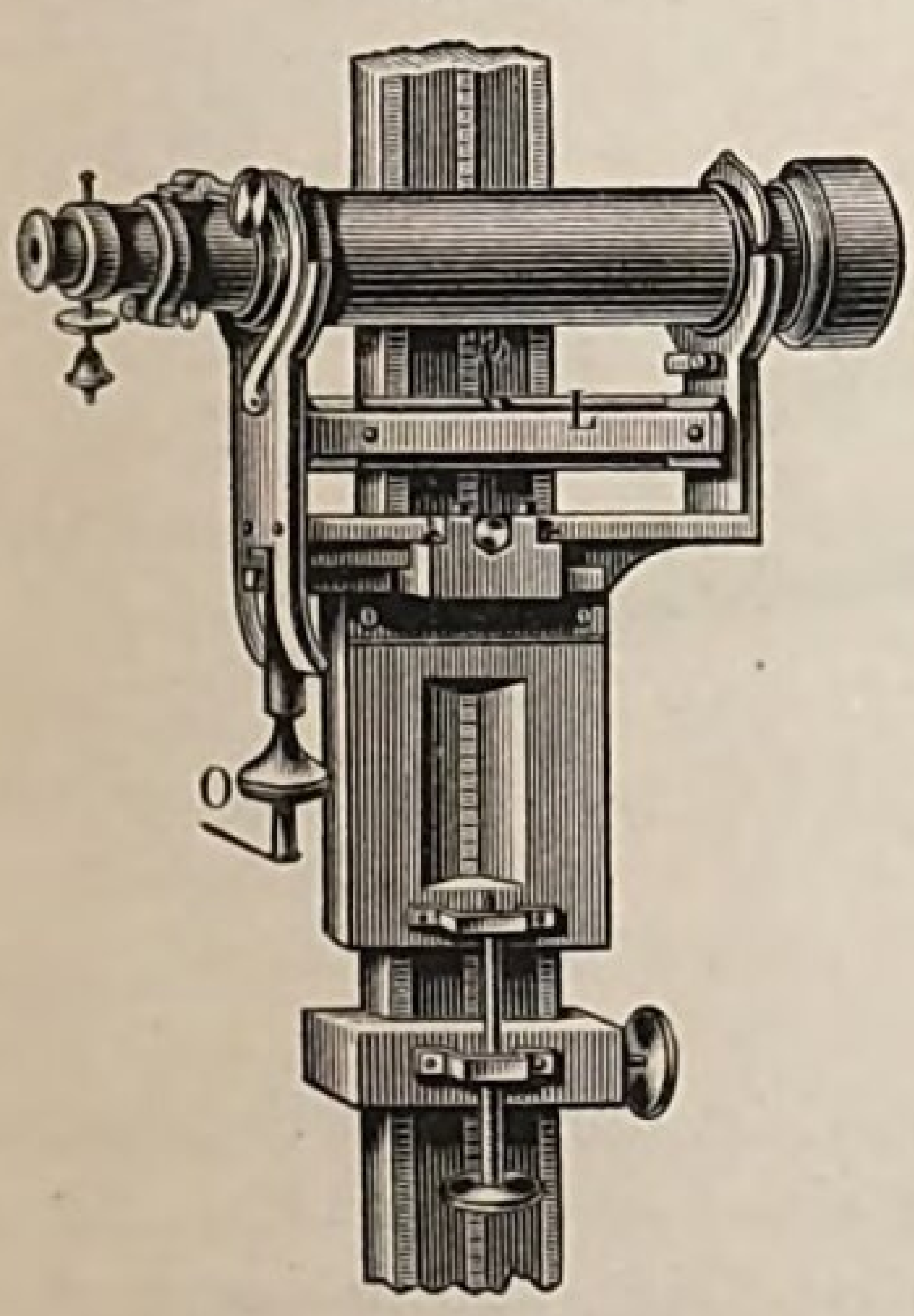
einspielen, wenn die Drehungsachse vertical steht. Man erreicht dies, indem man systematisch an den drei Fussschrauben so lange dreht, bis die Luftblase der Libelle beim Ringsumdrehen ihre Stellung nicht ändert. Bei dieser auch anderweitig sehr häufigen Operation ist es am zweckmässigsten, die Libelle abwechselnd so zu stellen, dass sie einmal zu der Verbindungslinie zweier Fussschrauben parallel steht, dann auf dieser Verbindungslinie senkrecht steht. Hierbei bleibt dann stets die ausserhalb der Libellenrichtung stehende Fussschraube unberührt.

Hat man ferner nach einer dieser Richtungen die Libelle zum Einspielen gebracht und dreht dann um 180°, so corrigirt man die Hälfte der dann eintretenden Abweichung an der Schraube *o*, die andere Hälfte an den Fussschrauben. Schliesslich muss sich die einspielende Libelle ringsum drehen lassen, ohne ihren Stand zu ändern; dann steht auch die Umdrehungsachse vertical.

C. Horizontalstellung der Fernrohrachse.

Diese Operation ist in verschiedener Weise auszuführen, je nachdem die Libelle wie in Fig. 50 a auf die Ringe des Fernrohrs frei auf- und umzusetzen ist, oder wie in Fig. 53 mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist.

Fig. 53.

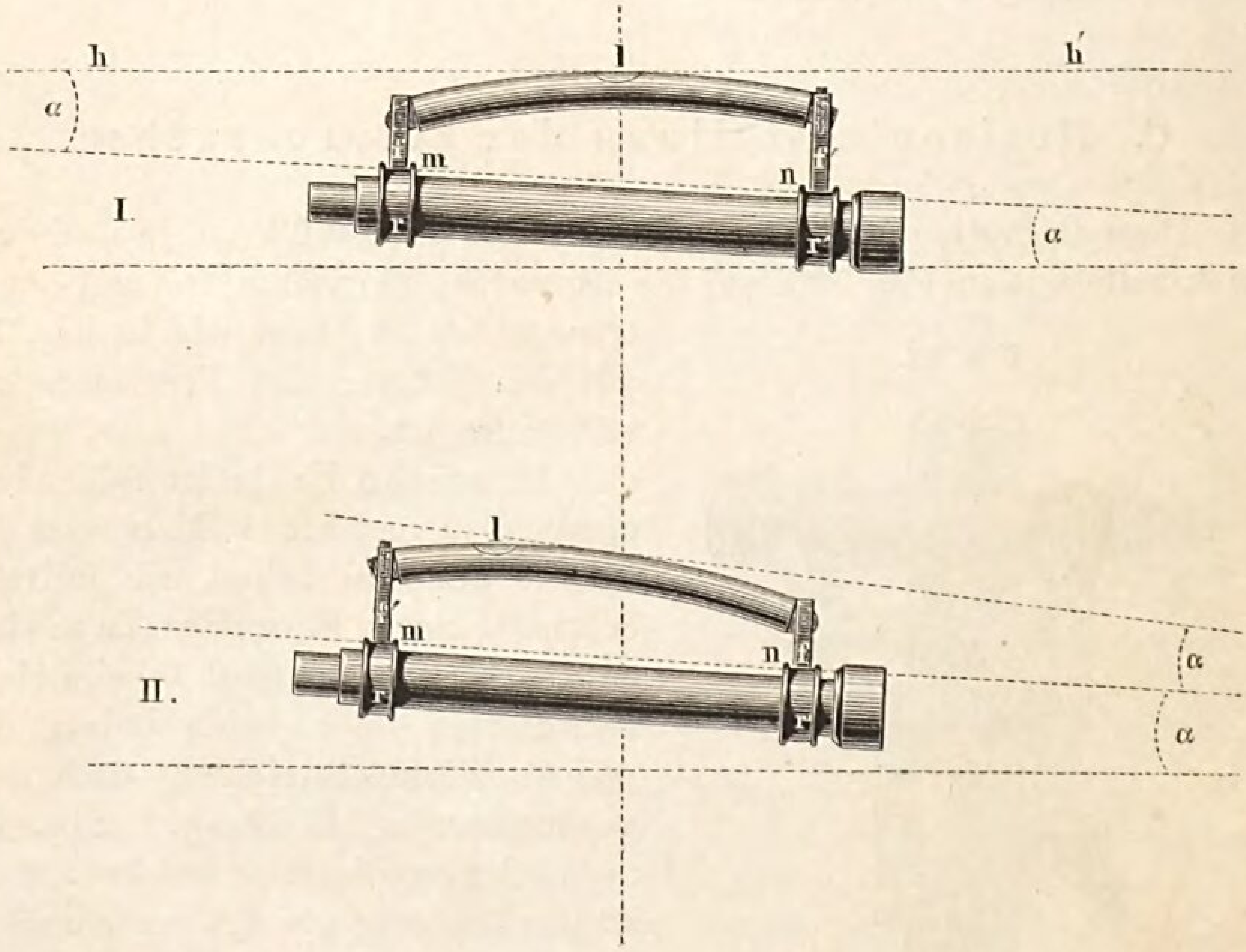


Im ersten Falle ist folgendermaassen zu verfahren: Man setzt die Libelle auf und bringt sie mittelst Schraube *o* zum Einspielen; dann sind entweder Fernrohr und Libelle richtig gestellt oder beide haben die gleiche Winkelabweichung nach entgegengesetzter Richtung. Fig. 54 (a. f. S.) mag dies klar machen. In I ist das Fernrohr geneigt, seine mechanische und optische Achse, sowie die Verbindungslinie mn bilden mit dem Horizont einen Winkel α; denselben Winkel bildet die mit mn zusammenfallende Verbindungslinie der unteren Fussenden der Libellenfassung, welche auf den Ringen r und r' aufruhen, mit der die Mitte der Luftblase tangirenden Horizontalrichtung hh', doch liegt der Scheitel dieses Winkels nach der entgegengesetzten Seite. Das Einspielen der Libelle ist also nur ermöglicht, indem die Stellung der Libellenröhre in ihrer Fassung fehlerhaft ist. Setzt man nun die Libelle umgekehrt auf (Fig. 54 II), so müssen sich die Fehler in den Stellungen des Fernrohrs und der Libellenröhre summiren, statt com-

pensiren; die Abweichung der Luftblase entspricht folglich einem Winkel 2α. Dreht man daher an der Schraube *o* so weit, dass die Libelle wieder einspielt und macht dann diese Drehung um die Hälfte wieder rückgängig, so steht die Fernrohrachse horizontal. Es ist dann an der Libelle mittelst des Adjustirschräubchens bei f' die andere Hälfte des Fehlers zu corrigiren. Dieses Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis eine Umsetzung der Libelle ihren Stand nicht mehr ändert, dann ist sowohl die Libelle richtig adjustirt, als auch die Verbindungslinie der Ringoberflächen, sowie die damit parallelen Richtungen der mechanischen Achse und der Visirlinie horizontal gestellt.

Im zweiten Falle, wenn, wie in Fig. 53, die Libelle *L* mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist, bringt man dieselbe durch

Fig. 54.



Drehung der Schraube *o* zum Einspielen, visirt durch das Fernrohr auf eine weisse Wand und bemerkt sich dort einen scharfen Punkt, der genau im Durchkreuzungspunkt der Fäden erscheint, also in der mechanischen und optischen Achse liegt. Dann hebt man das Fernrohr aus seinen Lagern, dreht das Instrument um die verticale Achse um 180°, legt das Fernrohr in der ursprünglichen Lage gegenüber der Wand wieder ein und visirt auf den früheren Punkt, indem man, wenn es nöthig ist, mit der Schraube *o* dreht.

Zeigt dann die Libelle wiederum den früheren horizontalen Stand, so sind Fernrohr und Libelle richtig gestellt. Zeigt jedoch die Libelle eine Abweichung, so corrigirt und misst man dieselbe mittelst der

Schraube *o* und macht dann die Correction zur Hälfte rückgängig. Die andere Hälfte corrigirt man durch das Adjustirschräubchen der Libelle selbst. Dieses Verfahren ist zu wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt, dann sind Libelle und Fernrohrachse parallel, also letztere horizontal, wenn erstere einspielt.

D. Parallelstellung des Maassstabes zur verticalen Umdrehungsachse.

Wenn auch die verticale Umdrehungsachse des Instruments genau senkrecht gestellt ist, kann doch der Maassstab mit der Längentheilung in zweifacher Weise von dieser Lage abweichen. Erstens kann, wie in Fig. 55 schematisch dargestellt ist, der Maassstab MM' in der dem Fernrohr parallelen Verticalebene aus der mit der Umdrehungsachse SS' parallelen Lage verdreht sein, zweitens kann er (Fig. 56) in der zum Fernrohr senkrechten Ebene abweichen, z. B. unten näher der Umdrehungsachse sein als oben. Die Folge dieser beiden Fehler ist lediglich die, dass die Messungen der Höhenunterschiede zu gross ausfallen. Der schief gestellte Maassstab MM' fungirt nämlich wie ein vertical gestellter, dessen Scalentheile nur die Länge der Verticalprojection der Scalentheile des schiefen Maassstabes besitzen. Der Höhenunterschied hh', Fig. 55, wird gemessen durch die Länge mm'. Derselbe Fehler entsteht in dem durch Fig. 56 dargestellten Falle.

Fig. 55.

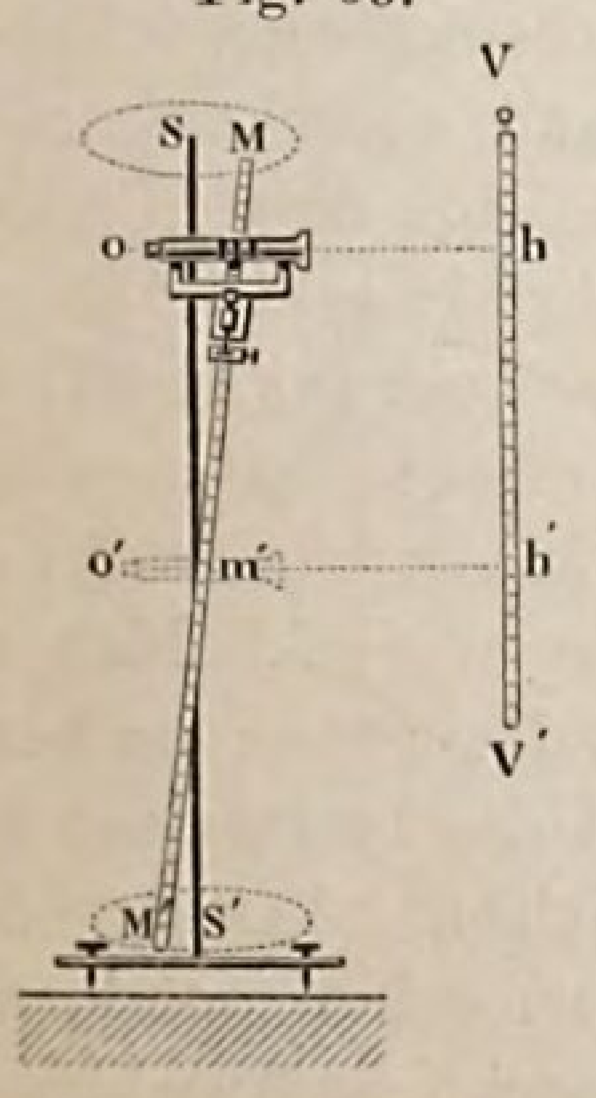
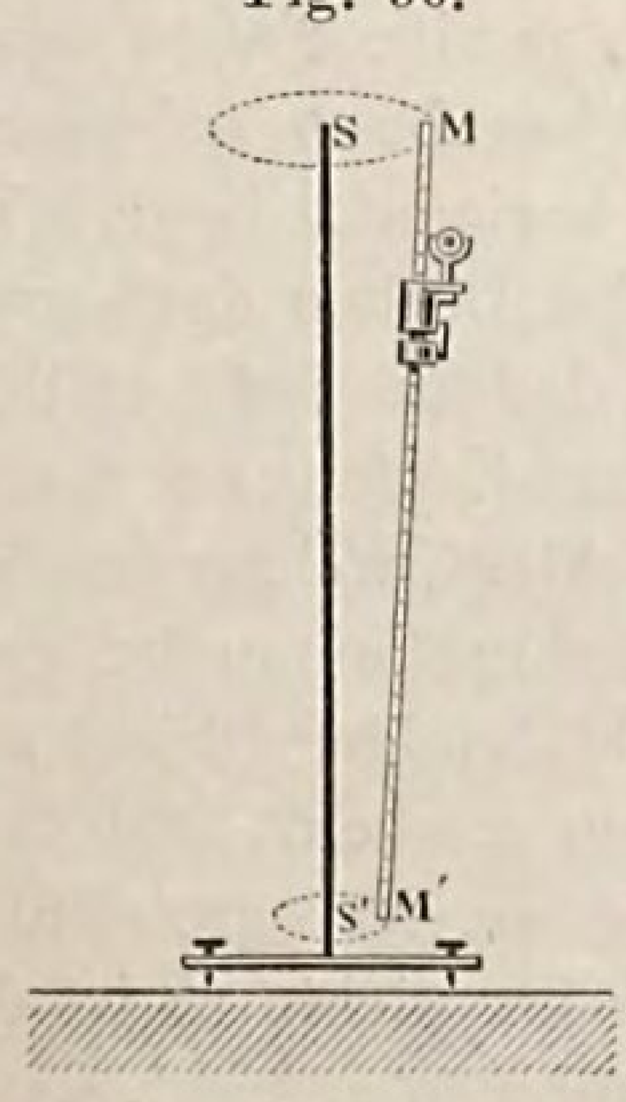


Fig. 56.

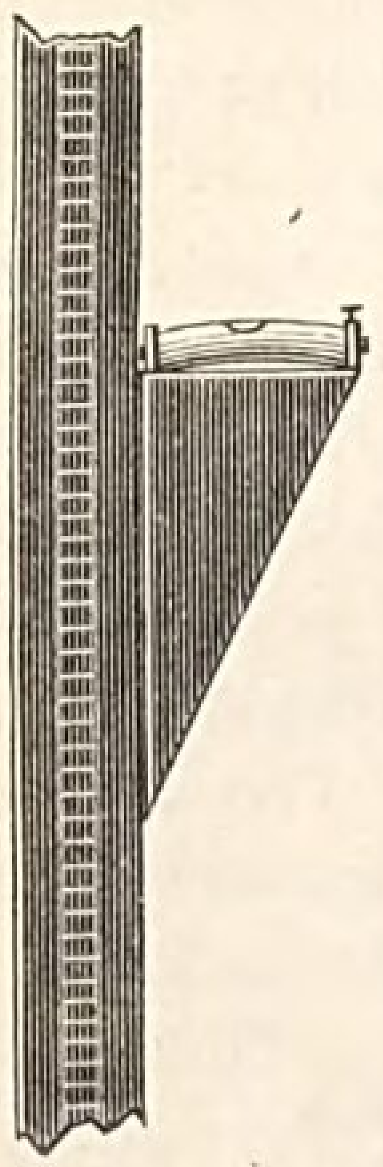


Durch Umlegen des Fernrohrs und Drehung um die verticale Drehungsachse lässt sich dieser Fehler weder erkennen noch rectificiren, da das Fernrohr hierdurch nicht aus seiner Lage kommt, vorausgesetzt, dass die Umdrehungsachse wirklich genau vertical steht. Im Falle der Fig. 56 kann man so verfahren, dass man mit dem Fernrohr einen in Visirdistanz aufgehängten dünnen Seidenfaden, welcher durch ein angehängtes, zur Beruhigung der Schwingungen in Wasser tauchendes Gewicht vertical gespannt wird, anvisirt. Schiebt man dann den Schlitten um grosse Strecken auf und ab, so darf das Bild des anvisirten Fadens den Durchkreuzungspunkt des Fadenkreuzes nicht verlassen. Ein vorhandener Fehler ist mittelst der Schräubchen s_1 und s_2, Fig. 50 d, zu corrigiren. Der in Fig. 55 dargestellte Fehler ist auf diese Weise nicht aufzufinden; man müsste hierzu ein

Hülfsfernrohr in einer zu dem vorhandenen senkrechten Lage am Schlitten befestigen. Am einfachsten kommt man zum Ziele mittelst einer Winkellibelle (Fig. 57), welche an den Seitenflächen des Maassstabes angelegt und längs derselben verschoben wird. Indem man diese Operation auf beiden Seiten vornimmt und darauf achtet, ob die einspielende Libelle ihren Stand nicht ändert, erkennt man, ob der Maassstab senkrecht steht. Zeigt sich ein Fehler, so ist derselbe an den Schräubchen s_3 und s_4 (Fig. 50 d und e), welche auf die Schrauben s'_3 und s'_4 wirken, zu corrigiren.

Endlich könnte man auch so verfahren, dass man mittelst des zu prüfenden Kathetometers die Höhe eines vertical aufgehängten Normalmaassstabes genau misst. Stimmt die am Instrumente abgelesene Höhendifferenz mit der gemessenen genau überein, so steht auch der Maassstab nicht merklich schief zur verticalen Drehungsachse des Instruments, es müsste dann der Fehler der schiefen Stellung durch eine fehlerhafte Länge der Scalentheile eben compensirt werden, in welchem Falle die Messungen nicht unrichtig werden.

Fig. 57.



Nach Vollendung dieser Operationen kann man erst daran gehen, dafür Sorge zu tragen, dass während des Visirens der eine Faden des Fadenkreuzes, welcher durch die Schraube p gehoben und gesenkt werden kann, genau horizontal liege. Die Lage dieses Fadens wird durch das Drehen des Fernrohrs in seinen Lagern geändert und dadurch festgestellt, dass ein aus dem Rohr vorspringender Zapfen an die stumpfe Spitze einer Schraube anschlägt, welche durch eine mit dem Träger G' verbundene Schraubenmutter getragen wird. Man visirt ein punktförmiges Object an, das genau im horizontalen Faden erscheint und dreht das Instrument um die sorgfältig vertical gestellte Achse. Verlässt der Punkt den Faden nicht, so ist derselbe horizontal, wo nicht, wird die erwähnte Schraube so gedreht, dass nach dem Anschlagen des Zapfens obige Bedingung erfüllt ist. Beim Heben und Senken des Fernrohrs mittelst der Schraube o darf dann der verticale Faden ebenfalls einen Punkt nicht verlassen. Damit ist, die Rechtwinkligkeit des Fadenkreuzes vorausgesetzt, auch die horizontale Lage der Achse a constatirt.

Durch die genau horizontale Lage des einen Fadens gewinnt man den Vortheil, dass man die Bilder der anzuvisirenden Objecte nicht nothwendig in den Durchkreuzungspunkt der Fäden einzustellen braucht, sondern an irgend eine Stelle des Horizontalfadens bringen kann; ferner, dass man sich der Mikrometerschraube p zur Messung kleiner Höhenunterschiede bedienen kann, ohne den Schlitten in Bewegung setzen zu müssen.

E. Prüfung und Correction des Ganges des Schlittens.

Damit beim Heben und Senken des Schlittens die Fernrohrachse stets sich parallel bleibe, muss der Schlitten enge an den Maassstab sich anschliessen, zugleich soll er aber sehr leicht beweglich sein. Diese beiden Bedingungen sind schwer zu erfüllen. Man wird daher stets bemerken, dass beim Heben und Senken des Schlittens die Libelle ihren Stand ändert. Denselben Erfolg haben geringe Abweichungen von der Geradlinigkeit des Maassstabes. Die hierdurch hervorgebrachten Abweichungen der Visirlinie von der horizontalen Richtung sind aber eine sehr gefährliche Fehlerquelle, welche, wenn nicht berücksichtigt, die ganze Genauigkeit der Messung vollständig illusorisch machen kann. Bei einer Visirdistanz von D Metern bringt eine Winkelabweichung der Visirlinie $= \alpha$ einen Fehler in der Höhenmessung $= D \tang \alpha$ hervor; dies beträgt z. B. für $D = 1$ m und $\alpha = 5$ Secunden schon 0,025 mm; bei grösseren Visirdistanzen nimmt der Fehler im Verhältnisse derselben zu. Es ist daher unerlässlich, vor jeder Ablesung mittelst der Schraube o das Fernrohrgestell um die Achse a so zu drehen, dass die Libelle, welche sehr empfindlich sein muss, aufs Genaueste einspielt.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese Drehung nicht, indem sie den Fehler der schiefen Stellung der Visirlinie beseitigt, einen andern Fehler herbeiführen kann. Die richtige Messung der Höhendifferenzen setzt voraus, dass bei der untern Ablesung wie bei der obern der verticale Abstand zwischen dem Nullpunkte des Nonius am Schlitten und der Visirlinie des Fernrohrs constant bleibe. Damit dieses der Fall sei, muss vor Allem die Achse a senkrecht über dem Nullpunkte des Nonius in der Verlängerung seiner Kante liegen. Denn liegt diese Achse seitwärts, so wird durch deren Drehung die Fernrohrachse nicht bloss gedreht, sondern auch gehoben oder gesenkt. Wir machen auf diesen Umstand aufmerksam, weil Kathetometer aus sonst renommirten Werkstätten mit diesem Fehler behaftet sind, der durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Die richtige Lage der Achse a vorausgesetzt, besteht der verticale Abstand der Fernrohrachse vom Nullpunkte des Nonius aus zwei Theilen. Einmal aus dem Abstand der Fernrohrachse von der Achse a, dann aus dem Verticalabstand der Achse a vom Nullpunkte des Nonius. Der erstere dieser Abstände ist stets constant, da ja das Fernrohr immer mit der Libelle gerichtet wird; der zweite dieser Abstände ist aber nicht constant, wenn der Schlitten schief steht; denn dann steht auch die Verbindungslinie zwischen Noniusnullpunkt und Achse a schief und es kommt statt derselben ihre senkrechte Projection in Betracht. Ist dieser Abstand $= d$, die Winkelabweichung $= \alpha$, so beträgt die Projection von d auf die

Verticale $d \cdot \cos\alpha$ und der Fehler in der Höhenmessung $d - d\cos\alpha = d(1 - \cos\alpha)$, eine Grösse, welche unter allen Umständen verschwindend klein bleibt, wie man sich durch eine Proberechnung überzeugen kann.

Unter der Bedingung, dass die Achse *a* die richtige Stellung habe, ist also nicht zu fürchten, dass durch Correction der Fernrohrstellung an der Schraube *o* ein merklicher Fehler entstehen könne.

F. Richtigkeit der Scala, Temperaturcorrection, genaueste Methode der Messung.

Nach den vorausgegangenen Prüfungen ist nun nur noch die Richtigkeit der Scala zu untersuchen, was nur durch Vergleichung mit einem Normalmaassstab, auf den man visirt, möglich ist; auch kann man wohl einen constanten Höhenunterschied an verschiedenen Stellen des Instrumentes wiederholt messen. Dabei ist nun aber zu berücksichtigen, dass die Temperatur des Maassstabes einen nicht unbedeutenden Einfluss auf die Länge der Theilung hat, wie wir in der Wärmelehre näher auseinandersetzen werden. Hier genüge anzuführen, dass z. B. die Messung einer Barometerhöhe (760 mm) um nahezu 0,1 mm kleiner ausfällt, wenn der Maassstab um 10^0 wärmer ist. Schon die unvermeidlichen Erwärmungen des Instruments durch die Nähe des menschlichen Körpers können bei sehr genauen Messungen störend wirken. Sicherer ist daher folgendes Verfahren: Man hängt neben den zu bestimmenden Höhenunterschied einen in Millimeter getheilten Normalmaassstab senkrecht auf, dessen Temperatur genauer ermittelt werden kann, als jene des Maassstabes des Instruments. Man visirt auf den oberen Punkt des Objects bei genau einspielender Libelle, dreht dann das Instrument um die verticale Achse, so dass der Normalmaassstab im Fernrohr erscheint, controlirt neuerlich die Libelle und liest am Normalmaassstab den Stand des Horizontalfadens ab, wobei man zwischen den nächsten Theilstrichen mittelst der Mikrometerschraube *p* interpolirt. Ebenso verfährt man am unteren Ende und nimmt dann die Differenz der Ablesungen. Noch sicherer ist ein Verfahren, welches wir im Institut der internationalen Metercommission in Paris in Anwendung gesehen haben, nach welchem bei feststehendem Kathetometer mit zwei Fernrohren auf die Endpunkte des zu messenden Objectes visirt und letzteres dann mittelst einer Drehvorrichtung an Stelle des Normalmaassstabes gebracht wird, den man dann anvisirt. Begreiflicher Weise ist dieses Verfahren nur in speciellen Fällen anwendbar.

Wir schliessen unsere Mittheilungen über das Kathetometer mit der Bemerkung, dass dasselbe, wenn gut construirt und rectificirt, ein vorzügliches Instrument ist, dass es aber zu den gröbsten Fehlern Anlass geben kann, wenn es diesen Bedingungen nicht entspricht oder nicht mit Sachkenntniss behandelt wird. Dieser Umstand mag zugleich die

Ausführlichkeit rechtfertigen, mit welcher wir das Instrument hier besprochen haben.

Messung von Winkeln, Theodolit. Um einen Winkel zu 20
messen, verfährt man im Allgemeinen so, dass man einen am Rande eingetheilten Kreis in die Ebene des Winkels und zwar mit dem Mittelpunkte in den Scheitel des letzteren verlegt und dann den von den Schenkeln des Winkels an der Peripherie eingeschlossenen Bogen durch Subtraction der beiden Ablesungen ermittelt. Ist die Lage des Scheitels, sowie die Richtung der beiden Schenkel des zu messenden Winkels nur durch drei Punkte gegeben, so bedürfen wir noch eines Bestandtheils, nämlich eines an dem Kreise angebrachten, um den Mittelpunkt desselben drehbaren Radius, welchen wir auf geeignete Weise (durch Anlegen oder Visiren) nach einander in die Richtungen der beiden Schenkel bringen.

Man heisst den getheilten Kreis den Limbus, den drehbaren Radius die Alhidade.

Meistens ist der Limbus fest mit dem Fussgestell des Messinstrumentes verbunden, die Alhidade dagegen beweglich und trägt dann die Visirvorrichtung in Form eines Diopters oder häufiger eines Fernrohrs mit Fadenkreuz, ausserdem einen oder mehrere Nonien, welche an den Theilstrichen des Limbus entlang gleiten. Manchmal ist aber auch der Limbus in Verbindung mit dem Fernrohr der drehbare Theil, während der die Nonien tragende Theil feststeht.

Die zu messenden Winkel können in Ebenen verschiedener Lage liegen. Man hat daher zu deren Messung Horizontalkreise (= Azimuthalkreise), Verticalkreise, Aequatorialkreise etc.

Für die physikalischen Messungen genügt ein Instrument, welches zur Messung von Horizontal- und Verticalwinkeln dient. Dasselbe führt den (erst neuestens aufgeklärten) Namen Theodolit*). Die Hauptbestandtheile eines solchen, sowie deren Anordnung, welche übrigens mannigfaltigen Abänderungen unterliegt, mögen aus den schematischen Figuren 58, 59, 60 (a. f. S.) ersehen werden, welche einen Theodolit einfachster Construction im Aufriss, Grundriss und gewendeten Aufriss darstellen.

Auf einem mit drei Fussschrauben S versehenen starken metallenen Gestelle G ist die den Limbus tragende Metallscheibe LL befestigt. Auf beziehungsweise innerhalb derselben ist mittelst des conischen Zapfens C die Scheibe AA als Alhidade mit den Nonien nn drehbar. Mit ihr bewegen sich die Träger TT der beiden Achsenlager der horizontalen Fernrohrachse H, welche selbst an einem Ende den Verticalkreis V trägt, welcher zwischen den festgehaltenen Nonien $n'n'$ zusammen mit dem Fernrohr F drehbar ist. Für die Rectification des Instrumentes ist es vortheilhaft, wenn die Träger TT so hoch sind, dass sie dem Fernrohr

*) Siehe K. Zöppritz, Wiedem. Ann. XX. 176; danach stammt Theodolit von dem englischen *The alydeday* (alhidade), dieses aus dem arabischen *hadâ*, führen.

die volle Drehung um seine horizontale Achse ermöglichen oder wenigstens den Durchgang einer Hälfte unter der Achse. Man sagt dann, das Fernrohr ist „durchschlagbar". Ein weiterer Vortheil ist darin vor-

Fig. 58.

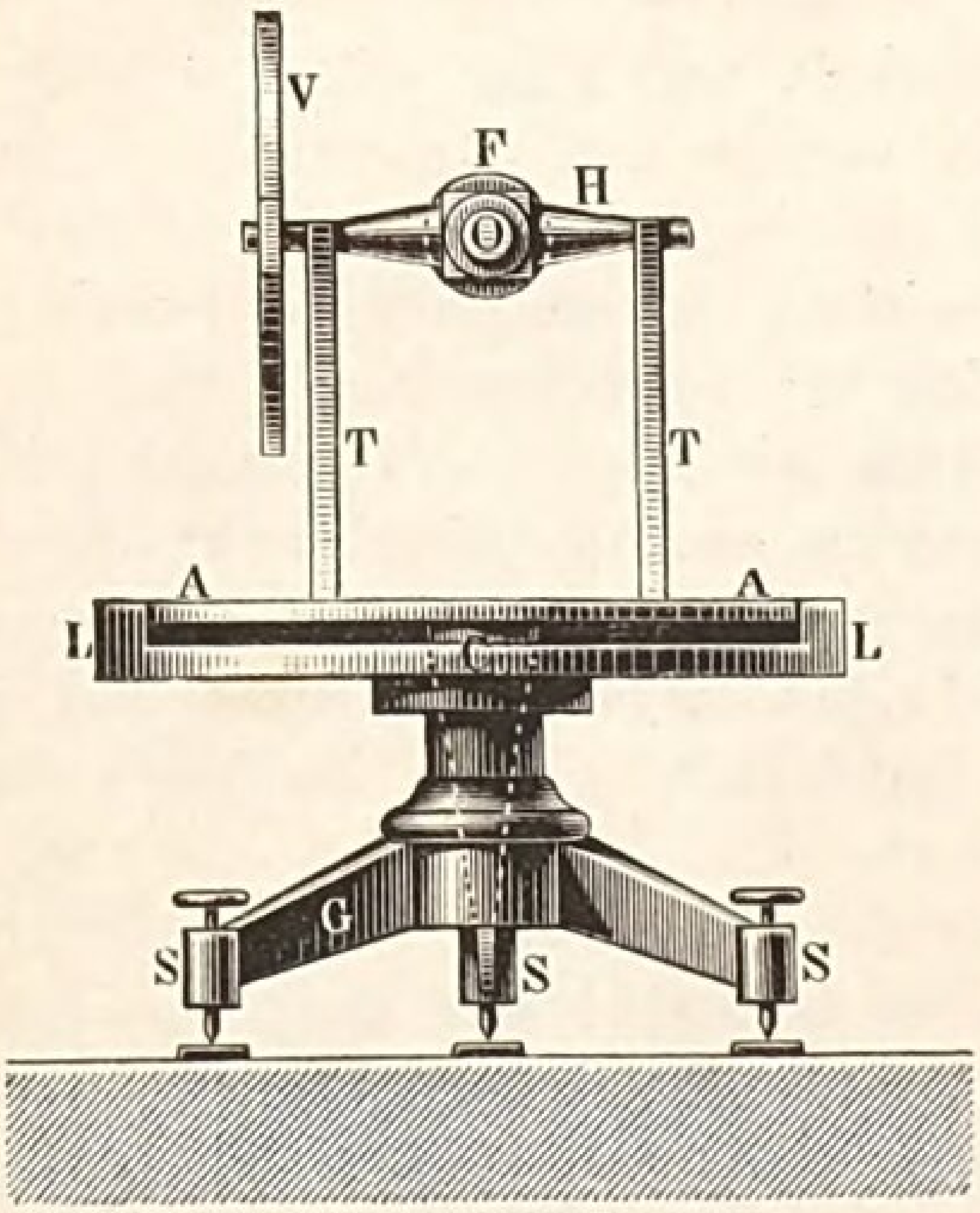
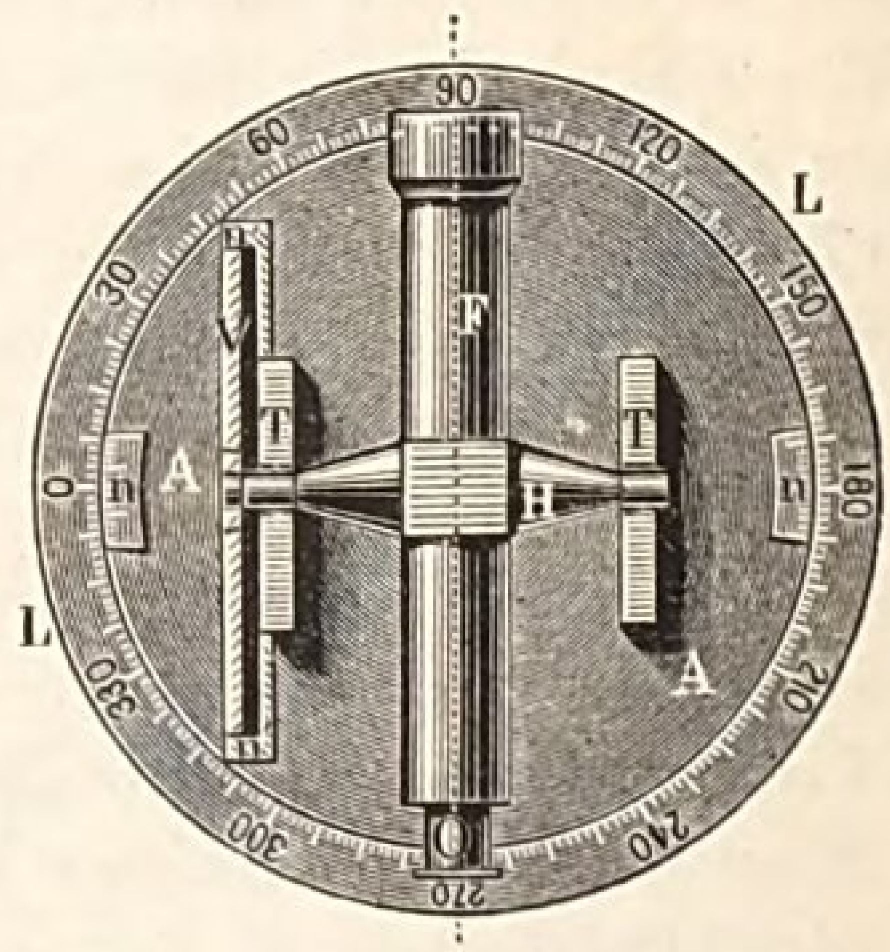
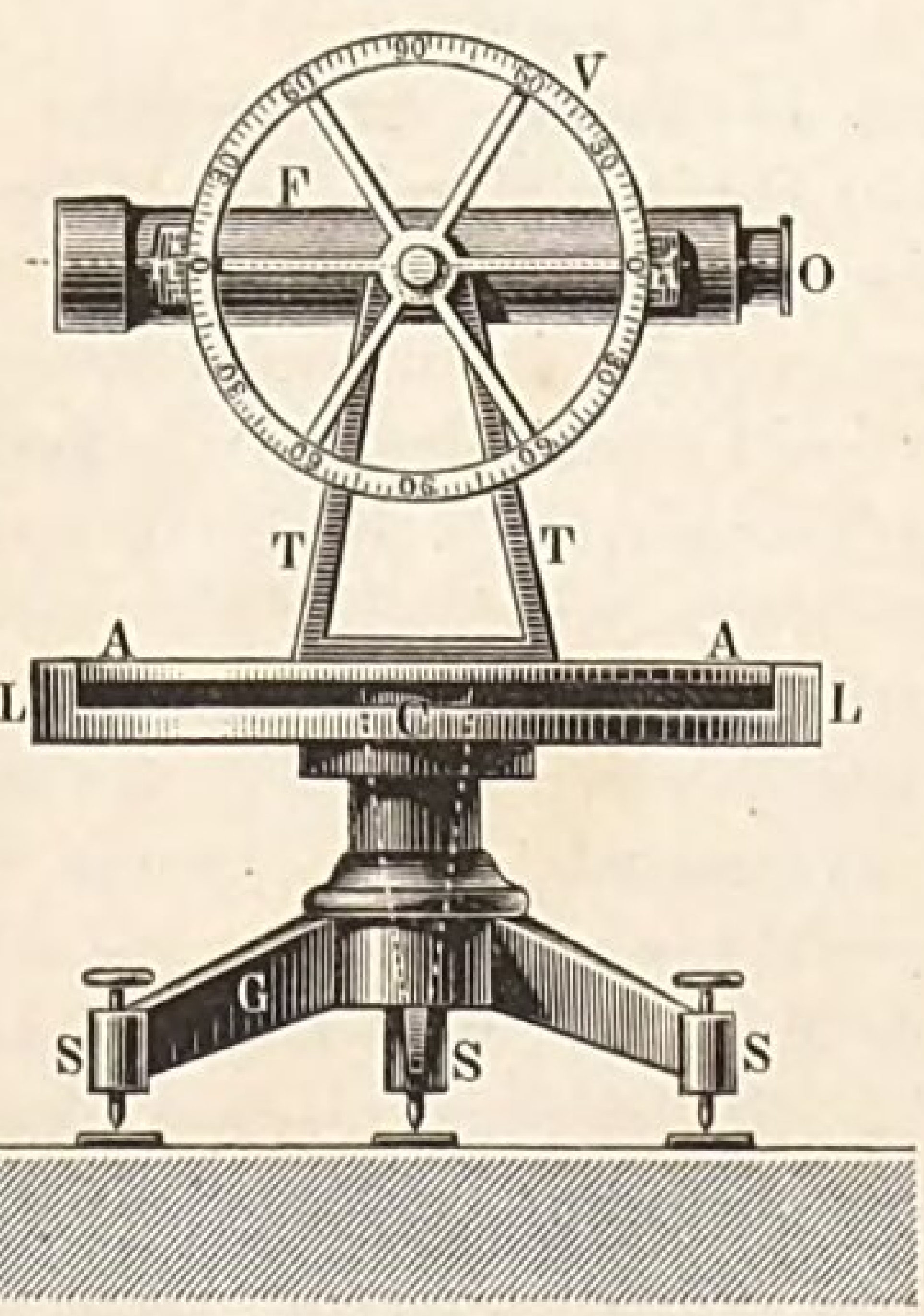


Fig. 59.



handen, dass die Fernrohrachse aus den Lagern genommen und mit vertauschten Enden in dieselben eingesetzt werden kann. Solche „umlegbare" Achsen sind meistens nur an Instrumenten zu finden, welche keinen Verticalkreis besitzen.

Fig. 60.



Neben diesen Hauptbestandtheilen sind noch aufzuzählen: die Libelle, welche zweckmässig so eingerichtet ist, dass sie auf die cylindrischen Enden der Fernrohrachsen aufgesetzt und umgelegt werden kann, dann die Vorrichtungen zur Festklemmung der groben Bewegungen und zur Einleitung der feinen Schraubenbewegungen, ferner die Ablesungsmikroskope.

Um mit dem Theodolit richtige Messungen vornehmen zu können, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Drehungsachse des Horizontalkreises muss genau vertical stehen.

2. Die Drehungsachse des Verticalkreises muss genau horizontal liegen.

3. Die Visirlinie des Fernrohrs muss auf der letztern senkrecht stehen.

4. Bei horizontaler Lage der Visirlinie müssen die Nullstriche der Nonien mit den Nullpunkten des Verticalkreises zusammentreffen oder doch die Abweichungen derselben bekannt sein.

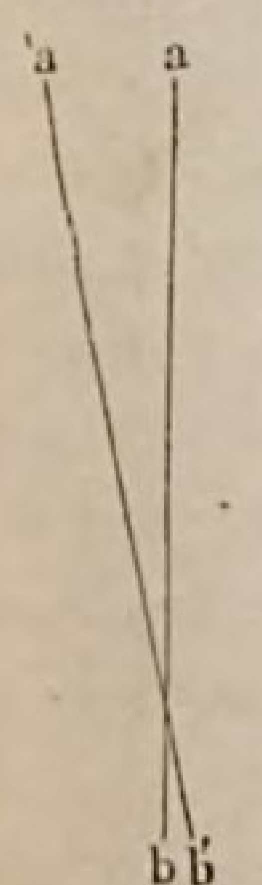
Ausserdem muss die Theilung richtig und ein allenfalls vorhandener Excentricitätsfehler durch Anwendung zweier um 180⁰ abstehender Nonien zu vermeiden sein.

Die vorzunehmenden Rectificationen sind daher folgende:

1. Die senkrechte Lage der verticalen Drehungsachse wird daran erkannt, dass die Luftblase der aufgesetzten Libelle ihren Stand nicht ändert, wenn die Alhidade um diese Achse gedreht wird. Aendert sich der Stand der Blase bei einer Drehung um 180⁰ um einen gewissen Betrag, so ist die Hälfte derselben an der Stellung der Libelle, die andere an den Fussschrauben zu corrigiren.

2. Wenn die Drehungsachse des Verticalkreises und des Fernrohrs horizontal ist, so beschreibt die Visirlinie eine Verticalebene. Hängt man daher ein Loth *ab*, Fig. 61, auf und visirt mit dem Fernrohr auf dasselbe, so wird der Faden stets durch den nämlichen Punkt des Gesichtsfeldes hindurchgehen, wenn man das Fernrohr hebt oder senkt. Verlässt dagegen der auf den Faden des Lothes eingestellte Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes beim Auf- und Abbewegen des Fernrohrs das Loth *ab* und beschreibt statt dessen die schiefe Linie *a′ b′*, so ist die Drehungsachse nicht horizontal.

Fig. 61.



Eine genauere Prüfung ist mittelst der Aufsatzlibelle möglich, wenn man sicher sein kann, dass die Achsenenden, auf welche die Libellenfüsse zu ruhen kommen, genau cylindrisch und gleich dick sind. Man braucht nur die Libelle umzusetzen und nachzusehen, ob sie dabei ihren Stand nicht ändert. Ein etwaiger Fehler kann bei manchen Instrumenten durch Erhöhung des Achsenlagers an dem Träger *T* oder des ganzen Trägers selbst corrigirt werden.

Die Prüfung der gleichen Dicke beider Achsenenden ist bei Instrumenten mit umlegbarer Achse mittelst der Libelle möglich, indem man dieselbe in der gleichen Lage auf die umgelegte Achse aufsetzt. Sie darf dann keinen andern Stand zeigen.

Die genau cylindrische Form der Achsenenden endlich kann geprüft werden, indem man die Achse unter der aufgestellten Libelle dreht. Man bedient sich jedoch besser hierzu einer besondern Methode.

Wenn die unter dem nächsten Punkte 3. aufgeführte Prüfung der senkrechten Lage der Sehlinie zur horizontalen Drehungsachse schon vorgenommen ist und keinen Fehler ergeben hat, so ist noch folgendes Verfahren zur Prüfung der senkrechten Stellung der beiden Drehungsachsen des Instruments auf einander anwendbar. Man visirt mit dem Fernrohr auf zwei weit übereinanderstehende scharfe Punkte *a* und *b*, Fig. 62 (a. f. S.), welche bei der Drehung um die horizontale Achse beide von der Mitte

des Fadenkreuzes getroffen werden. Hierauf schlägt man das Fernrohr durch, dreht die Alhidade um 180° und visirt wiederum beide Punkte an, werden sie wiederum beide getroffen, so ist kein Fehler vorhanden, geht aber die zweite Visur etwa von *b* nach *a'*, so ist die Achsenlage um den Winkel *m b a'* zu corrigiren. Sind zwei solche Punkte nicht vorhanden, so kann man auch auf zwei beliebige Punkte *a* und *b*, Fig. 63, visiren, von denen einer möglichst hoch, der andere möglichst tief gelegen ist. Man bestimmt den Horizontalwinkelabstand zwischen beiden Punkten einmal in der ersten, dann in der durchgeschlagenen Lage, also die Abstände *a a'* und *a a''*. Ergiebt sich beide Male der gleiche Winkelabstand, so ist kein Fehler vorhanden. Differiren dagegen die Winkel, so ist die horizontale Achse nicht senkrecht auf der verticalen. Man hat dann die Achse so zu verstellen, dass die Visur, welche durch *b* geht, oben die Mitte von *a' a''* trifft.

Fig. 62.

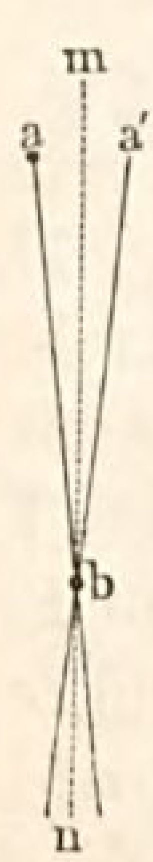


Fig. 63.

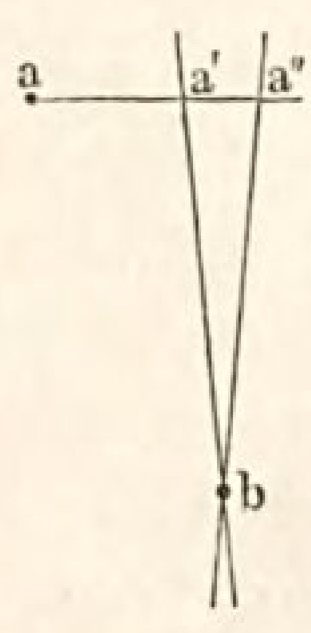
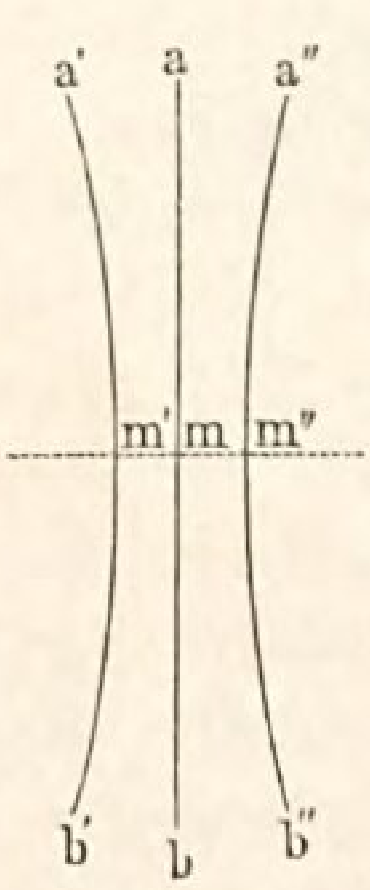


Fig. 64.



3. Wenn die Visirlinie des Fernrohrs nicht senkrecht steht auf der horizontalen Drehachse, so beschreibt diese Visirlinie bei der Drehung des Fernrohrs statt einer Ebene eine Kegelfläche, welche auf einer gegenüberstehenden verticalen Wandfläche, die zur Drehungsachse parallel steht, statt der senkrechten *a b*, Fig. 64, einen Hyperbelast *a' b'* einschneidet, der sich desto weiter von der Senkrechten entfernt, je mehr das Fernrohr aus der horizontalen Lage gehoben oder gesenkt wird. Dieser Fehler wird der Collimationsfehler genannt.

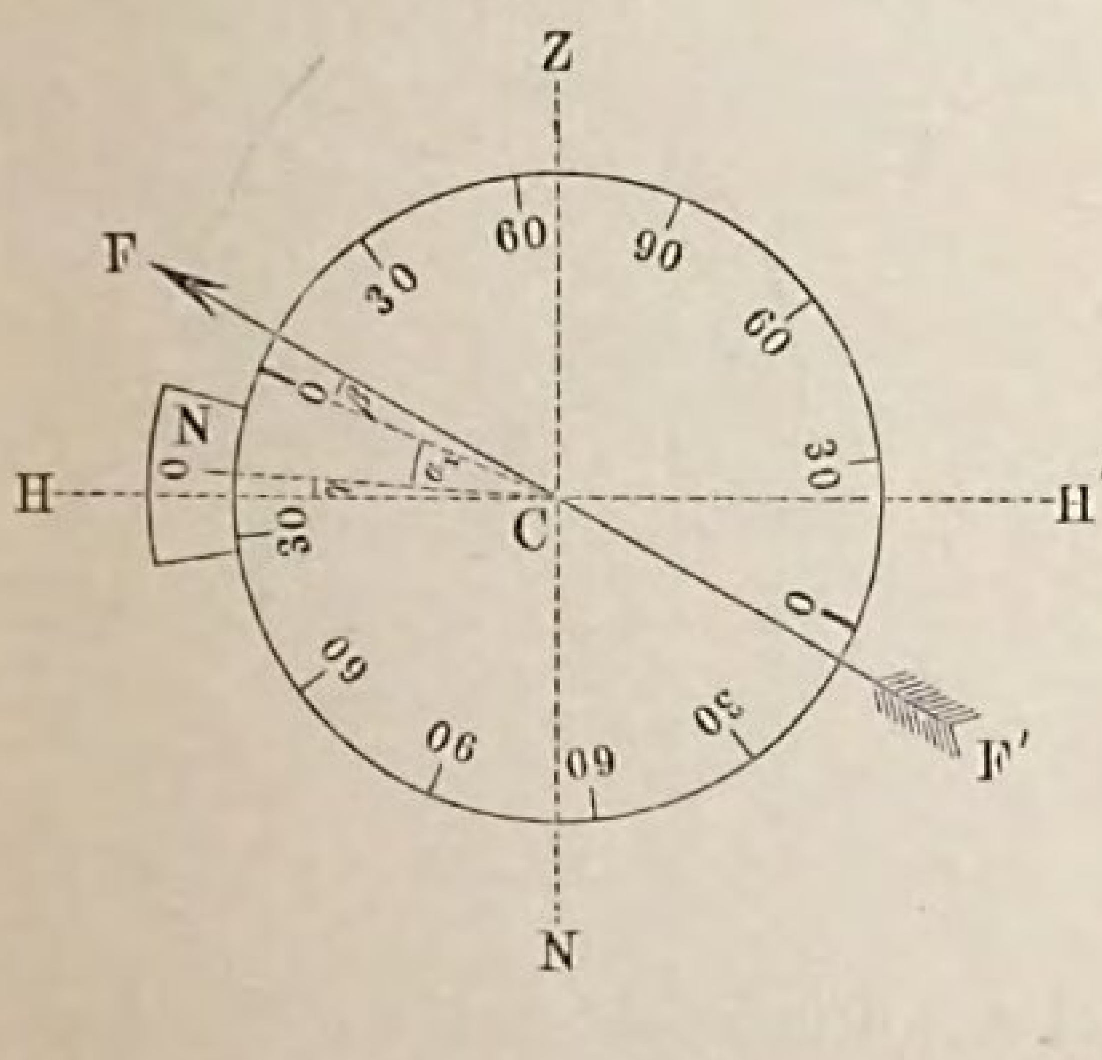
Dreht man die Alhidade um die verticale Achse genau um 180°, so beschreibt dann die Sehlinie bei der Verticalbewegung auf der verticalen Wand den gegenüberstehenden Hyperbelast *a'' b''*. Visirt man beide Male bei horizontaler Lage des Fernrohrs, so ergiebt der halbe Abstand von *m' m''* einen Maassstab für den vorhandenen Fehler, den man dadurch corrigirt, dass man das Fadenkreuz des Fernrohrs in horizontaler Richtung verschiebt, bis es die Mitte von *m' m''* in *m* trifft. Bei Wiederholung des Verfahrens muss die Visur dann beide Male denselben Punkt *m* treffen.

Man kann diese Prüfung auch so vornehmen, dass man die horizontale Achse umlegt und nach Durchschlagung des Fernrohrs auf denselben Punkt visirt; wird er bei unveränderter Lage der Alhidade getroffen, so ist kein Collimationsfehler vorhanden. Dabei wird die gleiche Dicke der Achsenenden vorausgesetzt.

4. Zur Messung von Horizontal- und Verticalwinkeln muss bekannt sein, in welcher Lage das Fernrohr eine horizontale Visur giebt. Die Ablesung am Nonius für diese Lage (negativ genommen) heisst der Indexfehler*) (früher ebenfalls Collimationsfehler genannt). Mittelst der Aufsatzlibelle ist diese Prüfung nicht ausführbar, da man nicht sicher ist, dass die Visirlinie des Fernrohrs mit der mechanischen Achse des Fernrohrcylinders zusammenfällt und hier dieses Zusammenfallen nicht wie bei dem in seinen Lagern um seine eigene Längsachse drehbaren Fernrohr des Kathetometers (§. 17) geprüft werden kann.

Man beachte die schematische Fig. 65. HH' und ZN seien die durch die Achse des Instrumentes gehenden Horizontal- und Verticalrichtungen, FF' die Lage der Visirlinie des Fernrohrs bei der Messung des Höhenwinkels HCF, die Pfeilspitze giebt also die Visirrichtung an. Die Nullpunkte des Theilkreises werden im Allgemeinen nicht genau in die Visirrichtung FF' fallen, sondern beispielsweise um den Winkel β davon abweichen. Ebenso werden die Nonien mit ihrem Nullpunkte nicht genau in der Horizontalen HH' liegen. Wir betrachten hier nur den einen Nonius N und nehmen an, dass er bei sonst richtiger Stellung des Instrumentes um den Winkel γ von der Horizontalen abweiche. Der zu messende Höhenwinkel HCF erscheint daher als die Summe dreier Winkel, er ist nämlich gleich dem abgelesenen Winkel α_1 zwischen den Nullpunkten des Nonius und des Theilkreises, mehr den Winkeln β und γ.

Fig. 65.



$$HCF = \alpha_1 + \beta + \gamma.$$

Drehen wir jetzt die Alhidade um die verticale Achse um 180⁰, so kommt die in Fig. 66 (a. f. S.) angedeutete Lage zu Stande, indem einfach alles von links nach rechts vertauscht ist. Schlägt man nun das Fernrohr durch und bringt es in die ursprüngliche Richtung, so hat das Instrument die in Fig. 67 (a. f. S.) angedeutete Lage. Der zu messende Höhenwinkel HCF ist nun gleich dem Winkel $H'CF'$. Man erhält jetzt am selben Nonius die Ablesung α_2 und es ist:

$$HCF = \alpha_2 - \beta - \gamma$$

*) Es wird hier vorausgesetzt, dass die Bezifferung des Verticalkreises wie in Fig. 60 an beiden Nonien mit Null beginnt und nach beiden Richtungen bis 90^0 sich fortsetzt.

Man erhält somit:

$$\alpha_1 + \beta + \gamma = \alpha_2 - \beta - \gamma$$

woraus folgt:

$$\text{Indexfehler} = \beta + \gamma = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

$$\text{Höhenwinkel} = HCF = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \text{*)}.$$

Man kann sich also vom Indexfehler entweder dadurch frei machen, dass man ihn ein- für allemal nach der angegebenen Methode bestimmt

Fig. 66.

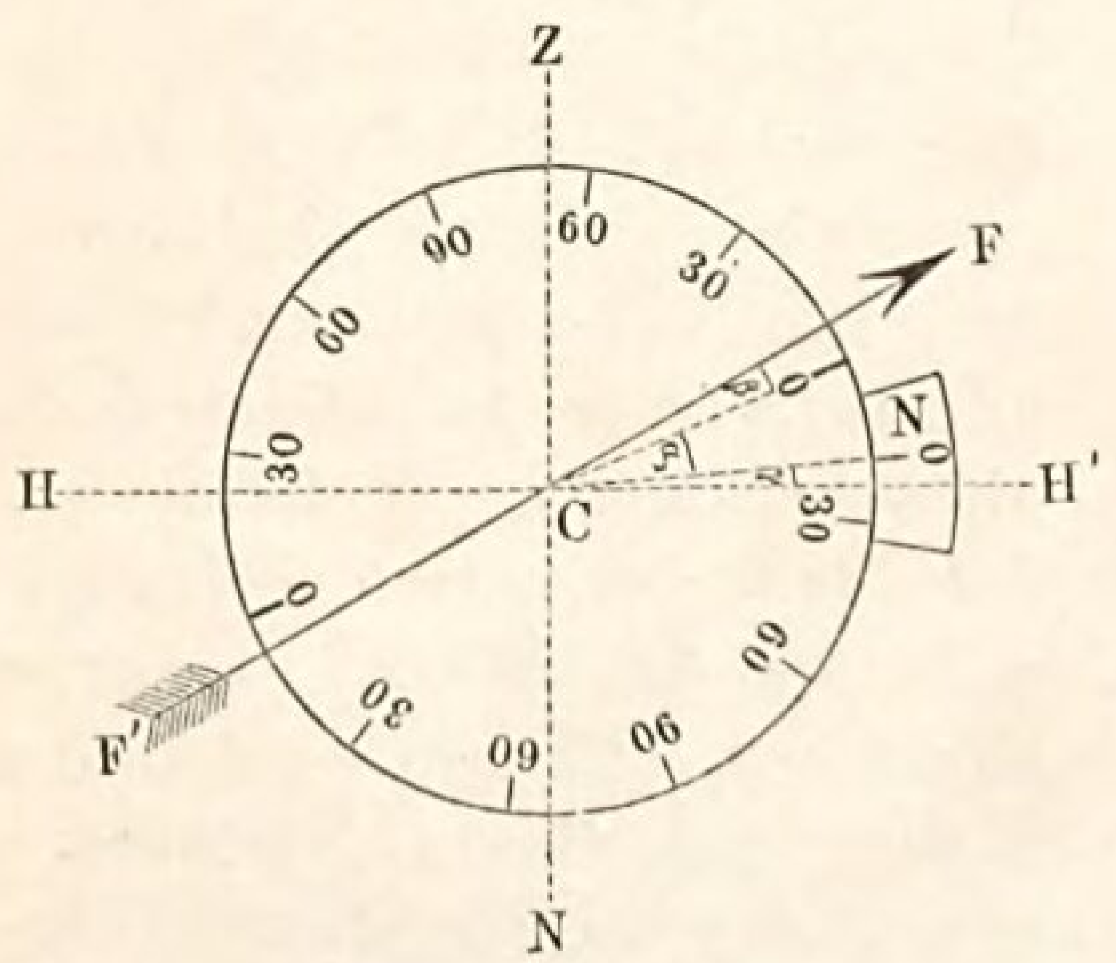
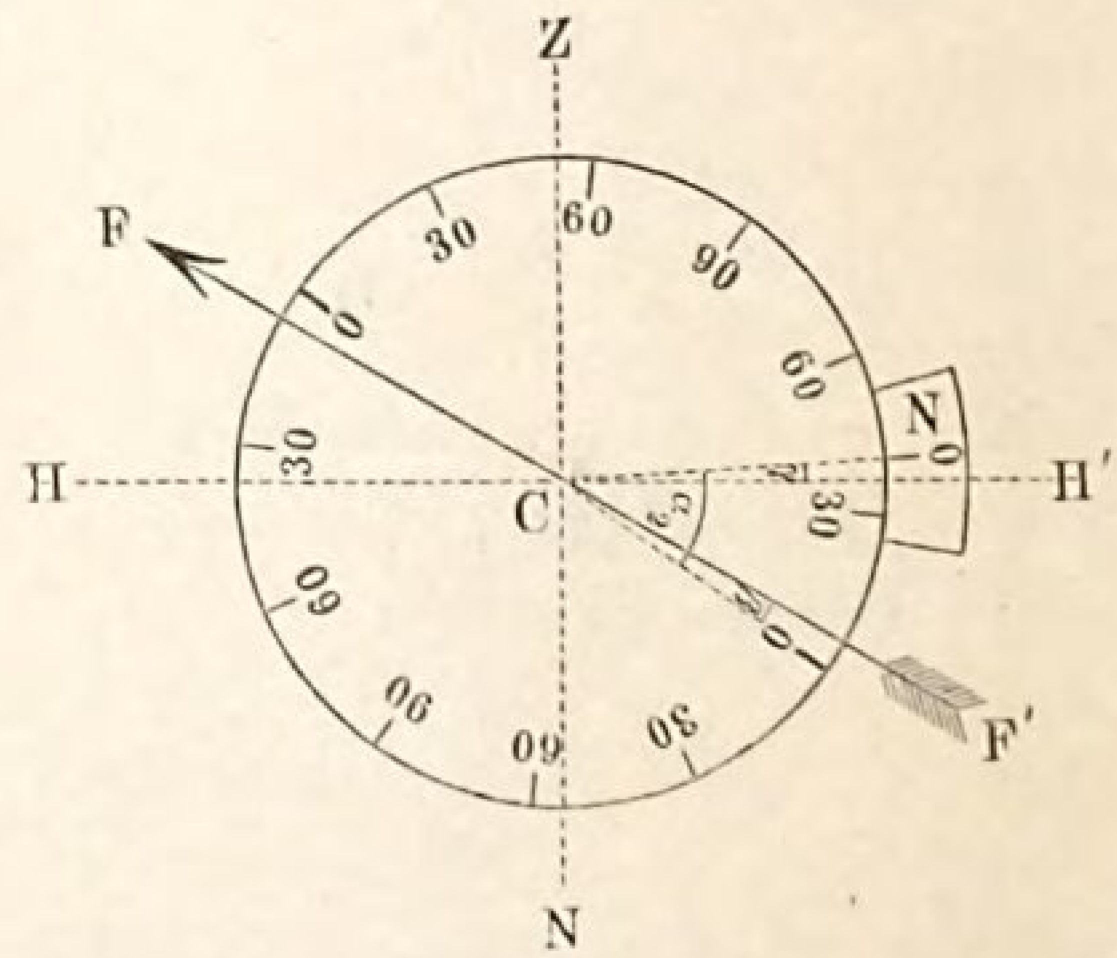


Fig. 67.



und dann jedem abgelesenen Winkel mit Rücksicht auf das Zeichen als Correction hinzufügt, oder dadurch, dass man jeden Verticalwinkel in den beiden Lagen des Instrumentes, wobei man den Verticalkreis einmal auf der linken und einmal auf der rechten Seite des Fernrohrs befindlich hat, abliest und das arithmetische Mittel nimmt. Diese Methode hat den Vorzug, dass sie den Excentricitätsfehler auch dann eliminirt, wenn man nur einen Nonius benutzt. Die Benutzung zweier Nonien ist natürlich trotzdem vorzuziehen.

Lässt sich das Fernrohr des Instrumentes nicht durchschlagen, so kann man sich des künstlichen Horizonts, das ist der spiegelnden Horizontalebene bedienen, welche durch eine flache Schichte Quecksilbers oder Quecksilberamalgams gebildet wird; dasselbe wird in eine flache Metallschale gegossen und so vor das Instrument gestellt, dass man durch das gesenkte Fernrohr hindurch im Quecksilberspiegel das Bild eines entfernten über dem Horizont befindlichen Objectes anvisiren

*) Wenn die Bezifferung von einem Nonius bis zum andern, also von 0 bis 180 fortschreitet, dann erhält man:

$$\beta + \gamma = 90 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad HCF = 90 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

kann. Die Mitte der beiden Einstellungen auf das Object direct und auf dessen Spiegelbild giebt die horizontale Lage der Visirlinie, die zugehörige Ablesung negativ genommen, den Indexfehler. Wir kommen auf diesen Gegenstand in der Optik nochmals zurück, wo wir noch andere Methoden der Winkelmessung kennen lernen werden, welche auf Anwendung des Spiegels beruhen.

Zeitmessung und Zeitbestimmung. Neben der Messung 21
von Längen ist die Messung von Zeitintervallen für den Physiker eine oft wiederkehrende Aufgabe.

Als Einheit der Zeitdauer dient meist die Secunde, welche definirt wird als der $^1/_{86400}$ Theil des mittlern Tages. Die Bedeutung dieses mittlern Tages ist folgende:

Die Zeit, welche vergeht, während die Erde den Fixsternen gegenüber eine ganze Rotation vollendet, heisst der Sterntag oder auch ein Tag in Sternzeit. Es ist dies offenbar dieselbe Zeitdauer, die vergeht zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen eines und desselben Fixsterns. Dieser Sterntag hat fortwährend dieselbe Länge, da die Rotationsdauer der Erde innerhalb eines Jahres sich nur um circa eine Millionstelsecunde ändert *). Für astronomische Messungen eignet sich daher dieser Sterntag am besten als Zeitmaass.

Im bürgerlichen Leben würde dieses Maass zu unbequem sein, weil es mit dem Sonnentage nicht zusammenfällt. Andererseits würde aber auch die scheinbare Bewegung der Sonne kein geeignetes Maass sein, weil sie keine gleichförmige ist. Man denkt sich demnach an Stelle der wirklichen Sonne, welche sich ungleichförmig in der Ekliptik bewegt, eine „mittlere Sonne“, das ist eine solche, welche sich statt in der Ekliptik im Aequator und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, so dass sie mit jener den Widderpunkt gleichzeitig passirt. Die Zeit zwischen zwei Culminationspunkten dieser gedachten mittlern Sonne heisst der mittlere Tag oder ein Tag mittlerer (bürgerlicher) Zeit. Man theilt denselben in 24 gleiche Stunden, diese in 60 Minuten und diese in 60 Secunden, so dass also $60 \times 60 \times 24 = 86400$ Secunden einen Tag mittlerer Zeit ausmachen, wie oben angegeben wurde.

Die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Widderpunkt heisst das tropische Jahr. Dasselbe umfasst 366,24222 Sterntage, aber nur 365,24222 mittlere Tage, weil die Sonne während des ganzen Jahres um einen Tag zurückbleibt **). Folglich ist

$$\text{ein mittlerer Tag} = \frac{366{,}24222}{365{,}24222} = 1{,}0027379 \text{ Sterntagen}$$
$$= 86636{,}55 \text{ Secunden Sternzeit,}$$
$$\text{ein Sterntag} = 86164{,}09 \text{ Secunden mittlerer Zeit.}$$

*) Siehe §. 8.

**) So erscheint es in Folge der Bewegung der Erde um die Sonne.

Der Sterntag ist also um 235,91 Secunden oder 3,932 Minuten kürzer als der mittlere Tag.

Der Physiker wird sich bei seinen Zeitmessungen gewöhnlich einer guten Pendeluhr oder eines Chronometers bedienen, welche Instrumente wir an dieser Stelle nicht beschreiben können.

Wir wollen hier nur angeben, wie man die unvermeidlichen Fehler dieser Instrumente zu bestimmen und zu eliminiren im Stande ist. Ist t die wahre mittlere Zeit, t' die gleichzeitig an der Uhr abgelesene Zeit, so heisst man die Differenz $t - t'$ den „Stand" der Uhr.

Bleibt eine Uhr binnen 24 Stunden um τ Secunden hinter der mittlern Zeit zurück, so heisst τ der „Gang" der Uhr. Zeigt eine Uhr eine spätere Zeit an als sie zeigen sollte, so hat ihr „Stand" einen negativen Werth. Ebenso ist ihr „Gang" negativ zu nehmen, wenn die Uhr vorläuft. Bei astronomischen Uhren werden dieselben Grössen stets auf Sternzeit bezogen. In der Physik dagegen rechnet man nach mittlerer Zeit.

Man pflegt die genannten Abweichungen einer Uhr nicht durch Aenderung ihres Standes oder Ganges zu beseitigen, sondern dieselben durch Rechnung zu eliminiren.

Angenommen, man habe an zwei auf einander folgenden Mittagen genau um 12 Uhr mittlerer Zeit die Uhr beobachtet und am ersten Tage abgelesen $11^h\ 59'\ 30''$, dann am zweiten Tage abgelesen $11^h\ 59'\ 28''$, so weiss man, dass der „Gang" τ dieser Uhr $= 0^h\ 0'\ 2''$ ist, und dass ihr „Stand" am zweiten Tage Mittags beträgt: $0^h\ 0'\ 32''$.

Beobachtet man nun zehn Tage später die Uhr und findet beispielsweise die Ablesung $11^h\ 50'\ 30''$, so erhält man die mittlere Zeit

$$= 11^h\ 50'\ 30' + 32'' + (2'' \times 10) = 11^h\ 51'\ 22''.$$

Man corrigirt nämlich einmal den „Stand", indem man 32″ addirt, um welche die Uhr schon vor zehn Tagen zu wenig zeigte, und addirt ausserdem den „Gang" während der zehn Tage, d. h. jene Zeit, um welche die Uhr in diesen zehn Tagen neuerdings zurückblieb.

Für den Physiker wird in der Mehrzahl der Fälle nur der „Gang" der Uhr in Betracht kommen, da er meist nur Zeitintervalle, nicht aber absolute Zeiten zu bestimmen hat. Um den „Gang" einer Uhr zu ermitteln, führt folgendes einfache Verfahren zum Ziele. Man stellt ein Fernrohr mit Fadenkreuz so auf, dass man durch dasselbe einen Fixstern (am besten in der Nähe des Meridians) verfolgen und dabei den Zeitmoment beobachten kann, in welchem derselbe das Fadenkreuz passirt. In diesem Moment wird die Uhr abgelesen. Nun lässt man das Fernrohr bis zum andern Tage unverrückt stehen und beobachtet wieder den Moment des Durchgangs desselben Fixsterns. Die Zeit zwischen den beiden Durchgangsmomenten ist gleich einem Sterntag, also gleich 86164,09 Secunden mittlerer Zeit. Zieht man von dieser Zahl die Anzahl der Secunden ab, welche an der Uhr zwischen den beiden Beobach-

tungen abgelaufen sind, so erhält man den „Gang" der Uhr. Mittelst einer einfachen Proportion erhält man hieraus die Correction für irgend ein kleineres Zeitintervall, welches mit dieser Uhr gemessen wird. Dabei wird freilich ein gleichförmiger Gang derselben vorausgesetzt.

In Ermangelung eines geeigneten Fernrohrs kann man auch genügend genau auf folgende Weise verfahren. Man fixirt sich durch ein Diopter oder durch einen eingeschlagenen Nagel oder dergleichen einen Standpunkt für das beobachtende Auge und richtet den Blick beiläufig gegen Süden auf eine möglichst entfernte Kante eines Hauses oder Daches, welche so gelegen ist, dass man Fixsterne hinter ihr verschwinden sieht. Hat man auf diese Weise an zwei auf einander folgenden Tagen den Moment des Verschwindens desselben Fixsterns beobachtet, so kann man im Uebrigen wie oben verfahren. Zu vermeiden sind hierbei als bedeckende Objecte die heissen Wände von Schornsteinen, weil an diesen unregelmässige Strahlenbrechung stattfindet. Was die erreichbare Genauigkeit betrifft, so ist zu überlegen, dass einer Zeitsecunde 15 Bogensecunden entsprechen. Ist der Standpunkt des Auges auf 3,6 mm genau fixirt, so entspricht dies bei einem Abstande der bedeckenden Kante = 100 m einem Winkel von $7^1/_2$ Secunden, also einer Zeitgenauigkeit von $^1/_2$ Secunde.

Viel umständlicher ist die Bestimmung eines absoluten Zeitmoments zum Zwecke der Ermittelung des „Standes" einer Uhr. Unter den diesbezüglich ausführbaren Methoden wollen wir die folgende beschreiben, da sie nebenbei zur Aufsuchung der Meridianlinie dienlich ist, welche der Physiker auch sonst, z. B. zu Declinationsbestimmungen, nöthig hat.

Man richtet das Fernrohr des Theodolits einige Stunden vor Mitternacht gegen Osten und stellt dasselbe auf einen bekannten Fixstern so ein, dass derselbe den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes passirt. Hierauf klemmt man den Verticalkreis fest und dreht das Fernrohr gegen Westen, wo man eben so viele Stunden nach Mitternacht denselben Fixstern beobachtet. Man folgt ihm mit dem Fadenkreuz, bis man bemerkt, dass er genau dieselbe Höhe hat, wie bei der ersten Beobachtung, also im horizontalen Faden gedeckt wird. In diesen Moment stellt man den Verticalfaden ebenfalls auf den Fixstern ein und liest den Stand des Nonius ab. Diejenige Stellung der Alhidade, bei welcher die Ablesung genau das arithmetische Mittel der beiden vorigen Ablesungen ergiebt, entspricht dann dem astronomischen Meridian. Man wird selbstverständlich mehrere solche Beobachtungen machen, um einen genauern Mittelwerth zu gewinnen.

Hat man dann das Fernrohr in den Meridian gestellt, so liefert zu jeder Nachtstunde die Beobachtung des Zeitpunkts, in welchem ein bekannter Fixstern den Meridian passirt, eine absolute Zeitbestimmung. Sucht man nämlich in einer Sternkarte oder genauer in einem Sternverzeichniss die Rectascension des betreffenden Sternes auf, so giebt die-

selbe sofort die Sternzeit für den Moment der Beobachtung an. Zu dieser Sternzeit entnimmt man aus den Tabellen der astronomischen Jahrbücher die bürgerliche (mittlere) Zeit. Der Vergleich derselben mit der Angabe der Uhr liefert deren „Stand" für die Zeit der Beobachtung.

Für die Beobachtung von Fixsternen benöthigt man ein beleuchtetes Fadenkreuz. Eine dazu dienliche Einrichtung werden wir in der Optik beschreiben. Häufig verwendet man einen unter 45° gegen die Fernrohrachse geneigten, vor dem Objectiv befestigten, weissen Schirm, der in der Mitte elliptisch ausgeschnitten ist, um den Durchgang der centralen Strahlen nicht zu stören. Dieser Schirm reflectirt das Licht einer seitwärts aufgestellten Lampe in das Fernrohr.

Will man statt eines Fixsterns die Sonne beobachten, so hat man natürlicherweise ein dunkles Glas vor das Ocular zu setzen.

Statt auf die Mitte der Sonne zu visiren, stellt man den Horizontalfaden auf deren obern oder untern Rand (jedoch beide Male auf denselben) ein und beobachtet jedesmal die Berührungen des östlichen und westlichen Randes mit dem Verticalfaden.

Zur Zeit der Sonnenwende liefert dann das arithmetisch Mittel der Ablesungen am Horizontalkreis direct die Richtung des Meridians. Man erhält dann wie oben den Zeitpunkt des Durchgangs der Sonnenmitte durch den Meridian (den wahren Mittag), aus welchem mittelst der in den astronomischen Kalendern enthaltenen „Zeitgleichung" der bürgerliche Mittag durch einfache Addition zu erhalten ist.

Zu anderer Jahreszeit fällt der Culminationspunkt der Sonne wegen deren veränderlicher Declination nicht genau in den Meridian und ist deshalb noch eine Correction hinzuzufügen, welche sich aus der Formel

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\,(tang\ \varphi - tang\ \delta)\ ^{*})$$

berechnet, in welcher φ die geographische Breite des Ortes, δ die Declination der Sonne, ε die tägliche Aenderung der Declination in Graden bedeuten. Um den aus dieser Formel in Secunden berechneten Winkel ist das Fernrohr aus der gefundenen Mittellage im Frühjahr nach Osten, im Herbst nach Westen zu drehen, um genau in den Meridian zu kommen.

Näheres über diese Operationen ist in astronomischen Lehrbüchern nachzusehen.

*) Wegen Begründung dieser Formel siehe Kohlrausch's prakt. Physik, IV. Auflage, S. 250.

ERSTES BUCH.

DIE MECHANIK.

Erstes Capitel.

Von den Bewegungen und den Kräften im Allgemeinen und der Schwerkraft insbesondere.

Eintheilung der Bewegungen; gleichförmige Bewegung, Begriff der Geschwindigkeit. 22 Wenn ein Punkt seine Lage gegenüber anderen Punkten innerhalb einer gewissen Zeit stetig, d. h. ohne Ueberspringung von Zwischenlagen ändert, so sagt man, er *bewege* sich.

In diesem ersten Capitel beschäftigen wir uns eigentlich nur mit den Bewegungen einzelner materieller Punkte oder solcher Systeme von materiellen Punkten, bei welchen die letzteren sämmtlich die gleiche Bewegung mit einander machen.

Die Bewegungen eines Punktes können eingetheilt werden entweder in *räumlicher* Beziehung, d. h. in Bezug auf die Gestalt seiner *Bahn*, oder in *zeitlicher* Beziehung, nämlich in Bezug auf die *Zeitdauer*, in welcher die einzelnen Theile der Bahn zurückgelegt werden.

Die *Bahn* der Bewegung ist entweder eine *gerade Linie*, was den einfachsten Fall darstellt, oder sie ist eine *ebene Curve*, z. B. ein Kreis, oder sie ist eine *Raumcurve*, z. B. eine Schraubenlinie.

Die *Richtung* der Bewegung ist bei der geradlinigen Bewegung diese Gerade selbst, also immer gleichbleibend, bei der krummlinigen Bewegung ist sie veränderlich. Unter der *momentanen Richtung* versteht man dann die Tangente an den Punkt der Bahn, wo sich momentan der bewegliche Punkt befindet.

Der *Sinn* der Bewegung (im gewöhnlichen Sprachgebrauche ebenfalls mit „Richtung" bezeichnet) drückt aus, ob dieselbe vorwärts oder rückwärts stattfindet. Nach welcher Seite man ursprünglich das Vor-

wärts rechnet, ist willkürlich und gleichgültig, wenn nur der entgegengesetzte Sinn dann Rückwärts genannt wird.

In Bezug auf den zeitlichen Verlauf können wir die Bewegungen nach folgendem Schema eintheilen:

Bewegung

- gleichförmige
- ungleichförmige oder veränderliche
 - gleichmässig veränderliche
 - ungleichmässig veränderliche u. s. w.

Die gleichförmige Bewegung ist diejenige, bei welcher in unter sich gleichen Zeiträumen stets unter sich gleiche Weglängen zurückgelegt werden.

Man versteht unter Geschwindigkeit das Verhältniss zwischen der zurückgelegten Weglänge und der inzwischen verflossenen Zeit.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieses Verhältniss, also die Geschwindigkeit, constant.

Sind also:

$s_1, s_2 \ldots s_n$ beliebig ausgewählte Wegstrecken,

$t_1, t_2 \ldots t_n$ die zugehörigen Zeitlängen,

so ist die Geschwindigkeit gegeben durch:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \cdots = \frac{s_n}{t_n}.$$

Setzt man also für die Länge irgend einer Wegstrecke das allgemeine Zeichen s, und für die zugehörige Zeitdauer das allgemeine Zeichen t, endlich für die Geschwindigkeit das Zeichen v, so gelten die Beziehungen:

$$v = \frac{s}{t}, \quad s = vt, \quad t = \frac{s}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Man drückt diese fundamentalen Beziehungen oft mit den Worten aus: die Geschwindigkeit ist gleich dem Wege, dividirt durch die Zeit; der Weg ist gleich der Geschwindigkeit, multiplicirt mit der Zeit; die Zeit ist gleich dem Wege, dividirt durch die Geschwindigkeit. Wenn diese Ausdrucksweise auch im gewöhnlichen Gespräche als Abkürzung zulässig sein mag, so müssen wir doch darauf aufmerksam machen, dass sie nicht correct ist, denn man kann nicht ein Ding durch ein anderes dividiren oder mit einem andern multipliciren. Man kann dagegen eine Weglänge in eine Anzahl Theile theilen, oder so und so viel mal nehmen, oder das Verhältniss zwischen zwei Weglängen suchen, weil beide gleichartige Grössen sind.

Die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ kann also nur den Sinn haben: Man theile die Länge des Weges s in so viele Theile, als die Zeit t Zeiteinheiten enthält. Das Resultat dieser Theilung ist natürlich selbst eine Weglänge und diese Weglänge nennen wir die Geschwindigkeit v. Hat die Bewegung überhaupt nur eine Zeiteinheit lang gedauert, so entfällt die Theilung durch den Nenner Eins und wir erhalten die Definition:

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung ist die Länge des Weges in der Zeiteinheit.

Hat die Bewegung nicht eine Zeiteinheit lang, sondern länger oder kürzer gedauert, so kann diese Definition beibehalten werden, wenn man sie dahin erweitert, dass Geschwindigkeit die Weglänge ist, welche zurückgelegt worden wäre, wenn die Bewegung eine Zeiteinheit lang gedauert hätte.

Indem man die Geschwindigkeit als eine Weglänge auffasst, kann man auch den beiden anderen Formeln unter 1) eine physikalische Anschaulichkeit und einen correcten Ausdruck in Worten geben.

Die Gleichung $s = vt$ sagt einfach: Der Weg in t Zeiteinheiten ist t mal so lang als der Weg v einer Zeiteinheit.

Die Gleichung $t = \frac{s}{v}$ sagt: Die Zeitdauer t einer gleichförmigen Bewegung ist gleich dem Verhältniss der Länge s des zurückgelegten Weges zur Länge v jenes Weges, der in der Zeiteinheit zurückgelegt würde.

Es versteht sich von selbst, dass die Zahl, welche man für die Geschwindigkeit berechnet, von den Einheiten abhängt, nach welchen man die Längen und die Zeiten misst. Es ist deshalb nothwendig, das Längen- und Zeitmaass beizufügen; nur insofern als Zeitmaass bei physikalischen Messungen fast ausschliesslich die Secunde angewendet wird, kann man dasselbe stillschweigend als bekannt voraussetzen.

Endlich ist noch zu bemerken, dass eine entgegengesetzte Geschwindigkeit durch entgegengesetztes algebraisches Zeichen ausgedrückt wird.

Beispiele der Berechnung der Geschwindigkeit:

1. Ein Punkt des Aequators beschreibt in 24 Stunden (86 400 Secunden) einen Kreis gleich dem Umfang der Erde, welcher am Aequator 40 070 km beträgt, folglich ist seine Geschwindigkeit:

$$v = \frac{40\,070\,000}{86\,400} = 464 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunden}}.$$

2. Nach Régnault's Versuchen durchläuft der Schall in einer Minute in einer 1,1 m weiten Röhre eine Strecke von 19 851 m, folglich ergiebt sich für die Geschwindigkeit des Schalles:

$$v = \frac{19851}{60} = 331 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunden}}.$$

3. Cornu hat nach Fizeau's Methode gefunden, dass das Licht in der Luft eine Entfernung von 10310 m in 0,00003455 Secunden durchläuft, mithin ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes (in Luft):

$$v = \frac{10,31}{0,00003455} = 298\,400 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunden}} = 298\,400\,000 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunden}}.$$

4. Eine Schnecke kriecht in fünf Minuten ungefähr einen halben Meter weit, folglich ist ihre Geschwindigkeit:

$$v = \frac{0,5}{300} = 0,0017 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunden}} = 0,17 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunden}}.$$

23 **Die gleichmässig veränderliche Bewegung; Begriff der Beschleunigung.** Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit immer gleich gross bleibt, ändert sich dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung fortwährend, sie nimmt zu oder ab. Den nächst einfachsten Fall bildet dann diejenige Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit zu- oder abnimmt. Es ist dies dann zwar keine gleichförmige, aber doch eine gleichmässig veränderte Bewegung. Je nachdem die Geschwindigkeit derselben mit der Zeit zunimmt oder abnimmt, nennen wir sie eine gleichmässig beschleunigte oder eine gleichmässig verzögerte Bewegung.

Hat die Bewegung nach der Zeit t die Geschwindigkeit v, nach der Zeit t' die Geschwindigkeit v' erreicht, so ist $t' - t$ die Zeitdauer, während welcher sich die Geschwindigkeit um $v' - v$ verändert hat. Für die gleichmässig veränderliche Bewegung ist das Verhältniss der Geschwindigkeitsänderung zum Zeitfortschritt also die Grösse $\frac{v' - v}{t' - t} = \varphi$ eine Constante und wird Beschleunigung genannt. Dabei wird dieselbe als positiv betrachtet, wenn die Geschwindigkeit wächst. Nimmt dagegen die Geschwindigkeit ab, erleidet also die Bewegung eine Verzögerung, so wird dieselbe als negative Beschleunigung angesehen. Wählt man für $t' - t$ den Werth Eins, so ist $\varphi = v' - v$. Daraus folgt die Definition: Die Beschleunigung bei der gleichmässig veränderten Bewegung ist der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit.

Um die Beschleunigung zu finden, sollte man die am Anfange und am Ende eines beliebig langen, aber bekannten Zeitintervalls vorhandenen Geschwindigkeiten ermitteln und ihre Differenz durch die Dauer des Intervalls dividiren. Dabei stossen wir auf die Schwierigkeit, dass wir die aus der gleichförmigen Bewegung (im vorigen Paragraphen) abgeleitete Definition der Geschwindigkeit hier nicht ohne Weiteres anwenden können. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Definition: Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weglänge}}{\text{Zeitdauer}}$ stets zu demselben Werthe führt,

wie gross man auch den Weg oder die Zeit wählt, so ist dies bei einer veränderlichen Bewegung nicht mehr der Fall. Wir können bei dieser nicht von einer andauernden, constanten Geschwindigkeit, sondern nur von einer momentanen (augenblicklichen) Geschwindigkeit sprechen, welche gar keine Zeitlänge hindurch und keine Wegstrecke entlang dauert, sondern nur in einem Zeitpunkte und an einem Punkte des Weges vorhanden ist.

Wir kommen zu einer stichhaltigen Definition dieser momentanen Geschwindigkeit auf folgende Weise. Wir denken uns von dem gegebenen Punkte der Zeit und des Weges an, für welchen die Geschwindigkeit gesucht wird, die Bewegung noch eine kleine Zeit τ hindurch dauern und während derselben die kleine Weglänge σ zurücklegen. Das Verhältniss $\frac{\sigma}{\tau}$ ist dann zunächst ein angenäherter Werth der gesuchten Geschwindigkeit. Hierauf geben wir dem σ und dem τ immer kleinere und kleinere zusammengehörige Werthe. Dabei nähert sich ihr Verhältniss immer mehr und mehr einem Grenzwerthe. Dieser Grenzwerth ist die gesuchte momentane Geschwindigkeit. Man drückt dies oft auch so aus, dass man sagt, die Geschwindigkeit sei das Verhältniss einer unendlich kleinen Wegstrecke zur zugehörigen unendlich kleinen Zeitdauer *).

Auf diese Weise definirt, ist die momentane Geschwindigkeit eine mathematische Abstraction. Die physikalische Bedeutung der momentanen Geschwindigkeit ist auch hier die einer Weglänge, nämlich jener Weglänge, welche der bewegte Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn seine Geschwindigkeit von dem ins Auge gefassten Zeitmomente an keine Veränderung mehr erleiden würde.

Wir haben jetzt noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen Zeit t, Geschwindigkeit v, Beschleunigung φ und Weg s in der mathematischen Zeichensprache auszudrücken.

Wir beschränken uns dabei hier auf den einfachsten Fall, dass zur Zeit $t = o$, wo wir uns die Bewegung beginnend denken, die Geschwindigkeit und der (bereits zurückgelegte) Weg $= o$ seien. Wir haben es demnach hier nur mit der gleichmässig beschleunigten, nicht mit der verzögerten Bewegung zu thun. Den allgemeinern Fall, wo v und s Anfangswerthe haben, werden wir später bei der Zusammensetzung von Bewegungen in Behandlung nehmen.

Da binnen der Zeit von o bis t die Geschwindigkeit von o bis v zugenommen hat, so berechnet sich die Zunahme per Zeiteinheit, d. i. die Beschleunigung:

*) In der Analysis bezeichnet man diese unendlich kleinen Grössen mit ds und dt und nennt ihr Verhältniss $\frac{ds}{dt}$ den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

$$\varphi = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

woraus folgt:

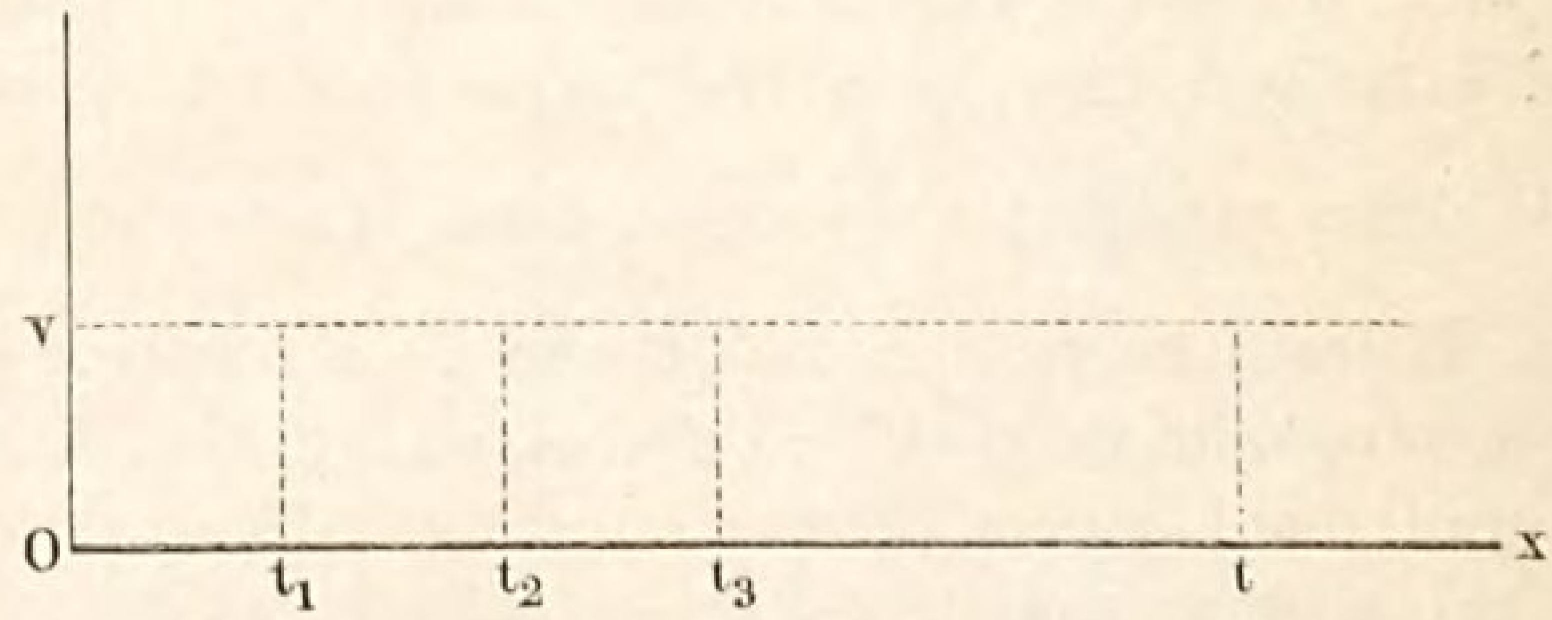
$$v = \varphi t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

und

$$t = \frac{v}{\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Um den Weg s zu erhalten, wollen wir eine geometrische Darstellungsweise zu Hülfe nehmen, welche nach mehrfacher Richtung nützliche

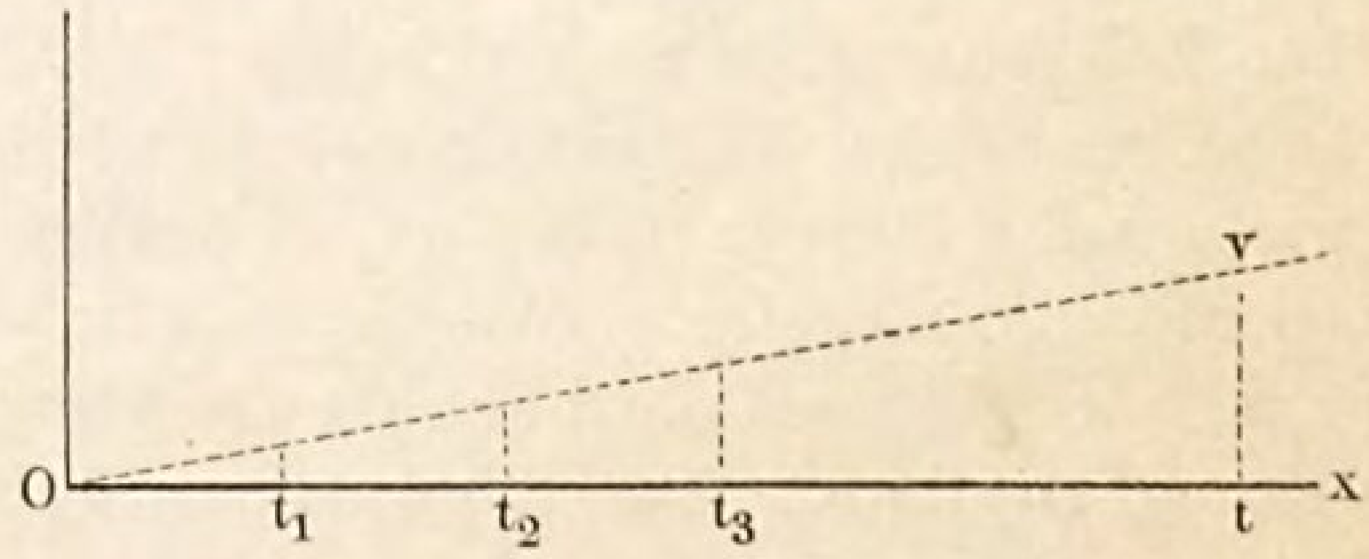
Fig. 68.



Dienste leistet und schon dem Schöpfer der Bewegungslehre G. Galilei zu demselben Zwecke gedient hat.

Wir haben bei der gleichförmigen Bewegung die Grösse des zurückgelegten Weges durch ein Product aus der Grösse der Zeitdauer und der Grösse der Geschwindigkeit zu berechnen gelernt. In der Geometrie kann jedes Product aus zwei Grössen durch den Flächeninhalt eines Rechtecks dargestellt werden, dessen Seitenlängen die beiden Factoren sind. Trägt man daher auf einer Abscissenachse ox, Fig. 68, Längen ot_1, ot_2, ot_3 ... auf, welche den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechen, ebenso

Fig. 69.



auf der Ordinatenachse ein Stück ov, welches die Grösse der Geschwindigkeit v darstellt, so repräsentiren die Flächenräume der Rechtecke über den Grundlinien ot_1, ot_2, ot_3 ... die entsprechenden zurückgelegten Wegstrecken.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeit v veränderlich und zwar proportional der Zeit anwachsend. Wollen wir demnach dieselbe Darstellungsweise verallgemeinernd auf diese Bewegung anwenden, so müssen wir an Stelle der horizontalen Geraden eine schiefe Gerade zeichnen, Fig. 69, welche vom Punkte o

bis zum Punkte v über den Abscissenpunkte t ansteigt. Es werden dann offenbar die bei dieser Bewegung zurückgelegten Wegstrecken durch die Flächenräume dargestellt, welche begrenzt sind einerseits durch die Abscissenachse und die schiefe Gerade, andererseits durch die Ordinaten, welche den Zeitpunkten der Bewegung entsprechen*). Der Weg in der Zeit bis t_1 ist also dargestellt durch den Flächeninhalt des Dreiecks $o\,t_1\,v_1$, der Weg von t_1 bis t_2 durch den Flächeninhalt des Trapezes $t_1\,t_2\,v_2\,v_1$ und so fort. Der ganze Weg in der Zeit von o bis t ist also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks $o\,t\,v$; daraus folgt:

$$s = \frac{v\,.\,t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

woraus mit Rücksicht auf 2)

$$s = \frac{\varphi\,t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

erhalten wird.

Es bietet nun keine Schwierigkeit, aus den abgeleiteten fünf Gleichungen durch Substitution noch sieben weitere abzuleiten, so zwar, dass jede der vier Grössen v, t, φ, s durch je zwei von den drei übrigen ausgedrückt erscheint. Wir geben dieses System von Beziehungen hier in übersichtlicher Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} v &= \varphi\,t = \frac{2\,s}{t} = \sqrt{2\,s\,\varphi} \\ t &= \frac{v}{\varphi} = \frac{2\,s}{v} = \sqrt{\frac{2\,s}{\varphi}} \\ \varphi &= \frac{v}{t} = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{v^2}{2\,s} \\ s &= \frac{v\,t}{2} = \frac{\varphi\,t^2}{2} = \frac{v^2}{2\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Beispiele zur Anwendung dieser Gleichungen werden sich später bei der Fallbewegung darbieten.

Denkt man sich die ganze Zeitdauer der Bewegung in kleinere Zeitintervalle, z. B. Secunden, getheilt und berechnet die Wegstrecken für

*) Dieser Sachverhalt ist für jeden klar Denkenden so unmittelbar einleuchtend, dass es uns nicht nöthig scheint, denselben durch die sonst übliche „Staffelmethode" noch näher zu erläutern. Man kann auch so überlegen: Zur Berechnung einer Wegstrecke darf offenbar weder die grösste Geschwindigkeit am Ende v, noch die kleinste Geschwindigkeit am Anfang v_1, sondern nur die mittlere Geschwindigkeit verwendet werden. Diese ist aber bei gleichförmiger Zunahme gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{v_0 + v}{2}$. Diese, mit der Zeit t multiplicirt, giebt den Weg $\frac{v_0 + v}{2}\,t$ oder, wenn $v_0 = o$, den Weg $\frac{v\,t}{2}$.

die einzelnen Zeiträume, so stellt sich diese Rechnung in übersichtlicher Weise wie folgt dar:

Zeitdauer der Bewegung von Anfang an:	Weglängen von Anfang an gerechnet:	Weglängen in den einzelnen auf einander folgenden Zeitintervallen:
0	0	
		$\frac{\varphi}{2}$
1	$\frac{\varphi}{2}$	
		$3\frac{\varphi}{2}$
2	$4\frac{\varphi}{2}$	
		$5\frac{\varphi}{2}$
3	$9\frac{\varphi}{2}$	
		$7\frac{\varphi}{2}$
4	$16\frac{\varphi}{2}$	
		$9\frac{\varphi}{2}$
5	$25\frac{\varphi}{2}$	
⋮	⋮	⋮
		$(2t-1)\frac{\varphi}{2}$
t	$t^2\frac{\varphi}{2}$	

Das Resultat dieser Rechnung kann mit Worten in folgender Weise ausgesprochen werden:

1. Bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung verhalten sich die von Anfang an zurückgelegten Wege wie die Quadrate der Zeiten.

2. Die Wege innerhalb der auf einander folgenden gleichen Zeitintervalle verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Dazu kommt noch das früher erwähnte Gesetz von der Geschwindigkeit:

3. Die erlangte Geschwindigkeit wächst proportional mit der Zeit.

24 **Begriff der Masse und der Kraft.** Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich definirt als die Quantität der Materie, die er enthält. Diese viel verbreitete und viel bekämpfte Definition wäre in der That eine nichtssagende und deshalb unnütze Phrase, wenn wir sie nicht durch nachfolgende Erläuterungen erklären und vervollständigen würden.

Wir gelangen zunächst zu einer einwurfsfreien Vorstellung von relativen Quantitäten von Materie, wenn wir verschieden grosse Volumina gleichartiger Materie ins Auge fassen. So enthalten sicherlich

2 Liter Wasser doppelt so viel Materie als 1 Liter desselben Wassers. Setzen wir demnach die Masse, welche in 1 Liter Wasser enthalten ist, gleich Eins, so ist die Masse von n Litern Wassers gleich n.

Wir überlegen weiter, dass die Menge der Materie eines Körpers oder seine Masse nicht geändert wird, wenn wir nichts Materielles von ihm fortnehmen oder hinzugeben, mögen wir sonst was immer für Veränderungen mit dem Körper vornehmen. Lassen wir also n Liter Wasser gefrieren, so ändert sich wohl Volumen und Zustand desselben, aber nicht seine Masse. Sie würde sich auch nicht ändern, wenn wir das Wasser in Dampf verwandeln oder wenn wir es durch einen elektrischen Strom in seine Bestandtheile, Wasserstoff und Sauerstoff, zerlegen würden. Das entstehende Gemisch der letztgenannten beiden Gase, das sogenannte Knallgas, hätte also ebenfalls die Masse $= n$ und würde dieselbe auch behalten, wenn wir das Gas beliebig verdichten oder ausdehnen würden. Die Masse eines Körpers ist also Dasjenige, was bei allen Verwandlungen desselben unverändert gleich gross bleibt.

Sind wir auf diese Weise in den Stand gesetzt, Massen von Eis, Wasser, Dampf und Knallgas mit einander zu vergleichen und nach gemeinsamem Maasse zu messen, so sind wir deshalb noch nicht im Stande, die Massen auch solcher Körper mit einander zu vergleichen, welche nicht durch physikalische oder chemische Vorgänge in einander übergeführt werden können. Wir sind z. B. nicht von vornherein im Stande zu ermitteln, wie sich die Masse eines Liters Quecksilber zu der eines Liters Wasser verhält.

Um die Massen solcher Körper zu vergleichen, welche aus verschiedenen chemischen Grundstoffen bestehen, ist es deshalb nothwendig, eine Eigenschaft der Materie aufzusuchen, welche ihr unabhängig von der Art der Materie zukommt und allein von der Quantität derselben abhängig ist. Es bieten sich zwei solcher Eigenschaften dar. Die erste derselben ist die Eigenschaft der Materie, sich gegenseitig anzuziehen. So ziehen sich z. B. die Himmelskörper gegenseitig an, welche Erscheinung Gravitation genannt wird; so zieht auch die Erde die auf derselben befindlichen Körper an.

Durch sorgfältige Versuche, welche freilich nicht immer einfach, sondern meist auf grossen Umwegen ausführbar sind, kann man sich zunächst überzeugen, dass die Stärke dieser Anziehung so lange dieselbe bleibt, so lange die Quantität der angezogenen Materie (in oben erläuterter Weise verglichen) dieselbe bleibt, mag man sonst was immer für Veränderungen mit ihr vornehmen. Denkt man sich also z. B. auf die eine Schale einer Wage Gewichtsstücke gelegt, auf die andere ein verschlossenes Gefäss gesetzt, welches so viel Wasser enthält, dass die Wage im Gleichgewicht steht, d. h. also, dass beide Belastungen derselben gleich starke Anziehung erleiden, so bleibt diese Gleichheit fortbestehen, wenn das Wasser innerhalb des Gefässes ganz oder theilweise in Eis oder in Dampf oder in Knallgas verwandelt wird. Wir sagen deshalb,

das Wasser, das Eis, der Dampf und das Knallgas haben das gleiche *Gewicht*. Dies ist insbesondere beim Knallgas bemerkenswerth, welches ganz anderer chemischer Natur ist als das Wasser.

Denken wir uns ein andermal, wir hätten auf die eine Schale der Wage ein Gefäss gegeben, welches von einander getrennt, äquivalente Mengen von Kochsalz (Chlornatrium) und Höllenstein (salpetersaures Silber) nebst einer Quantität von Wasser enthält. Diesen Materialien sei durch Gewichtsstücke auf der andern Schale das Gleichgewicht gehalten. Vermischen wir dann die erstgenannten Materialien, so zersetzen sie sich gegenseitig und es entstehen Körper mit ganz anderen chemischen und physikalischen Eigenschaften, nämlich festes Chlorsilber und eine Lösung von Natronsalpeter. Trotzdem wird das Gleichgewicht an der Wage nicht gestört, weil nichts Materielles fortgekommen oder dazu gekommen ist, mit anderen Worten, weil die *Masse* der Materie unverändert blieb. Durch unzählige ähnliche Versuche gewinnen wir also die Ueberzeugung, *dass gleichen Massen gleiche Gewichte entsprechen* *).

Durch einen Inductionsschluss, der aber zunächst nur auf einer Hypothese beruht und noch nicht bewiesen ist, kommen wir dann dazu, diesen Satz umzukehren und zu sagen: *Gleichen Gewichten entsprechen immer auch gleiche Massen.* Ein Körper, dessen Gewicht n mal so gross als das Gewicht eines Liters Wasser ist, hat also auch eine Masse n.

Dass diese Verallgemeinerung, vermöge welcher wir auch bei solchen Körpern, die nicht aus einander entstehen können, aus gleichen Gewichten auf gleiche Massen schliessen, nicht von vornherein sicher ist, lehrt folgende Ueberlegung. Es wäre gewiss denkbar, dass die Erde in ihrer Anziehung gewisse Stoffe bevorzuge und deshalb gleiche Massen von diesen stärker anziehe, als gleiche Massen anderer Stoffe, so etwa, wie der Magnet eine gleiche Masse Eisen stärker anzieht, wie eine gleiche Masse Mangan, Nickel etc. Wir wissen demnach wohl bestimmt, dass 1 kg Eis dieselbe Masse habe, wie 1 kg Wasser, aber nicht, ob dies dieselbe Masse habe, wie z. B. 1 kg Quecksilber.

So lange wir also die Definition: „Masse ist die Quantität der Materie" beibehalten wollen, wird uns die Eigenschaft der Anziehung allein nicht mit Sicherheit die Massen verschiedener Körper vergleichen lassen. Geben wir obige Definition auf und *nennen* willkürlich solche Massen gleiche Massen, welche gleiches Gewicht haben, so entfällt zwar jeder Einwurf, aber auch jeder Vortheil der Einführung des Namens Masse, der dann neben dem Ausdruck Gewicht überflüssig ist.

Wir müssen uns also nach einem weiteren Kriterium umsehen, nach welchem wir die Quantität der Materie beurtheilen können, und wir fin-

*) Von der Verschiedenheit der Gewichte an verschiedenen Orten wird hier abgesehen.

den ein solches in der Eigenschaft der Materie, unter dem Einfluss einer Kraft eine Beschleunigung zu erleiden, deren Grösse nur allein abhängig von der Quantität der Materie ist, auf welche die Kraft wirkt.

Das darauf gegründete Maass der Masse wird das dynamische (oder kinetische) genannt, im Gegensatze zum oben besprochenen, auf Anziehung und Gleichgewicht beruhenden Maasse, welches deshalb als Gravitationsmaass oder statisches Maass der Masse bezeichnet wird.

Die dynamische Definition der Masse setzt den Begriff der Kraft voraus, den wir daher früher erörtern müssen *).

Wir bezeichnen mit Kraft die Ursache, welche bewirkt, dass eine Masse ihre Geschwindigkeit ändert **).

Diese Aenderung kann mehrfacher Art sein. Entweder hatte der Körper vorher die Geschwindigkeit Null und bekommt jetzt eine Geschwindigkeit nach der Richtung der Kraft. Oder die vorher vorhandene Geschwindigkeit wird durch einen Zuwachs in derselben Richtung vermehrt, oder durch den Hinzutritt von entgegengesetzter Geschwindigkeit vermindert oder ganz aufgehoben, oder in entgegengesetzte Richtung gebracht, oder endlich der Geschwindigkeitszuwachs hat eine seitliche Richtung. In jedem dieser Fälle sehen wir den Bewegungszustand des Körpers sich ändern und nennen die Ursache dieser Aenderung Kraft. Wir folgen dabei unserem Causalitätsbedürfniss, welches uns sagt, dass jede eintretende Veränderung im Zustande eines Körpers eine Ursache haben müsse.

Im Alterthum war das Causalitätsbedürfniss sicherlich ebenso lebhaft wie jetzt; trotzdem kamen die Alten zu einer andern Auffassung über den Zusammenhang von Bewegung und Kraft. Der Grund war der, dass sie die Frage: was bestimmt den Zustand eines Körpers und wann ändert sich derselbe? ganz abweichend beantworteten. Sie suchten das Wesentliche des Zustandes des Körpers in seiner Lage. Jede Aen-

*) Auf originelle Weise hat E. Mach (Ueber die Definition der Masse, Carl's Repert. IV) ohne vorausgegangene Definition der Kraft die Massendefinition durchgeführt: Die Erfahrung lehrt, dass gegenüberstehende Körper sich entgegengesetzte Beschleunigungen nach der Verbindungslinie ertheilen. Körper, die sich gleiche entgegengesetzte Beschleunigungen ertheilen, heissen Körper gleicher Masse. Den Massenwerth eines Körpers erhalten wir, wenn wir die Beschleunigung, welche er dem als Einheit angenommenen Vergleichskörper ertheilt, durch die Beschleunigung dividiren, die er selbst erhält. — Leider ist die hier zu Grunde gelegte Erfahrung nicht durch physikalische Versuche an irdischen Körpern, sondern nur durch astronomische Beobachtungen an Weltkörpern zu gewinnen.

**) Wir geben trotz aller theoretischen Einwürfe dieser einfachen Definiton in diesem Buche den Vorzug. Vorgerücktere verweisen wir auf die ausführlicheren Lehrbücher der Mechanik, sowie auf die kritischen Auseinandersetzungen von H. Streintz (Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, S. 105).

derung derselben, also jede Bewegung, auch die gleichförmige, erschien ihnen consequenterweise als eine fortdauernde Aenderung des Zustandes und erforderte daher in ihren Augen zur Erklärung die Annahme einer fortdauernden Ursache. Daher die Vorstellung, dass der geworfene Stein, so lange er fliegt, Kraft brauche und, da er solche von aussen nicht mehr erhält, aus sich heraus entwickele. Dass der geworfene Stein weiterfliegt, wurde demnach nicht als die Folge eines durch die Kraft des Armes hervorgebrachten Bewegungszustandes angesehen, sondern als die fortdauernde Wirkung einer während des Fluges fortdauernden Kraft.

Dieser Ansicht der Alten lag wohl eine richtige Idee zu Grunde*); es ist in dem geworfenen Steine etwas Fortdauerndes, einer Kraftleistung Fähiges, enthalten, was von Leibnitz 1695 als „lebendige Kraft“ bezeichnet wurde. Wir kommen später darauf zurück.

Seit Galilei haben wir eine durchaus abweichende Auffassung über den „Zustand“ der Körper. Nach derselben wird dieser Zustand nicht durch die Lage, sondern durch Richtung und Grösse der Geschwindigkeit bestimmt.

So lange also ein Körper nach derselben Richtung dieselbe Geschwindigkeit besitzt, ändert er seinen Zustand nicht, ist folglich auch keine Ursache zu einer solchen Aenderung, d. h. keine Kraft anzunehmen. Ist aber eine Kraft vorhanden, so kann ihre Wirkung nur die sein, dass sie die bestehende Geschwindigkeit ändert. Diese Anschauung wurde zuerst von Galilei im Jahre 1602 gewonnen**). Man bezeichnet die derselben zu Grunde liegende Thatsache als das Gesetz der Trägheit oder des Beharrungsvermögens. Dieses Gesetz lautet in der Fassung, die ihm Newton***) gegeben hat, folgendermaassen:

Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, so lange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern†).

*) Man vergleiche hierüber E. Mach, „Die Mechanik in ihrer Entwickelung“, S. 130, wo gezeigt wird, dass von vornherein nicht „herausphilosophirt“ werden kann, ob durch eine Kraft eine Lage oder eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung bestimmt wird.

**) Durch Druck veröffentlicht wurde dieselbe in Galilei's Discorsi e demostrationi matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed a i movimenti locali. Leiden 1638. Die wichtigste Stelle findet sich Bd. II der Ausgabe Florenz 1718, im Dialogo quarto, Giornata quarta. „De motu projectorum“, S. 631.

***) Newton: Phylosophiae naturalis principia mathematica. III. Aufl. übersetzt von J. Wolfers, Berlin 1872.

†) C. Neumann hat in einer Antrittsvorlesung „Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie“ darauf aufmerksam gemacht, dass das so ausgesprochene Gesetz an einer Unbestimmtheit leide. Da nämlich jede fortschreitende Bewegung nur eine relative ist in Bezug auf einen andern Körper, auf den die Bewegung bezogen wird, so entsteht die Frage, welcher Körper als

Wir können den Zustand der Ruhe als speciellen Fall des Bewegungszustandes ansehen, wo die Geschwindigkeit den Werth Null hat. So wie es möglich ist, einen ruhenden Körper durch eine Kraft in Bewegung zu setzen, so kann ein bewegter Körper durch eine Kraft in Ruhe versetzt werden. Es ist daher nicht zutreffend zu sagen: Kraft ist die Ursache der Bewegung, denn sie ist oft auch Ursache der Ruhe. Auch kann eine Bewegung fortdauern, wenn die verursachende Kraft längst aufgehört hat. Die Bewegung ist dann wohl die Folge einer früher einmal gewirkt habenden Kraft, aber nicht die Wirkung einer Kraft, die ja gar nicht mehr vorhanden ist. Wirken kann eben nur eine Ursache, die noch vorhanden ist. Kraft ist also nicht als die Ursache der Bewegung, sondern als die Ursache der Aenderung der Bewegung zu definiren.

Indem wir annehmen, dass die Grösse der Wirkung zur Grösse der Ursache im Verhältniss stehen werde, dürfen wir folgern, dass unter sonst gleichen Umständen eine grössere Kraft auch eine grössere Aenderung der Geschwindigkeit hervorbringen werde. Eine Kraft, deren Grösse immer gleich bleibt, wird daher unter sonst gleichen Umständen eine immer gleich gross bleibende Aenderung der Geschwindigkeit, also eine fortwährend gleich grosse Beschleunigung bewirken *). Eine solche Kraft heisst man eine constante Kraft. Ihre Wirkung ist daher die gleichmässig veränderte Bewegung, denn diese allein hat constante Beschleunigung oder stets gleichbleibende Aenderung der Geschwindigkeit.

Die relative Grösse oder Stärke der constanten Kraft wird gemessen durch die Grösse der Beschleunigung, die sie unter sonst gleichen Umständen erzeugt, d. h. durch diejenige Aenderung der Geschwindigkeit, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt. Da wir die physikalische Bedeutung der Geschwindigkeit als die einer Länge erklärt haben, so muss demnach auch die Kraft durch die Zunahme einer Länge, also wiederum als eine Länge sich darstellen. Sie ist in der That aufzufassen und darzustellen als die Länge, um welche die Wege eines Körpers pro Secunde verlängert oder verkürzt sind, nachdem die constante Kraft eine Secunde lang auf ihn gewirkt hat.

solcher Bezugskörper zu gelten hat. Es kann ja eine Bewegung, welche, von der Erde aus betrachtet, geradlinig ist, von der Sonne aus als krummlinig erscheinen. H. Streintz schlägt daher nach einer kritischen Untersuchung anderer Fassungen folgende erweiterte Formulirung des Trägheitsgesetzes vor: „Ein materieller Punkt, der keiner fremden Einwirkung unterworfen ist, bewegt sich hinsichtlich eines Körpers, der gleichfalls keiner fremden Einwirkung unterworfen ist und keine Drehbewegung vollführt, in gerader Linie und mit constanter Geschwindigkeit.“ Näheres in seiner Schrift „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik“, S. 3 bis 24.

*) Diese Schlussweise ist allerdings nicht strenge, sie setzt vielmehr als Thatsache das später zu erwähnende Unabhängigkeitsprincip voraus, welches darin besteht, dass die von mehreren Kräften hervorgebrachten Aenderungen der Geschwindigkeiten sich addiren, ohne sich gegenseitig zu stören.

25 **Beziehungen zwischen Masse, Kraft und Beschleunigung.** Im vorausgegangenen Paragraphen wurde erörtert, dass die Grösse der Kraft durch die Beschleunigung gemessen werde, welche sie, „unter sonst gleichen Umständen" hervorbringt. Unter diesen „Umständen" können Widerstände verschiedener Art, z. B. Reibung, widerstehendes Mittel verstanden sein. Hier wollen wir jedoch nur von jenem Widerstande sprechen, den jede Masse vermöge ihrer Trägheit der Annahme einer Beschleunigung entgegenstellt. Diesem Widerstande haben wir es zuzuschreiben, dass ein Körper durch dieselbe Kraft eine um so geringere Beschleunigung erfährt, je grösser seine Masse ist. Dass dies so sein müsse, lässt sich etwa auf folgende Weise erläutern. Hat eine Kraft von der Grösse p auf die Masse m wirkend die Beschleunigung φ bewirkt und lassen wir jetzt dieselbe Kraft auf die Masse $2m$ wirken, so können wir uns vorstellen, dass die eine Hälfte der Kraft auf die eine Hälfte der Masse, die andere Hälfte der Kraft auf die andere Hälfte der Masse wirke; die Kraft $\frac{p}{2}$ bringt aber auf die Masse m nur die Beschleunigung $\frac{\varphi}{2}$ hervor, mithin werden beide Massenhälften, also auch die ganze Masse nur die Beschleunigung $\frac{\varphi}{2}$ erhalten. Die Beschleunigungen sind also den Massen verkehrt proportional.

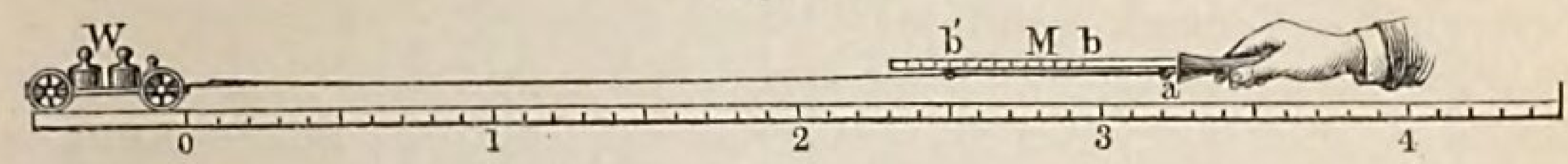
Dieser Satz ist experimentell bestätigt worden mittelst Methoden, die wir hier noch nicht beschreiben können. Wir wollen deshalb hier einen andern Versuch anführen, der freilich in dieser einfachen Form nicht mit Genauigkeit ausführbar ist, dessen blosse Vorstellung aber sehr geeignet scheint, das Verständniss des Vorzutragenden zu erleichtern*).

Wir verschaffen uns eine constante Kraft von solcher Beschaffenheit, dass wir dieselbe sicher wiederholt in derselben Stärke hervorrufen können und von der wir voraussetzen dürfen, dass sie unabhängig von dem Stoffe des Körpers sei, auf dessen Masse wir sie wirken lassen. Eine solche Kraft liefert uns ein ausgespanntes elastisches Band, z. B. aus Kautschuk, wenn wir dafür sorgen, dass er nicht über eine gewisse Grenze hinaus verlängert wird und während der Wirkung immer dieselbe Ver-

*) Die Präcisionsversuche, welche zum wissenschaftlich strengen Erweise der Gültigkeit von Gesetzen dienen, sind wegen der vielen zu berücksichtigenden Nebenumstände selten einfach und übersichtlich; auch erfordert meistens ihr Verständniss die Bekanntschaft mit Lehrsätzen und Apparaten, die erst später besprochen werden können; sie eignen sich daher selten zu Demonstrationsversuchen, bei denen es nicht auf Genauigkeit, wohl aber auf Uebersichtlichkeit und Einfachheit ankommt. Häufig ist man sogar genöthigt, rein ideelle Versuche zu beschreiben, bei welchen Annahmen gemacht werden, die sich nie ganz verwirklichen lassen, wie z. B. die Annahme von Kolben ohne Reibung, Gefässwände ohne Wärmeleitung etc.

längerung beibehält. Das eine Ende dieses Bandes ab, Fig. 70, sei an dem Maassstabe M bei a befestigt, das andere Ende reiche im ungespannten Zustande bis b, im gespannten Zustande bis b'. Letzteres Ende sei

Fig. 70.



an einem Faden und dieser an einem kleinen Wagen W aus Messing mit leicht beweglichen Rädern befestigt, welcher auf einer glatten Tischfläche möglichst ohne Reibung beweglich ist. Die Tischfläche ist mit einer Längentheilung versehen. Es sei dafür gesorgt, dass mit dem Schlage eines Secundenpendels der Wagen losgelassen und dann die Stelle bestimmt werden könne, bis zu welcher der Wagen mit dem nächsten Secundenschlage gekommen ist. Vor dem Loslassen des Wagens wird das elastische Band gespannt, bis das Ende b eine bestimmte Stelle am Maassstab angenommen hat. Während der Bewegung wird diese Spannung möglichst genau erhalten, indem man den Maassstab entsprechend zurückzieht *).

Erster Versuch. Der Wagen wird mit Messinggewichten so weit belastet, bis er auf der Wage dem Gewichte eines Cubikdecimeters Wasser das Gleichgewicht hält. Das Kautschukband wird dann so lange in seiner Spannung geändert, bis der Weg in der ersten Secunde $^1/_2$ m beträgt.

Aus der bekannten Gleichung: $\varphi = \frac{2s}{t^2}$ berechnet sich die Beschleunigung φ in diesem Falle $= 1$, sie ist ja immer das Doppelte des Weges in der ersten Secunde.

Zweiter Versuch. Der Wagen wird weiter mit Messinggewichten belastet, bis er im Ganzen doppelt so viel wiegt als im ersten Versuche; die Spannung des Bandes wird beibehalten. Man findet den Weg in der ersten Secunde $= \frac{1}{4}$ m, also die Beschleunigung $\varphi = \frac{1}{2}$.

Dritter Versuch. Der Wagen wird belastet wie beim ersten Versuche, dagegen wird die Kraft des Bandes verdoppelt, indem man zwei gleiche Bänder neben einander ebenso stark spannt wie früher.

Man findet den Weg in der ersten Secunde $= 1$ m, also die Beschleunigung $\varphi = 2$.

Vierter Versuch. Man verdoppelt nun auch die Masse des Wagens und lässt die doppelte Kraft auf ihn wirken. Der Weg in der

*) Die wirkliche Ausführung dieses Versuches erfordert einige Uebung.

ersten Secunde wird, wie im ersten Versuche $= \frac{1}{2}$ m ausfallen, also die Beschleunigung wiederum $\varphi = 1$ werden.

Setzen wir die Masse und die Kraft im ersten Versuche $= 1$, so haben wir die Versuchsresultate:

	Masse m	Kraft f	Beschleunigung φ	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}}$ $\frac{f}{\varphi}$
Erster Versuch	1	1	1	1
Zweiter Versuch	2	1	$\frac{1}{2}$	2
Dritter Versuch	1	2	2	1
Vierter Versuch	2	2	1	2

Es ist also stets $m = \frac{f}{\varphi}$.

Die Masse oder Quantität der Materie ist also bei diesen Versuchen stets gleich dem Verhältnisse zwischen der Grösse der Kraft und der Grösse der Beschleunigung.

Eine Unsicherheit in der relativen Grösse der hier angewendeten Quantitäten von Materie ist ausgeschlossen, da dieselben immer aus ein und demselben Stoffe (Messing) bestanden. Ebensowenig kann eine principielle Einwendung gegen die Bestimmung der Kräfte erhoben werden *).

Nun wählen wir aber bei einem

Fünften Versuche die Masse aus verschiedenem Stoffe. Wir ersetzen das Messing ganz oder theilweise durch ein anderes Metall oder irgend einen andern Körper von gleichem Gewichte, z. B. auch durch Wasser, welches in ein Messinggefäss eingeschlossen werden könnte. Wir würden dann finden, dass, so lange das Gewicht und die Spannung des Bandes dieselben bleiben, auch die Beschleunigung sich nicht ändert.

Dieser Versuch liefert nun den wichtigen Beweis, dass Massen, welche nach statischem Maasse gleich sind, auch nach dynamischem Maasse gleich sind.

Während es immerhin denkbar wäre, dass die Erde gleich grosse Massen von verschiedenem Stoffe ungleich stark anziehe, da die Kraft von der Erde und der angezogenen Materie gegenseitig ausgeht, so ist es bei dem gespannten Kautschukbande ganz undenkbar, dass seine ela-

*) Von den Beobachtungsfehlern wird natürlich hier abgesehen. Der präcise experimentelle Beweis, der an Stelle der hier beschriebenen ideellen Experimente zu treten hat, wird mittelst Pendelversuche geliefert, auf die wir später zu sprechen kommen.

stische Zugkraft von der Art der Materie, die gezogen wird, abhängig sei; denn diese Zugkraft geht diesmal einzig und allein von den elastischen Theilen des Bandes aus. Das Verhältniss zwischen Kraft und Beschleunigung ist daher als ein einwurffreies Maass für die Quantitäten auch verschiedener Materien zu betrachten. Da ferner dieses dynamische Maass der Masse mit dem früher aufgestellten statischen Maasse, welches auf dem Gewichte beruht, übereinstimmt, so ist damit auch für dieses seine unbeschränkte Gültigkeit erwiesen.

Wir wissen also von jetzt an, dass wir die Wage zur Vergleichung und Messung aller Arten von Masse anwenden dürfen, und da diese Methode viel einfacher und bequemer ist, als die auf der Untersuchung der Beschleunigung beruhende, so werden wir sie von nun an ausschliesslich zur Anwendung bringen.

Viele Physiker, welche die Schwierigkeit einer physikalischen Definition des Begriffes Masse vermeiden wollen, begnügen sich mit einer rein mathematischen. Sie erklären die Masse m als ein blosses Zahlenverhältniss ohne physikalische Deutung. Da nämlich sowohl die Kraft f als die Beschleunigung φ als eine Länge aufgefasst werden können, so ist $\frac{f}{\varphi}$ der Quotient zweier Längen eine Zahl; diese Zahl soll Masse genannt werden *).

Einheiten der Masse und der Kraft im absoluten und im irdischen Maasssystem. 26 Die im vorausgehenden Paragraphen dargestellte Beziehung zwischen Masse, Kraft und Beschleunigung wird benutzt, um die Einheiten festzustellen, nach denen Masse und Kraft gemessen werden. So lange über diese Einheiten nichts festgestellt ist, muss die jene Grössen verbindende Gleichung geschrieben werden:

$$\varphi = k \frac{f}{m}$$

worin k eine Constante ist; d. h. mit Worten: die Beschleunigung ist direct proportional der Kraft, verkehrt proportional der Masse.

Es ist nun am bequemsten, die Einheiten von f und m so zu wählen, dass die Constante $k = 1$ wird, also wegfällt.

Die Einheit für die Beschleunigung, welche eine Länge ist, wird dem Metermaasse entnommen; wir wollen hierfür 1 m annehmen. Wir können dann nur mehr für eine der beiden Grössen f oder m die Einheit willkürlich festsetzen, die Einheit der andern ist dann durch die Gleichung:

$$\varphi = \frac{f}{m}$$

bereits bestimmt.

Je nach dem Standpunkte, den die Physiker bei der Definition der Masse einnehmen, gehen dieselben entweder von einer willkürlich ge-

*) Wie uns scheint, wird dabei „Masse“ mit „Grösse der Masse“ verwechselt.

wählten Masseneinheit aus und definiren dann die Krafteinheit als jene Kraft, welche dieser Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt, oder sie setzen zuerst eine willkürliche Krafteinheit fest und nehmen als Masseneinheit jene Masse, welche durch die Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung erfüllt. Wir wollen beide Maasssysteme kennen lernen.

I. Das absolute Maasssystem*).

Zur Aufstellung dieses Maasssystems haben wir zunächst eine willkürlich auszuwählende Masseneinheit zu definiren. Wir wählen hierzu jene Masse, welche in einem Cubikdecimeter Wasser, gemessen bei der Temperatur seiner grössten Dichte, 4^0 C., enthalten ist. Nach dem im vorigen Paragraphen dargelegten Satze, dass gleichen Gewichten gleiche Massen entsprechen, können wir aber auch die Masse irgend eines andern Körpers, der dasselbe Gewicht hat wie ein Cubikdecimeter Wasser, als Masseneinheit erklären. Eine solche Masse heissen wir aber ein Kilogramm. Demgemäss erhalten wir die Definition:

1. Masseneinheit ist das Kilogramm, das ist jene Quantität von Materie, welche in einem Cubikdecimeter Wasser grösster Dichte oder in irgend einem andern Körper von gleichem Gewichte enthalten ist.

Daraus folgt dann die Definition der Krafteinheit:

2. Krafteinheit ist jene Kraft, welche der Masse ein Kilogramm, die Beschleunigung ein Meter ertheilt,

2 a. oder: ist jene Kraft, welche die Geschwindigkeit eines Kilogramms per Secunde um ein Meter vermehrt oder vermindert,

Als Beispiel dieser Krafteinheit wäre die constante Kraft anzusehen, welche das im vorigen Paragraphen besprochene elastische Band im ersten Versuche entwickelte, indem es 1 kg in der ersten Secunde $^1/_2$ m weit zog. Im Anfange hatte diese Masse die Geschwindigkeit gleich Null, nach einer Secunde die Geschwindigkeit = 1 m.

Die aus dem Meter, dem Gramm und der Secunde abgeleiteten Maasse sind bei feineren physikalischen Messungen oft unbequem gross. Es ist deshalb von den Physikern ziemlich allgemein unter dem Namen Centimeter-Gramm-Secunden-System, abgekürzt: (C. Gr. S.) ein absolutes Maasssystem angenommen worden, in welchem als Krafteinheit jene Kraft definirt wird, welche der Masse 1 g in einer Secunde 1 cm Geschwindigkeit ertheilt.

Diese Krafteinheit heisst Dyne; da 1 m = 100 cm, 1 k = 1000 g, so ist die oben definirte grosse Krafteinheit gleich 100 000 Dynen.

*) Ueber diese Bezeichnung lese man die Anmerkung S. 259 in Kohlrausch's „Praktische Physik“.

II. Das irdische oder praktische Maasssystem*).

In diesem System geht man von der Aufstellung einer willkürlichen Krafteinheit aus und wählt als solche jene Kraft, mit welcher die Erde ein Cubikdecimeter Wasser, gemessen bei der Temperatur seiner grössten Dichte, welches sich in Meereshöhe unter 45° Breite befindet, anzieht. Diese Kraft nennt man diesmal ein Kilogramm und erhält also folgende Definitionen.

1. Krafteinheit ist das Kilogramm, das ist die Kraft, womit ein Körper vom gleichen Gewichte wie ein Cubikdecimeter Wasser (gemessen bei 4°) unter 45° Breite und in Meereshöhe von der Erde angezogen wird.

2. Masseneinheit ist jene Masse, welche der Wirkung der eben definirten Krafteinheit ausgesetzt, pro Secunde die Beschleunigung ein Meter erfährt.

III. Vergleichung der beiden Maasssysteme.

Wir machen sofort darauf aufmerksam, dass im irdischen Maasssystem das Wort Kilogramm eine Kraft, im absoluten System eine Masse bedeutet. Ferner bemerken wir gleich jetzt, dass nach den Untersuchungen über die Schwerkraft, die wir erst später mittheilen können, die Krafteinheit sowohl, als auch die Masseneinheit des irdischen Maasssystems ungefähr 9,8 mal so gross ist als im ab-

*) Die Bezeichnung „praktisch" soll ausdrücken, dass dieses Maasssystem in der Praxis von den Ingenieuren bei der Messung von Kräften und Arbeiten gebraucht werde. Es ist das nicht ganz zutreffend. Die Praktiker vernachlässigen die Aenderungen der Schwere auf der Erdoberfläche; diese Praxis ist bei dem hier zu behandelnden System nicht gemeint. Der Name „praktisches Maass" hat aber noch eine andere Bedeutung. Man unterscheidet nämlich bei den elektrischen Maassen die „praktischen" von den „theoretischen". Die letzteren sind die der wissenschaftlichen Definition entsprechenden Maasse, die ersteren sind die nach derselben mit möglichster Genauigkeit experimentell hergestellten Etalons, welche in Copien vervielfältigt und bei den Messungen gebraucht werden. Dem analog wären die internationalen Meterstäbe und Kilogrammgewichtsstücke die „praktischen" Längen- und Massenmaasse, während die theoretischen Maasse sind: Zehnmillionstel Erdquadrant und Cubikdecimeter Wasser. Um dieser Collision mit den Bedeutungen des Wortes „praktisch" auszuweichen, haben wir in dem Anhange zur vorigen Auflage den Namen „irdisches" Maass in Vorschlag gebracht und zwar in der Erwägung, dass dasselbe auf die Wirkung der irdischen Schwere basirt ist. Dem gegenüber könnte das „absolute" Maass, dessen Bezeichnung ursprünglich nur den Gegensatz zu „relativem" Maasse ausdrücken sollte, etwa „universelles" Maass genannt werden. Wir wollen aber nicht einer Vermehrung der Bezeichnungen das Wort reden, um so weniger, als ja auch das „absolute Maass" von der Erde abhängt, da es von deren Umfang das Längenmaass und von deren Rotationsdauer das Zeitmaass entlehnt.

soluten Maasssystem. Die nach letzterem System erhaltenen Messresultate stellen demnach ungefähr 9,8 mal so grosse Zahlen vor.

Da nämlich die Anziehungskraft der Erde jeden Körper, also auch die Masse eines Cubikdecimeters Wasser oder eine dieser gleich grosse eines andern Körpers mit einer Beschleunigung von ungefähr 9,8 m fallen macht, so ist diese Kraft 9,8 mal so gross als die andere Kraft, welche dieselbe Masse nur mit der Beschleunigung von 1 m in Bewegung setzen würde.

Ebenso ist es mit der Masseneinheit. Die Masse eines Cubikdecimeters Wasser müsste auf das 9,8 fache vermehrt werden, um durch dieselbe Kraft, mit welcher ein Cubikdecimeter Wasser zur Erde angezogen wird, nur 1 m Beschleunigung zu erfahren. Um diese Beziehung durch einen einfachen Versuch anschaulich zu machen, könnten wir etwa so vorgehen. Wir verschaffen uns eine Copie der Kraft, mit welcher die Erde ein Cubikdecimeter Wasser anzieht, indem wir an ein elastisches Band die Masse eines Cubikdecimeters Wasser anhängen und die Verlängerung des Bandes notiren. Offenbar ist die Spannkraft des so weit verlängerten Bandes gleich der Krafteinheit im irdischen Maasssysteme, da sich beide das Gleichgewicht halten.

Nun machen wir mit dem ebenso stark gespannten elastischen Bande einen Versuch, wie wir ihn im vorigen Paragraphen beschrieben, indem wir den Wagen der Fig. 70 so weit belasten, bis er vom gespannten Bande gezogen, in der ersten Secunde $^1/_2$ m Weg zurücklegt, also 1 m Beschleunigung erfährt. Der Versuch müsste ergeben, dass die Masse des belasteten Wagens 9,8 mal so gross gemacht werden muss, als die Masseneinheit des absoluten Maasssystems.

Beide Maasssysteme sind gleich richtig, wenn sie nur consequent durchgeführt werden.

Wenn es sich aber um die Frage handelt, welches der beiden Maasssysteme vorzuziehen sei, so möchten wir dem absoluten Systeme den Vorzug einräumem und zwar aus folgenden Gründen. Wir verlangen von einem glücklich gewählten Grundmaasse, dass es an allen Orten der Erde herstellbar sei und dass es sich transportiren lasse, ohne sich dabei zu verändern. Das ist nun wohl bei der Masseneinheit der Fall, welche dem absoluten System zum Ausgangspunkt dient, nicht aber bei der Krafteinheit, von welcher das irdische Maasssystem ausgeht. Die Masse eines Cubikdecimeters Wasser grösster Dichte ist überall gleich gross. Auch kann man von ihr mittelst der Wage mit grosser Genauigkeit Copien in Form von leicht transportablen Metallgewichtsstücken (Normalkilogrammen) anfertigen, welche überall denselben Massenwerth behalten *).

*) Die Kilogrammprototypen der internationalen Commission für Maass und Gewicht werden, wie die Meterstäbe, aus einer Legirung von 9 Theilen Platin und 1 Theil Iridium in Kugelform mit abgeplatteter Basis angefertigt.

Ganz im Gegensatz hierzu ist die Krafteinheit, von welcher im irdischen Maasssystem ausgegangen wird, eine Grösse, welche nur an einem bestimmten Orte der Erde (unter 45⁰ Breite in Meereshöhe) unmittelbar aus der Längeneinheit zu gewinnen ist. Es ist diese Einheit ja gleich der Anziehungskraft der Erde auf einen Cubikdecimeter Wasser unter den angegebenen Umständen. An anderen Orten der Erde und unter anderen Umständen ist diese Anziehungskraft eine andere. Sie wächst mit der geographischen Breite, nimmt ab mit der Höhe über Meer.

Dieses Kraftmaass lässt sich also nicht in Form eines Gewichtsstückes transportiren *), denn dieses bewahrt auf der Reise wohl seine Masse, nicht aber die Grösse seiner Anziehung zur Erde. Um ein Kraftmaass zu transportiren, müssten wir uns eines elastischen Körpers, z. B. eines Kautschukbandes oder einer Drahtspirale bedienen, deren Verlängerung bei Belastung mit einem Cubikdecimeter Wasser oder einem Körper von gleicher Masse wir an einem Orte von 45⁰ geographischer Breite und in Meereshöhe gemessen haben. Dieses Verfahren wäre aber weder bequem noch genügend genau.

Dass wir uns im praktischen Leben zur Messung von Kräften der Gewichte bedienen, ist nur deshalb zulässig, weil die Aenderung der Anziehungskraft der Erde von einem Orte zum andern klein genug ist, um in den meisten Fällen vernachlässigt werden zu können. Auch handelt es sich sehr häufig nur um relative Messungen an demselben Orte, wo diese Aenderung gar nicht in Betracht kommt.

So wenig man daran denken kann, den Gebrauch des praktischen Kraftmaasses für diese Fälle abzuschaffen, so bestimmt muss man bei der Fundirung der Grundmaasse auf eine präcise Definition derselben achten.

Wir geben dem absoluten Maasssystem auch noch aus dem Grunde den Vorzug, weil es bei den magnetischen und elektrischen Messungen im Gebrauche ist und es uns zweckmässig scheint, in einem und demselben Buche ein einheitliches Maasssystem beizubehalten.

Da es mit viel grösserer Genauigkeit möglich ist, von einer Masseneinheit durch Wägung Copien anzufertigen, als diese Einheit gemäss ihrer Definition neu zu construiren, so wurde beschlossen, die internationalen Kilogrammprototypen nach dem im Archiv zu Paris aufbewahrten Urkilogramm zu aichen. Das ganz genaue Verhältniss dieses Kilogramms zur Masse eines Cubikdecimeters Wasser ist zur Zeit noch nicht bekannt, aber jedenfalls sehr nahe = 1.

*) Die Krafteinheit des absoluten Maasssystems ist freilich auch nicht direct transportabel und auch nicht leicht aus seiner Definition experimentell herstellbar. Aber eben deshalb erscheint dieses Maasssystem als das vorzuziehende, da es die sicher transportable und überall herstellbare Masseneinheit zu Grunde legt und die Krafteinheit aus derselben ableitet, während im irdischen Maasssysteme umgekehrt die von so vielen willkürlichen Bedingungen abhängige Krafteinheit zu Grunde gelegt und daraus erst die Masseneinheit abgeleitet wird.

27 Definition des Gewichts und Maasseinheit desselben.

Das Wort Gewicht wird von den Physikern in zweierlei Bedeutungen gebraucht, indem dieselben darunter bald eine Masse, bald eine Kraft verstehen; auch über die Maasseinheit, nach welcher das Gewicht zu messen ist, herrschen verschiedene Ansichten. Wir können unter diesen Umständen nur so vorgehen, dass wir diese Ansichten darlegen und zum Schluss erklären, in welcher Bedeutung in diesem Buche das Wort Gewicht gebraucht werden soll.

I. Gewicht als Masse. Im gewöhnlichen Verkehr versteht man unter Gewicht eine Masse und misst dieselbe nach der nämlichen Masseneinheit, welche im absoluten Maasssysteme angenommen ist, dem Kilogramm. Man spricht z. B. von so und so vielen Kilogramm Blei oder Schwefelsäure und denkt dabei nur an die Quantitäten dieser Stoffe, nicht aber an die Kraft, mit der sie von der Erde angezogen werden. Ebenso will der Chemiker nur Mengenverhältnisse ausdrücken, wenn er sagt, dass ein Gewichtstheil Wasserstoff mit acht Gewichtstheilen Sauerstoff neun Gewichtstheile Wasser geben. Die sogenannten Gewichtssätze sind eigentlich als Massensätze zu bezeichnen, denn sie dienen zur Bestimmung der Massen der Körper.

Dass die Gewichtsstücke Massen sind, ist selbstverständlich, dass aber auch die Zahlen, welche auf ihnen eingravirt sind, Massen vorstellen und nicht Anziehungskräfte, das geht schon daraus hervor, dass man überall dieselben Gewichtsstücke mit denselben Zahlen gebraucht, obwohl die Anziehungskräfte derselben an verschiedenen Orten verschieden sind. Würde man verlangen, dass die Zahlen gleich lauten und dennoch Anziehungskräfte vorstellen, so müssten die Gewichtsstücke für jeden Ort der Erde eigens aus verschieden grossen Massen hergestellt werden.

II. Gewicht als Kraft. Viele Physiker bezeichnen das Gewicht als die Kraft, mit welcher ein Körper in Folge der Schwere*) von der Erde angezogen wird. Da diese Kraft auf der Oberfläche der Erde Aenderungen bis zu $1/2$ Proc. erleidet, so stellt demnach das Gewicht eines Körpers eine Grösse dar, welche nur in Bezug auf unseren Planeten und einen bestimmten Ort seiner Oberfläche definirbar ist. Nun spricht man aber auch von dem Gewichte der Körper auf dem Monde oder auf der Sonne und sagt, dass das erstere kleiner, das letztere viel grösser sei als das Gewicht auf der Erde. Man hätte also zunächst die Definition auf alle Weltkörper zu erweitern.

Welches Gewicht hat aber dann z. B. ein Meteorkörper, der sich zwischen Sonne, Mond und Erde im Weltenraum befindet? Offenbar drei Gewichte zugleich, wenn man nicht die Resultirende der Anziehungskräfte als sein Gewicht bezeichnen will, welches aber dann für keinen dieser Weltkörper allein gilt.

*) Richtiger sollte gesagt werden: „In Folge der vereinigten Wirkung von Schwerkraft und Fliehkraft.“

Wie man sieht, ist das Gewicht eines Körpers, als Kraft aufgefasst, nicht einfach definirbar. Noch schwieriger wird die Sache, wenn man erklärt: Gewicht ist der senkrechte Druck (oder Zug), den ein Körper in Folge seiner Schwere auf die Unterlage (den Aufhängungspunkt) ausübt.

Was für ein Gewicht hat dann ein Körper, der ohne Unterlage oder Aufhängung sich frei bewegt, z. B. eine abgeschossene Kugel?

Ein Körper, der sammt seiner Unterlage frei fällt, übt auf dieselbe keinen Druck aus. Er hätte demnach kein „Gewicht". Poggendorff hat eine Wage construirt, mit der man einen Körper wägen kann, während er mit geringer Beschleunigung zur Erde sinkt. Der Körper zeigt dabei ein um so kleineres „Gewicht", je beschleunigter er sinkt*).

Ebenso ist das Gewicht eines Körpers ein anderes, während er in einer Flüssigkeit untersinkt und zwar abgesehen vom Auftrieb.

Aus diesen Beispielen ersieht man leicht, dass Gewicht (als Kraft) keine dem Körper allein zukommende bleibende Eigenthümlichkeit ist, wie die Masse desselben, sondern eine von zahlreichen Umständen ausserhalb des Körpers abhängige Grösse, welche demnach nur bei Beschränkung auf gewisse normale Bedingungen definirt werden kann.

Aber selbst bei Beschränkung auf solche normale Bedingungen begegnet man Schwierigkeiten, wenn man versucht, die Einheiten festzusetzen, nach welchen das Gewicht (als Kraft) gemessen werden soll.

Nehmen wir zuerst das absolute Maasssystem. In demselben ist die Einheit der Kraft jene, welche einem Kilogramm die Beschleunigung Eins giebt. Ein Kilogrammgewichtsstück entwickelt aber eine Kraft, welche der Masse Eins die Beschleunigung 9,8 m giebt (wenn 9,8 die für den Ort gültige Accelleration ist), mithin ist im absoluten Maasse gemessen das Gewicht (als Kraft) eines Kilogrammstückes gleich 9,8. Nun wäre aber die Behauptung, dass das Gewicht eines Kilogrammgewichtsstückes nicht gleich Eins, sondern gleich 9,8 und überdies von Ort zu Ort wechselnd sei, von den gewohnten Vorstellungen und Ausdrucksweisen zu sehr abweichend, als dass sie sich einbürgern könnte.

Die Schwierigkeit entfällt sofort, sobald man im absoluten Maasssystem das Gewicht nicht als Kraft, sondern als Masse auffasst, wie es im gewöhnlichen Verkehr geschieht. Gewicht ist dann die durch Wägung bestimmte Masse und stets durch dieselbe Zahl ausgedrückt wie diese. Der Ausdruck Gewicht wird dann aber überflüssig.

Beachten wir nun auch die Einheit des Gewichts (als Kraft) im irdischen Maasssystem. Die Krafteinheit desselben ist jene Kraft, womit unter 45° Breite in Meereshöhe ein Liter Wasser zur Erde angezogen wird. An einem solchen Orte ist also auch das Gewicht (als Kraft) eines Kilogrammgewichtsstückes gleich Eins. Aber an anderen Orten ist es ein anderes, z. B.: in Berlin 1,00066, in Wien 1,00025, in Neapel 0,99962.

*) Dieser Sachverhalt wird in §. 54 ausführlich dargelegt.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Ist überhaupt die Accelleration der Schwere unter $45^0 = g$, die an einem andern Orte $= \gamma$, so ist an letzterem Orte das Gewicht eines Kilogramms $= \frac{\gamma}{g}$.

Diese Art Messung der Gewichte wird in der That von den meisten Physikern angenommen*), von anderen wieder abgelehnt**) und zwar deshalb, weil, wenn sich auch einer solchen Festsetzung eine theoretisch richtige Fassung geben lässt, sie doch unzweckmässig erscheint. So lange man aber Gewicht als Kraft definirt, bleibt nichts anderes übrig, als dasselbe nach der festgesetzten Krafteinheit zu messen.

Wollte man im irdischen Maasssystem das Gewicht als Masse auffassen, so müsste man es auch nach der in diesem System gültigen Masseneinheit messen. Diese Masseneinheit ist aber die Masse von 9,8 Liter Wasser; denn *diese* Masse erhält durch die Kraft Eins die Beschleunigung Eins. Folglich hätte dann ein Kilogrammgewichtsstück das Gewicht (als Masse) = 0,102, welche Festsetzung ebenfalls ganz unzulässig wäre.

Fassen wir das Gesagte zusammen:

Das *Gewicht* darf im absoluten Maasssystem nur als Masse, im irdischen Maasssystem nur als Kraft definirt werden, *wenn* nicht bei der Messung des Gewichts nach den in jedem dieser Maasssysteme festgesetzten Einheiten Zahlenresultate herauskommen sollen, welche mit den Gewohnheiten der Praxis unvereinbar erscheinen.

Bei Annahme des absoluten Maasssystems entfallen dann sämmtliche Schwierigkeiten, beim Gebrauche des irdischen Maasssystems bleibt noch die Unbequemlichkeit der Aenderung des „Gewichts" von Ort zu Ort.

Gewicht als Verhältnisszahl (relatives Gewicht und relative Masse). Es giebt noch einen Ausweg, das Gewicht zu definiren, wobei alle Schwierigkeit vermieden und die Messung des Gewichtes mit der im praktischen Leben in Einklang gebracht wird, ohne der wissenschaftlichen Strenge etwas zu opfern. Man definirt: *das Gewicht eines Körpers ist jene Zahl, welche anzeigt, wie vielmal derselbe stärker zur Erde gezogen wird als ein Liter Wasser. Dieselbe Zahl zeigt auch an, wie vielmal grösser seine Masse ist als die eines Liters Wasser.*

Mit dieser Art, das Gewicht zu messen, ist folgende im praktischen Leben herrschende Auffassung verknüpft. Das Gewicht kann ebensowohl die Grösse der Masse eines Körpers, also auch die Grösse der Kraft ausdrücken, mit der er zur Erde gezogen wird. Der Messung als Masse

*) Sie wurde deshalb auch in dem Anhange zur vorigen Auflage in dieser Weise vorgetragen. Aus Versehen steht dort S. 590, Zeile 2 von unten 0,102 statt 9,8.

**) Siehe die Anmerkung Seite 305 in *Kohlrausch's* praktischer Physik. 5. Auflage.

liegt die absolute Masseneinheit, das Kilogramm, zu Grunde. Der Messung als Kraft liegt sodann als Einheit jene Kraft zu Grunde, mit welcher an dem Orte der Messung ein Kilogramm angezogen wird (also nicht jene Kraft, mit welcher unter 45⁰ in Meereshöhe ein Kilogramm angezogen wird). Der so gefassten Definition kann durch die Unterscheidung zwischen „Kilogramm“ und „Kilogrammgewicht“ Ausdruck gegeben werden. Ganz einwurfsfrei kann man auch sagen: fünf Liter Wasser haben die Masse fünf Kilogramm und das Gewicht von fünf Kilogramm.

Von einer Aenderung des „Gewichts“ von Ort zu Ort darf dann selbstverständlich nicht mehr die Rede sein; nur die Anziehungskraft der Erde ist es, welche diese Aenderung erleidet.

Wir werden in diesem Buche den Ausdruck Gewicht in der zuletzt erörterten vulgären Bedeutung überall dort gebrauchen, wo es sich nur um relative Werthe dieser Grösse handelt und wo über dessen Bedeutung kein Zweifel entstehen kann. Andernfalls werden wir das Wort Gewicht durch Ausdrücke ersetzen, welche zu keinem Missverständnisse Anlass geben können.

Zur Unterscheidung von dem im nächsten Paragraphen zu besprechenden specifischen Gewichte, sowie von dem später zu erörternden scheinbaren Gewichte, pflegt man das hier behandelte Gewicht das absolute Gewicht zu nennen.

Specifisches Gewicht, Dichte. Unter dem specifischen 28
Gewichte eines Körpers versteht man die Verhältnisszahl zwischen seinem Gewichte und dem Gewichte eines gleichen Volumens Wasser (grösster Dichte).

Fasst man das „Gewicht“ als Masse auf, dann kann man das specifische Gewicht definiren als die Masse der Volumeinheit.

Bei Anwendung eines Maass- und Gewichtssystems, in welchem die Masse der Volumeinheit des Wassers als Masseneinheit gewählt ist, führen beide Definitionen zu denselben Zahlenwerthen.

Mit dem specifischen Gewichte verwandt, aber nicht zusammenfallend, ist der Begriff der Dichte oder Dichtigkeit.

Wir verstehen unter Dichte die relative Anzahl der kleinsten materiellen Theile eines Körpers in der Volumeinheit. Wir gelangen zu einer Kenntniss dieser relativen Anzahl in einzelnen Fällen auf folgende Weise.

Wir sehen nämlich, dass durch Abkühlung oder durch Druck oder durch Aenderung des Aggregatzustandes das Volumen eines Körpers verkleinert werden kann, ohne dass dabei seine Masse verringert wird, da wir nichts Materielles von ihm fortnehmen. Es ist also auch möglich, die Anzahl der kleinsten materiellen Theile in der Volumeinheit eines Körpers dadurch zu vermehren, dass man noch mehr Masse von aussen

in die Volumeinheit hineinpresst. Die materiellen Theilchen kommen einander dann näher, der Körper wird dichter.

Wenn man z. B. zu einem Liter Luft noch einen Liter derselben hinzufügt und beide auf einen Liter zusammendrückt, so ist sicher die Masse, das Gewicht und die Dichte dieser Luft doppelt so gross als früher. Dagegen haben wir, strenge genommen, kein Mittel, die Dichte verschiedener Stoffe mit einander zu vergleichen. Finden wir das Gewicht eines Liters Luft gleich $\frac{1}{773}$ von jenem eines Liters Wasser, so dürfen wir nach den Erörterungen des §. 25 wohl behaupten, die Masse dieser Luft betrage $\frac{1}{773}$ von jener des Wassers, aber wir haben kein Recht, auszusprechen, dass auch die Dichte nur $\frac{1}{773}$ des Wassers sei. Einem solchen Ausspruche würde die nicht beweisbare Annahme zu Grunde liegen, dass gleiche Massen verschiedener Körper auch eine gleiche Anzahl kleinster materieller Theile enthalten. Nach der atomistischen Theorie der Chemie haben die kleinsten Theile der verschiedenen Grundstoffe eine verschieden grosse Masse, folglich enthalten gleiche Massen eine ungleiche Anzahl kleinster Theile.

Der Ausdruck Dichte sollte daher nach der ursprünglichen Bedeutung dieses Wortes nur dort gebraucht werden, wo es sich um relative Werthe an ein und demselben Stoffe handelt.

Wir dürfen sagen, das Wasser habe bei 4^0 die grösste Dichte und wenn wir diese $= 1$ setzen, so dürfen wir auch sagen, die Dichte des Wassers bei 0^0 sei $= 0{,}99987$, die Dichte des Eises sei $= 0{,}017.$

Wir dürfen auch sagen, kalter Alkohol habe eine grössere Dichte als warmer; aber wir dürfen nicht sagen, das Wasser sei dichter als der Alkohol, sondern nur, das Wasser habe ein grösseres specifisches Gewicht als jener.

Allerdings ist diese Unterscheidung zwischen den Begriffen Dichte und specifisches Gewicht nicht immer beibehalten worden*). Insbesondere bei Gasen und Dämpfen wird der Ausdruck Dichte statt des specifischen Gewichts gebraucht. Man versteht dann aber darunter meistens das Verhältniss zwischen dem Gewicht des Gases (Dampfes) und dem Gewicht eines gleichen Volumens Luft (von derselben Temperatur und unter demselben Druck).

Da nach einer wohlbegründeten Hypothese der Chemie (Regel von Avogadro) die Gase (und Dämpfe) bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke in gleichem Raume gleich viele Moleküle enthalten, so ist es eigentlich in diesem Falle ganz besonders unpassend, von einer verschie-

*) In der analytischen Mechanik wird, indem man von jeder Hypothese über die Beschaffenheit der Materie absieht, Dichte stets als identisch mit Masse der Volumeinheit angenommen.

denen „Dichte“ derselben zu sprechen, da vielmehr diese Dichte (der Grad der Annäherung der Theile) bei den gasförmigen Körpern unter diesen Umständen als gleich gross zu bezeichnen wäre. Nur ihr specifisches Gewicht ist verschieden.

Um das specifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, ist natürlich nicht nothwendig, dass sein Volumen = 1 sei; ist sein Volumen = v, seine Masse = m, so ist die Masse der Volumeinheit oder sein specifisches Gewicht s gegeben durch

$$s = \frac{m}{v}.$$

Die Bestimmung von s erfordert daher zwei Daten, erstens die Masse (das absolute Gewicht) m, zweitens das Volumen v, welches der Grösse nach identisch ist mit der Masse (dem absoluten Gewicht) einer dieses Volumen erfüllenden Wassermenge.

Am leichtesten ist es, diese Data für Flüssigkeiten auszumitteln. Man fülle ein Gefäss, am besten ein solches, welches oben in einen engen Hals mündet, bis zu einer bezeichneten Höhe (bis zu einem am Halse markirten Striche), einmal mit Wasser, dann mit der zu bestimmenden Flüssigkeit, und ermittele jedesmal mit Hülfe der Wage das Gewicht des Flascheninhalts.

Es wiege z. B. das Vitriolöl, welches einen Glaskolben bis zu einer Marke am Halse ausfüllt, 1534 g, während das Wasser, welches dasselbe Gefäss ebenso weit füllt, nur 830 g wiegt, so ist das specifische Gewicht des Vitriolöls $\frac{1534}{830} = 1{,}848$.

Nicht immer stehen uns so grosse Mengen der zu untersuchenden Flüssigkeit zu Gebote, dass man ein Gefäss, wie das eben besprochene, damit füllen kann; ausserdem aber ist es nicht einmal vortheilhaft, solche Mengen anzuwenden, weil solche Lasten für eine gute Wage zu gross sind. Es ist deshalb zweckmässig, kleinere Gefässe anzuwenden. Gläschen, die man zu diesem Zwecke verfertigt und welche man Pyknometer nennt, haben in der Regel die Gestalt von Fig. 71, und sind durch einen eingeriebenen Stöpsel von Glas verschlossen. Der cubische Inhalt derselben beträgt 8 bis 20 ccm. Der eingeriebene Glasstöpsel ist von einem Stück einer Thermometerröhre verfertigt, damit bei etwaiger Erwärmung der Flüssigkeit ein Theil derselben durch die feine Oeffnung austreten könne, weil sonst der Stöpsel entweder gehoben oder das Gefäss zersprengt würde.

Um das specifische Gewicht fester Substanzen zu bestimmen, kann man aus denselben einen Körper von regulärer Gestalt formen, etwa einen Würfel, eine Kugel etc., so dass es leicht ist, den cubischen Inhalt der zu untersuchenden Stücke zu berechnen. Das absolute Gewicht solcher Körper findet man durch die Wage, das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist durch das bekannte Volumen der Körper gegeben. Ein

Würfel von Marmor z. B. wiege 22,7 g. Wenn nun jede Seite dieses Würfels 2 cm beträgt, so ist der cubische Inhalt desselben 8 ccm; ein gleich grosser Würfel von Wasser wird also 8 g wiegen, folglich ist das specifische Gewicht des Marmors $\frac{22,7}{8} = 2,84$.

Eine Kugel von trockenem Hainbuchenholz wiege 25,79 g. Wenn der Durchmesser dieser Kugel 4 cm ist, so kann man daraus den cubischen Inhalt berechnen und wird ihn gleich 33,49 ccm finden. Eine gleiche Wasserkugel wiegt also 33,49 g, und das specifische Gewicht dieses Holzes ist demnach $\frac{25,79}{33,39} = 0,77$.

Nicht von jeder Substanz hat man solche Massen, um daraus reguläre Körper bilden zu können; ausserdem aber ist es ungemein schwierig, ja fast unmöglich, reguläre Körper genau genug auszuarbeiten. Man muss deshalb nach anderen Methoden sich umsehen, um das specifische Gewicht fester Körper zu bestimmen. Die meisten dieser Methoden beruhen auf hydrostatischen Gesetzen, welche wir erst später werden kennen lernen. Die folgende Methode gründet sich jedoch nicht auf diese Principien; sie wird häufig angewendet, um das specifische Gewicht solcher Körper zu bestimmen, welche in kleinen Stücken vorkommen.

Fig. 71.



Man bringe zuerst das oben erwähnte Gläschen mit Wasser gefüllt auf der Wage ins Gleichgewicht, lege dann die zu bestimmenden Körnchen daneben und mache ihr absolutes Gewicht ausfindig. Nun nimmt man die Körnchen und das Glas von der Wage weg, wirft die Körnchen in das Glas und setzt den Stöpsel wieder auf; es muss nothwendig Wasser ausfliessen, und zwar gerade so viel, als durch die hineingeworfenen Körnchen verdrängt wurde. Aus einer abermaligen Wägung ergiebt sich, wie viel Wasser ausgeflossen ist, wie viel also eine Wassermenge wiegt, deren Volumen dem Volumen der zu bestimmenden Körner gleich ist.

Es soll z. B. das specifische Gewicht von Platinakörnchen bestimmt werden, wie sie sich in der Natur finden.

Das Glas mit Wasser wiege . .	13,52 g
Die Körnchen	4,056 g
Also beides zusammen	17,576 g.

Nachdem man die Körner in das Glas geworfen, den Stöpsel aufgesetzt und alles ausgeflossene Wasser sorgfältig abgewischt hat, wägt man wieder. Gesetzt, man fände nun das Gewicht des Gläschens mit Allem, was darin ist, gleich 17,316 g, so ist offenbar das Gewicht des durch die

Körnchen verdrängten Wassers 17,576 — 17,316 = 0,26 g, folglich ist das specifische Gewicht der Platinakörner $\frac{4,056}{0,26} = 15,6$.

Dasselbe Verfahren lässt sich auch bei grösseren Stücken anwenden, wenn man nur ein passendes, etwa ein cylindrisches Gefäss wählt, dessen oberer Rand sorgfältig abgeschliffen ist, so dass man durch Auflegen einer Glasplatte immer genau dasselbe Volumen abgrenzt.

Wenn der zu bestimmende Körper in Wasser löslich ist, so füllt man das Glas mit einer anderen Flüssigkeit, in welcher sich der Körper nicht löst, etwa mit Alkohol, Terpentinöl etc. Durch das soeben beschriebene Verfahren findet man nun, wie viel ein Quantum der gewählten Flüssigkeit wiegt, welches mit dem zu bestimmenden Körper gleiches Volumen hat. Wenn aber nun das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit schon bekannt ist, so kann man leicht das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser berechnen.

Gesetzt, ein Stück eines Salzes, welches in Terpentinöl unlöslich ist, wiege 0,352 g und verdränge, in das Glas geworfen, 0,13 g Terpentinöl. Das specifische Gewicht des Terpentinöls ist 0,872, ein gleiches Volumen Wasser wiegt demnach $\frac{0,13}{0,872} = 0,149$ g, das specifische Gewicht dieses Salzes ist also $\frac{0,352}{0,149} = 2,36$.

Bei genauen Versuchen muss auf den Einfluss der Temperatur Rücksicht genommen werden, weshalb wir dieselben erst in der Wärmelehre besprechen können.

Die Tabellen auf den nächstfolgenden Seiten enthalten eine Zusammenstellung von specifischen Gewichten einiger fester Körper, Flüssigkeiten und Gase, welche zu kennen häufig nothwendig oder wenigstens von Interesse ist.

Tabelle der specifischen Gewichte einiger fester Körper (bei 0 Grad).

Platin	gemünzt	22,10
	gewalzt	22,07
	geschmolzen	20,86
Gold	gemünzt	19,32
	geschmolzen	19,25
Iridium		18,60
Wolfram		17,60
Blei, geschmolzen		11,35
Palladium		11,30
Silber		10,47
Wismuth		9,82
Kupfer	gehämmert	8,88
	gegossen	7,79
	zu Draht gezogen	8,78
Kadmium		8,69
Molybdän		8,61
Messing		8,39
Arsenik		8,31
Nickel		8,28
Stahl		7,82
Kobalt		7,81
Eisen	geschmiedet	7,79
	gegossen	7,21
Bleiglanz		7,76
Zinn		7,29
Zink		7,00
Antimon		6,71
Tellur		6,11
Jod		4,95
Schwerspath		4,43
Diamant		3,52
Flintglas		3,78 bis 3,2
Flussspath		3,15
Aluminium		2,67
Bouteillenglas		2,60
Spiegelglas		2,37
Turmalin (grün)		3,15
Marmor		2,84
Smaragd		2,77

Bergkrystall		2,68
Porzellan		2,49 bis 2,14
Gyps (krystallisirt)		2,31
Schwefel (natürlich)		2,03
Elfenbein		1,92
Alabaster		1,87
Graphit		1,8 bis 2,4
Anthracit		1,80
Phosphor		1,77
Magnesium		1,74
Bernstein		1,08
Wachs, weisses		0,97
Natrium		0,97
Kalium		0,86
Lithium		0,59
Ebenholz		1,23
Eichenholz (alt)		1,17
Buchsbaumholz		1,33
Ahornholz	frisch	0,90
	trocken	0,65
Buchenholz	frisch	0,98
	trocken	0,59
Edeltanne	frisch	0,89
	trocken	0,45
Erlenholz	frisch	0,86
	trocken	0,50
Eschenholz	frisch	0,90
	trocken	0,64
Hainbuchenholz	frisch	0,94
	trocken	0,77
Lindenholz	frisch	0,82
	trocken	0,44
Mahagoniholz		1,06
Nussbaumholz		0,68
Cypressenholz		0,60
Cedernholz		0,56
Pappelholz		0,38
Kork		0,24

Specifisches Gewicht einiger Flüssigkeiten (bei 0 Grad, wo nichts weiter bemerkt ist).

Destillirtes Wasser	0,99987	60 proc. Säure	1,348
Quecksilber	13,5956	70 „ „	1,398
Brom	2,966	80 „ „	1,438
Schwefelsäure (englische)	1,848	90 „ „	1,473
Verdünnte Schwefelsäure nach		100 „ „	1,500
Delezenne bei 15° C.:		Chloroform	1,480
10 proc. Säure	1,066	Schwefelkohlenstoff	1,272
20 „ „	1,138	Glycerin	1,260
30 „ „	1,215	Milch	1,030
40 „ „	1,297	Meerwasser	1,026
50 „ „	1,387	Wein: Malaga-	1,022
60 „ „	1,486	„ Rhein-	0,999
70 „ „	1,595	Oele: Citronenöl	0,852
80 „ „	1,709	„ Leinöl	0,953
90 „ „	1,805	„ Mohnöl	0,929
100 „ „	1,840	„ Olivenöl	0,915
Verdünnte Salpetersäure:		„ Terpentinöl	0,872
10 proc. Säure	1,054	Benzol $C_{12} H_6$	0,868
20 „ „	1,111	Steinöl (Petroleum)	0,836
30 „ „	1,171	Alkohol, absoluter	0,793
40 „ „	1,234	Schwefeläther	0,715
50 „ „	1,295	Valyl ($C_8 H_9$)	0,694

Es mögen hier noch die Zahlenwerthe für das specifische Gewicht einiger Gase Platz finden, obgleich wir die Methoden, nach welchen es bestimmt wird, erst später besprechen können.

Specifisches Gewicht einiger Gase (bei 0 Grad und 760 mm Barometerstand).

Sauerstoff	0,001432	Chlorwasserstoff (Salzsaures Gas)	0,00164
Atmosphärische Luft	0,001293	Stickoxydulgas	0,00197
Stickstoff	0,001267	Kohlensäure	0,00198
Chlor	0,003209		
Wasserstoff	0,0000894		

29 **Die sogenannte momentane Kraft. Beziehung zwischen den Kräften und den Bewegungen.** Bisher haben wir stets nur von einer Kraft gesprochen, von der wir annahmen, dass sie sich in ihrer Intensität nicht ändere, so lange sie überhaupt andauert. Eine solche Kraft heisst daher insbesondere eine constante Kraft. So oft wir im Folgenden von Kraft sprechen und nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerken, soll stets eine solche constante Kraft gemeint sein.

Den Ausdruck „momentane Kraft" gebraucht man vielfach von einer Kraft, von der man sich vorstellt, dass sie nur einen Augenblick lang wirke. Man nimmt z. B. an, dass bei einem Stosse auf einen Körper eine solche momentane Kraft ausgeübt werde.

In Wirklichkeit giebt es keine momentane Kraft; d. h. es giebt keine Kraft, die zu ihrer Wirkung keine Zeit benöthigt. Bringt die „momentane" Kraft Bewegung hervor, so wirkt sie stets eine gewisse Wegstrecke hindurch, sei dieselbe auch noch so klein, und während diese Wegstrecke zurückgelegt wird, vergeht eine gewisse Zeit, wenn auch eine sehr kurze.

Während dieser Zeit ist die Kraft entweder eine constante, dann bringt sie während dieser Zeit eine gleichmässig beschleunigte Bewegung hervor, wie jede andere constante Kraft, von der sie sich überhaupt nur durch die kurze Dauer unterscheidet; oder die Kraft wechselt während der Zeit ihrer Wirksamkeit ihre Stärke, dann haben wir eine veränderliche Kraft, welche eine ungleichmässig veränderliche Bewegung hervorbringt, so lange sie dauert, weil sie dem Körper, auf den sie wirkt, eine veränderliche Beschleunigung ertheilt.

Auf jeden Fall hört in dem Momente, wo die Kraft aufhört, auch ihre Wirkung auf, während als ihre Folge die veränderte Geschwindigkeit des Körpers fortdauert.

Wirkt also auf einen Körper, der vorher in Ruhe war, eine solche „momentane", d. h. kurz dauernde Kraft, so wird nach Aufhören derselben, mag sie während ihrer Wirksamkeit von constanter oder von nicht constanter Stärke gewesen sein, stets eine gewisse Geschwindigkeit vorhanden sein, die nun in gleichbleibender Grösse fortdauert, so dass also von da an eine gleichförmige Bewegung als Folge der „momentanen" Kraft stattfindet.

Man pflegt daher manchmal zu sagen, eine momentane Kraft bringe gleichförmige Bewegung hervor.

Es wäre aber durchaus unrichtig, wenn man dies so auffassen wollte, dass eine „momentane" Kraft in derselben Weise gleichförmige Bewegung bewirke, wie eine constante Kraft gleichmässig veränderliche Bewegung, oder wie eine veränderliche Kraft ungleichmässig veränderliche Bewegung bewirkt. Eine derartige Analogie findet nicht statt.

Auch die beiden letzteren Kräfte haben gleichförmige Bewegungen zur Folge, sobald sie aufhören. Die „momentane" Kraft hat nur das

Unterscheidende, dass sie von vornherein als eine Kraft angesehen wird, die aufgehört hat. Ob sie vor ihrem Aufhören kürzer oder länger gedauert hat, ist ohne Einfluss für die Art der Bewegung, die nach ihrem Aufhören fortdauert.

Es ist daher ganz zwecklos, auf die kurze Dauer der Kraft ein besonderes Gewicht zu legen und sie nach derselben zu benennen, denn das Wesentliche ist nicht diese kurze Dauer, sondern nur der Umstand, dass die Kraft nicht mehr vorhanden ist, folglich nur mehr die durch dieselbe angehäufte Geschwindigkeit in Form gleichförmiger Bewegung fortexistirt.

Wenn wir also künftighin den Ausdruck momentane Kraft der Abkürzung wegen gebrauchen, so verstehen wir darunter eine Kraft, welche nach einer gewissen, meist kurzen Dauer aufgehört hat zu wirken, welche aber während dieser Zeit dem Körper, auf welchen sie wirkte, eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt hat.

Da es also momentane Kräfte eigentlich nicht giebt, so ist es auch nicht nöthig, die nicht momentanen Kräfte mit dem Namen continuirliche abzusondern. Jede Kraft ist eine continuirliche, so lange sie überhaupt vorhanden ist.

Somit haben wir, strenge genommen, nur zu unterscheiden zwischen constanten und veränderlichen Kräften, welche letzteren in der verschiedensten Weise veränderlich sein können.

Der Zusammenhang zwischen den Kräften und den Bewegungen ist daher folgender:

Ein Körper, auf den nie eine Kraft gewirkt hat, ist in Ruhe.

Ein Körper, auf den eine Kraft gewirkt hat, aber nicht mehr wirkt, ist in gleichförmiger Bewegung.

Ein Körper, auf den eine constante Kraft wirkt, ist in gleichmässig beschleunigter Bewegung.

Ein Körper, auf den eine veränderliche Kraft wirkt, ist in ungleichmässig beschleunigter Bewegung.

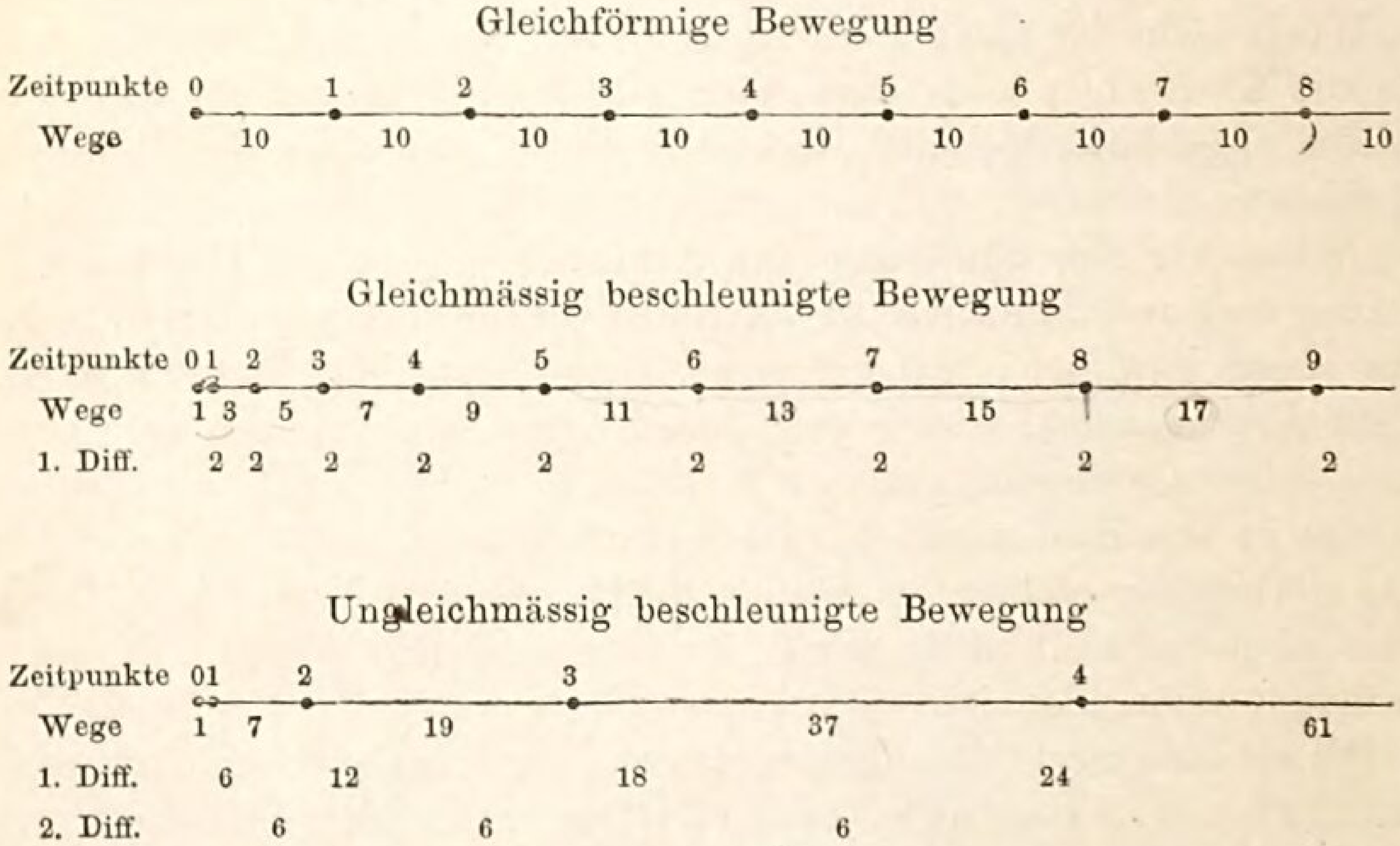
Dabei denken wir uns diejenigen Fälle, wo zwei oder mehrere Kräfte neben oder nach einander wirken oder gewirkt haben, ausser Betracht gelassen. Unter dieser Bedingung können wir auch diese Sätze umkehren und sagen: wenn ein Körper in Ruhe ist, so hat auf ihn keine Kraft gewirkt, wenn er in gleichförmiger Bewegung ist, hat auf ihn eine Kraft gewirkt, welche aufgehört hat zu wirken; wenn er in gleichmässig beschleunigter Bewegung begriffen ist, so wirkt auf ihn eine constante Kraft; endlich, wenn er in ungleichmässig beschleunigter Bewegung begriffen ist, so lässt dies auf eine veränderliche Kraft schliessen.

Für den Fall, dass zwei oder mehrere Kräfte ins Spiel kommen, gelten diese Sätze nicht immer. So kann z. B. ein Körper in Ruhe sein, wenn zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte zugleich auf ihn gewirkt haben oder noch wirken. Wir kommen auf die Zusammensetzung der Kräfte alsbald zu sprechen.

Schliesslich wollen wir hier noch zeigen, wie man Bewegungen graphisch darzustellen pflegt.

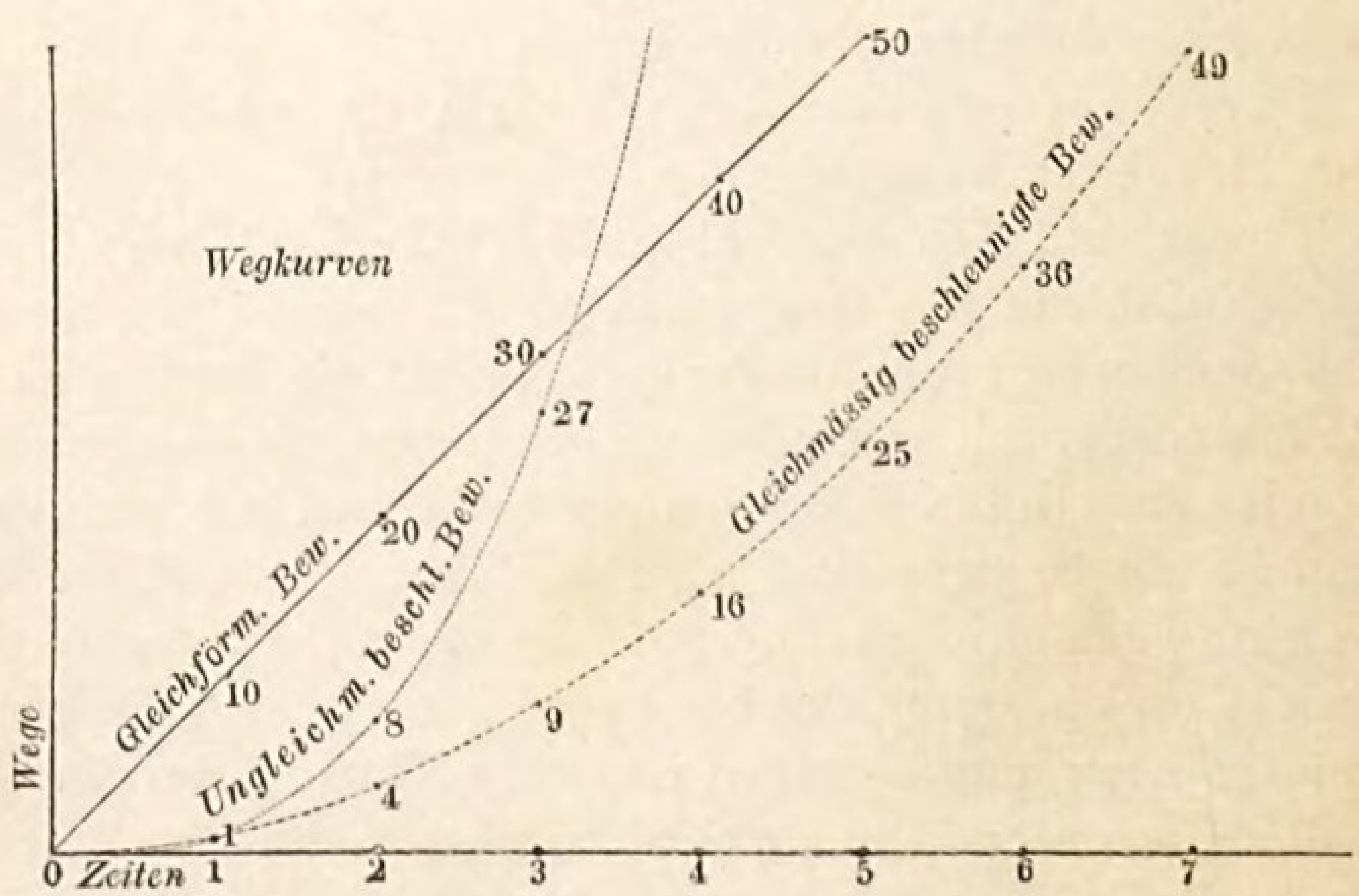
Es geschieht dies entweder durch das Schema der am Ende gleicher Zeitintervalle erreichten Wegpunkte, Fig. 72, oder besser durch die

Fig. 72.



Wegcurve, d. h. eine Curve, bei welcher die Abscissenwerthe die verstrichenen Zeiten, die zugehörigen Ordinaten die erreichten Entfernungen vom Ausgangspunkte vorstellen, Fig. 73, oder durch die Geschwindigkeits-

Fig. 73.



curven, Fig. 74, d. h. eine Curve, bei welcher wiederum die Abscissenwerthe die Zeiten, die Ordinaten die momentanen Geschwindigkeiten vorstellen. Der durch die Geschwindigkeitscurve und zwei Ordinaten über einem Abscissenstücke begrenzte Flächenraum stellt dann den innerhalb der entsprechenden Zeit zurückgelegten Weg vor. Flächenräume

unterhalb der Abscissenachse bedeuten dann Wege nach rückwärts und sind daher bei Berechnung der erlangten Entfernung in Abzug zu bringen.

Die Wegcurve der gleichförmigen Bewegung ist eine schiefe Gerade.

Die Wegcurve der gleichmässig beschleunigten Bewegung ist ein Ast einer Parabel mit senkrecht stehender Achse.

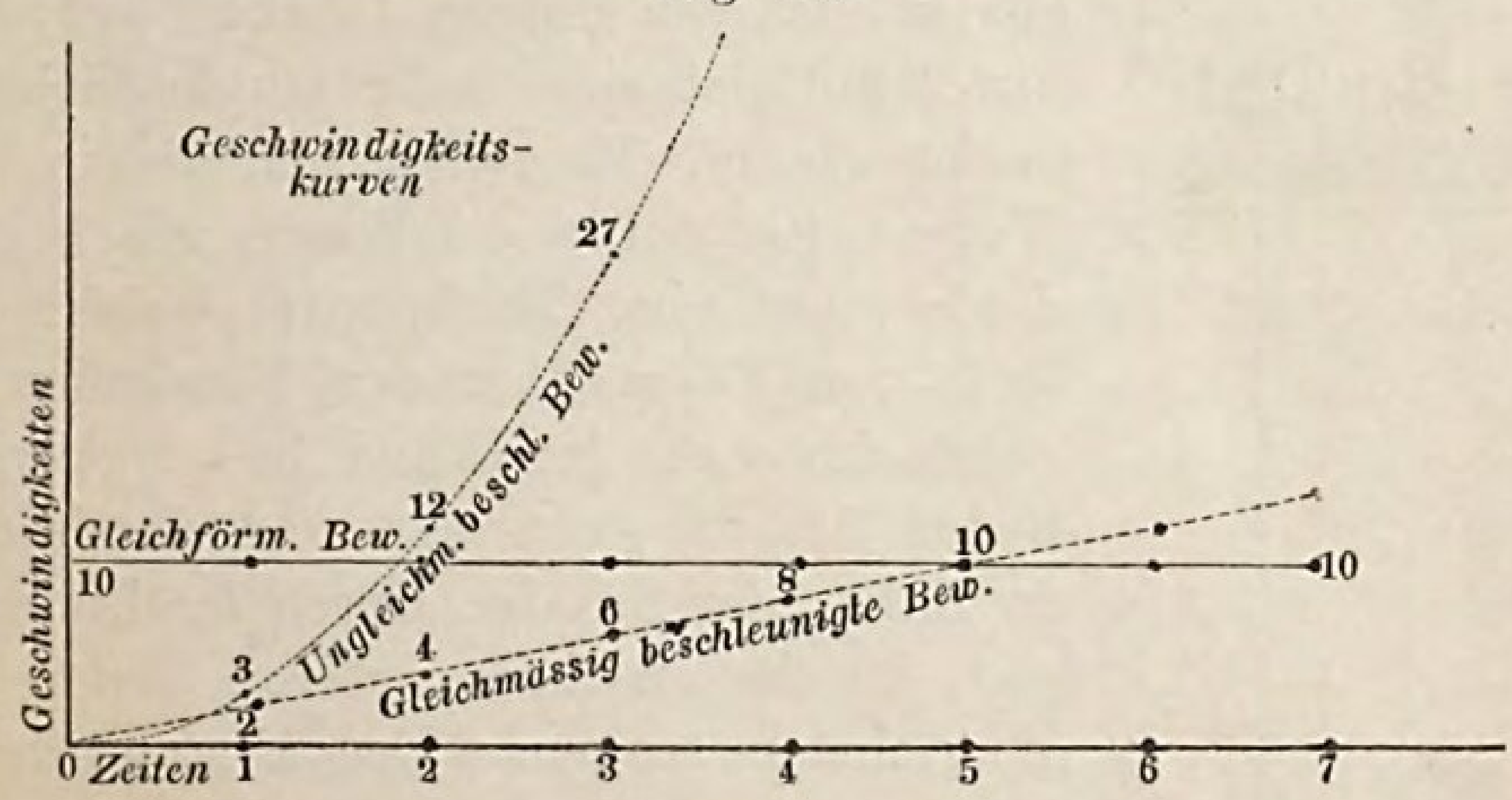
Die Wegcurve der ungleichmässig beschleunigten Bewegung ist eine Curve höherer Ordnung.

Die Geschwindigkeitscurve der gleichförmigen Bewegung ist eine horizontale Gerade.

Die Geschwindigkeitscurve der gleichmässig beschleunigten Bewegung ist eine schiefe Gerade.

Die Geschwindigkeitscurve der ungleichmässig beschleunigten Bewegung ist eine Curve nächst niedrigerer Ordnung als die zugehörige Wegcurve.

Fig. 74.



Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, welchen die Berührende an einem Punkte der Curve mit der Abscissenachse einschliesst, stellt bei der Wegcurve die momentane Geschwindigkeit, bei der Geschwindigkeitscurve die Beschleunigung vor.

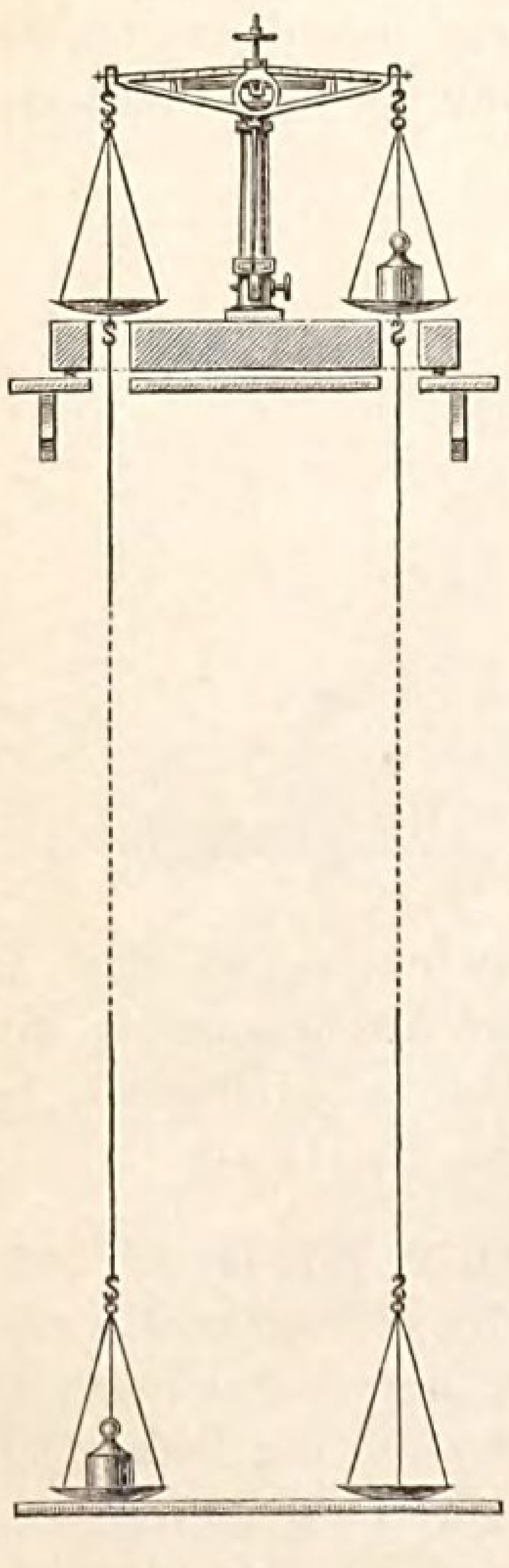
Die Schwere als angenähert constante Kraft, Grösse und Richtung derselben; Libelle. 30 In den vorausgegangenen Paragraphen wurde mehrmals der Schwere oder der Anziehungskraft der Erde auf die Körper erwähnt. Diese Kraft ist nicht der Erde allein eigen, sondern kommt allen Massen im Universum zu. Im letzteren Sinne nennen wir diese Kraft die allgemeine Schwere oder Gravitation.

Newton, welcher als der Entdecker der letzteren bezeichnet wird, hat zuerst gezeigt, dass die von Kepler ermittelten Gesetze der Planetenbewegungen sich erklären lassen durch Annahme einer Kraft, deren Grösse proportional dem Producte der aufeinander wirkenden Massen und verkehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes gesetzt wird. Woher diese Kraft stammt, ob sie wirklich von einer Masse zur anderen durch absolut leeren Raum hindurch ohne vermittelndes Medium wirke, diese Fragen hat Newton selbst offen gelassen und sie haben wohl bis heute keine abschliessende Beantwortung er-

halten*). Nur so viel scheint festzustehen, dass die Vorstellung einer wirklichen *actio in distans*, einer unvermittelten Fernwirkung der Körper durch leeren Raum hindurch keine Anhänger mehr findet und dass allgemein das Bedürfniss einer anderen Erklärung anerkannt wird.

Das Thatsächliche der Newton'schen Gravitationsgesetze lässt sich übrigens ausser durch die Bewegungen der Planeten auch durch rein physikalische Versuche beweisen. So hat Cavendish gezeigt, dass zwei schwere Metallkugeln einander anziehen, Maskelyne hat nachgewiesen, dass ein Berg auf ein aufgehängtes Loth anziehend wirke, ja es wurden sogar diese Versuche benutzt, um daraus die Masse der Erde zu bestimmen.

Fig. 75.



Den Einfluss, welchen die ungleiche Entfernung der Körper von der Erde, resp. von deren Mittelpunkt auf die Schwere derselben ausübt, hat vor einigen Jahren Ph. v. Jolly**) direct mittelst einer sehr empfindlichen Wage nachgewiesen. Es gelang ihm dies in folgender Weise. Er stellte die Wage, wie Fig. 75 andeutet, auf eine Tischplatte, welche in einer Höhe von $5^1/_2$ m über dem Fussboden des Laboratoriums an der Wand befestigt war. Der Boden des Wagekastens war durchbohrt und an Haken der Schalen waren Drähte aufgehangen, welche an ihren unteren Enden ebenfalls Wagschalen trugen. Der Abstand der oberen Schalen von den unteren betrug 5,29 m. Die herabhängenden Drähte waren gegen störenden Luftzug durch hölzerne Canäle geschützt, die in einen verschliessbaren Kasten zur Aufnahme der unteren Schalen mündeten.

Die Versuche wurden nun in der Weise gemacht, dass zuerst auf jede der oberen Schalen ein Kilogrammgewicht gelegt und nach später anzugebender Methode durch Vertauschung ihre etwaige Differenz genau bestimmt wurde. Hierauf wurde eins der beiden Gewichtsstücke aus der oberen Schale in die untere gegeben und in derselben Weise verfahren. Aus zehn solchen Versuchen, bei welchen auch die Einflüsse des ungleichen Auftriebes der Luft berücksichtigt wurden, ergab sich als mittleres Resultat, dass sich die Anziehungskraft eines Kilogramms um

*) Hierüber, sowie über die Versuche älterer und jüngerer Physiker zur Beantwortung dieser Frage sehe man das interessante Buch von C. Isenkrahe „das Räthsel von der Schwerkraft". Braunschweig 1879.

**) Ph. v. Jolly: Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. München 1878 und 1881.

das Gewicht von 1,5099 mg verminderte, wenn dasselbe auf eine um 5,29 m höhere Station gebracht wurde.

Setzen wir den Erdradius für München = 6 365 722 m und bezeichnen die Anziehungskräfte des Kilogrammgewichtsstückes unten und oben mit Q und $Q - q$, so ist nach dem Gravitationsgesetz:

$$Q : (Q - q) = (6\,365\,722 + 5{,}29)^2 : (6\,365\,722)^2$$
$$= 1000\,000 \quad : 1000\,000 - 1{,}662.$$

Die Verminderung der Anziehungskraft durch die Entfernung um 5,29 m sollte also nach der Rechnung ebenso viel betragen, wie bei einer Verminderung der Masse um 1,662 mg, was mit dem Versuchswerthe 1,5099 sehr nahe übereinstimmt. Später hat Jolly diese Versuche auf einem Thurme mit einer Höhendifferenz von 21,005 m und mit Quecksilbermassen von 5 kg wiederholt und statt der durch Rechnung gefundenen Differenz von 33,059 mg eine solche von 31,686 mg gefunden. Die geringe Abweichung beider Werthe ist durch locale Einflüsse der den Versuchsort umgebenden Massen erklärlich.

Durch Anwendung einer Bleikugel von 1 m Durchmesser, welche eine Masse von 5775 kg repräsentirte, und welche so unter die untere Schale placirt wurde, dass die Mittelpunkte der Blei- und der Quecksilberkugel 0,5686 m Abstand halten, konnte sodann Jolly die Anziehungskraft zwischen der erwähnten Bleimasse und der Quecksilbermasse von 5 kg messen. Dieselbe betrug nur 9,589 mg. Aus diesen Daten konnte sodann nach einer Methode, wegen welcher wir auf die Originalabhandlung verweisen müssen, die Masse der Erde und daraus deren mittlere Dichte zu 5,692 berechnet werden *).

Aus dem Vorgetragenen folgt, dass die Schwerkraft strenge genommen nur auf einen im Niveau verbleibenden Körper mit constanter Stärke wirke, für einen fallenden Körper ist sie eine veränderliche Kraft und zwar von zunehmender Intensität. Da aber diese Zunahme für die unseren Experimenten zu Gebote stehenden Höhendifferenzen eine sehr geringe ist, so dürfen wir in den meisten Fällen die Schwerkraft als eine constante Kraft ansehen. Die Grösse der Schwerkraft wird daher durch die Beschleunigung gemessen, welche sie per Secunde hervorbringt. Dieselbe beträgt unter 45° geographischer Breite 9,806 m; am Aequator

*) Wir entnehmen derselben Abhandlung noch folgende Werthe für die mittlere Dichte der Erde:

Nach den Versuchen über Lothablenkung von Maskelyne	1776	= 4,713
Nach den Versuchen mit der Torsionswage von Cavendish .	1798	= 5,48
„ „ „ „ „ „ „ Reich	1837	= 5,58
„ „ „ „ „ „ „ Francis Baily	. .	= 5,66
Nach d. Vers. m. d. Torsionswage v. A. Cornu und B. Baille	1878	= 5,56
Nach den Versuchen mit Pendelschwingungen von Carlini .	1824	= 4,837
„ „ „ „ „ „ Airy nach der Berechnung von S. Haughton	1856	= 5,480
Nach den Versuchen mit der Wage von J. H. Poynting . .	1878	= 5,69
„ „ „ „ „ „ „ Jolly	1880	= 5,692.

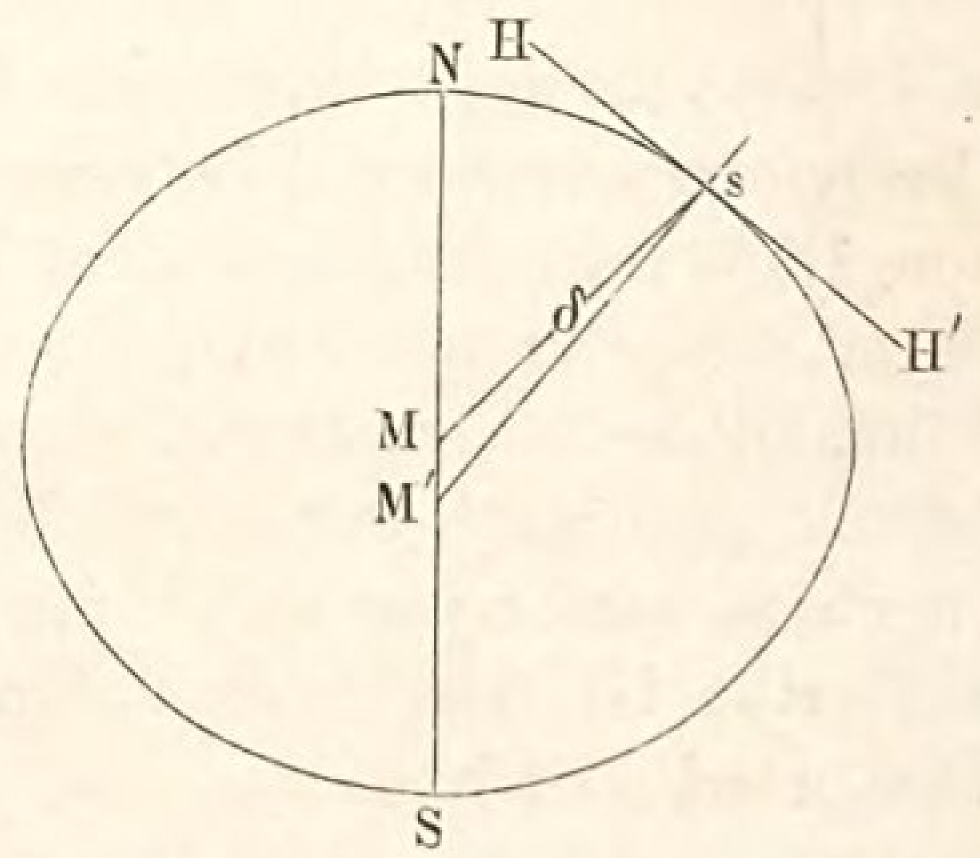
in Folge grösseren Abstandes vom Mittelpunkt der Erde und stärkeren Entgegenwirkens der Fliehkraft 9,780 m; am Pole wegen grösserer Nähe des Erdmittelpunktes und Fehlens der Fliehkraft 9,832 m*).

Die Richtung der Schwerkraft wird durch das Senkloth angezeigt, eine Vorrichtung, Fig. 76, welche keiner Beschreibung bedarf.

Fig. 76.



Fig. 77.



Diese Richtung, welche man die senkrechte oder verticale nennt, ist nur an den Polen und am Aequator gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet. An allen anderen Orten weicht sie davon ab. Diese Abweichung beträgt in der Breite von 45⁰ einen Winkel von 11′ 46″. Die Fig. 77, in welcher diese Abweichung δ, sowie die Abplattung der Erdkugel in übertriebenem Maasse dargestellt ist, zeigt, in welchem Sinne dieselbe stattfindet. Sie ist eine Folge der Fliehkraft.

Die auf der senkrechten Richtung sM' rechtwinkelig stehende HH' heisst die horizontale Richtung. Von den auf der Wirkung der Schwere beruhenden Vorrichtungen, welche zur Aufsuchung oder Prüfung horizontaler Richtungen dienen, der Setzwage, Wasserwage, Röhrenlibelle, mag hier nur die letztere beschrieben werden. Fig. 78 zeigt eine solche in der Form und Ausstattung, wie sie meistens gebraucht wird, um cylindrische Körper, z. B. Fernrohrachsen und dergleichen, genau horizontal zu stellen. Zum Prüfen der horizontalen Lage von Ebenen sind die Füsse FF mit einer ebenen Metallplatte verbunden, Fig. 79.

*) Die vollständige Theorie, welche auf die Abweichung der Erde von der Kugelform, auf den Einfluss der Fliehkraft und die Höhe über Meer Rücksicht nimmt, führt zu einem ziemlich complicirten Ausdrucke über die relative Grösse der Schwerkraft, den wir hier beifügen wollen. Bedeuten G die Grösse der Schwerkraft am Aequator in Meereshöhe, $G\varphi^h$ die Grösse der Schwerkraft in der Breite φ und in der Höhe h (in Metern), u das Verhältniss zwischen den Intensitäten der Schwerkraft und der Fliehkraft am Aequator, ε die Excentricität der Meridianellipse, r den Erdradius (in Metern), so ist

$$G\varphi h = G\left[1 + \left(\frac{5}{2}u - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\sin^2\varphi\right]\left[1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right]$$

Nach O. J. Broch ist:

$$\frac{G\varphi h}{G_{45}} = (1 - 0{,}00259 \,.\, \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000000196\,h),$$

wobei G_{45} die Intensität der Schwere unter 45⁰ Breite in Meereshöhe bedeutet.

Den Hauptbestandtheil bildet eine in der Messingfassung eingeschlossene, sehr schwach kreisförmig gekrümmte Glasröhre, welche bis auf eine Luftblase mit Alkohol oder besser mit Aether gefüllt und gut verschlossen (meist zugeschmolzen) ist. Die Röhre muss so eingekittet sein, dass sie die convexe Seite nach oben kehrt. Die Luftblase nimmt natürlich stets die höchste Stelle ein. Das Instrument soll nun so adjustirt sein, dass jedesmal, wenn die Mitte der Luftblase mit dem mittelsten der Theilstriche, welche auf die Röhre aufgetragen sind, zusammenfällt, die Unterlage, auf welcher die Libelle aufgesetzt ist, horizontal steht. Bei einer geringen Abweichung von dieser Lage von wenigen Secunden soll die Luftblase um ein Merkliches von dieser Mitte sich entfernen.

Fig. 78 a.

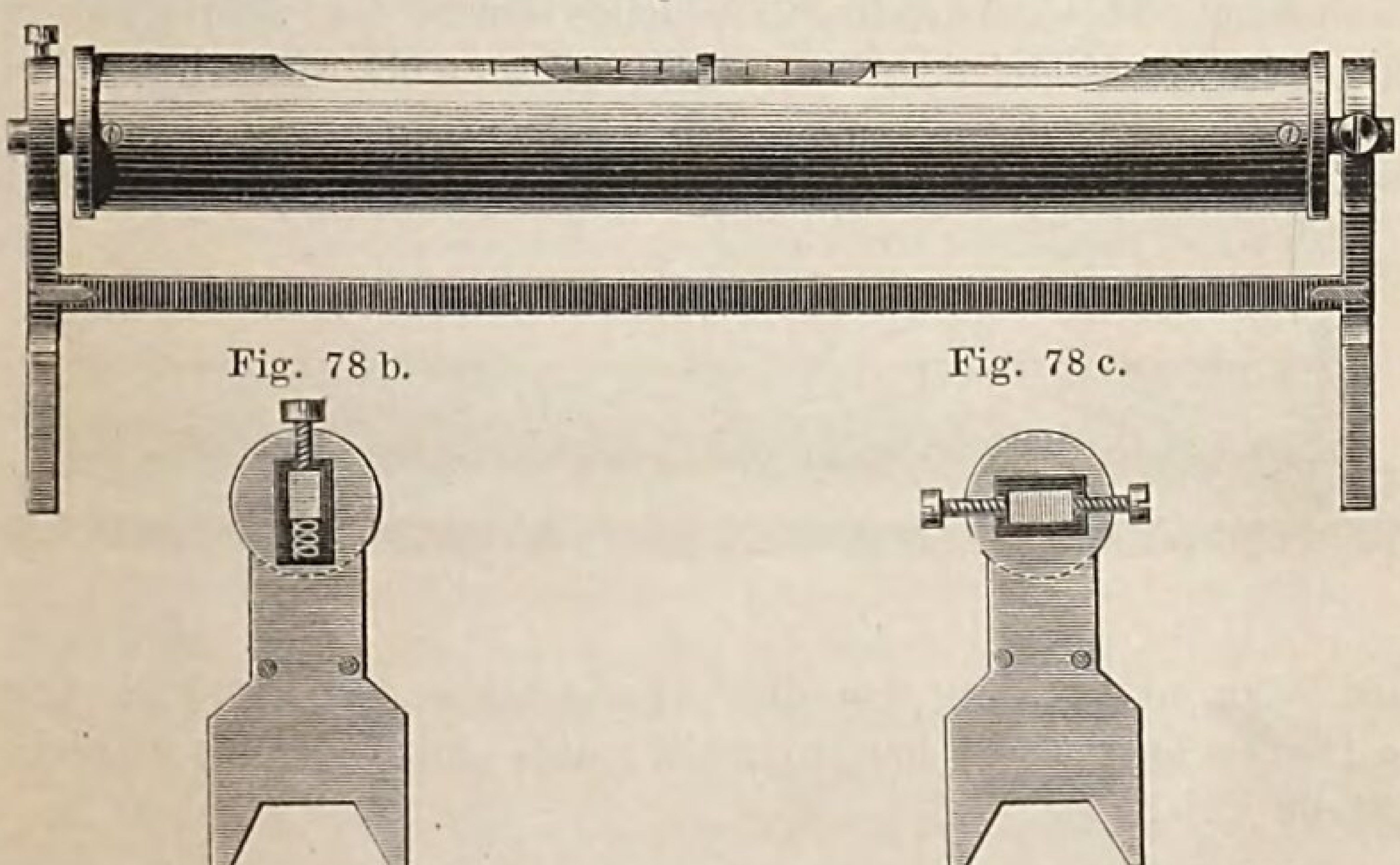


Fig. 78 b. Fig. 78 c.

Zur Adjustirung der Libelle gehören Vorrichtungen, um die Glasröhre sammt ihrer Fassung gegen das Fussgestell zu verstellen und zwar

Für die folgenden Orte erhält man hieraus, wenn $G_{45} = 1$ gesetzt wird:

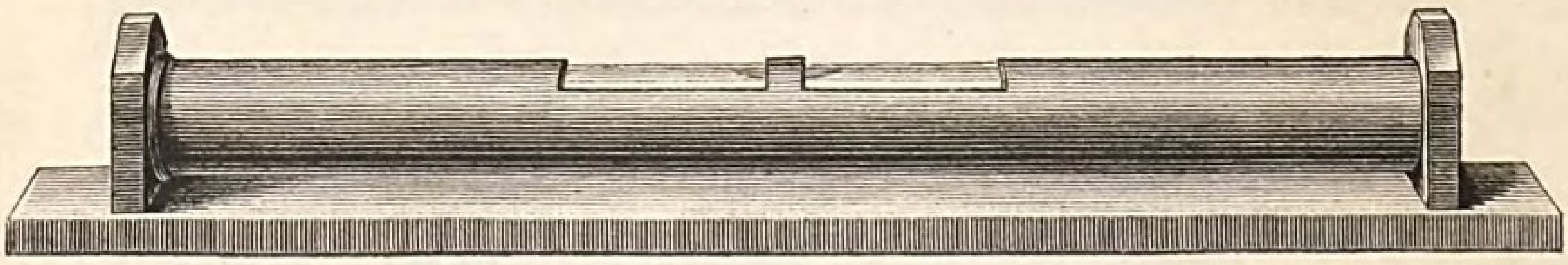
Internationales Bureau für Maass und Gewicht St. Cloud bei Paris	$\varphi = 48^0\ 50'$	$h = 67$ m	$g = 1,0003322$
London, Standards Office	$\varphi = 51^0\ 30'$	$h = 5,5$ m	„ $= 1,0005815$
Brüssel	$\varphi = 50^0\ 50'$	$h = 65$ m	„ $= 1,0005110$
Berlin	$\varphi = 52^0\ 30'$	$h = 40$ m	„ $= 1,0006625$
München	$\varphi = 48^0\ 8'$	$h = 525$ m	„ $= 1,0001798$
Kopenhagen	$\varphi = 55^0\ 41'$	$h = 10$ m	„ $= 1,0009417$
Christiania	$\varphi = 59^0\ 55'$	$h = 23$ m	„ $= 1,0012840$
Stockholm	$\varphi = 59^0\ 20'$	$h = 20$ m	„ $= 1,0012385$
Petersburg	$\varphi = 59^0\ 50'$	$h = 11$ m	„ $= 1,0012798$
Wien	$\varphi = 48^0\ 12'$	$h = 182$ m	„ $= 1,0002530$
Bern	$\varphi = 46^0\ 57'$	$h = 543$ m	„ $= 1,0000697$
Bonn	$\varphi = 41^0\ 54'$	$h = 29$ m	„ $= 0,9997146$
Neapel	$\varphi = 40^0\ 52'$	$h = 57$ m	„ $= 0,9996164$
Madrid	$\varphi = 40^0\ 24'$	$h = 663$ m	„ $= 0,9994560$

(Travaux et Mémoires du Bureau internationale d. Poids et Mesures I, p. A, 3.)

entweder nur in verticaler Lage, Fig. 78 b, wenn die Libelle mit der oben erwähnten Fussplatte, Fig. 79, versehen ist oder auch in horizontaler Richtung, Fig. 78 c, wenn die Libelle auf Cylinder aufgesetzt werden soll. Die Einrichtung dieser Adjustirvorrichtungen ist wohl aus den Figuren 78 b und 78 c genügend ersichtlich.

Die Rectification der Libelle erfolgt in der Weise, dass man sie auf eine ebene, respective cylindrische Unterlage aufsetzt und diese Unterlage so lange in ihrer Neigung verändert, bis die Luftblase einspielt. Hierauf wird die Libelle mit verkehrten Enden aufgesetzt. Stellt sich die Luftblase wieder in die Mitte, so ist die Libelle richtig und die Unterlage horizontal. Weicht die Blase ab, so corrigirt man die Hälfte der Abweichung an der Unterlage, die andere Hälfte an dem verticalen Correctionsschräubchen. Dieses Verfahren, welches durch die Erörterungen des §. 19 genügend erklärt erscheint, wird zur Controle wiederholt. Bei der auf dem Cylinder aufzusetzenden Libelle überzeugt man sich noch, ob dieselbe mit der Achse desselben parallel steht, indem man sie nach er-

Fig. 79.



folgter Horizontalstellung um die Cylinderachse dreht und die horizontalen Correctionsschräubchen so stellt, dass dabei die Blase nicht von der Stelle weicht *).

31 **Princip der Wechselwirkung; der freie Fall.** So oft ein Körper auf einen andern eine Kraft ausübt, erfährt er stets von dem letzteren eine rückwirkende Kraft gleicher Grösse. Diese Erfahrungsthatsache ist zuerst von Newton als Gesetz der gleichen Action und Reaction ausgesprochen worden und wird kürzer als Princip der Wechselwirkung bezeichnet **).

Dies gilt daher auch von der Anziehung zwischen der Erde und den auf ihr befindlichen Körpern. Der Körper drückt auf die Unterlage und wird gleich stark von ihr gedrückt. Entzieht man ihm die Unterlage, so setzt die gegenseitige Anziehungskraft sowohl den Körper als auch

*) Näheres hierüber in Specialwerken, z. B. Hunäus, die geom. Instrumente, S. 14.

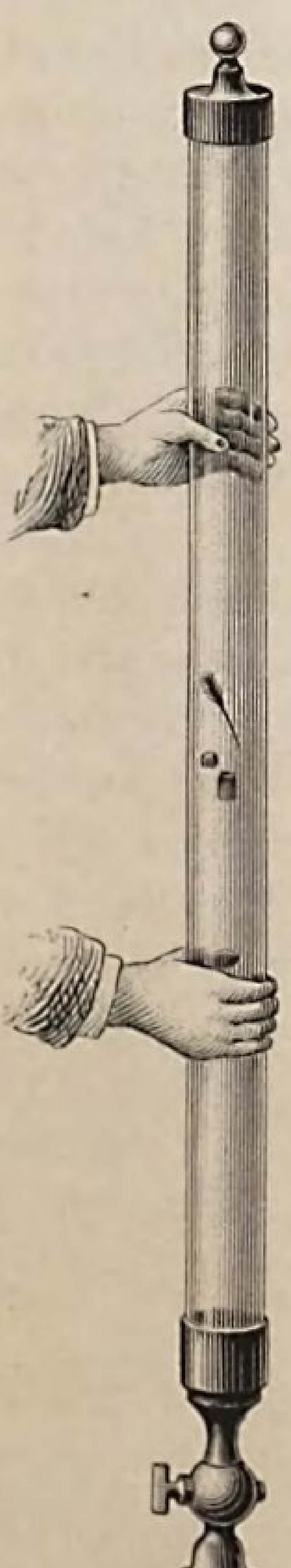
**) Nach Newton lautet dieses Princip: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung. Eine allgemeinere und bestimmtere Fassung hat unter Anderen auch H. Streintz gegeben in dem Werkchen „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik", S. 130.

die Erde in Bewegung, beide fallen gegen einander. Da aber die gegenseitig durch die gleiche Kraft ertheilten Beschleunigungen den Massen verkehrt proportional sind, so ist bei der unverhältnissmässig grössern Masse der Erde ihre Beschleunigung verschwindend klein gegenüber der Beschleunigung, die der Körper erhält.

Man kann daher in der Regel die Erde als ruhig stehend und den Körper allein als fallend ansehen. Findet die Fallbewegung ohne jede Hemmung statt, so nennt man sie den freien Fall.

Ueber den freien Fall der Körper hatte man vor Galilei ganz unrichtige Vorstellungen. Man behauptete, dass die Körper desto schneller fallen, je grösser ihre Masse (ihr Gewicht) sei. Der einfachste Versuch reicht hin, sich von der Unrichtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Lässt man mehrere Kugeln aus Blei, Stein, Holz, Kork gleichzeitig aus Zimmerhöhe auf den Boden fallen, so bemerkt man kaum einen Unterschied in den Fallzeiten. Bei Körpern von sehr geringem specifischem Gewichte, sowie bei relativ grossem Querschnitte beobachtet man allerdings ein Zurückbleiben, welches aber offenbar nur von dem störenden Widerstande der Luft herrührt. Dass dem so sei, zeigt ein Versuch im luftleeren Raume. Dieser Versuch ist am bequemsten mit dem in Fig. 80 abgebildeten Apparate anzustellen. Eine etwa $1^1/_2$ m lange, ungefähr 7 cm weite Glasröhre ist an beiden Enden verschlossen und an einem derselben mit einem Hahne und einem Ansatzstücke versehen, welches auf die Luftpumpe aufgeschraubt werden kann. Die Röhre enthält eine kleine Bleikugel, ein Stück Kork und ein Vogelfederchen oder dergleichen.

Fig. 80.



Hat man in später zu erklärender Weise die Luft aus der Röhre entfernt und richtet die letztere rasch in die senkrechte Lage auf, so beobachtet man leicht, dass alle jene Körperchen gleich schnell fallen. Lässt man dann wieder Luft einströmen, so zeigt sich wieder der Einfluss des Widerstandes, den diese der Bewegung entgegenstellt.

Noch einfacher, wenn auch weniger sicher und instructiv ist folgender Versuch. Man bedeckt eine Münze mit einem kreisförmig geschnittenen Papierblättchen von etwas kleinerem Durchmesser und lässt dann die Münze in horizontaler Lage fallen. Das darauf liegende Papierblättchen fällt dann gleich schnell, da der Widerstand der Luft durch das vorausgehende Metallstück bereits beseitigt wird.

Die unrichtige Behauptung, dass Körper desto schneller fallen, je grösser ihr Gewicht, je grösser also die Kraft ist, mit der sie von der

Erde angezogen werden, beruht auf dem Uebersehen des Umstandes, dass in demselben Verhältnisse auch die Masse grösser ist, die in Bewegung gesetzt werden muss. Das Irrthümliche jener Behauptung dürfte ganz treffend dargethan werden, wenn man analog behaupten würde, dass zwei Schnellläufer zusammen doppelt so schnell laufen können als ein Schnellläufer allein, weil sie zusammengenommen doppelt so stark sind als Einer. Gerade so, wie in diesem Falle die doppelte Kraft sich auf die doppelte Körpermasse vertheilt, so dass auf einen Körper immer nur die einfache Kraft trifft, so ist es auch bei der Anziehung der Körper durch die Erde. Ein Körper von doppelter Masse wird allerdings doppelt so stark angezogen, aber von dieser Anziehungskraft entfällt auf die einfache Masse nur die Hälfte.

Alle Körper fallen daher (im luftleeren Raume) *gleich schnell*, oder mit anderen Worten ausgedrückt: *alle Körper erhalten durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung*. Dies ist das *erste Gesetz des freien Falles*.

Die Thatsache der gleich grossen Beschleunigung aller Körper durch die Schwere wird auch wohl ausgedrückt durch die Redensart: *alle Körper sind gleich schwer*, was aber nicht sagen will, sie hätten gleiches Gewicht oder sie würden mit gleich grosser Kraft zur Erde gezogen.

Das zweite Gesetz des freien Falles bezieht sich auf die Art der Bewegung, d. h. auf den zeitlichen Verlauf derselben, also auf die Geschwindigkeit und die Fallräume.

Da wir nach §. 30 die Schwerkraft als eine constante Kraft ansehen dürfen und in §. 29 erörtert haben, dass eine solche Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeuge, so folgt daraus, dass die Fallbewegung durch dieselben Gleichungen und Regeln dargestellt werde, welche wir im §. 23 unter 6), sowie am Schlusse desselben mitgetheilt haben.

Ist also g die Beschleunigung der Schwere, t die Fallzeit, s der Fallraum, v die momentane Geschwindigkeit, so gelten die Beziehungen

$$v = g\,t, \quad s = \frac{g\,t^2}{2}$$

sowie die Regeln:

Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten, die Fallräume der einzelnen auf einander folgenden Zeitintervalle verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Zahlenbeispiel: Ein Mensch fällt aus einem Luftballon von 4410 m Höhe zur Erde, wie viel Zeit bleibt ihm, um sich zum Tode zu bereiten?

Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Antwort: $t = \sqrt{\frac{2\,s}{g}} = \sqrt{\frac{8820}{9{,}8}} = \sqrt{900} = 30$ Secunden

$v = g\,t = 9{,}8 \,.\, 30 = 294$ m per Secunde.

Um die Fallgesetze durch das Experiment zu bestätigen und damit auch den Beweis zu erbringen, dass constante Kräfte gleichmässig beschleunigte Bewegungen bewirken, kann man sich verschiedener Methoden bedienen.

Entweder man behält den freien Fall bei, verfeinert aber die Beobachtungsmethoden für die verhältnissmässig kurzen Zeiträume, in denen die Fallbewegung vor sich geht, oder man ersetzt die Bewegung des freien Falles durch eine künstlich verlangsamte gleicher Art, indem man das Verhältniss zwischen der wirksamen Kraft und der zu bewegenden Masse verringert, so dass der Quotient $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \text{Beschleunigung}$ kleiner wird. Die so verringerte Beschleunigung gestattet eine leichtere Beobachtung der verlangsamten Bewegung, aus deren Ergebniss dann auf die Bewegung des freien Falls zurückgeschlossen werden kann.

Zu den Apparaten, bei welchen direct der freie Fall beobachtet und die dabei zurückgelegten Wege gemessen werden, gehören die Fallmaschine von Morin*), die Fallmaschinen von Laborde**), F. Lippich***), J. Müller†), Rabs, dann der Fallapparat von Edelmann in Verbindung mit dem Vibrationschronoskop von v. Beetz††).

Zu der zweiten Classe von Apparaten, an denen die künstlich verlangsamte Fallbewegung beobachtet und gemessen wird, gehören die Fallrinne von Galilei und die Fallmaschine von Atwood.

Bei der Fallmaschine von Morin zeichnet ein zwischen Führungsleisten fallender schwerer Körper mittelst eines Schreibstiftes eine Linie auf eine senkrecht stehende Schreibfläche, welche während des Falles in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorbei bewegt wird. Die so gezeichnete Linie stellt hiermit eine Curve dar, deren Abscissen den Fallzeiten, deren Ordinaten den Fallräumen entsprechen.

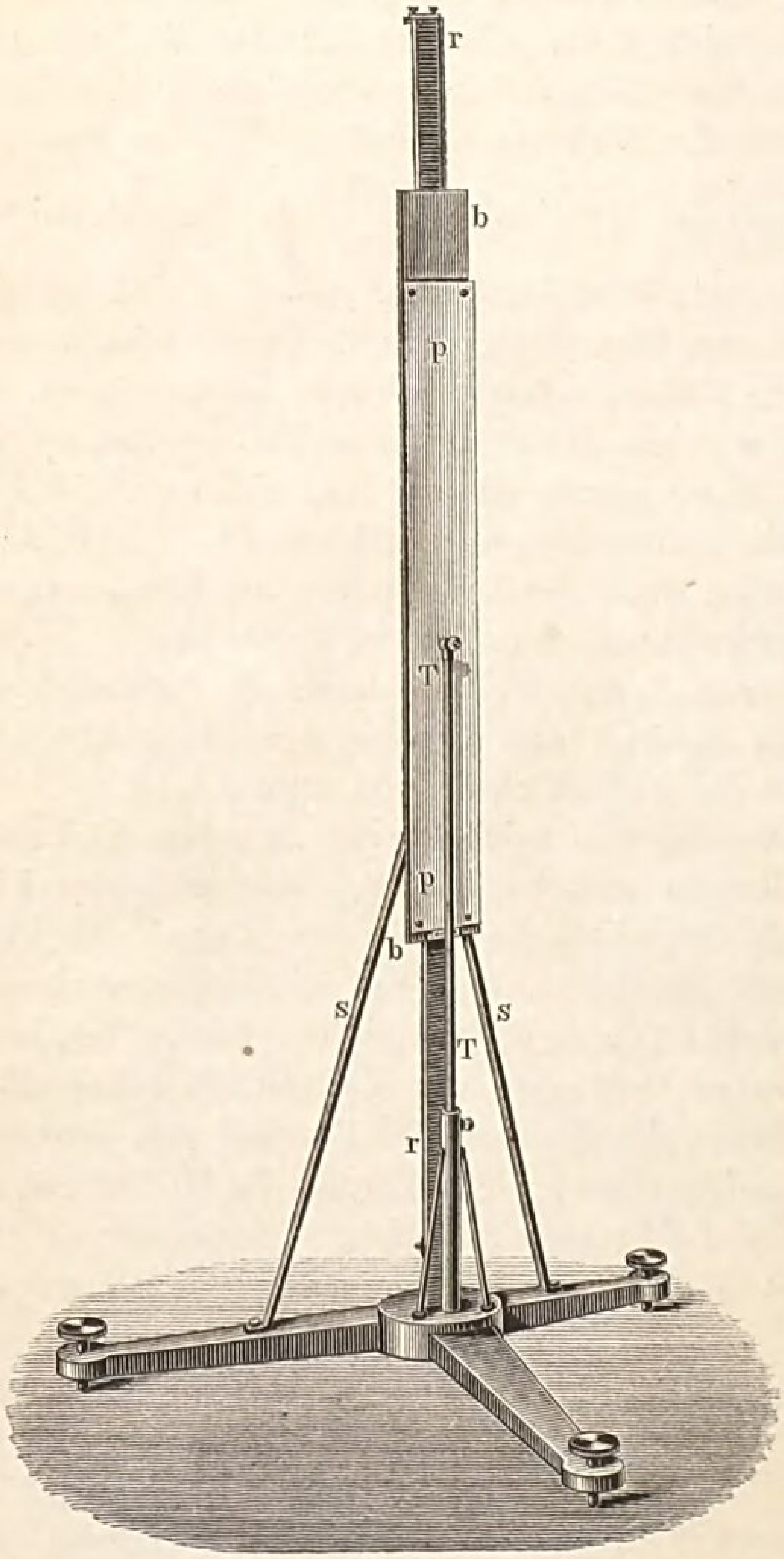
Da die Versuche als Curve die Hälfte einer Parabel mit senkrecht stehender Achse ergeben, bei welcher, wie bekannt, die Ordinaten sich verhalten wie die Quadrate der Abscissen, so folgt daraus die Richtigkeit des Fallgesetzes, dass die Fallräume proportional den Quadraten der Fallzeiten sind.

Bei den Apparaten von Laborde, Lippich, Müller und Rabs ist der fallende Körper eine Platte, welche zugleich als Schreibfläche für einen Stift dient. Dieser Stift wird durch einen elastischen Körper zu Schwingungen in horizontaler Richtung veranlasst, wodurch auf der Platte während ihres Falles eine sogenannte Schwingungscurve aufgezeichnet wird, aus welcher in unten beschriebener Weise das Fall-

*) Beschrieben und abgebildet in Jamin, Cours de Physique.
**) Cosmos 1860, XVII.
***) Wiener Akad. Ber. 52, II, S. 549.
†) Dieses Buches vorige Auflage I, S. 277.
††) M. Th. Edelmann, Neuere Apparate etc. I, S. 37.

gesetz abgeleitet werden kann. Von den eben citirten Apparaten dürfte jener von Lippich die genauesten Messungen gestatten. Da es aber bei Vorlesungsversuchen mehr auf Einfachheit als Genauigkeit ankommt, so wollen wir hier den Apparat von Rabs in München beschreiben. Derselbe ist in Fig. 81 abgebildet.

Fig. 81.



Ein schwerer Dreifuss aus Eisen trägt eine eiserne Schiene *r r*, welche durch die Seitenstücke *s s* festgehalten wird.

Die Schiene *r* ist auf jeder Seite mit zwei Zuschärfungsflächen versehen, wie man aus Fig. 82 u. 83 deutlicher sieht, welche die Schiene *r* sammt dem Fallschlitten in $^1/_3$ der natürlichen Grösse im Auf- und Grundriss darstellen. Diese genau abgehobelten und geglätteten Zuschärfungsflächen sind es, welche zur Leitung des Fallschlittens dienen, dessen Einrichtung gleichfalls aus Fig. 82 ersichtlich ist. Die beiden Stücke *A* und *B* des Fallschlittens sind durch zwei eiserne Stangen *z* verbunden, welche 50 bis 60 cm lang und in Fig. 82 nur der Raumersparniss wegen viel zu kurz gezeichnet sind. Das Brett *b* ist im Aufriss der Fig. 82 ganz weggelassen. Um gute Resultate zu erzielen, muss der ganze Apparat sorgfältig gearbeitet und die einzelnen Theile der Fallschiene so disponirt sein, dass der Schwerpunkt des ganzen fallenden Systems in die verticale Mittellinie der Schiene *r* fällt.

Fig. 83 stellt das am unteren Ende des Fallbrettes *b* angebrachte Häkchen dar, welches dazu dient, das obere Ende der Feder *T* seitlich

festzustellen; Fig. 84 endlich stellt das obere Ende der Feder mit dem Schreibstift von hinten und von der Seite gesehen dar.

Fig. 82.

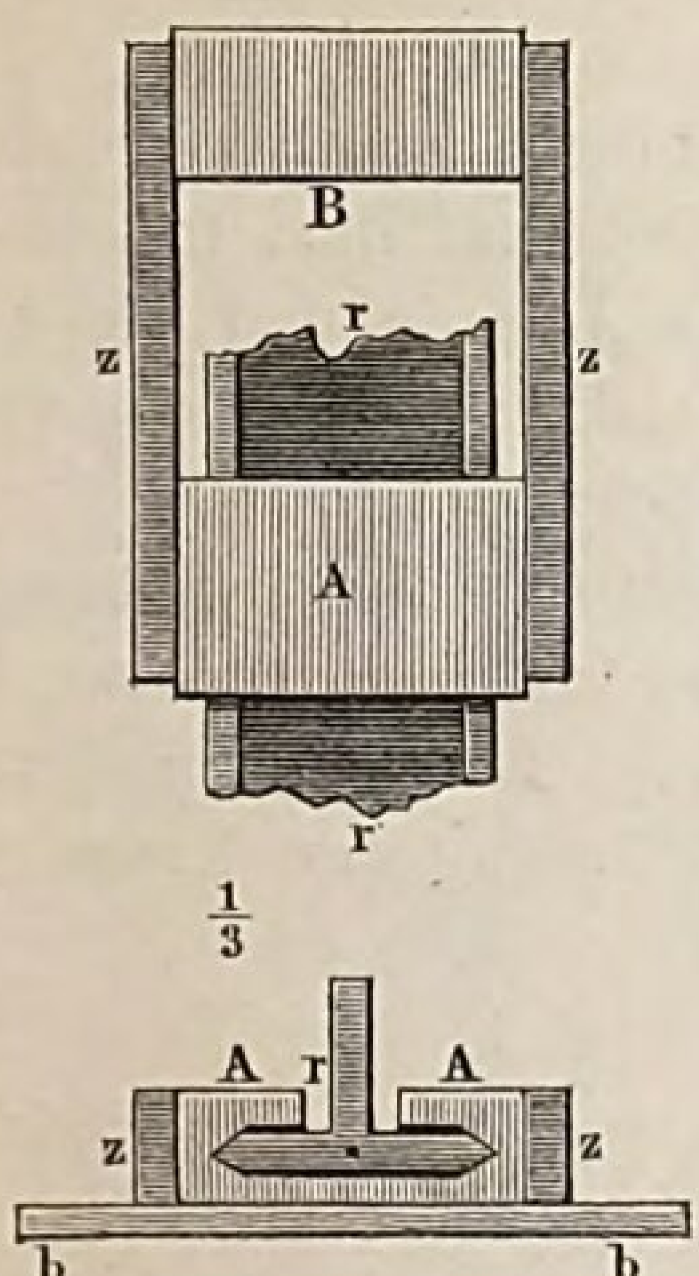


Fig. 83.

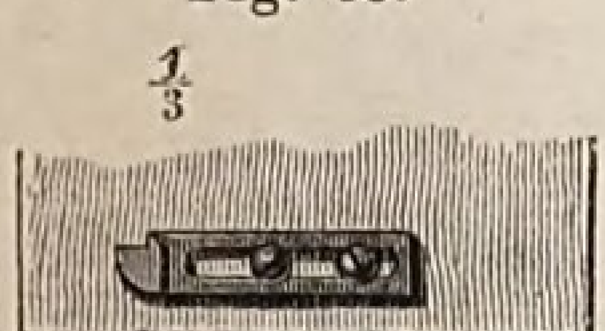


Fig. 84.

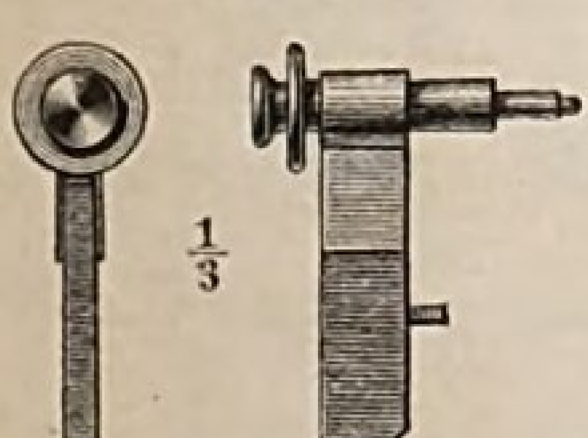
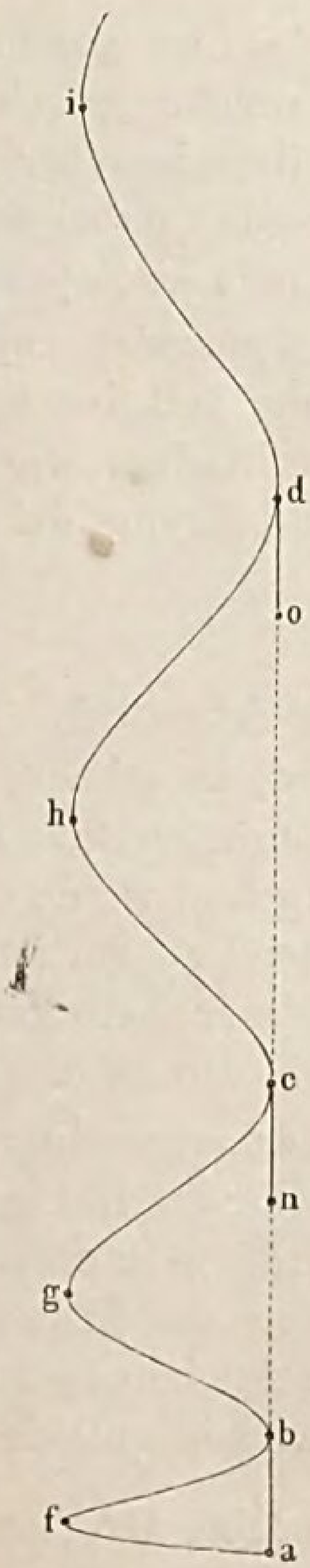


Fig. 85.



Bei Ausführung des Versuches wird der Fallschlitten mit einem Streifen glatten Papiers überspannt, dann so weit gehoben, dass der Vorsprung der seitwärts gebogenen Feder in das erwähnte Häkchen eingelegt werden kann. Lässt man nun den Schlitten fallen, so wird gleichzeitig die Feder losgelassen und ihr Stift schreibt auf der Papierfläche eine Curve, welche in Fig. 85 abgebildet ist.

Durch diese Schwingungscurve, Fig. 85, wird nun das Fallgesetz sehr anschaulich dargestellt. Während der ersten, zweiten, dritten Oscillation des Stabes T werden die Räume ab, bc, cd durchfallen und die Messung dieser Fallräume zeigt, dass $ac = 4\ ab$, $ad = 9\ ab$, dass sich also die Fallräume wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Zieht man von bc und cd die Längen $cn = do = ba$, also Längen ab, welche dem Fallraume während der ersten Vibration gleich sind, so bleiben die Längen bn und co, welche die Wege darstellen, welche während der zweiten und dritten Vibration vermöge der Endgeschwindigkeiten durchlaufen werden, mit welchen der fallende Körper in b und c ankommt.

In gleichen Zeiten nehmen die Fallräume um gleichviel zu, und zwar während jeder Vibration um die Länge $bn = bc - ab$. Es ist also auch $cd - cb = cb - ab$. Ferner ist $ih - hg = hg - gf = bn$ etc.

Um den absoluten Werth der Accelleration zu finden, hat man die Oscillationsdauer der Feder T zu kennen. Wir können aber die hierzu taugliche Methode hier nicht auseinandersetzen. Ueberdies eignet sich

der beschriebene Apparat hierzu nicht gut, weil die Reibung des Schlittens an der eisernen Schiene und der Schreibspitze immer eine geringe Verzögerung der Bewegung veranlasst. Bei dem Apparat von Lippich ist diese Fehlerquelle vermieden, da der die Schreibfläche tragende Körper vollständig frei fällt.

Bei dem Apparate von Edelmann geschieht die Zeitmessung durch eine schwingende Stimmgabel, welche jedoch nicht auf dem fallenden Körper selbst schreibt. Die Zeitmarken für den Abgang und die Ankunft eines fallenden Körpers werden dabei auf elektrischem Wege vermittelt. Wir werden diese Methode erst später beschreiben.

Von der zweiten Classe von Apparaten zur Beobachtung einer künstlich verlangsamten Fallbewegung soll im folgenden Paragraphen die Fallmaschine von Atwood beschrieben werden. Die Fallrinne von Galilei kann erst nach der Erklärung der Zerlegung der Kräfte in Verhandlung kommen.

32 **Die Fallmaschine von Atwood.** Die Bewegung beim freien Falle erfolgt, wie bereits erwähnt, zu schnell, als dass man ohne feinere Hülfsmittel die Wege messen könnte, welche innerhalb der ersten, zweiten, dritten etc. Secunde zurückgelegt werden. Gäbe es ein Mittel, diese Bewegung etwa auf ein Hundertstel zu verlangsamen, so dass die Wege, welche sonst so und so viele Meter betragen, nur mehr ebenso viele Centimeter umfassen, so wäre die directe Messung ermöglicht.

Wir gelangen zu dieser Verlangsamung, wenn wir einen Körper von der Masse 100 g durch die Kraft in Bewegung setzen, mit welcher 1 g von der Erde angezogen wird. Wir müssen also eine solche Anordnung treffen, dass die Anziehung der Erde auf 99 von den 100 g aufgehoben wird und nur noch die Anziehung auf 1 g übrig bleibt, welche auf alle 100 g gleich vertheilt wirken und sie in Bewegung setzen muss. Es kommt dann auf jedes einzelne Gramm nur $\frac{1}{100}$ der Schwerkraft zur Wirkung, die Beschleunigung, welche sonst 9,8 m beträgt, wird nur mehr 9,8 cm betragen; die ganze Bewegung spielt sich im hundertmal verkleinerten Maassstabe ab.

Hängen wir über eine Rolle, Fig. 86, welche ohne merkliche Reibung um eine horizontale Achse drehbar und von verschwindend kleiner Masse ist, einen Faden und an jedes Ende desselben ein Gewicht von 50 g, so halten sich die Zugkräfte das Gleichgewicht und es erfolgt keine Bewegung. Nehmen wir aber jetzt von der einen Seite ein halbes Gramm fort und legen dasselbe zu den 50 g der anderen Seite, so sind die beiderseitigen Kräfte die von $49^1/_2$ und $50^1/_2$ g. Es ist also auf der letzteren Seite ein Ueberschuss von 1 g, dessen Anziehung durch die Erde nicht aufgehoben ist, während die Anziehung auf die übrigen 99 neutralisirt ist. Damit wäre also unser Zweck erreicht.

Nun ist es aber nicht möglich, eine Rolle zu finden, welche eine verschwindend kleine Masse hat. Gesetzt, wir könnten die Masse ihrer Achse und der Speichen so klein machen, dass wir sie vernachlässigen dürften, so bliebe nur der Umfang der Rolle zu berücksichtigen. Eine einfache Ueberlegung lehrt uns, dass die am Umfange der Rolle befindliche Masse bei der durch das Uebergewicht eingeleiteten Bewegung dieselbe Geschwindigkeit annehmen muss, wie die angehängten Gewichte. Gesetzt, die am Umfange befindliche Masse der Rolle betrage 79 g, so hängen wir an die Fadenenden nur die Massen 10 und 11 g, dann haben wir wiederum im Ganzen 79 + 10 + 11 = 100 g in Bewegung gesetzt durch den Zug von 1 g.

Fig. 86.

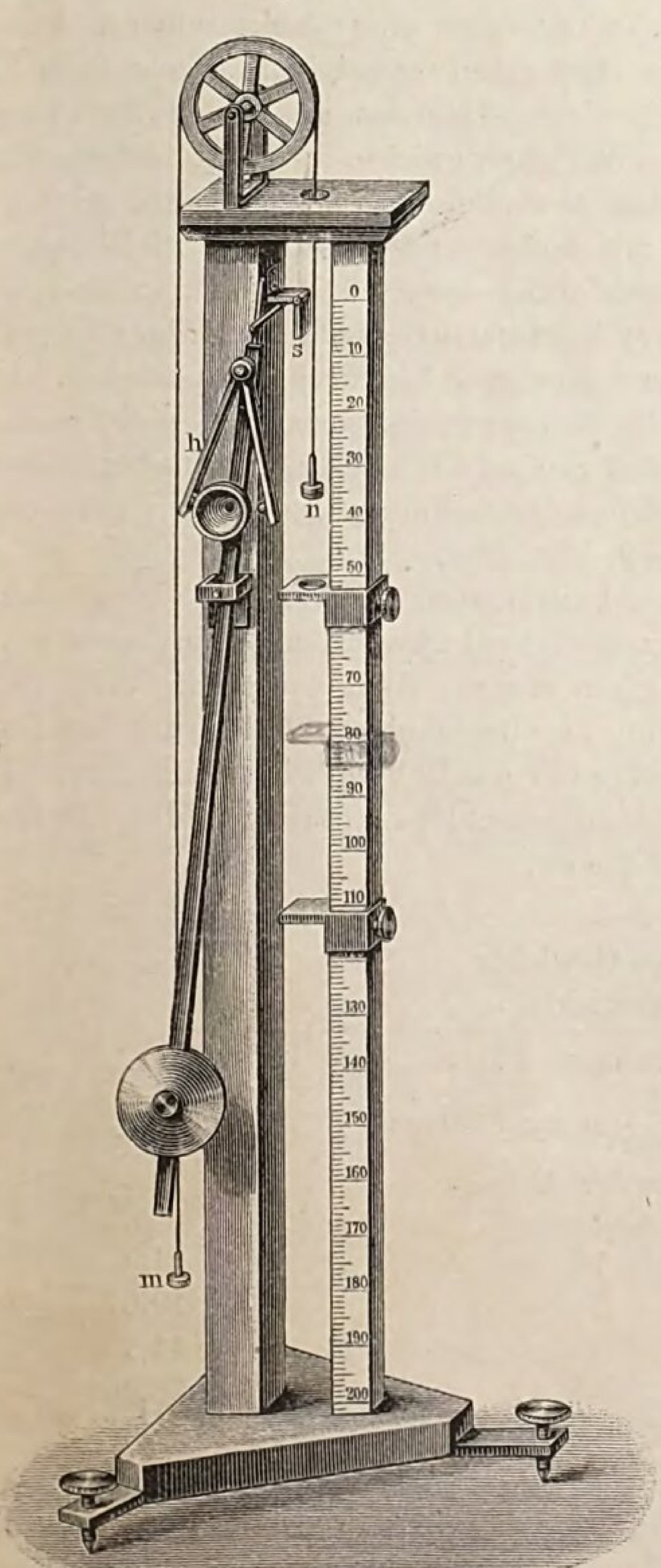


Fig. 87.

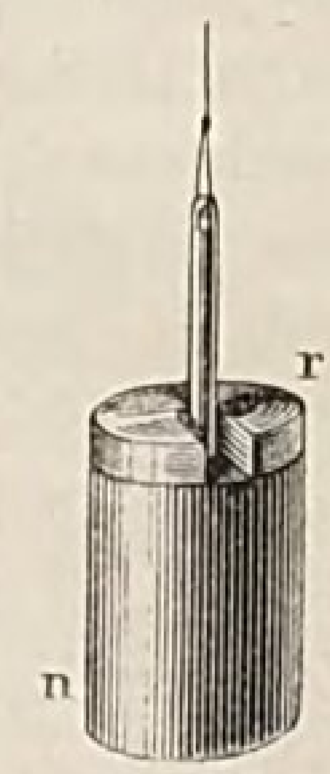
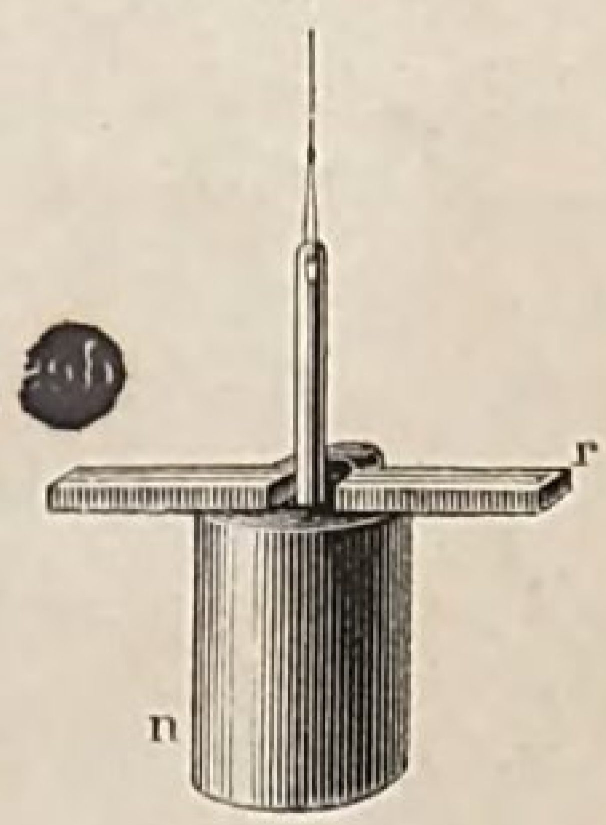


Fig. 88.



Die Atwood'sche Fallmaschine besteht nun aus einer solchen Rolle, welche auf einer Säule von ungefähr 2 m Höhe befestigt ist, Figuren 86, 87 und 88.

Eine in Centimeter getheilte Scala gestattet die Abmessung der Fallräume. Die Fallzeiten werden meistens durch ein Secundenpendel gemessen, welches bei jeder Schwingung an eine Glocke schlägt. Ausserdem ist eine bei verschiedenen Apparaten mannigfach abgeänderte Vorrichtung vorhanden, welche bewirkt, dass das an den Nullpunkt der Scala gestellte Schälchen mit dem Uebergewichte zuerst festgehalten und dann im Augenblicke des ersten Secundenschlages losgelassen wird. An der Scala sind zwei Schieber mit horizontalen Platten verschiebbar, von denen die eine in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten ist, so zwar, dass die an den Faden gehängten cylindrischen Gewichtchen, Fig. 87 *r*, nebst gleichgeformter Schale *n* ohne anzustossen hindurchgehen können. Dem Uebergewichtchen, welches die Bewegung hervorbringt, giebt man die Form eines länglichen Plättchens von solcher Grösse, dass es beim Durchgang durch die erwähnte kreisförmige Oeffnung der einen Platte abgehoben und zurückbehalten wird, Fig. 88 *r*.

In einer ersten Versuchsreihe prüft man die Wegstrecken, welche in 1, 2, 3 etc. Secunden zurückgelegt werden. Man berechnet zu diesem Zwecke diese Wegstrecken voraus, stellt den nicht durchbrochenen Schieber nach einander an die berechneten Stellen der Scala und beobachtet dann, ob der Aufschlag der das Uebergewicht tragenden Schale genau mit dem betreffenden Secundenschlage zusammenfällt. Man hat also beispielsweise folgendes Schema:

Masse der Rolle	=	79 g
„ der gleichen Gewichte . .	=	20 g
„ des Uebergewichts . . .	=	1 g
Bewegte Gesammtmasse . . .	=	100 g.

$$\text{Accelleration} = 9{,}80\ \frac{1}{100}\ \text{m} = 9{,}80\ \text{cm}.$$

Versuch Nr.	Zeitdauer der Bewegung in Secunden	Fallraum berechnet
1	1	4,9
2	2	19,6
3	3	44,1
4	4	78,4
5	5	122,5

Die Beobachtung ergiebt gewöhnlich ein geringes Zurückbleiben, d. h. eine Verspätung, weil die Reibung an der Achse der Rolle und der Luftwiderstand die Bewegung etwas hemmen. Auch ist die Masse der Speichen und der Achse der Rolle nicht ganz ohne Einfluss, endlich noch der Umstand etwas störend, dass das Uebergewicht des Fadens im Anfange gegen die Bewegung, später im Sinne derselben wirksam ist. Will man,

dass die Versuche möglichst genau eine bestimmte Accelleration geben, so vergrössert man probeweise das Uebergewichtchen so lange, bis die berechneten Fallräume herauskommen. Das Mehrgewicht des Uebergewichtchens kommt dann auf Rechnung der Reibung und der übrigen störenden Umstände.

In einer zweiten Versuchsreihe prüft man die momentanen Geschwindigkeiten, welche nach dem Falle von 1, 2, 3 etc. Secunden erlangt werden. Zu diesem Zwecke setzt man die Platte mit der kreisförmigen Oeffnung der Reihe nach auf dieselben Punkte der Scala, welche nach 1, 2, 3 etc. Secunden erreicht werden, und setzt die volle Platte so weit unter die ausgeschnittene, dass die sinkenden Gewichte eine Secunde nach dem Durchgang durch die letztere zum Aufschlage gelangen. Im Moment dieses Durchganges wird das Uebergewichtchen abgehoben und damit jede Ursache zu einer weiteren Beschleunigung entfernt, so dass die Gewichte nur vermöge ihrer Trägheit die Bewegung mit der erlangten Geschwindigkeit fortsetzen. Lässt man also diese gleichförmige Bewegung eine Secunde andauern, so ist der während derselben zurückgelegte Weg (der Abstand der beiden Platten) gleich der zu beobachtenden Geschwindigkeit. Das Schema wäre also etwa folgendes:

Versuch Nr.	Zeit bis zum Abheben des Uebergewichts in Secunden	Theilstrich der Scala, wo das Abheben erfolgte	Theilstrich der Scala, wo die Gewichte eine Secunde später ankommen	Erlangte Geschwindigkeit im Momente des Abhebens
1	1	4,9	14,7	9,8
2	2	19,6	39,2	19,6
3	3	44,1	73,5	29,4
4	4	78,4	117,6	39,2
5	5	122,5	171,5	49,0

Die Zahlen sind die berechneten und müssen durch die Versuche bestätigt werden.

Eine dritte Versuchsreihe kann dazu benutzt werden, um die fundamentale Beziehung: Beschleunigung $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ experimentell zu bestätigen. Zu diesem Zwecke ändert man zunächst die Kraft allein, indem man Gewichtsstücke von einem der Schälchen ins andere legt, wodurch wohl die Grösse des Uebergewichts, nicht aber die der gesammten in Bewegung gesetzten Masse geändert wird. Dann ändert man die Gesammtmasse allein, indem man auf beide Schälchen gleich grosse Gewichte zulegt. Endlich können beide Aenderungen gleichzeitig vorgenommen werden.

Erster Versuch. Man nimmt beispielsweise von den 10 g des einen Schälchens ein halbes Gramm fort und legt es zu den 11 g des anderen Schälchens, dadurch wird das Uebergewicht = 2, also die Kraft verdoppelt, also auch die Beschleunigung und die Fallräume sowie die momentanen Geschwindigkeiten, was der Versuch bestätigen muss.

Zweiter Versuch. Man macht die beiderseitigen Gewichte = 58 und 59 g, folglich ist die Gesammtmasse = 79 + 58 + 59 = 196 g, das Uebergewicht beträgt nur 1 g, also die treibende Kraft (im Gramm-Centimeter-Secunden-System *) = 980 Dynen. Daraus ergiebt sich die Beschleunigung $\gamma = \frac{980}{196} = 5$ cm; die Fallräume in 1, 2, 3, 4, 5 Secunden berechnen sich daraus zu 2,5, 10, 22,5, 40, 62,5 cm, was durch den Versuch zu bestätigen ist.

Dritter Versuch. Durch Ueberlegen eines halben Gramms von dem einen Schälchen auf das andere macht man ihre Belastungen = 57,5 und 59,5, also das Uebergewicht = 2 g, ohne an der Gesammtmasse 196 g etwas zu ändern. Dadurch wird nur die Kraft verdoppelt, die Beschleunigung wird mithin = 10 cm. Die Fallräume werden = 5, 20, 45, 80, 125 cm.

Endlich wollen wir darauf aufmerksam machen, dass man unter Voraussetzung der Richtigkeit des Fallgesetzes die in Betracht kommende Masse der Rolle durch den Versuch ermitteln kann.

Hätte man z. B. nur durch den letzten Versuch constatirt, dass bei einer Belastung der beiden Schalen = 57·5 g und 59·5 g, also 2 g Uebergewicht in fünf Secunden der Fallraum 125 cm beträgt, so hätte man zuerst die Beschleunigung $\gamma = 2 \cdot \frac{125}{25} = 10$ cm zu berechnen und dann die Gleichung

$$10 = \frac{2 \cdot 980}{x + 57,5 + 59,5}$$

nach x aufzulösen. Man erhält daraus die in Betracht kommende Masse der Rolle $x = 79$ g. Unter dieser „in Betracht kommenden Masse" der Rolle ist diejenige Masse zu verstehen, welche, am Umfange der Rolle allein vorhanden, der Beschleunigung denselben Trägheitswiderstand entgegensetzen würde, wie die wirklich vorhandene Masse der Rolle, von der ein Theil sich näher der Achse befindet. Wir werden auf diesen Umstand später bei der Besprechung des Trägheitsmomentes zurückkommen.

*) Siehe die Bemerkungen S. 92.

Im Kilogramm-Meter-Secunden-System würde die obige Berechnung ergeben:

$$\gamma = \frac{0,001 \, . \, 9,8}{0,196} = 0,05 \text{ m},$$

also dasselbe Resultat.

Unabhängigkeitsprincip, Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Wir haben im §. 8 darauf aufmerksam gemacht, dass es nicht zulässig sei, von einem Punkte zu behaupten, er sei in absoluter Ruhe oder in absoluter fortschreitender Bewegung, da wir nur relative Ruhe oder relative fortschreitende Bewegung zu erkennen vermögen. Wenn wir folglich irgend einen Körper gegenüber einem anderen in eine relative Geschwindigkeit versetzen, so müssen wir stets daran denken, dass er vorher schon eine relative Geschwindigkeit in Bezug auf einen anderen Körper besitze, oder vielmehr, dass er in Bezug auf mehrere andere Körper gleichzeitig schon mehrere relative Geschwindigkeiten besitze, während er wieder anderen Körpern gegenüber in relativer Ruhe sich befinde. Wäre nun der Verlauf der von uns eingeleiteten relativen Bewegung des Körpers abhängig von den vorher in ihm vorhandenen relativen Bewegungen, so würde daraus folgen, dass wir in Bezug auf den Verlauf der ersteren gar nichts Bestimmtes voraussagen könnten, denn je nachdem wir diesen oder jenen Bezugskörper als ruhig stehend annehmen wollten, wäre vorher diese oder jene Bewegung vorhanden. Soll also die von uns einem Körper ertheilte Geschwindigkeit eine vorauszusagende bestimmte Folge haben, so ist das nur möglich, wenn die einzelnen einem Körper ertheilten relativen Geschwindigkeiten von einander unabhängig sind. Da wir dem Körper nur dadurch eine (gleichförmige) Bewegung, d. h. eine Geschwindigkeit ertheilen können, dass wir eine gewisse Zeit hindurch auf ihn eine beschleunigende Kraft wirken lassen, welche nach dem Aufhören eine Endgeschwindigkeit hinterlässt, so folgt daraus, dass auch die Wirkung einer beschleunigenden Kraft unabhängig sein muss von dem Vorhandensein einer anderen Bewegung, also auch von dem Vorhandengewesensein einer anderen beschleunigenden Kraft. Dieses Princip, welches schon von Galilei implicite vorausgesetzt, von Newton zuerst ausgesprochen ist, wird das Princip der Unabhängigkeit der Kräfte genannt. 33

Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitscomponenten. Fassen wir folgendes Beispiel näher ins Auge. In Fig. 89 stelle das Rechteck AB den Boden eines Waggons vor, welcher in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer Secunde, um eine Strecke gleich der Länge mm' nach rechts gleichförmig bewegt werde. Auf dem Boden des Waggons befinde sich eine Kiste cd, welche gleichzeitig von Menschenhand mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Strecke mm'' verschoben werde, so dass sie in die Lage $c''d''$ gelangt. Fassen wir einen Punkt m auf dem Deckel der Kiste ins Auge, so erfährt derselbe zunächst mitsammt dem Waggon in Bezug auf die Erde eine relative Bewegung nach m' und zugleich in Bezug auf den Waggon eine relative Bewegung nach m''. Welches ist dann die relative Bewegung des Punktes m in Bezug auf die Erde? Es ist wohl unmittelbar einleuchtend, dass sich

der Punkt m nach Verlauf der Secunde in m''' befinden muss; nämlich dort, wo sich die gegenüberliegende Ecke eines Parallelogramms befindet, das wir mit den Seiten mm' und mm'' construiren können*). Fragen wir in ähnlicher Weise nach dem Orte, wo sich der Punkt m nach der Hälfte dieser Zeit befinden muss, so werden wir durch dieselbe Ueberlegung zu dem Resultate gelangen, dass er sich in der gegenüberliegenden Ecke eines Parallelogramms aus den Hälften der Seiten mm' und mm'' befinden müsse. Suchen wir so fort die Orte auf für beliebige Bruchtheile oder Vielfache der Secunde, so werden wir, wie Fig. 90 erläutert, unmittelbar zur Einsicht geführt, dass der Punkt m in Bezug auf die Erde die relative Bewegung längs der Diagonale mm''' und zwar ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit ausführen müsse. Wir heissen diese Bewegung die resultirende Bewegung oder kurz die **Resultirende**; die beiden, aus denen sie sich zusammensetzte, die componirenden Bewegungen oder die **Componenten**. Da mm' und mm'' Wege per Secunde, also Geschwindigkeiten darstellen, so stellt auch die Diagonale mm''' den Weg per Secunde, also die resultirende Geschwindigkeit vor.

Fig. 89.

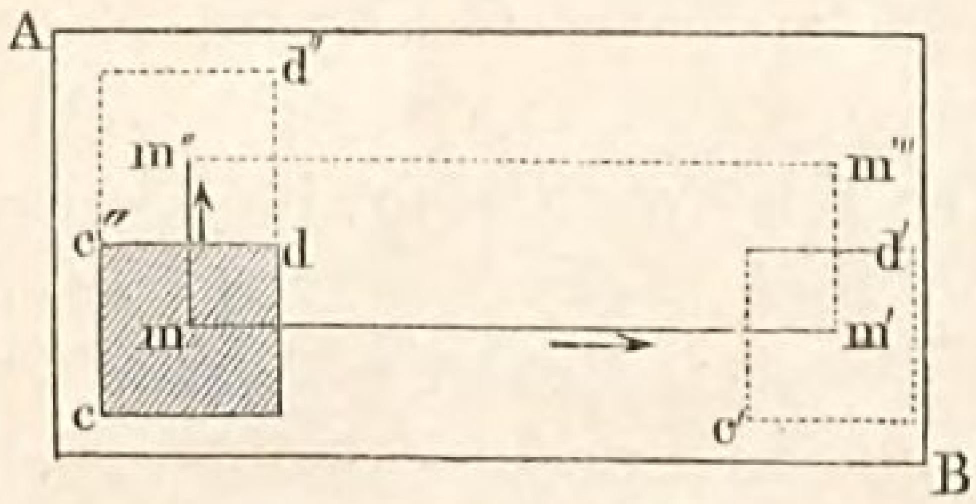
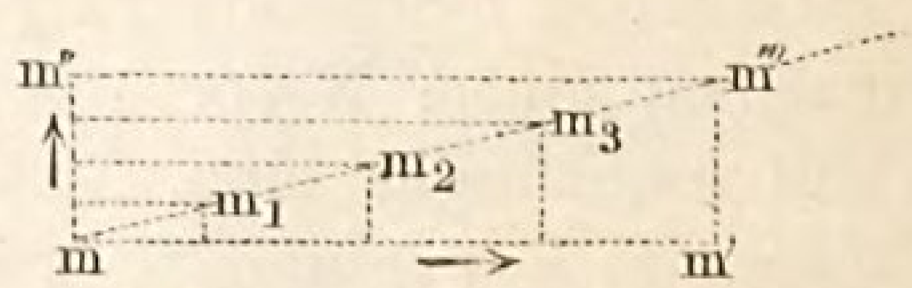


Fig. 90.



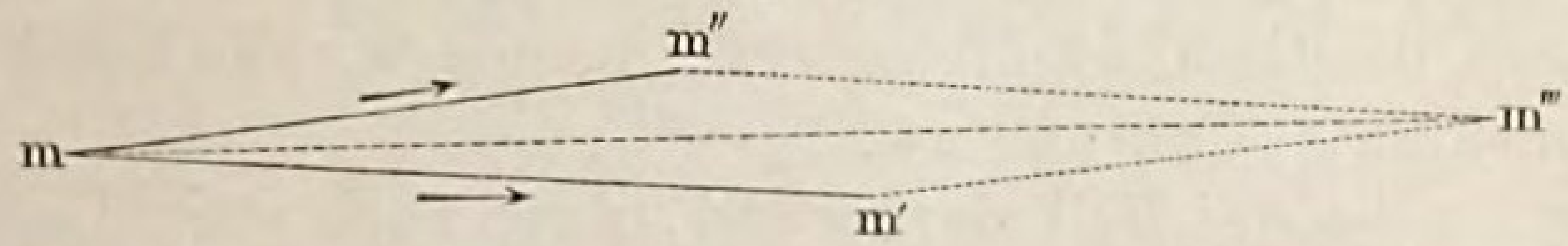
Das eben gewonnene Resultat ist offenbar ganz unabhängig von dem Winkel, den die Geschwindigkeitsrichtungen mm' und mm'' mit einander einschliessen; wir können es in folgende Worte zusammenfassen: **Wenn einem Körper in Bezug auf ein System anderer Körper zwei Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen ertheilt werden, so erhält er hierdurch in Bezug auf dasselbe Körpersystem eine resultirende Geschwindigkeit, welche der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms gegeben ist, dessen Seiten durch Grösse und Richtung der componirenden Geschwindigkeiten dargestellt werden.**

*) Man kann sich zunächst vorstellen, dass zuerst eine Secunde lang der Waggon, dann eine Secunde lang die Kiste allein sich bewegen, oder umgekehrt zuerst die Kiste verschoben, dann der Waggon bewegt werde. Beide Male gelangt der Punkt m nach m'''; er gelangt auch dann dahin, wenn abwechselnd einen Bruchtheil der Zeit die eine, dann die andere Bewegung stattfindet, wenn nur jede der Bewegungen im Ganzen eine Secunde dauert. Da also die schliessliche Lage des Punktes von diesen Umständen unabhängig ist, so leuchtet ein, dass sie auch bei Gleichzeitigkeit beider Bewegungen resultiren wird. Trotzdem lassen wir es dahin gestellt, ob dieses Resultat durch Speculation strenge abzuleiten oder nur durch Erfahrung zu gewinnen sei.

Dieser ausserordentlich wichtige Satz heisst der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (auch Bewegungsparallelogramm).

Für den Fall, dass die componirenden Geschwindigkeiten den Winkel = 0 oder 180° einschliessen, d. h. in ein und dieselbe Gerade zu liegen kommen, lässt sich kein Parallelogramm mehr construiren; man über-

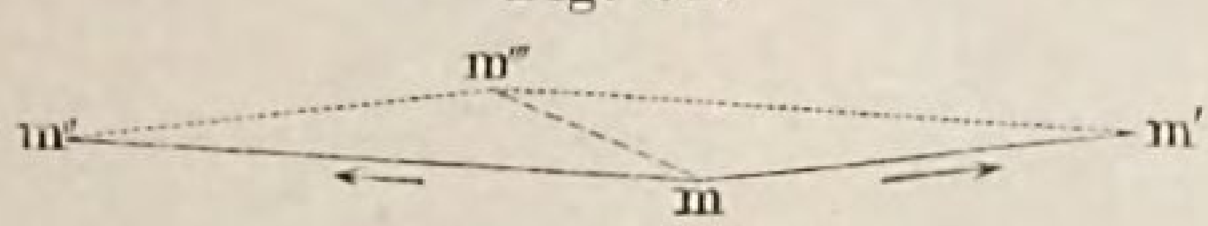
Fig. 91.



sieht aber sofort aus solchen Beispielen, Fig. 91 und 92, bei welchen der Winkel der Componenten sich dem Werthe Null oder 180° nähert, dass an die Stelle der zu construirenden Diagonale im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Seitenlängen zu treten hat.

Rechnet man die Geschwindigkeitscomponenten nach entgegengesetzten Richtungen mit entgegengesetzten Zeichen, so ist die Resultirende gegeben durch die algebraische Summe der Componenten. Durch

Fig. 92.



die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen auf ein und derselben Geraden entsteht also wiederum eine gleichförmige Bewegung auf derselben Geraden. In dem speciellen Falle, dass die Geschwindigkeitscomponenten gleich gross sind und entgegengesetztes Zeichen haben, ist die resultirende Geschwindigkeit = 0; d. h. es tritt relative Ruhe ein.

Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeitscomponenten in einer Ebene. Gehen wir noch einmal auf das Beispiel mit der

Fig. 93.

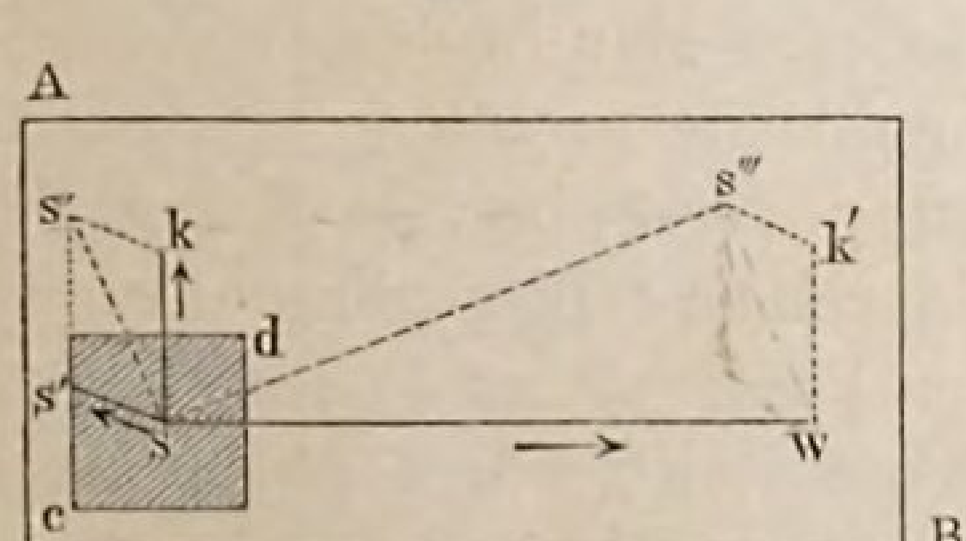
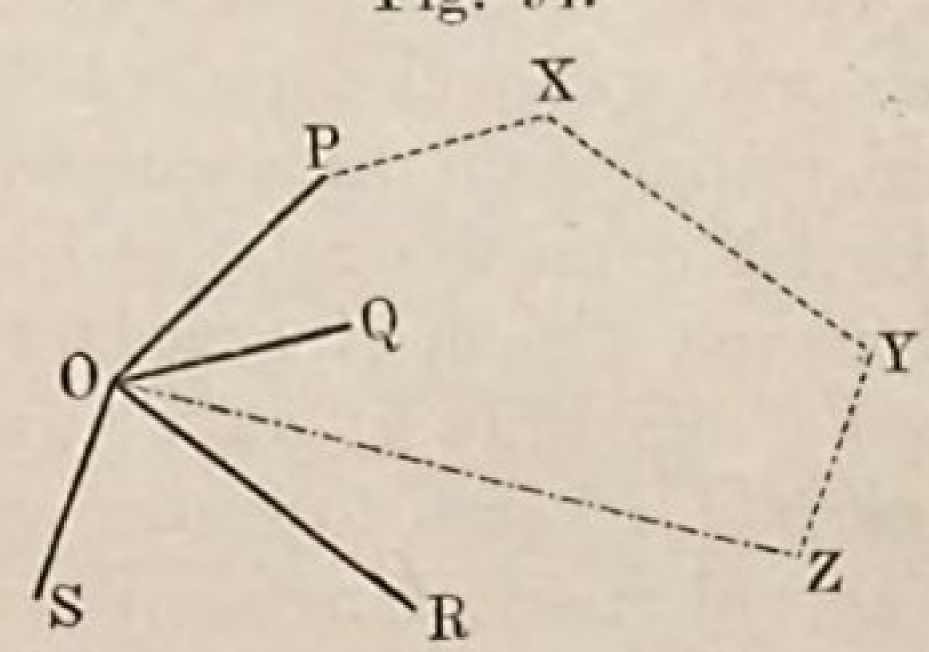


Fig. 94.



Kiste auf dem Waggon zurück, Fig. 93. Im Punkt s befinde sich eine Spinne, welche zu gleicher Zeit, während der Waggon den Weg sw, die Kiste auf dem Waggon den Weg sk beschreibt, auf der Kiste den Weg ss' mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklege.

Ziehen wir $s's''$ und wk' parallel zu sk, ks'' und $k's'''$ parallel zu ss' und ziehen ss'' und ss''', so erhalten wir, was wohl keiner weiteren Erklärung bedarf, folgende Wege:

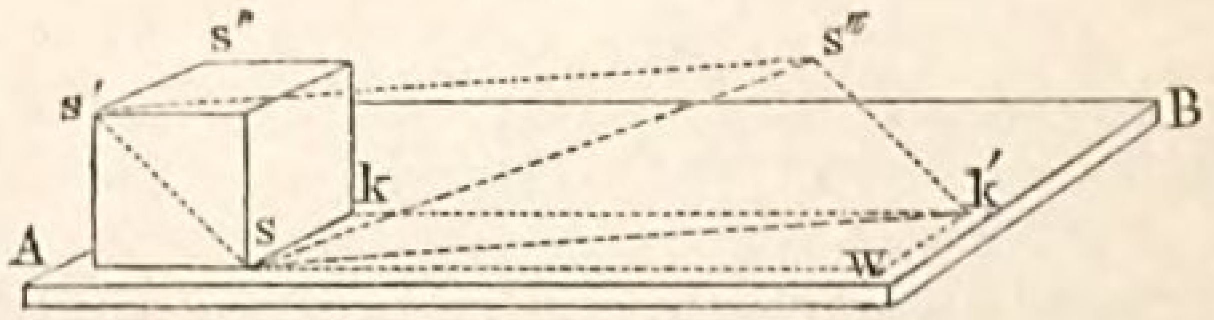
Die Spinne bewegt sich relativ zur Kiste auf dem Wege ss'
„ „ „ „ „ zum Waggon auf dem Wege ss''
„ „ „ „ „ zur Erde „ „ „ ss'''

Diese Wege werden sämmtlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegt, deren Grösse durch die Länge der Linien ss', ss'' und ss''' vorgestellt wird, falls die Bewegung gerade eine Secunde lang dauert. Den Weg, resp. die Geschwindigkeit ss''' nennen wir die Resultirende der drei Componenten ss', sk und sw.

In Fig. 94 ist der Fall dargestellt, dass noch mehr Componenten, nämlich OP, OQ, OR und OS zu einer Resultirenden zusammengesetzt werden sollen.

Man zieht zuerst PX parallel und gleich lang mit OQ, dann XY parallel und gleich lang mit OR, dann YZ parallel und gleich OS, endlich die Resultirende OZ. Die so entstehende Figur $OPXYZ$ wird das Geschwindigkeitspolygon genannt. Wenn die Construction dieses Polygons ergiebt, dass der Endpunkt der zuletzt angefügten Componenten in den Ausgangspunkt O fällt, so ist die Resultirende $= 0$. Die

Fig. 95.



sämmtlichen Bewegungen heben einander dann auf. Der Punkt O bleibt in Ruhe.

Zusammensetzung von Geschwindigkeitscomponenten im Raume. Fig. 95 stelle wiederum, aber diesmal in perspectivischer Darstellung den Boden des oben erwähnten Waggons mit der darauf befindlichen parallelepipedischen Kiste vor. Während der Waggon um ein Stück sw nach rechts geht, werde die Kiste um sk nach rückwärts geschoben und während derselben Zeit krieche eine in s befindliche Spinne längs der Diagonale der vorderen Wandfläche nach s'.

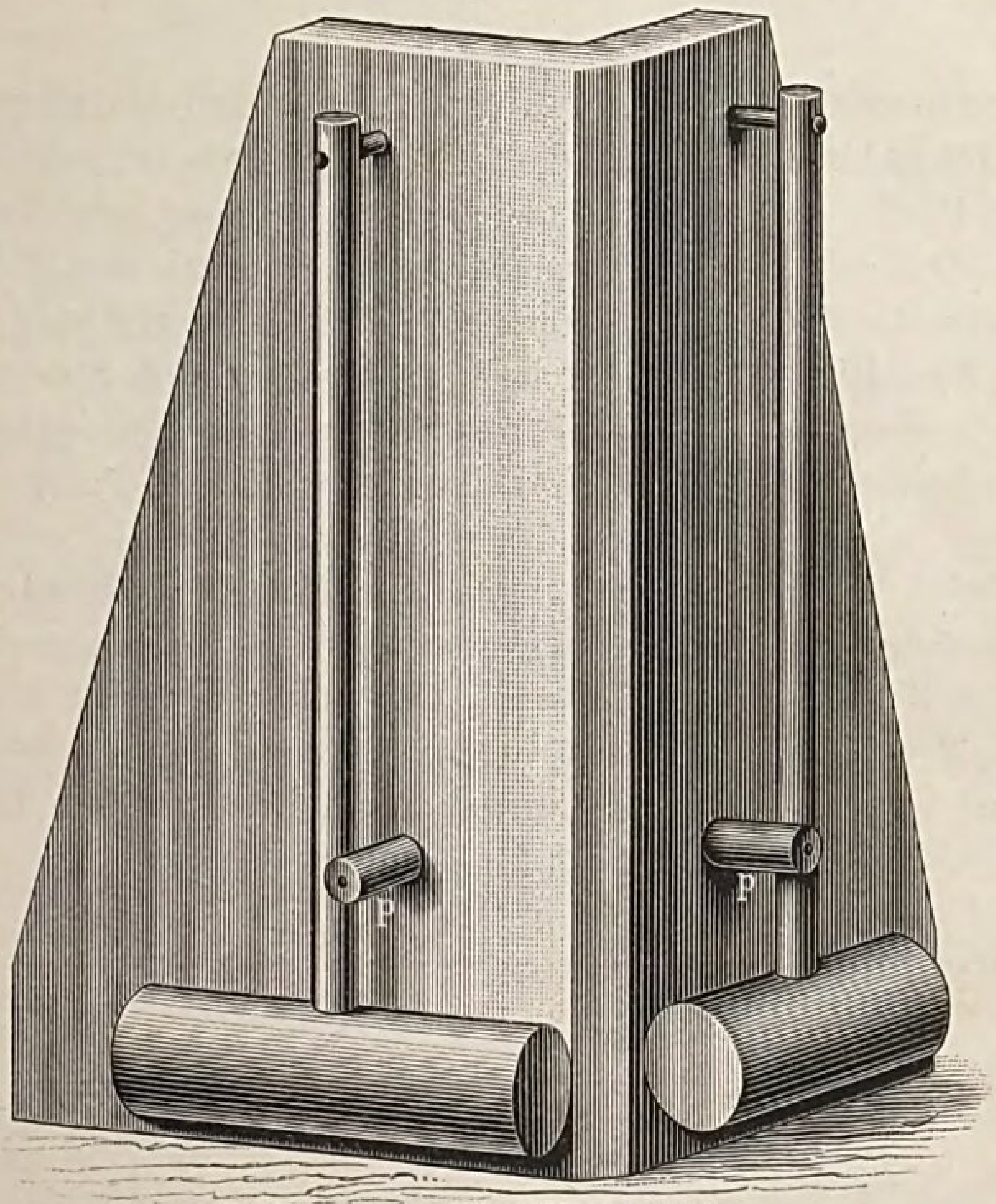
Es ist dann die relative Bewegung der Spinne in Bezug auf den Waggon von s nach s'' gerichtet, die relative Bewegung derselben in Bezug auf die Erde ist ss'''. Um den Punkt s''' zu finden, construiren wir zuerst das Parallelogramm aus den Seiten sw und sk in der Ebene des Waggonbodens; dann denken wir uns von k' eine schief aufsteigende Gerade $k's'''$ parallel und gleich mit ss' gezogen. Die Diagonale des Parallelogramms $sk's'''s'$, nämlich die Gerade ss''', ist daher die gesuchte Resultirende der drei Componenten sw, sk und ss'.

In ähnlicher Weise kann man immer vorgehen, indem man nach und nach die Componenten zur Construction von Parallelogrammen heranzieht.

Um den Satz vom Geschwindigkeitsparallelogramm durch einen Vorlesungsversuch zu belegen, kann man sich (unter Beschränkung auf

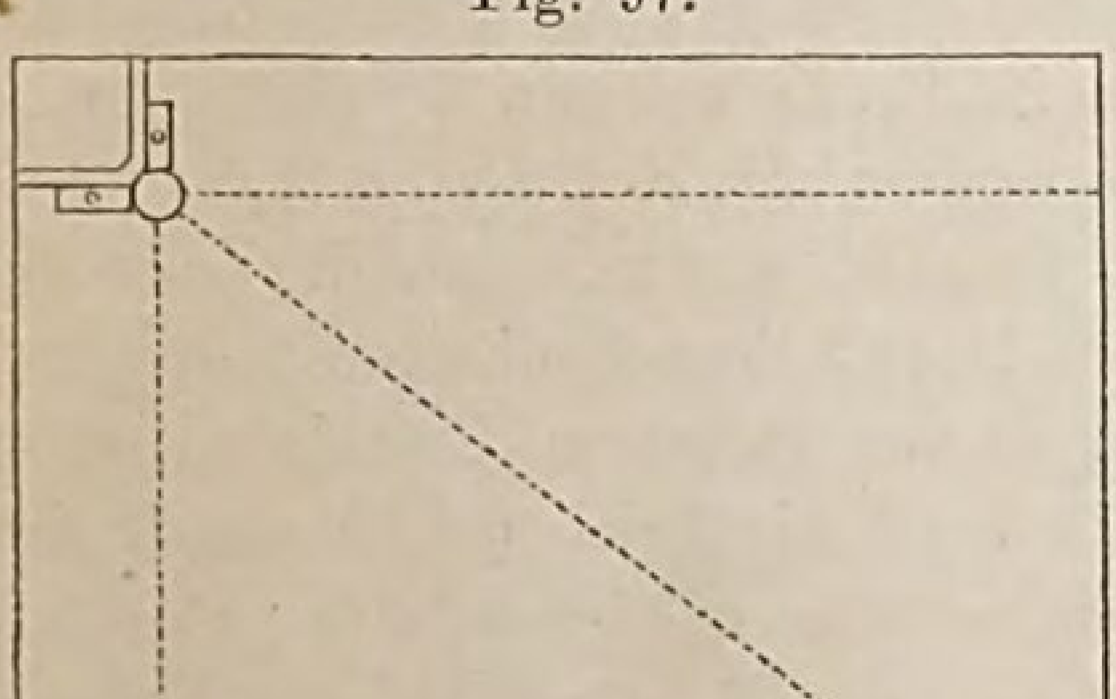
einen speciellen Fall) einer von A. F. Weinhold*) beschriebenen einfachen Vorrichtung bedienen. Dieselbe ist in Fig. 96 in perspectivischer

Fig. 96.



Ansicht von $^1/_3$ natürlicher Grösse, in Fig. 97 im Grundriss in $^1/_{25}$ der natürlichen Grösse abgebildet und wohl ohne weitere Beschreibung verständlich. Beim Versuche wird die Vorrichtung auf eine horizontale Tischplatte gestellt, an die Ecke eine Elfenbeinkugel an die beiden Hämmer angelegt, dann zuerst jeder Hammer für sich, endlich beide zugleich fallen gelassen. Hatte man hierbei die (gleich schweren) Hämmer gleich hoch gehoben, so geben sie beide der Kugel gleiche Geschwindigkeiten und folglich eine resultirende Bewegung, welche den Winkel der Componenten halbirt.

Fig. 97.



Für andere quantitative Versuche ist der Apparat wohl nicht geeignet, doch lässt sich zeigen, dass sich die Richtung der Resultirenden

*) Physikalische Demonstrationen S. 64.

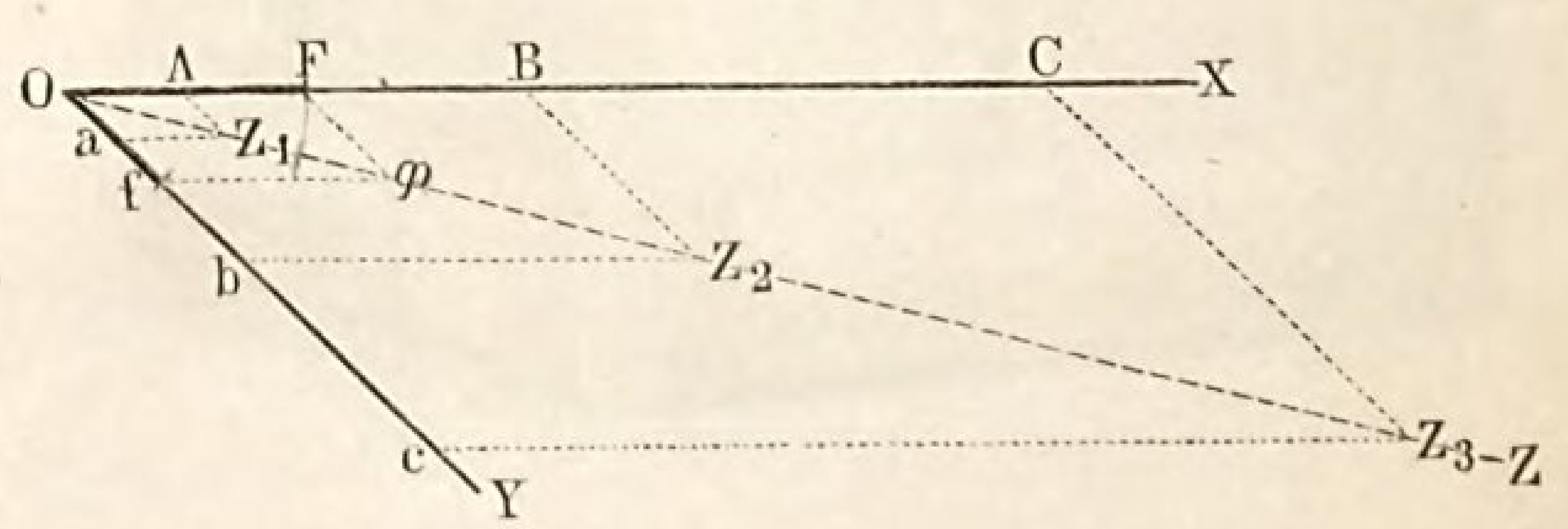
desto mehr einer der beiden Componenten nähert, je mehr man dieselbe (durch Höherheben des betreffenden Hammers) vergrössert. Die Kautschukpuffer $p\,p$ verhindern ein Zusammenschlagen der Hämmer.

34 **Zusammensetzung gleichmässig beschleunigter Bewegungen; Parallelogramm der Beschleunigungen.** Auf einen materiellen Punkt O, Fig. 98, wirken zwei constante Kräfte, deren Richtungen $O\,X$ und $O\,Y$ einen beliebigen Winkel einschliessen, und deren Grössen durch die Beschleunigungen $O\,F$ und $O\,f$ vorgestellt seien.

Unter dem Einflusse dieser Kräfte werden in der ersten Secunde Wege zurückgelegt, welche gleich der halben Beschleunigung sind. Die Wege der folgenden Secunden sind dann 3mal, 5mal, 7mal etc. so gross (§. 23).

Wäre also bloss die Kraft nach X vorhanden, so wären die vom Punkte O zurückgelegten Wege der ersten drei Secunden $= O\,A = \frac{1}{2}\,O\,F$, dann $A\,B = 3\;O\,A$, dann $B\,C = 5\;O\,A$ und so fort. Wäre nur die Kraft nach Y vorhanden, so wären die entsprechenden Wege $O\,a$, $a\,b$, $b\,c$ etc. Auf Grund des im vorausgehenden Paragraphen besprochenen

Fig. 98.



Unabhängigkeitsprincips folgt nun, dass, wenn beide Kräfte zugleich wirken, der Punkt nach 1, 2 und 3 Secunden in Stationen angelangt sein wird, die wir finden, wenn wir uns die beiderseitigen Bewegungen nach einander ausgeführt denken. Hierdurch gelangen wir zur Einsicht, dass diese Stationen in den Punkten Z_1, Z_2, Z_3 gelegen sein müssen, die wir durch Construction der Parallelogramme mit den Seiten $O\,A$ und $O\,a$, $O\,B$ und $O\,b$, $O\,C$ und $O\,c$ erhalten. Denken wir uns nun die Zeiteinheit (Secunde) in kleinere Theile zerlegt, z. B. in Zehntelsecunden und wiederholen wir die Construction mit den diesen kleineren Zeiteinheiten entsprechenden Wegen, so wird dadurch wohl die Zahl der zu construirenden Parallelogramme vermehrt, jedoch müssen wiederum alle gefundenen Stationspunkte in die Diagonale $O\,Z$ fallen, welche mithin die Bahn des Punktes O darstellt. Dass die resultirende Bewegung wiederum eine gleichmässig beschleunigte sein werde, ersieht man aus dem Verhältniss der auf einander folgenden Wegstrecken, die sich ebenfalls verhalten wie 1 : 3 : 5 etc. Die resultirende Beschleunigung ist dargestellt durch das Doppelte des Weges $O\,Z_1$ der ersten Zeiteinheit also durch die Länge $O\,\varphi$.

Man nennt deshalb das Parallelogramm $OF\varphi f$ das Parallelogramm der Beschleunigungen, oder, da bei gleicher Masse die Beschleunigung als Maass der Kraft gilt, das Parallelogramm der Kräfte.

Fassen wir die Resultate zusammen:

1. Durch die Zusammensetzung zweier geradliniger, gleichmässig beschleunigter Bewegungen entsteht wiederum eine geradlinige, gleichmässig beschleunigte Bewegung.

2. Grösse und Richtung der Beschleunigung dieser resultirenden Bewegung ergiebt sich durch die Grösse und Richtung der Diagonale des Parallelogramms der Beschleunigungen.

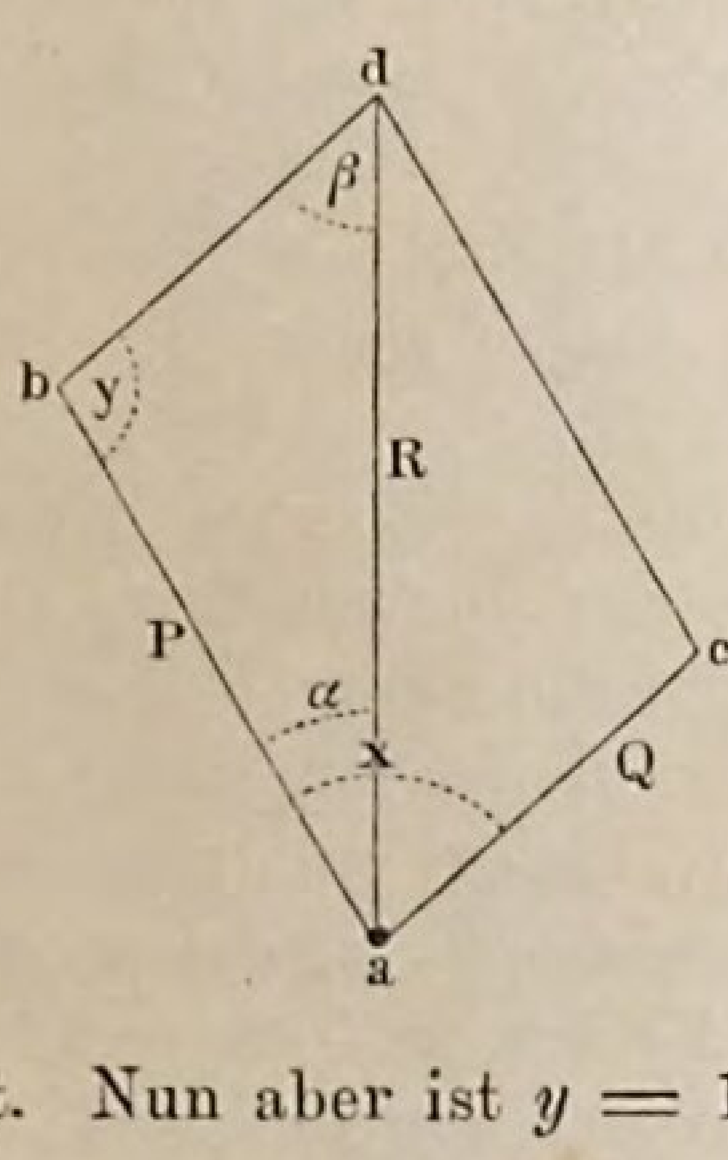
Bezüglich der speciellen Fälle, in denen die zusammenzusetzenden Beschleunigungen in eine Gerade fallen, wobei sie im selben Sinne oder gegen einander gerichtet sein können, gilt genau dasselbe wie bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Die resultirende Beschleunigung ist in diesen Fällen die algebraische Summe der Componenten.

Ebenso kann man bei mehreren in einer Ebene wirksamen Kräften ein Beschleunigungspolygon construiren. Endlich lassen sich Componenten, welche nicht in einer Ebene liegen, ganz so zusammensetzen wie Geschwindigkeitscomponenten.

So oft bei der Zusammensetzung von Beschleunigungen (Kräften) die Resultirende = 0 ausfällt, heben sich die Kräfte gegenseitig auf, man sagt, es herrsche Gleichgewicht der Kräfte.

Die Resultirende zweier Geschwindigkeiten oder zweier Beschleunigungen lässt sich nach Grösse und Richtung ausser durch die Construction des Parallelogramms auch durch Rechnung ableiten. Nehmen wir an, dass auf den Punkt a, Fig. 99, zwei Kräfte P und Q wirken, welche sich verhalten wie die Linien ab und ac, während ihre Richtungen den Winkel x mit einander einschliessen, so ist die Resultirende durch die Diagonale ad dargestellt, die wir mit R bezeichnen wollen. ad ist aber eine Seite des Dreiecks abd. Einem bekannten trigonometrischen Satz zufolge ist also:

Fig. 99.



$$ad^2 = ab^2 + bd^2 - 2\,ab.bd.\cos y$$

oder

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2\,P.Q\cos y,$$

wenn man mit y den Winkel abd bezeichnet. Nun aber ist $y = 180^0 - x$, also $\cos y = -\cos x$, folglich

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P.Q\cos x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Es sei z. B. $P = 3$, $Q = 2$ und der Winkel x gleich 75^0, so ergiebt sich

$$R^2 = 9 + 4 + 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, \cos 75^0$$

$$R^2 = 13 + 12 \,.\, 0{,}259 = 16{,}1$$

mithin

$$R = 4{,}0 \ldots$$

Ist einmal die Grösse der Resultirenden mit Hülfe der Gleichung 1) ermittelt, so kann man leicht auch die Winkel berechnen, welche die Resultirende mit den Seitenkräften bildet. Bezeichnen wir den Winkel *b a d* mit α, so ergiebt sich aus dem Dreieck *a b d*

$$R : P = \sin . y : \sin \alpha$$

also

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin x}{R}$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin x}{R}.$$

da $\sin x = \sin (180 - x)$ ist. Für unser obiges Beispiel ergäbe sich also

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin 75^0}{4} = 0{,}5 \,.\, 0{,}966 = 0{,}483$$

mithin

$$\alpha = 28^0\ 52'.$$

Bezeichnen wir mit β den Winkel, welchen Q mit R macht, so ist

$$\beta = x - \alpha$$

also in unserem Falle

$$\beta = 75^0 - 28^0\ 53' = 46^0\ 7'.$$

Die experimentelle Bestätigung des Satzes vom Kräfteparallelogramm ist am leichtesten in dem Falle durchzuführen, in welchem durch drei in einem Punkte angreifende Kräfte Gleichgewicht hergestellt wird, indem je zwei dieser Kräfte eine Resultirende geben, welche der dritten Kraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Die constanten Kräfte werden hierbei durch den Zug von Gewichtsstücken hervorgebracht. Fig. 100 zeigt eine hierzu geeignete Vorrichtung.

An einem Tischblatte sind zwei verticale Stäbe angeschraubt, an jedem Stabe aber ist eine Hülse verschiebbar, welche eine um ihre Achse in verticaler Ebene leicht bewegliche Rolle trägt; die Stäbe müssen so angeschraubt sein, dass die Verticalebenen beider Rollen zusammenfallen. Schlingt man eine Schnur über die Rollen, hängt an dem einen Ende ein Gewicht P, am anderen Ende ein Gewicht Q, zwischen den Rollen ein Gewicht R an, so wird sich bei irgend einer bestimmten Lage der Fäden Alles ins Gleichgewicht stellen; man hat nun drei auf den Punkt *o* nach der Richtung *og*, *ok* und *oh* wirkende Kräfte, und es ist leicht zu prüfen, ob zwischen der Grösse und Richtung derselben die-

Fig. 100.

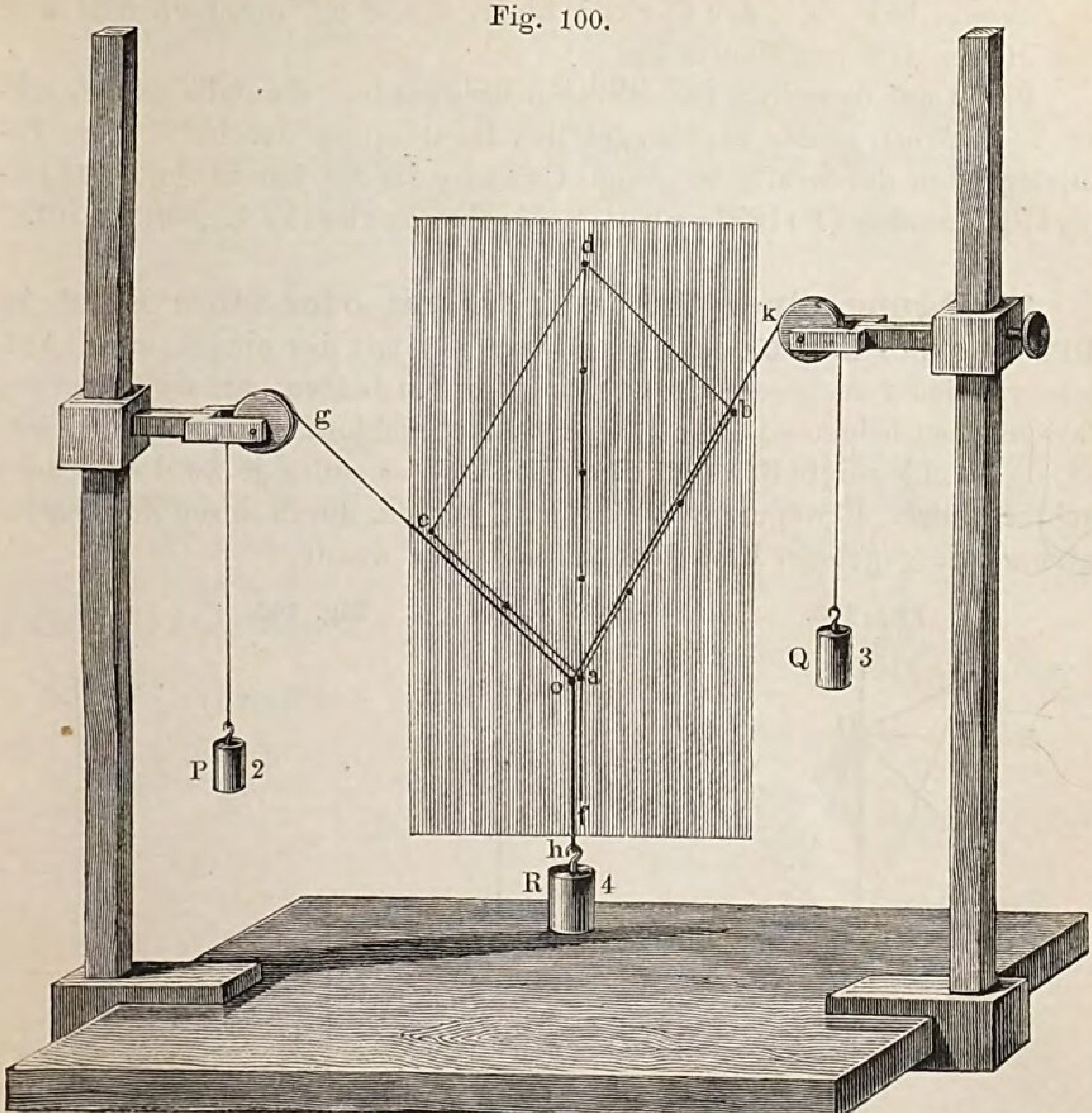
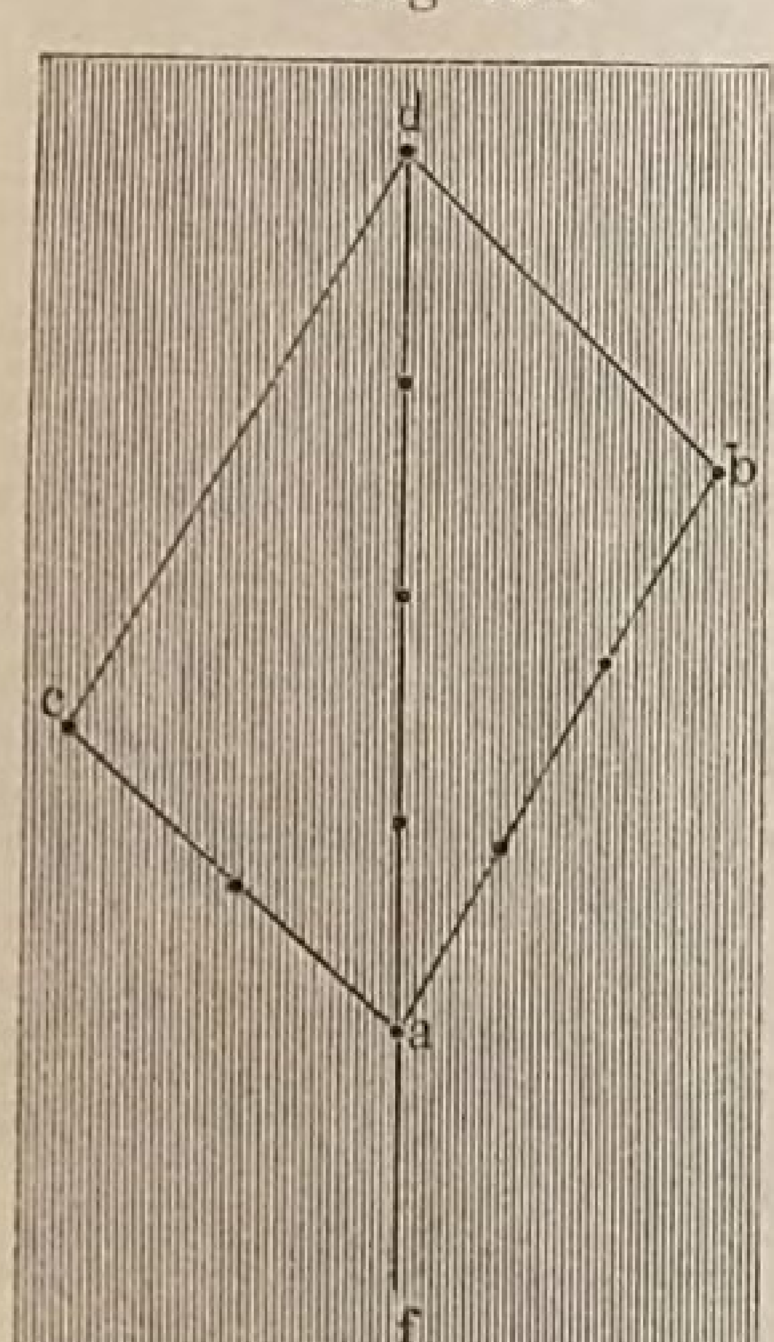


Fig 101.



jenigen Beziehungen wirklich stattfinden, wie sie das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte verlangt.

Es sei z. B. $P = 2$ dg, $Q = 3$ dg und $R = 4$ dg, so construire man ein Parallelogramm $abcd$, Fig. 101, in welchem die Seite ac 2 dm, die Seite ab 3 dm und die Diagonale ad 4 dm lang ist, und verlängere noch die Diagonale da nach f hin. Wenn nun das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte richtig ist, so muss der Winkel cab dieses Parallelogramms dem Winkel gleich sein, welchen unter den gegebenen Umständen die Schnüre og und ok mit einander einschliessen; dass dies in der That der Fall ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Constructionsfigur so hinter

die Schnüre hält, dass der Punkt *a* hinter *o* und *af* hinter *oh* fällt, wie dies in Fig. 100 angedeutet ist.

Einen auf denselben Grundsätzen beruhenden, ebenfalls sehr zweckmässigen Apparat zur experimentellen Bestätigung der Lehre vom Parallelogramm der Kräfte beschrieb Crahay im 60. Bande von Poggendorff's Annalen (Frick's physikalische Technik, 4. Aufl. S. 70).

35 **Zerlegung einer Geschwindigkeit oder einer Kraft in ihre Componenten.** Wir haben uns hier mit der umgekehrten Aufgabe von jener zu beschäftigen, welche in den beiden vorausgegangenen Paragraphen behandelt wurde. Es ist eine gleichförmige oder eine gleichmässig beschleunigte Bewegung gegeben und es sollen je zwei oder auch mehrere solche Bewegungen aufgesucht werden, durch deren Zusammensetzung die gegebene Bewegung hervorgehen würde.

Fig. 102.

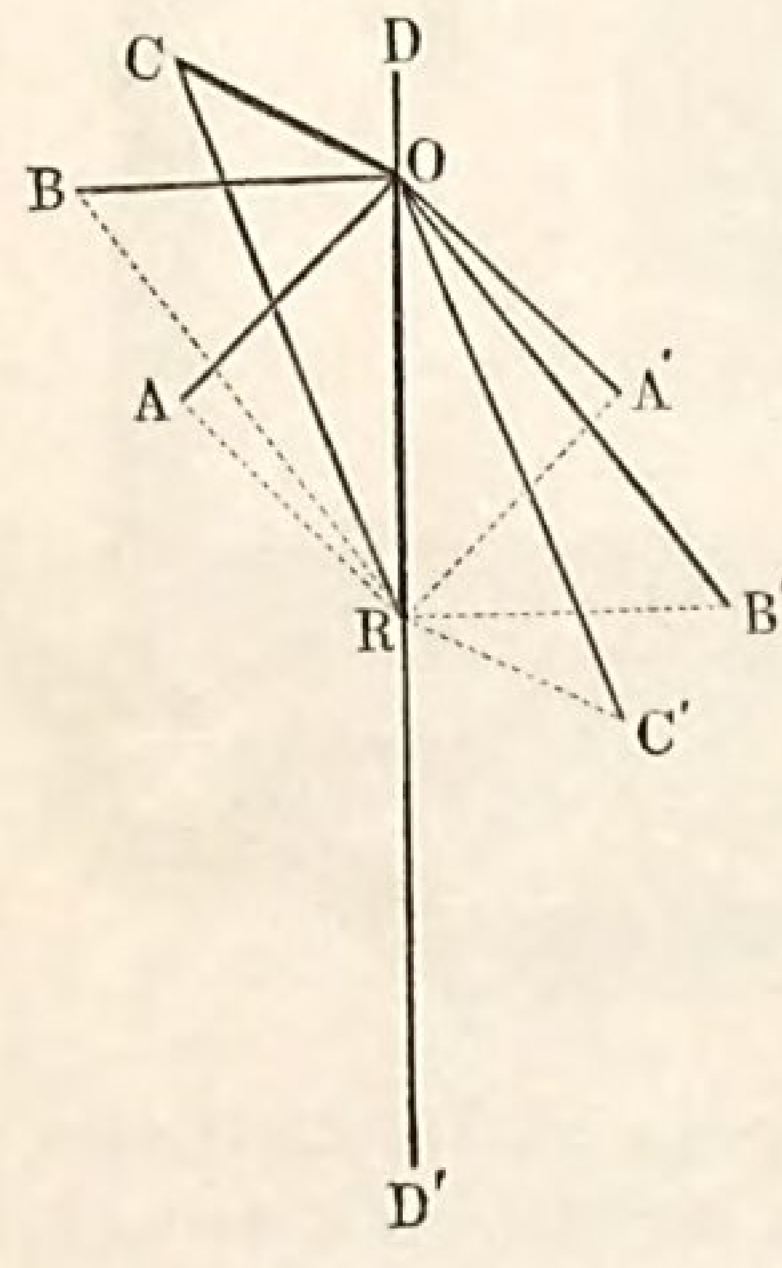
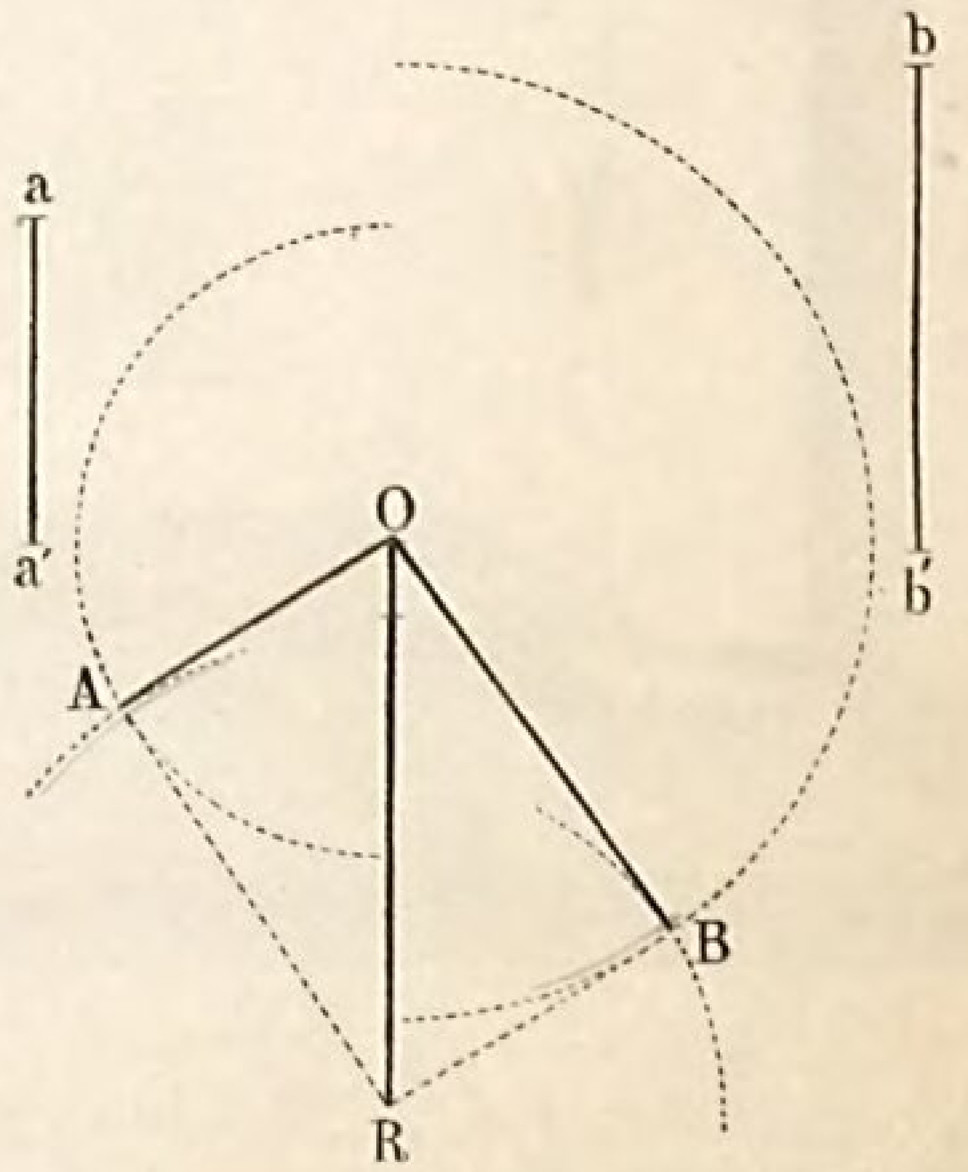


Fig. 103.



Die Zerlegung einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung fällt zusammen mit der Zerlegung einer Geschwindigkeit in ihre Componenten. Die Zerlegung einer geradlinigen, gleichmässig beschleunigten Bewegung führt zu einer Zerlegung einer Beschleunigung in ihre Componenten. Da wir ferner die Grösse der Kraft durch die Grösse der Beschleunigung ausdrücken, so fällt die letztere Operation auch zusammen mit der Zerlegung einer gegebenen Kraft in mehrere Kräfte solcher Richtung und Stärke, dass ihre Wirkung gleich ist der Wirkung der ursprünglich gegebenen Kraft.

Diese sämmtlichen Zerlegungen erfolgen nach derselben Methode. Wir betrachten zunächst die Zerlegung einer Resultirenden (Geschwindigkeit oder Beschleunigung) in zwei Componenten.

Da man zu einer gegebenen Diagonale eine unbegrenzte Menge von Parallelogrammen zeichnen kann, so ist es auf unbegrenzt viele Weisen

möglich, eine Resultirende in zwei Componenten zu zerlegen. In Fig. 102 z. B. ist die Resultirende OR zerlegbar in OA und OA' oder in OB und OB', oder in OC und OC' in OD und OD'.

Die Aufgabe bleibt also unbestimmt, so lange nicht einschränkende Bedingungen über Richtung oder Grösse der Componenten gegeben sind. Dabei sind folgende drei Hauptfälle möglich.

Es ist nämlich gegeben entweder:

1. Die Grösse beider Componenten.
2. Die Richtung beider Componenten.
3. Die Grösse der einen und die Richtung der anderen Componente.

Erster Fall. Fig. 103 OR sei zu zerlegen in zwei Componenten, deren Grössen links und rechts durch die Längen aa' und bb' dargestellt sind. Zieht man mit diesen Längen als Radien aus O und R Kreisbögen, so erhält man die Durchschnittspunkte A und B und damit die beiden Componenten OA und OB.

Fig. 104.

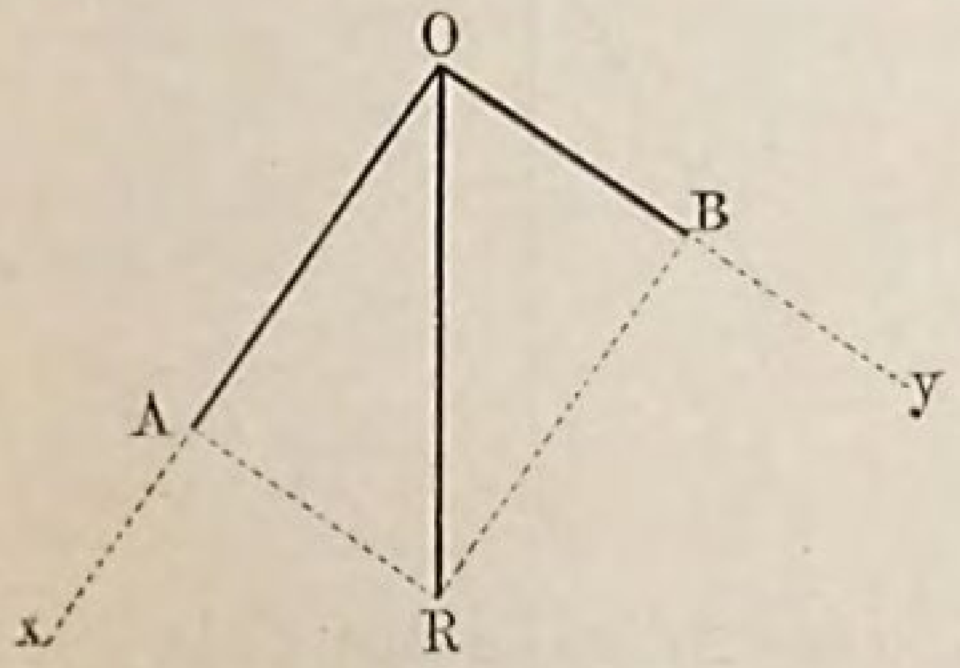
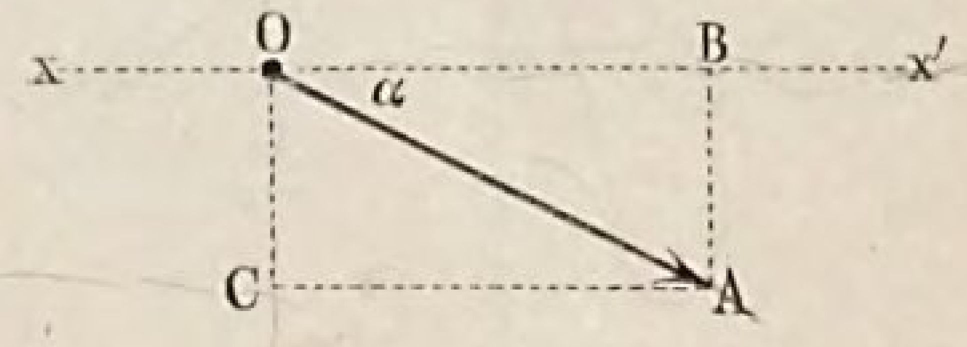


Fig. 105.



Man ersieht sofort, dass diese Aufgabe nur dann möglich ist, wenn $aa' + bb'$ grösser als OR ist. Für $aa' + bb' = OR$ fallen die Richtungen mit OR zusammen.

Zweiter Fall. Fig. 104 OR sei zu zerlegen in zwei Componenten nach den Richtungen Ox und Oy. Zieht man die Parallelen $RA \parallel Oy$ und $RB \parallel Ox$, so sind OA und OB die gesuchten Componenten.

Dieser Fall kommt sehr häufig in folgender Weise vor. Ein Punkt O, Fig. 105, sei nur in einer bestimmten Richtung xx' beweglich, es werde auf ihn eine Geschwindigkeit oder Beschleunigung in der Richtung und Grösse OA übertragen und es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit oder Beschleunigung er sich gegen x' bewegen werde. Wählt man die Richtung der zweiten Componente senkrecht auf Ox', so ist einzusehen, dass nun von beiden Componenten OB und OC nur die erstere zur Ausführung kommen kann. Die zweite Componente OC könnte nur einen Druck auf das Hemmniss hervorbringen, welches den Punkt zwingt, in der Geraden xx' zu bleiben. Offenbar ist $OB = OA \cos \alpha$ und wird

häufig die Projection der Geschwindigkeit oder der Kraft auf die Richtung der Bewegung genannt.

Dritter Fall. Fig. 106 OR sei zu zerlegen in eine Componente von der Grösse aa' auf der linken Seite und in eine Componente von der Richtung Oy auf der rechten Seite. Man beschreibt mit dem Radius $= aa'$ Kreisbögen um O und R. Hier sind nun wieder drei Fälle möglich.

a. Fig. 106, der von R aus beschriebene Kreisbogen schneidet die Gerade Oy in zwei Punkten B und B'. Man zieht die Parallelen

Fig. 106.

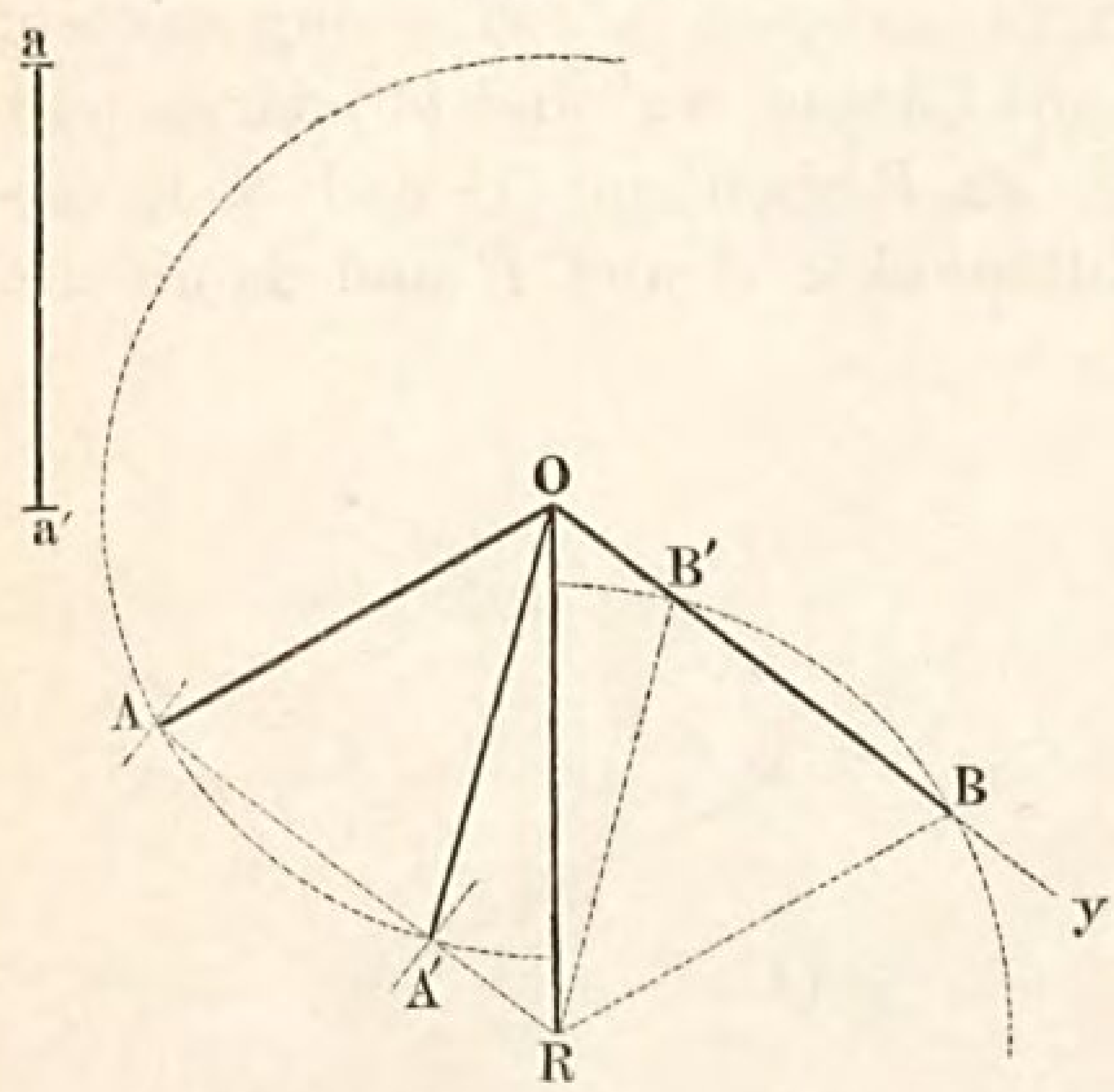
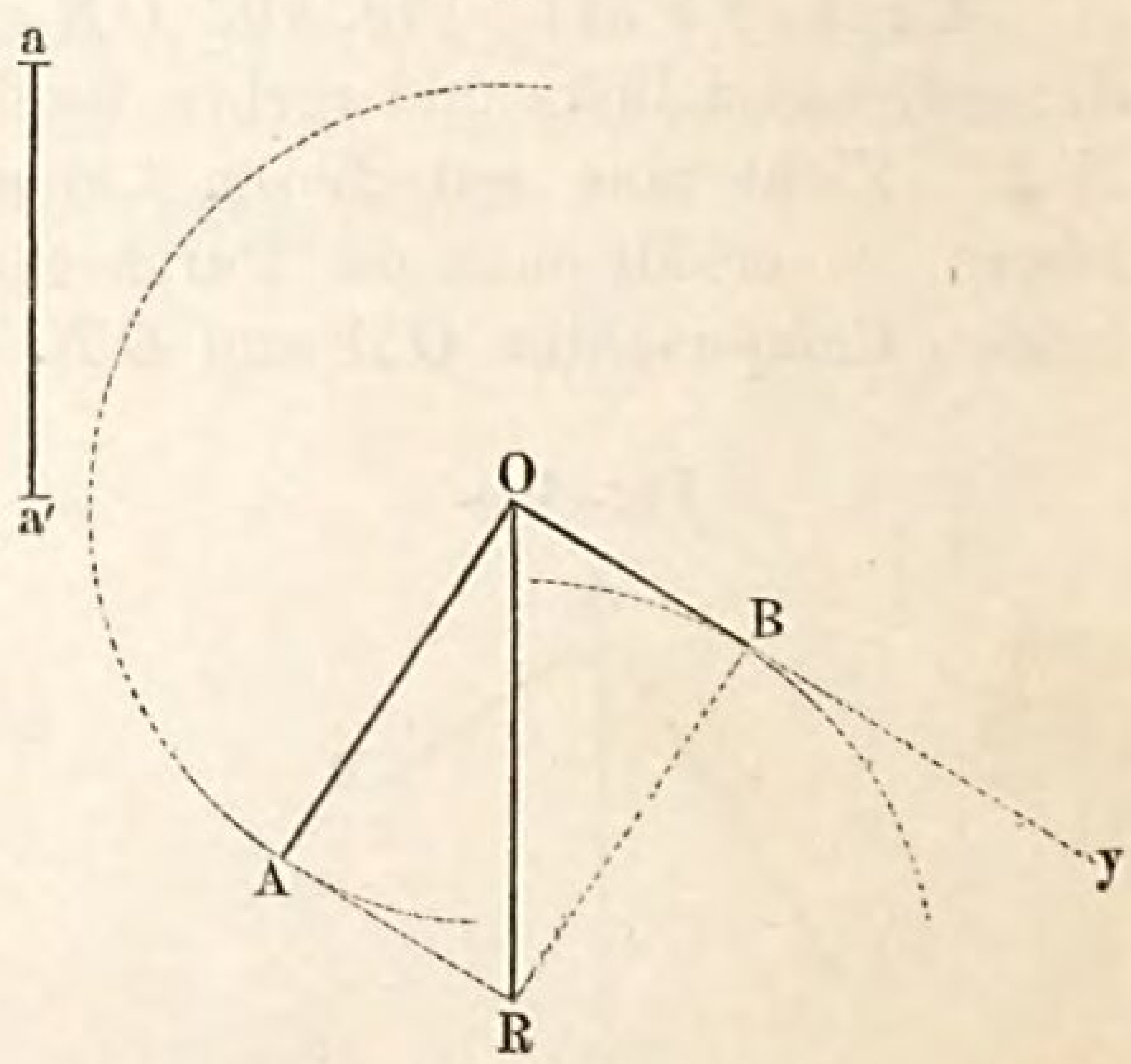
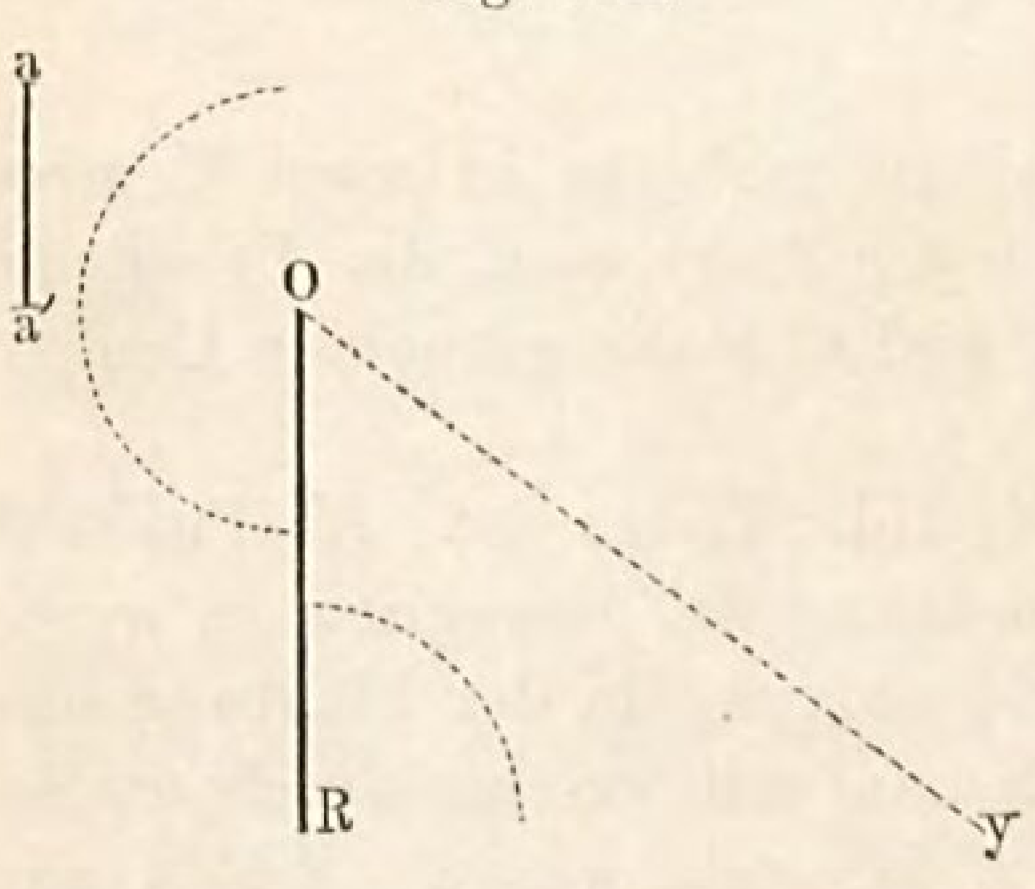


Fig. 107.



$OA \parallel BR$ und $OA' \parallel B'R$ und erhält so die Aufgabe doppelt gelöst, denn sowohl die Componenten OA und OB, als auch die Componenten OA' und OB' geben mitsammen die Resultirende OR.

Fig. 108.



b. Fig. 107, der von R aus beschriebene Bogen hat mit der Geraden Oy nur einen Punkt gemeinsam, dann giebt es nur eine Lösung.

c. Fig. 108, der um R gezogene Kreisbogen erreicht die Gerade Oy gar nicht, dann ist die Lösung unmöglich.

Die Zerlegung in mehr als zwei Componenten erfolgt durch Wiederholung des Verfahrens.

Wählt man bei der wiederholten Zerlegung als Constructionsebene eine von der ursprünglichen Ebene abweichende, so liegen dann die Componenten ebenfalls nicht in einer Ebene, sondern im Raume.

Beispiele: Einfache Zerlegung. Von den überaus zahlreichen Anwendungen der Zerlegung der Kräfte wollen wir hier die Wirkung des Steuers an einem Schiffe darstellen.

Es sei $S S'$, Fig. 109, die Kielrichtung, d. h. Längsachse des Schiffes, $S' O$ das um eine verticale Achse bei S' drehbare Steuerruder, auf welches in der hier angenommenen Seitenstellung der Widerstand des Wassers in der Richtung des Pfeiles P' eine Kraft ausübt, wenn das Schiff durch die Ruderschläge in der Richtung des Pfeiles P in Bewegung gesetzt wird. $O R$ stelle die Grösse und Richtung dieser Kraft vor. Dieselbe ist in zwei Componenten zerlegbar, von denen die eine parallel dem Steuerruder $O B$ unbenutzt bleibt, die andere auf dem Steuer senkrechte $O A$ das Hintertheil des Schiffes nach links zu verschieben trachtet. Hierdurch wird ein nach Rechtslenken des Vordertheiles erreicht.

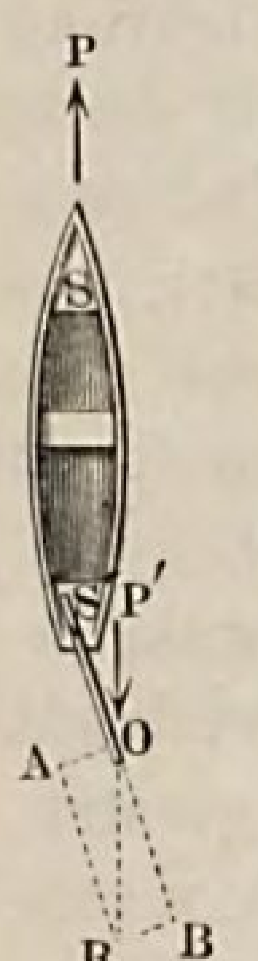


Fig. 109.

Hängt das Schiffchen an seiner Spitze mittelst eines der Strömung parallelen Seiles und einer Laufrolle an einem den Fluss quer überspannenden Seile, so wird es durch den besprochenen Seitendruck auf das Steuer vom linksseitigen Flussufer auf das rechtsseitige (den Blick stromabwärts gedacht) übergeführt. Um dann wieder an das frühere Ufer zurückzukehren, muss man das Steuerruder umstellen.

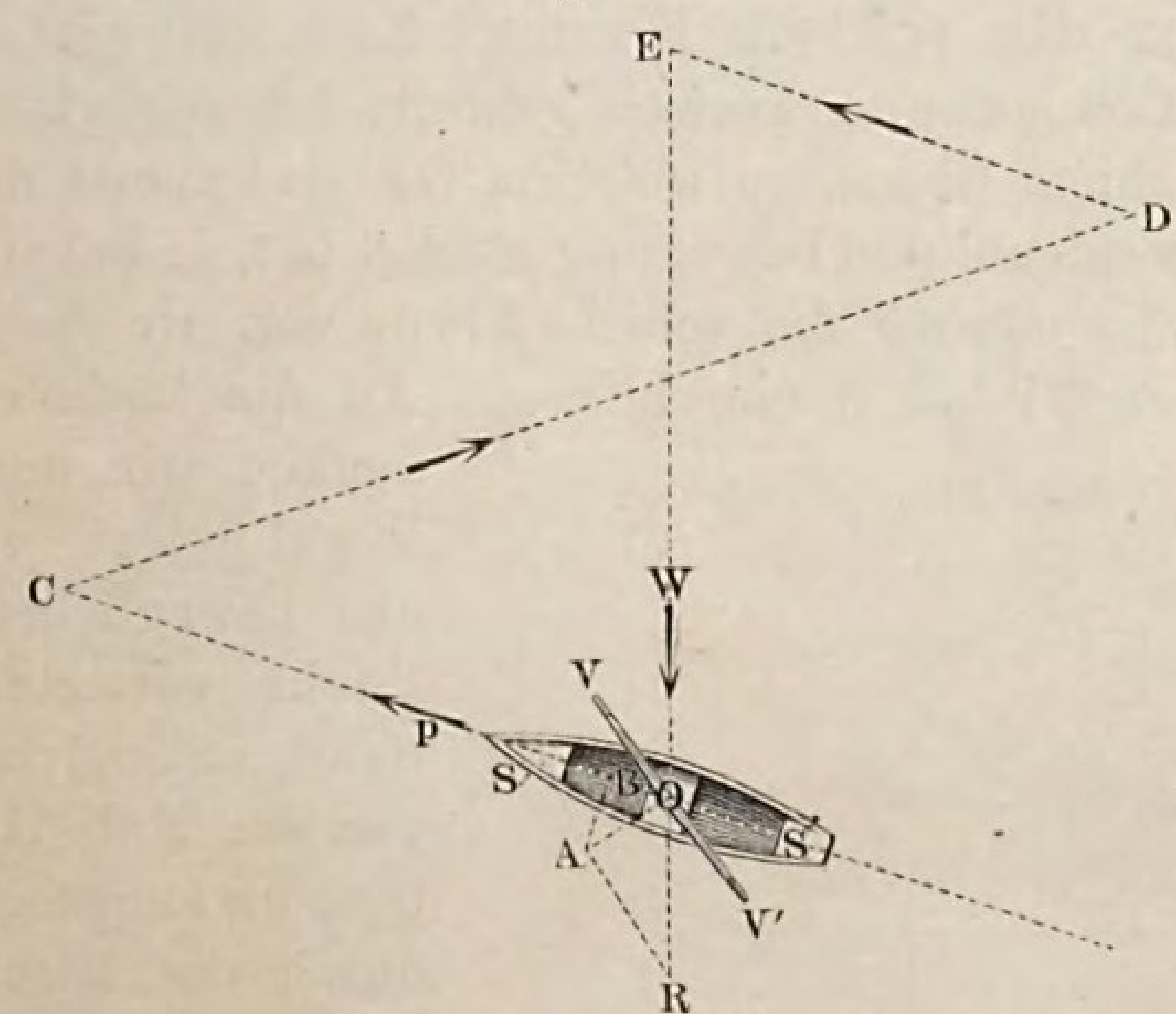


Fig. 110.

Wiederholte Zerlegung. Ein interessantes Beispiel für die wiederholte Zerlegung einer Kraft ist die Anwendung des Segels zur Bewegung des Schiffes.

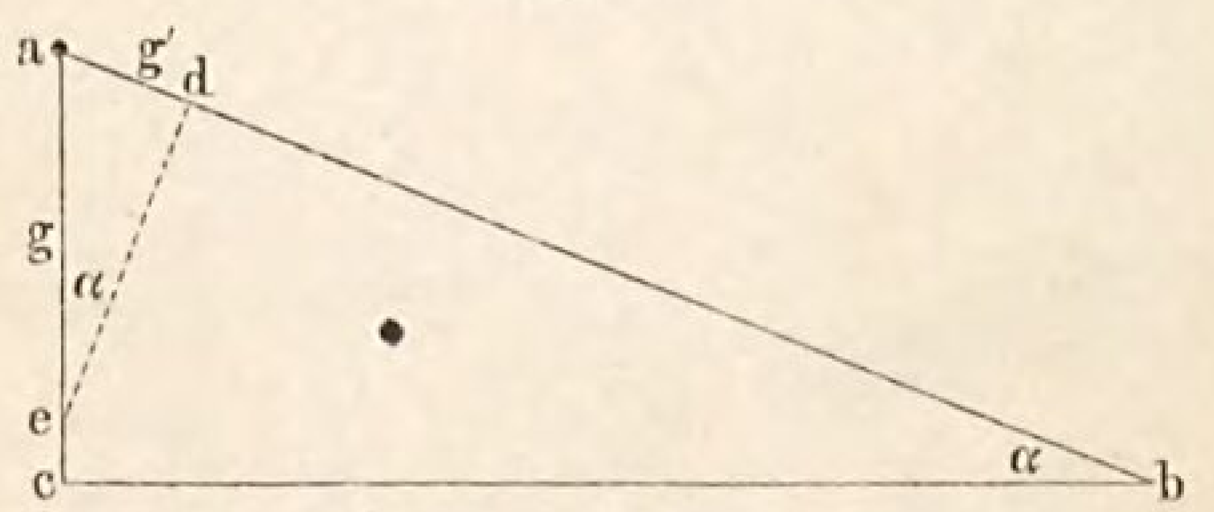
In Fig. 110 stelle $S S'$ ein kleines Segelboot von oben gesehen vor. $V V'$ sei die Ebene des Segels, auf welches der Wind in der Richtung des Pfeiles W mit einer constanten Kraft drücke, welche durch die

Linie OR nach Grösse und Richtung vorgestellt werde. Von dieser schief auf die Segelfläche ausgeübten Kraft kommt nur die senkrechte Componente OA zur Wirkung. Sie sucht das Schiff von O nach A zu bewegen. Da jedoch das Schiff sich fast nur in der Richtung des Kieles bewegen lässt und jedenfalls jeder Verrückung quer auf den Kiel ein grosser Widerstand entgegensteht, so kommt von der Kraft OA wiedernur die Projection auf die Richtung OS, nämlich OB zur Wirkung. Das Schiff bewegt sich also mit einer gewissen Kraft in der Richtung des Pfeiles p. Stellt man es dann nach einiger Zeit z. B. in C mit der Spitze gegen D und wendet das Segel um, so dass seine Fläche wiederum den Winkel zwischen jener Richtung, aus welcher der Wind bläst, und der Richtung des Laufes des Schiffes halbirt, so wird das letztere gegen D hingetrieben. Auf diese Weise kommt es zu dem auffallenden Resultate, dass das Schiff, im Zickzack hin- und herfahrend (lavirend), durch den Wind getrieben, sich jener Gegend nähern kann, von welcher der Wind weht. Auf ähnliche Weise werden in nördlichen Gegenden Segelschlitten durch den Wind in einer Richtung in Bewegung gesetzt, die keineswegs mit der Richtung des Windes zusammenfallen muss. Es lässt sich vielmehr zeigen, dass der Segelschlitten in dem Falle, wo die Windrichtung quer auf die Richtung der Fahrt gerichtet ist, in grössere Fahrgeschwindigkeit als die des Windes selbst ist, versetzt werden kann, was nicht möglich ist, wenn die Windrichtung in die Fahrtrichtung fällt.

36 **Fall über die schiefe Ebene.** Nachdem wir die Zerlegung einer Kraft in Componenten kennen gelernt, können wir nun auch den Fall über die schiefe Ebene, an welchem Galilei zuerst die Gesetze der gleichmässig beschleunigten Bewegung studirt hat, in Behandlung ziehen.

In Fig. 111 stelle ab die schiefe Ebene vor, welche mit der Horizontalen bc den Winkel α einschliesse. An die höchste Stelle bei a denken wir uns eine kleine Kugel gelegt, welche uns einen beweglichen, materiellen Punkt vertreten soll. Die Kraft, mit welcher diese Kugel von der Erde längs der Richtung ac angezogen wird, wird durch die Beschleunigung g des freien Falles gemessen und werde durch die Länge ae vorgestellt.

Fig. 111.



Ziehen wir dann $ed \perp ab$, so stellt ad jene Componente der Schwerkraft vor, durch welche die Kugel längs ab in Bewegung gesetzt wird. Die andere Componente senkrecht auf ab von der Grösse ed bringt nur einen Druck auf die schiefe Ebene hervor. Bezeichnen wir die Componente ad mit g', so ergiebt sich

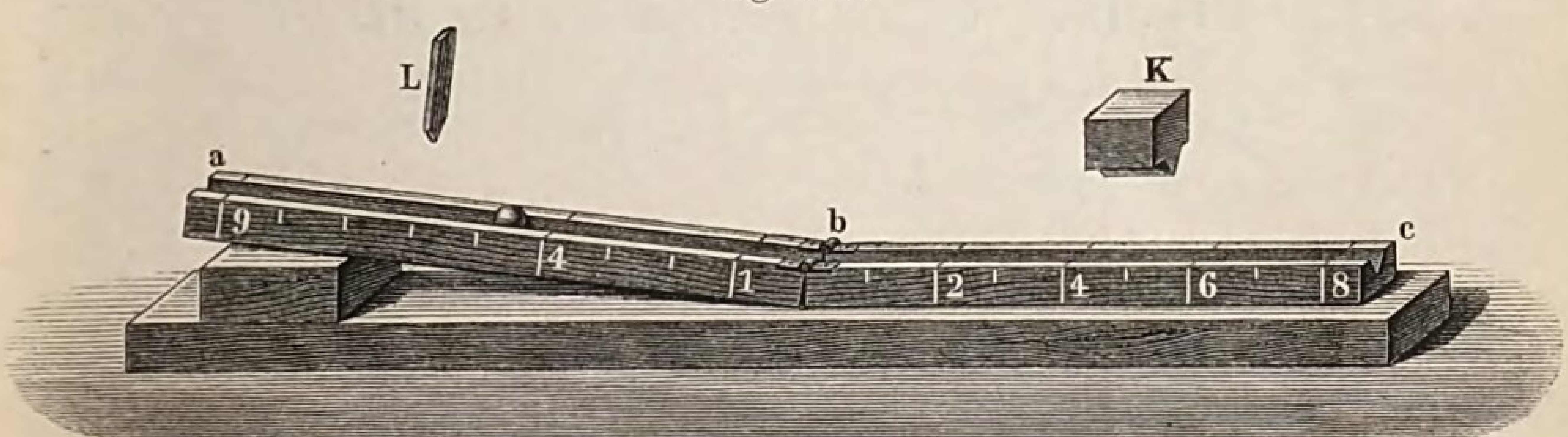
$$g' : g = ac : ab,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene verhält sich zu jener des freien Falles, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Oder, wenn wir den Winkel einführen,

$$g' = g \, . \, sin\, \alpha,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene ist gleich jener des freien Falles multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels. Man kann daher durch passende Neigung die Bewegung beliebig verlangsamen *). Zur Anstellung der Galilei'schen Fallversuche bedient man sich am besten einer etwa 10 dcm (oder Fuss) langen hölzernen Fallrinne ab, Fig. 112, welche durch zwei wohl polirte, unter rechtem Winkel sich schneidende ebene Flächen gebildet wird. Der Länge nach ist diese Fallrinne, deren Neigung gegen die Horizontale beliebig geändert werden kann, in Decimeter (oder Fuss) eingetheilt, wie Fig. 112 zeigt. Ist die Fallrinne so gestellt, dass $g, sin\, x = 2$ dcm, dass also der Fallraum der ersten Secunde 1 dcm ist, so wird man finden,

Fig. 112.



dass die Kugel in 2, 3 etc. Secunden einen Weg von 4, 9 etc. Decimetern in der Fallrinne durchläuft, dass sich also die Fallräume wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Statt des Secundenpendels mit hörbarem Schlag kann man mit Vortheil auch das Metronom benutzen, weil es gestattet, für die Secunde auch eine beliebig kleinere Zeiteinheit in Anwendung zu bringen.

Um den Versuch anzustellen, wird der Klotz K so gestellt, dass seine Vorderfläche (links) bei b gerade auf den Nullpunkt der Theilung zu stehen kommt. Lässt man dann die Kugel mittelst des Brettchens L beim Schlage des Secundenpendels bei 1, 4 oder 9 los, so schlägt sie nach 1, 2 oder 3 Secunden am Klotz K an.

*) Die hier abgeleiteten Gesetze gelten strenge genommen nur für einen materiellen Punkt oder auch einen Körper, der über die schiefe Ebene ohne Reibung gleitet. Bei einem rollenden Körper wird ein Theil der Kraft zur Rotationsbewegung verwendet und ist deshalb die fortschreitende Geschwindigkeit erheblich geringer. Es wird dieser Sachverhalt an späterer Stelle näher auseinander gesetzt werden.

Ist der Apparat so construirt, dass sich die Rinne vom unteren Ende b der schiefen Ebene an in horizontaler Richtung bc fortsetzt, so lässt sich wenigstens mit angenäherter Genauigkeit zeigen, dass die erlangten Endgeschwindigkeiten der Fallzeit proportional sind. Stellt man den Klotz K bei den Theilstrichen 2, 4, 6 der horizontalen Rinne bc auf, so wird die Kugel an ihn 2, 3, 4 Secunden später anschlagen, als man sie in den Punkten 1, 4, 9 der schiefen Ebene losgelassen hat. Ist also die Kugel in 1, 2 oder 3 Secunden von 1, 4 oder 9 bis b auf der schiefen Ebene herabgefallen, so läuft sie vermöge der erlangten Geschwindigkeit (ohne weitere Beschleunigung) auf der horizontalen Ebene in der folgenden Secunde von b an noch 2, 4 oder 6 dcm weiter.

Eine interessante Folgerung aus dem Gesetz des Falles über die schiefe Ebene ist ein unter dem Namen „Fall durch die Sehne“ bekannter, schon von Galilei abgeleiteter Lehrsatz.

Denken wir uns in einem Kreise, dessen Ebene vertical steht, den verticalen Durchmesser ac, Fig. 113, ferner von irgend einem Punkte d

Fig. 113.

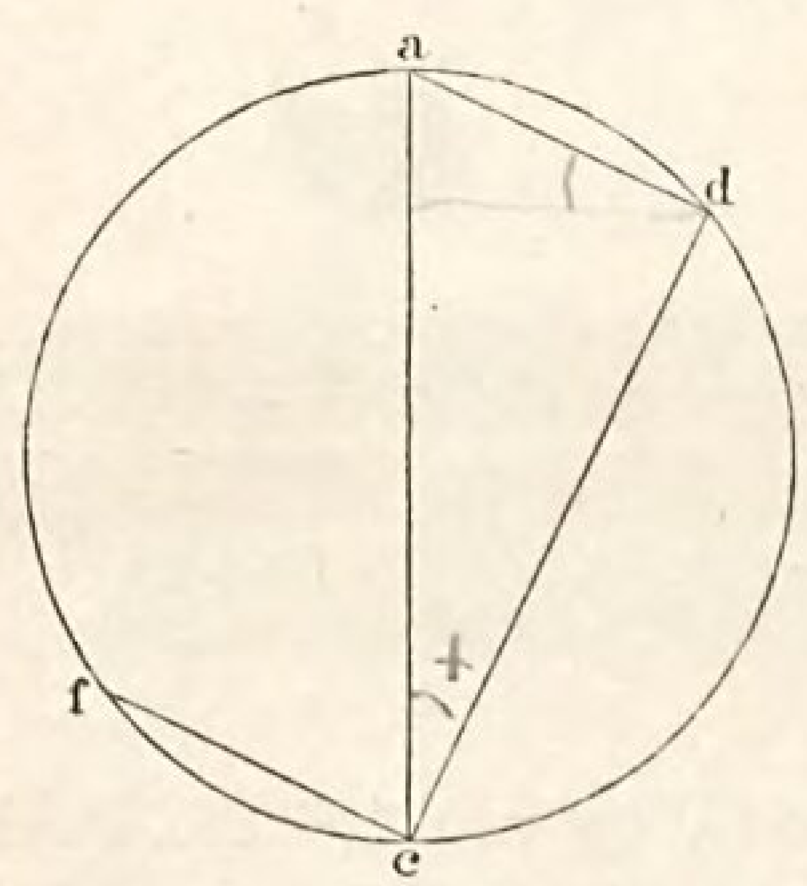
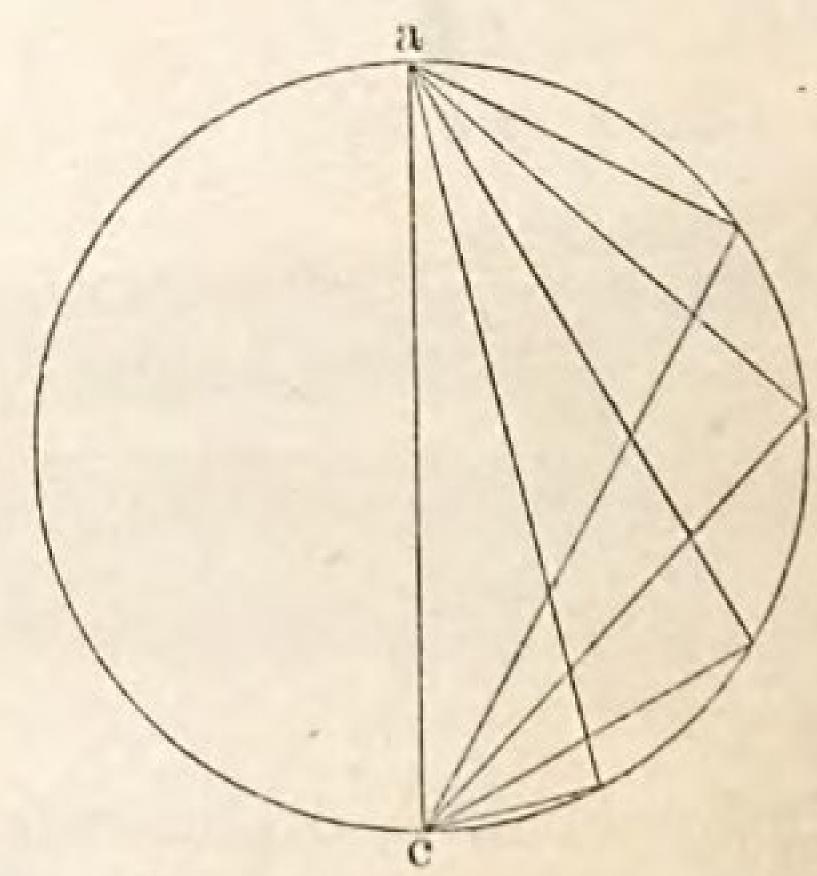


Fig. 114.



des Umfanges aus die Sehnen da und dc gezogen, so ist bekanntlich dac ein rechtwinkeliges Dreieck, und wenn man mit x den Winkel bezeichnet, welchen dc mit der Verticalen macht, so ist x auch der Winkel zwischen ad und der Horizontalen; ferner ist $ad = ac \,.\, sin\,x$, es wird also die Sehne ad in derselben Zeit durchlaufen, welche ein frei fallender Körper braucht, um den verticalen Durchmesser ac zu durchfallen.

Dies gilt, welche Stellung der Punkt d auch auf dem Kreisumfange einnehmen mag; alle von a, Fig. 114, ausgehenden Sehnen werden in gleicher Zeit durchlaufen, wie der verticale Durchmesser ac.

Denken wir uns durch c in Fig. 113 eine Sehne cf parallel mit ad gezogen, so hat cf nicht allein gleiche Neigung gegen die Horizontale wie ad, sondern auch gleiche Länge, woraus dann folgt, dass alle in c zusammenlaufenden Sehnen des Kreises in gleicher Zeit durchlaufen werden, wie der verticale Durchmesser ac.

In Fig. 115 ist noch eine andere elegante, schon von Galilei aufgefundene Form dieses Lehrsatzes dargestellt. Lässt man gleichzeitig von a

aus nach verschiedenen Richtungen auf den schiefen Ebenen *ae*, *af*, *ag*... Kugeln fallen, so befinden sich während des Falles stets alle Kugeln am Umfang eines Kreises, der durch den Punkt *a* hindurchgeht. Die in der Figur gezeichneten Kreise entsprechen den Fallzeiten 1, 2 und 3. Die Durchmesser der Kreise verhalten sich wie die Quadrate, die Flächenräume derselben wie die vierten Potenzen der Fallzeiten.

Endlich haben wir noch einen wichtigen Satz in Bezug auf die Geschwindigkeit abzuleiten, mit welcher der über die schiefe Ebene fallende Körper am Fusse derselben ankommt.

In Fig. 116 sei *ab* eine schiefe Ebene, deren Länge wir mit *l* und deren verticale Höhe wir mit *h* bezeichnen wollen. Die Geschwindigkeit,

Fig. 115.

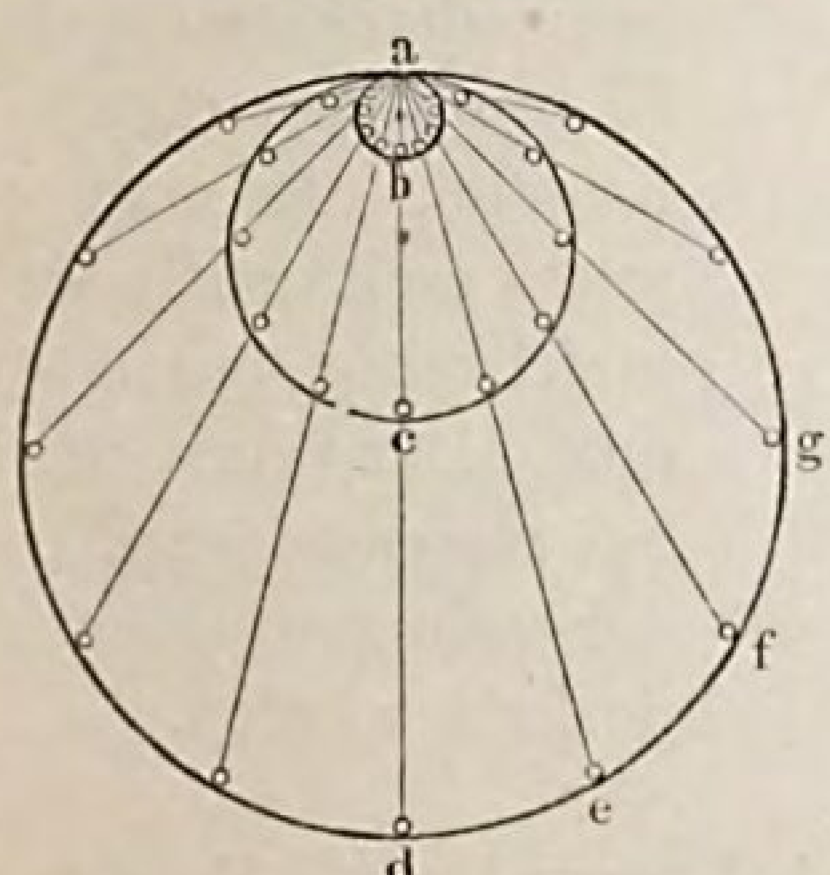
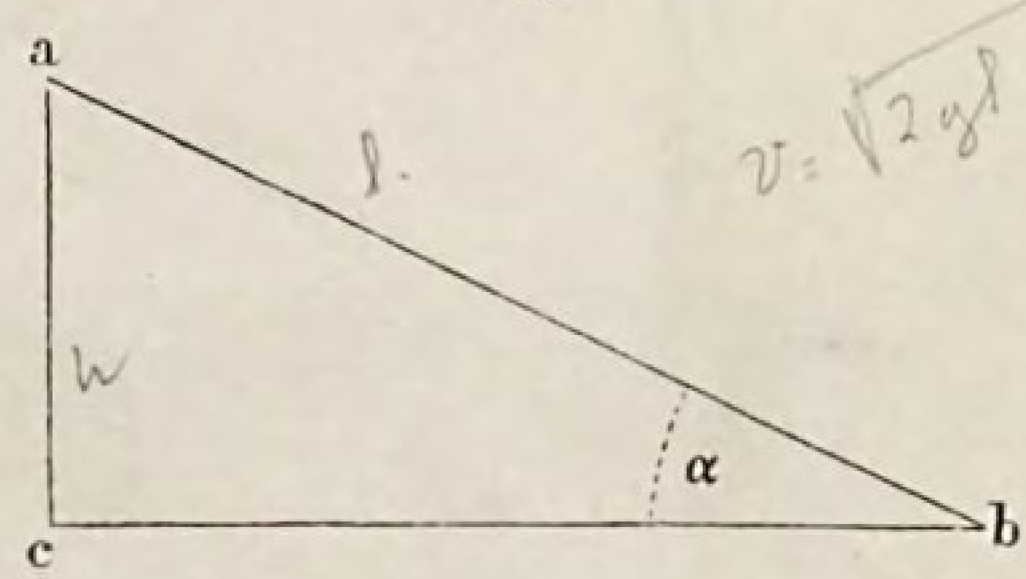


Fig. 116.



mit welcher ein von *a* aus auf schiefer Ebene herabfallender Körper in *b* ankommt, ist

$$V = \sqrt{2\,g\,l\,sin\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher ein von *a* vertical herabfallender Körper in *c* ankommt, ist aber

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Es ist aber $h = l\ .\ sin\,\alpha$ oder $l = \frac{h}{sin\,\alpha}\cdot$ Setzen wir diesen Werth von *l* in Gleichung 1), so kommt:

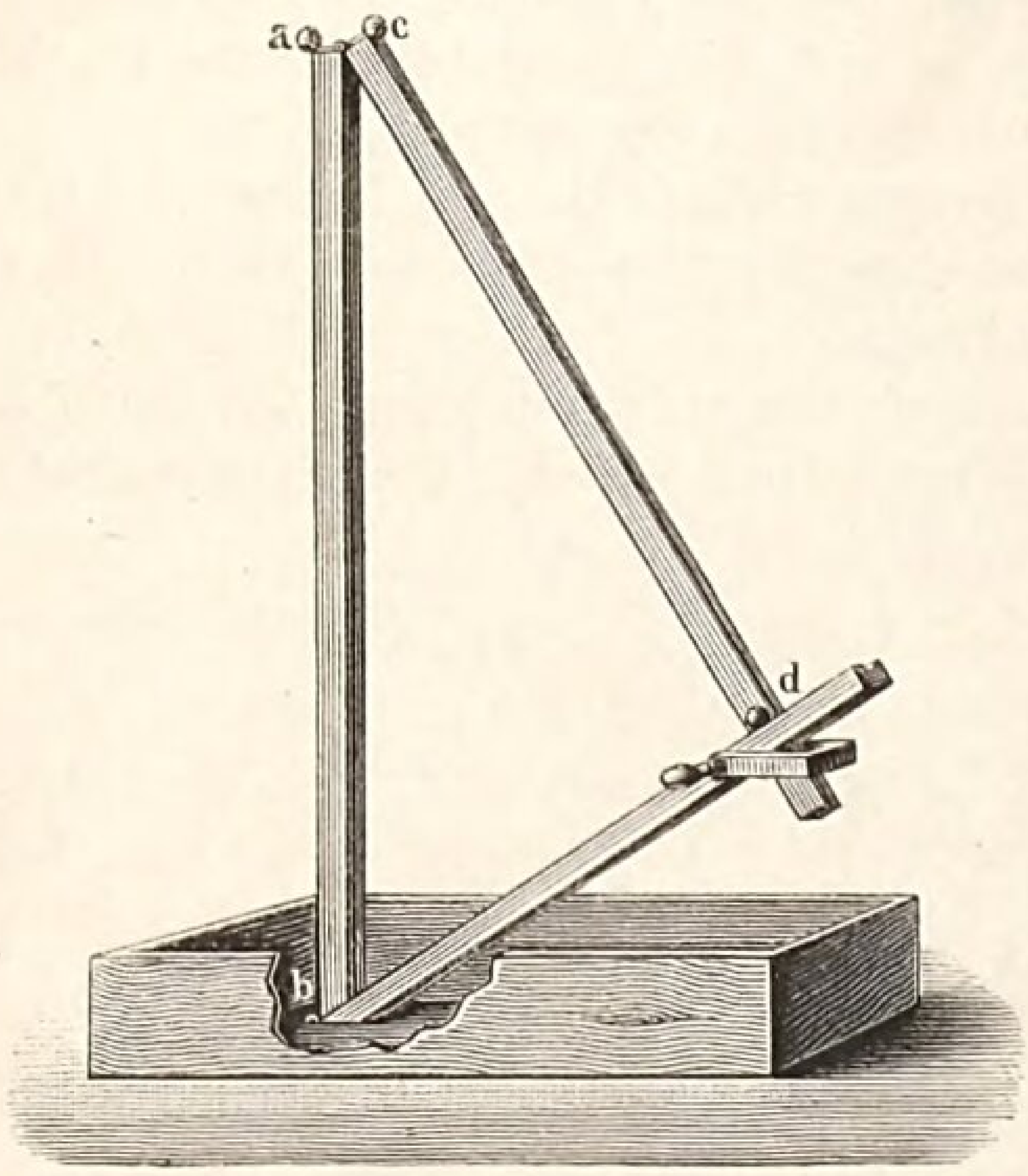
$$V = \sqrt{2gh}$$

es ist also $V = v$, d. h., wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene den Weg *ab* zurückgelegt hat, so erlangt er stets dieselbe Geschwindigkeit, als ob er die Höhendifferenz zwischen *a* und *b*, also die Länge *ac* frei durchfallen wäre.

Um den Satz vom Fall durch die Sehne experimentell zu demonstriren, kann man sich des in Fig. 117 abgebildeten Apparates bedienen. Derselbe besteht aus einer senkrecht stehenden prismatischen Holzsäule *ab* von ungefähr 80 cm Höhe, an welcher oben mittelst eines Charniers die Holzrinne *cd* befestigt ist. Eine eben solche Rinne ist vor die-

ser Säule um ein Charnier bei *b* drehbar. Beide Rinnen werden mittelst einer Schraubenklemme an einander festgestellt, wobei man mittelst eines Winkelhakens die Rechtwinkligkeit des Winkels *cdb* controliren kann. Werden dann bei *a* und *c* zwei kleine Kugeln aus Stein gleichzeitig losgelassen, so fallen beide gleichzeitig auf, die erste bei *b* auf dem Boden, die andere an einem Vorsprunge der Schraubenklemme bei *d*. Ebenso kommen zwei Kugeln, die man bei *c* und *d* gleichzeitig loslässt, gleichzeitig bei *d* und *b* an. Der Versuch kann bei verschiedener Neigung der schiefen Ebene wiederholt werden.

Fig. 117.



37 **Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmässig beschleunigten von gleicher Richtung; verticaler Wurf.** Während bei der Zusammensetzung zweier geradliniger gleichförmiger oder zweier gleichmässig beschleunigter Bewegungen immer wieder eine geradlinige Bewegung derselben Art hervorgeht, ist dies nicht mehr allgemein der Fall, wenn man eine gleichförmige Bewegung mit einer gleichmässig beschleunigten combinirt oder, was dasselbe bedeutet, wenn man einem Körper, der bereits eine Geschwindigkeit besitzt, auch noch eine Beschleunigung ertheilt *).

Dabei sind mehrere Fälle möglich. Entweder die Beschleunigung und die Geschwindigkeit fallen in dieselbe gerade Linie, wobei überdies der Sinn der Bewegung gleich oder entgegengesetzt sein kann; oder die Richtungen beider schliessen mit einander einen Winkel ein. Wir beschäftigen uns hier mit dem ersten Fall.

Bei der hierdurch erfolgenden Bewegung muss man unterscheiden zwischen der Länge des wirklich durchlaufenen Weges und zwischen der hierdurch erlangten Entfernung vom Ausgangspunkte. Da nämlich die Bewegung auch eine rückläufige sein kann, so fallen diese beiden Begriffe nicht immer zusammen.

Bezeichnen wir also mit *s* die in Folge der anfänglichen Geschwin-

*) Dabei denken wir uns sowohl die Geschwindigkeit als die Beschleunigung als relative in Rücksicht auf dasselbe Bezugssystem.

digkeit c in der Zeit t erlangten Entfernungen vom Ausgangspunkte und mit s' jene Entfernungen, welche in Folge der Beschleunigung φ allein in der Zeit t erreicht würden, so haben wir:

$$s = c\,t$$

$$s' = \frac{\varphi\,t^2}{2}$$

Aus dem Unabhängigkeitsprincipe folgt dann, dass die unter dem Einflusse der Anfangsgeschwindigkeit c und der Beschleunigung φ erlangten Entfernungen S in der Zeit t gegeben sind durch die Formel:

$$S = s \pm s' = c\,t \pm \frac{\varphi\,t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t ist gegeben durch die Gleichung:

$$v = c \pm \varphi\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Dies sind die Gleichungen für die gleichmässig veränderliche Bewegung in der allgemeineren Form, wobei die Anfangsgeschwindigkeit nicht $= 0$ angenommen ist, wie dies früher im §. 23 vorläufig geschah. Das doppelte Zeichen $\pm$ deutet an, dass die Beschleunigung φ mit der Anfangsgeschwindigkeit c gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sein kann. Im ersten Falle ergiebt sich eine gleichmässig beschleunigte, im zweiten Falle eine gleichmässig verzögerte Bewegung.

Zwischen diesen beiden Bewegungen ist nur ein Unterschied der Richtung vorhanden, insofern jede nach rechts gerichtete gleichmässig verzögerte Bewegung nach einer gewissen Zeit in eine nach links gerichtete gleichmässig beschleunigte Bewegung übergeht, sowie umgekehrt eine nach rechts gerichtete gleichmässig beschleunigte Bewegung als die Fortsetzung einer früher begonnenen nach links gerichteten gleichförmig verzögerten aufgefasst werden kann. Wählen wir beispielsweise eine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 18$ mm nach rechts und der Beschleunigung — 2 mm (d. h. also eine Beschleunigung 2 nach links oder eine Verzögerung 2 nach rechts). Einer solchen Bewegung entsprechen die folgenden Wegstrecken der einzelnen Zeitintervalle:

+17, +15, +13, +11, +9, +7, +5, +3, +1, —1, —3, —5, —7, —9, —11, —13, —15, —17

Dagegen wählen wir zweitens eine Bewegung mit $c = -20$ und $\varphi = +2$, so sind die einzelnen Wegstrecken

—17, —15, —13, —11, —9, —7, —5, —3, —1, +1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17

Bei beiden Bewegungen können wir also swei Hälften unterscheiden, wovon die erstere eine verzögerte, die zweite eine beschleunigte ist, nur die Richtungen sind entgegengesetzt. In Fig. 118 ist dies graphisch dargestellt durch das Schema der Stationspunkte, welches deutlich zeigt, dass die Bewegung umkehren muss, in Fig. 119 durch das Diagramm der Geschwindigkeitscurven.

Der Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ ist, könnte also immer dadurch herbeigeführt werden, dass man den Anfangspunkt der

Zeit auf jenen Moment verlegt, wo die momentane Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Man ersieht daraus, dass durch die Combination einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichen beschleunigten auf derselben Geraden überhaupt keine neue von der letzteren wesentlich verschiedene Bewegungsart entsteht, sondern nur eine zeitliche Verschiebung der letzteren*).

Fig. 118.

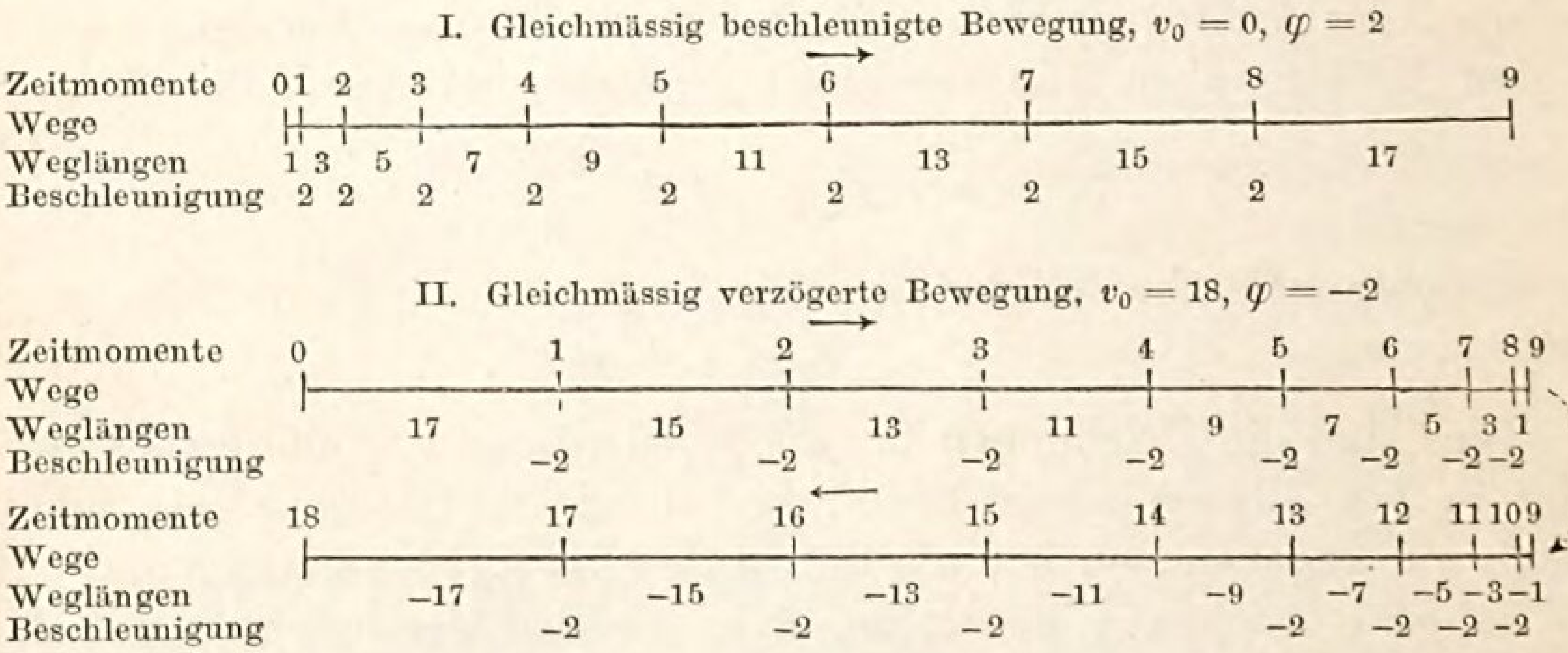
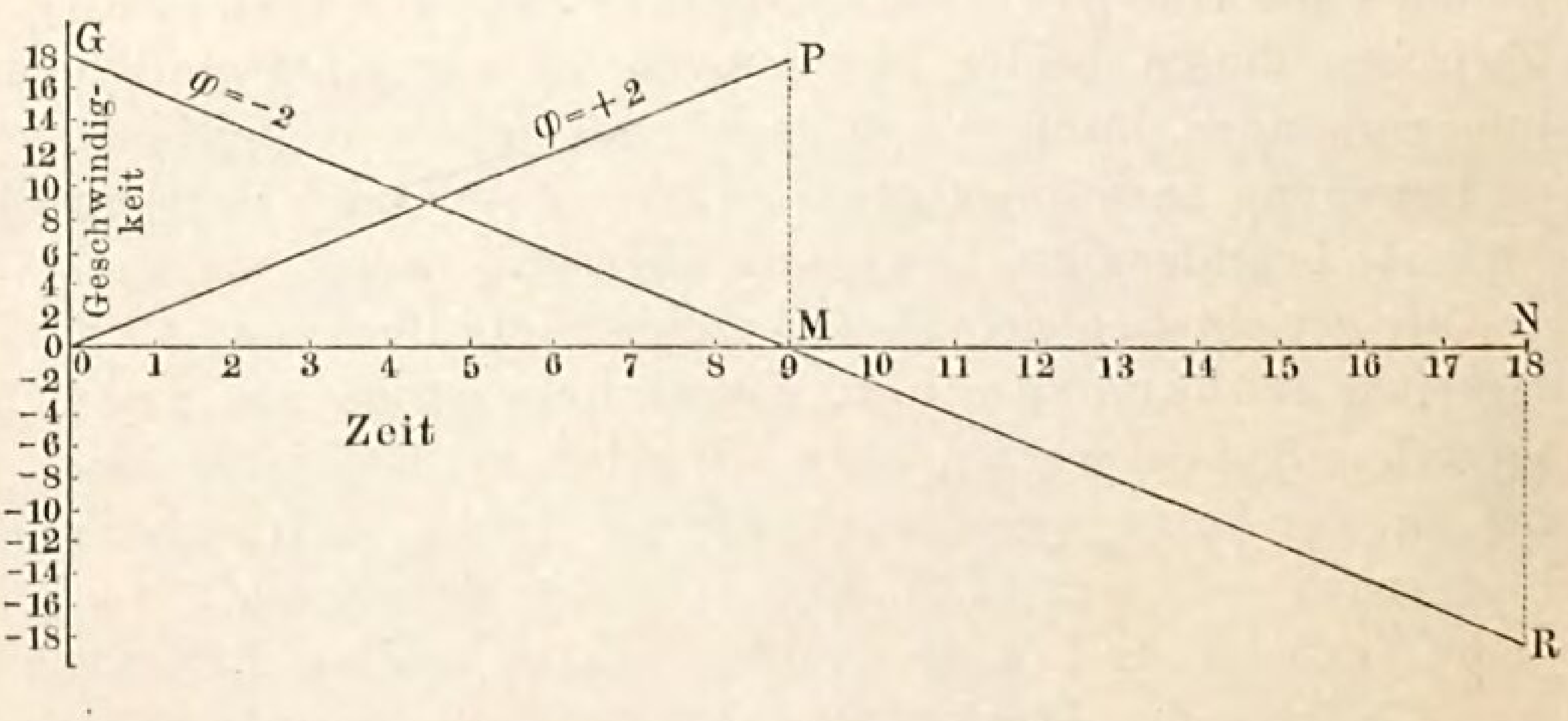


Fig. 119.



Aus den Gleichungen für die gleichförmig verzögerte Bewegung

$$s = ct - \frac{\varphi t^2}{2}$$

und

$$v = c - \varphi t$$

lassen sich leicht berechnen die Zeit und der Ort der Umkehr der Bewegung und die Zeit der Zurückkunft zum Ausgangspunkte.

*) Daraus ergiebt sich auch die klare Einsicht, dass in der Aufstellung der gleichmässig beschleunigten Bewegung als Folge einer constanten Kraft bereits die Annahme des Unabhängigkeitsprincips enthalten ist. Diese Aufstellung beruht ja auf der Annahme einer fortwährenden Addition der neuerworbenen Geschwindigkeitszuwachse zu der momentan vorhandenen Geschwindigkeit.

Die Bewegung findet in positiver Richtung statt, so lange $c > \varphi t$, sie kehrt um in dem Momente, wo $v = o$, also $t = \frac{c}{\varphi}$. Die bis dahin erlangte Entfernung s ist demnach, indem wir für t substituiren:

$$s = c \cdot \frac{c}{\varphi} - \frac{\varphi}{2} \frac{c^2}{\varphi^2} = \frac{c^2}{\varphi} - \frac{c^2}{2\varphi} = \frac{c^2}{2\varphi}$$

Um die Zeit der Rückkehr zum Ausgangspunkte zu finden, setzen wir $s = o$, also:

$$o = ct - \frac{\varphi t^2}{2}$$

woraus

$$t = \frac{2c}{\varphi}$$

folgt.

Diese Zeit bis zur Zurückkunft $\frac{2c}{\varphi}$ ist also genau doppelt so gross, als die Zeit $\frac{c}{\varphi}$ bis zum Moment der Umkehr der Bewegung.

Berechnen wir endlich noch die momentane Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft, indem wir den Werth $t = \frac{2c}{\varphi}$ in $v = c - \varphi t$ einsetzen, so bekommen wir:

$$v = c - \varphi \frac{2c}{\varphi} = -c$$

Die Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft ist also gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet, wie die Anfangsgeschwindigkeit.

Die nächstliegendsten Beispiele über die hier behandelten Bewegungen liefert der verticale Wurf.

Beim Wurf nach abwärts ist c = der Wurfgeschwindigkeit, φ = der Accelleration der Schwere, also $= g$ ($= 9{,}8$ m) und zwar haben beide dasselbe Zeichen. Man hat daher die Falltiefe:

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}$$

und die erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + gt$$

Beim Wurf nach aufwärts dagegen ist die in der Zeit t erlangte Höhe gegeben durch:

$$s = ct - \frac{gt^2}{2}$$

die höchste erreichte Höhe (Wurfhöhe) ist:

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{19{,}6} \text{ m}$$

Die Zeit zum Steigen und die Zeit zum Fallen ist:

$$t = \frac{c}{g} = \frac{c}{9,8}$$

Die Zeit bis zur Rückkunft also:

$$= \frac{2c}{g} = \frac{c}{4,9}$$

Zahlenbeispiel: Eine Kanonenkugel werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 400 m senkrecht in die Höhe geschossen. Wie lange und wie hoch steigt dieselbe? Wann fällt sie wieder zur Erde?

Antwort: Sie steigt während $\frac{400}{9,8} = 40,8$ Secunden, fällt nieder nach zweimal 40,8 Secunden, also nach 1 Minute 21,6 Secunden; die erreichte Höhe beträgt $\frac{(400)^2}{19,6} = 8163$ m *).

Um die gleichförmig verzögerte Bewegung beim verticalen Wurf durch einen Vorlesungsversuch zu demonstriren, kann man sich recht gut der im §. 32 beschriebenen Fallmaschine von Atwood bedienen. Es wurde daselbst gezeigt, dass man die Bewegung des freien Falles im Maassstab $\frac{1}{100}$ nachahmen kann, wenn man die Masse des Rades und der beiden Gewichte so regulirt, dass die Gesammtmasse z. B. = 100 g, das Uebergewicht = 1 g beträgt. In analoger Weise können wir die verticale Wurfbewegung in demselben Verhältnisse verlangsamt vorführen. Wir geben z. B. das Tischchen mit der durchbrochenen Platte an den Theilstrich 78,4 cm; das stäbchenförmige Gewichtsstück, welches abgehoben werden soll, wählen wir = 2 g, wovon aber nur 1 g als Uebergewicht wirksam ist**). Wie aus der Tabelle Seite 123 ersichtlich ist, fällt das Schälchen unter diesen Umständen in 4 Secunden bis zum Scalenpunkte 78,4, wo es mit einer Geschwindigkeit von 39,2 cm ankommt. Da aber hier nicht bloss das Uebergewicht 1 g, sondern noch um 1 g mehr abgehoben wird, so ist jetzt auf dem anderen Schälchen 1 g Uebergewicht, folglich bewegen sich die Schälchen von da an mit gleichförmig verzögerter Bewegung und zwar mit einer Verzögerung von 9,8 cm pro Secunde. Hieraus ergiebt sich, dass die verzögerte Bewegung nach der Gleichung:

$$s = 39,2\, t - \frac{9,8}{2}\, t^2$$

*) Bei genauer Berechnung müsste auf die Abnahme der Schwerkraft und auf den Luftwiderstand Rücksicht genommen werden.

**) Beträgt die Masse des Rades, wie beim Versuche S. 129, 79 g, so wählt man die Masse des einen Schälchens = 10 g, die des anderen = 9 g und legt ausserdem ein abhebbares Gewicht = 2 g auf.

vor sich gehen müsse, wobei s in Centimetern erhalten wird. Das Maximum von s ist somit:

$$s = \frac{c^2}{2g} = \frac{(39{,}2)^2}{19{,}6} = 78{,}4 \text{ cm}$$

Diese Zahl muss mit dem Fallraume bis zum Abheben des Zweigrammgewichts übereinstimmen, da die Verzögerung jetzt ebenso gross ist als früher die Beschleunigung war. Das Schälchen wird also vom Abhebepunkte noch 78,4 cm weiter bis zum Punkte 156,8 gehen, dort umkehren und wieder mit beschleunigter Bewegung zurückkehren.

Die Zeit bis zur Umkehr wird $t = \frac{39{,}2}{9{,}8} = 4$ Secunden dauern; ebenso lange die Rückkehr zum Abhebepunkte. Darauf folgt dann noch die verzögerte Bewegung bis zum Nullpunkte der Scala nach dem Wiederaufnehmen des abgelegten Gewichtsstückes. Verwechselt man inzwischen das abgelegte Zweigrammstück mit einem Eingrammstück, so kann man noch eine Messung der Endgeschwindigkeit vornehmen, da die Bewegung nach Aufnahme des Eingrammstückes eine gleichförmige werden muss. Da diese Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit $c =$ 39,2 cm beträgt, so muss das Schälchen 2 Secunden nach Aufnahme des Grammgewichts am Scalenpunkte $78{,}4 - 2\,(39{,}2) = 0$ ankommen. Das ganze Experiment wird also folgendermaassen verlaufen:

Secundenschlag	0	Der Fall beginnt vom Punkte 0.
	1	
„	2	Beschleunigte Bewegung nach abwärts.
	3	
„	4	Das Zweigrammgewicht wird abgelegt bei Punkt 78,4.
	5	
„	6	Verzögerte Bewegung nach abwärts.
	7	
„	8	Umkehr bei 156,8.
	9	Beschleunigte Bewegung nach aufwärts (das Zweigrammgewicht wird inzwischen mit dem Eingrammgewicht vertauscht.
„	10	
	11	
	12	Das Eingrammgewicht wird aufgenommmen bei Punkt 78,4.
„	13	Gleichförmige Bewegung nach aufwärts mit 39,2 cm Geschwindigkeit.
	14	Ankunft im Punkte 0.

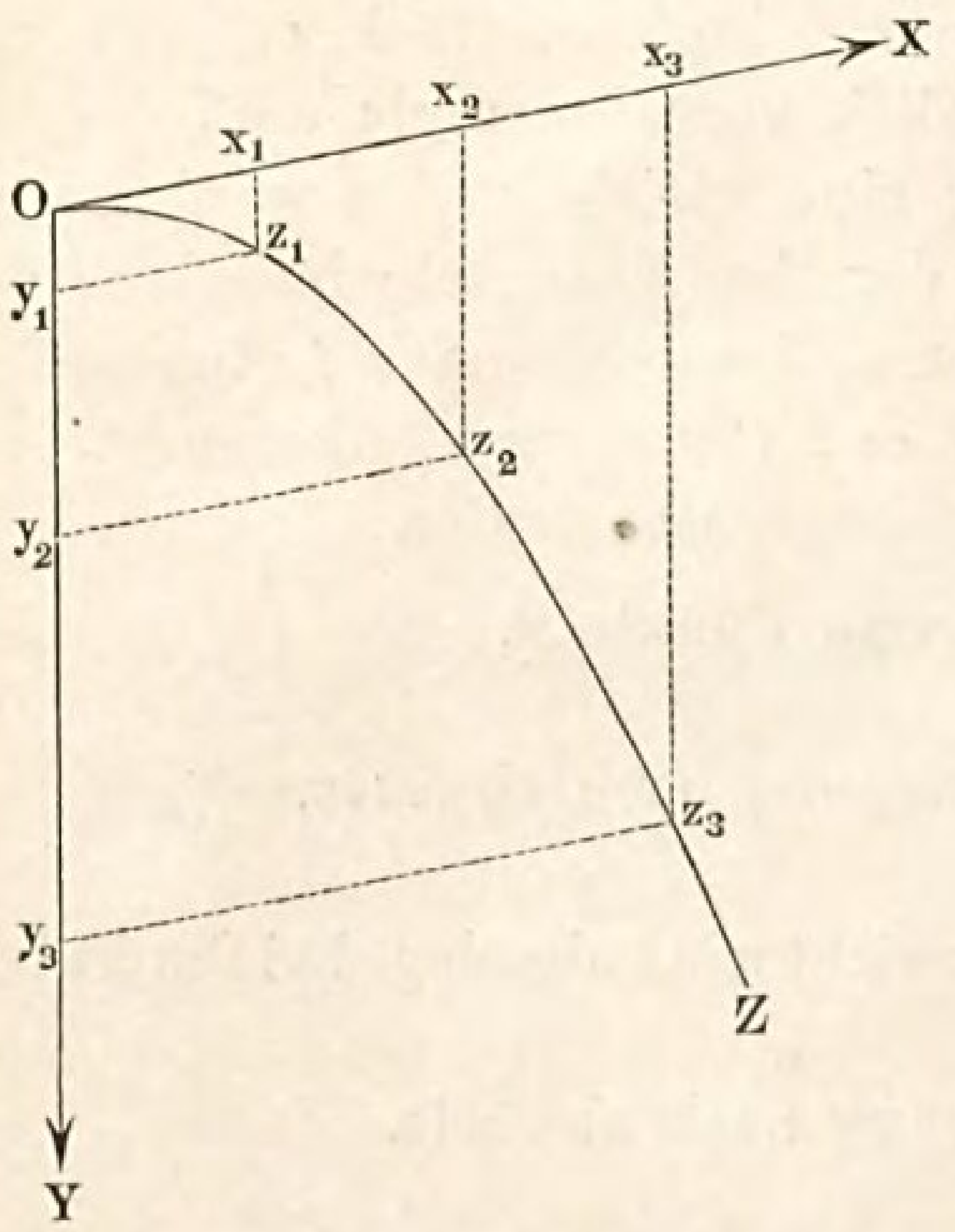
Das andere Schälchen bewegt sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung und ahmt daher vom Secundenschlag vier bis zwölf die Bewegung eines mit der Geschwindigkeit von 39,2 m nach aufwärts geworfenen Körpers in $\frac{1}{100}$ der natürlichen Dimensionen nach.

Dieser Versuch kann noch mannigfach modificirt werden.

38 **Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmässig beschleunigten von anderer Richtung; horizontaler und schiefer Wurf.** Ein materieller Punkt O, Fig. 120, besitze eine Geschwindigkeit in der Richtung OX, vermöge welcher er in gleichen Zeitintervallen die gleichen Wegstrecken $o x_1$, $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ etc. zurücklegen würde.

Auf denselben Punkt wirkt gleichzeitig eine constante Kraft, welche eine Beschleunigung in der Richtung OY ertheilt, vermöge welcher er in den auf einander folgenden gleichen Zeitintervallen die Wege $O y_1$, $y_1 y_2$, $y_2 y_3$ etc. beschreiben würde, die sich wie 1 : 3 : 5 etc. verhalten. Unter gleichzeitigem Einflusse der Geschwindigkeit und der Beschleunigung wird demnach gemäss der früher abgeleiteten Grundsätze die in Fig. 120 durchgeführte Construction der Parallelogramme zur Auffindung der Stationspunkte z_1, z_2, z_3 etc. führen. Denkt man sich unendlich viele Zwischenpunkte ebenso bestimmt, so werden dieselben eine continuirliche Curve OZ darstellen, welche mithin als die resultirende Bahn des Punktes O erscheint.

Fig. 120.



Wie eine einfache Ueberlegung lehrt, und weiter unten durch Rechnung gezeigt wird, ist die so entstehende Curve eine Parabel mit senkrecht stehender Achse.

Eine solche Curve entsteht jedesmal, so oft zu einer Geschwindigkeit eine Beschleunigung tritt, welche eine constante andere Richtung hat als jene.

Ein naheliegendes Beispiel einer solchen Bewegung bildet der Wurf in horizontaler oder in schiefer Richtung.

Horizontaler Wurf. Ein Körper erhalte durch den Wurf eine horizontale Geschwindigkeit $= c$, durch die Schwere eine senkrechte Beschleunigung $= g$. In der Zeit t ist demnach der horizontale Weg $x = ct$, der verticale Weg $y = \frac{g t^2}{2}$. Setzt man den Werth von t aus der ersteren Gleichung $\frac{x}{c}$ in der zweiten unter, so erhält man:

$$y = \frac{g}{2 c^2} x^2$$

als die Gleichung der Parabel, welche die Bahn darstellt. Fig. 121 zeigt die Ausführung der Construction, welche keine weitere Erklärung erfordert.

Erfolgt der Wurf in der Höhe h über einer horizontalen Ebene, so gelangt der Körper auf den Boden, wenn $y = h$, also wenn:

$$h = \frac{g}{2c^2} x^2$$

daraus ergiebt sich die Wurfweite, d. i. der Horizontalabstand des Auffallpunktes vom Ausgangspunkte:

$$x = c \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Setzt man diesen Werth von x in $x = ct$ unter, so erhält man die Fallzeit:

$$t = \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Fig. 121.

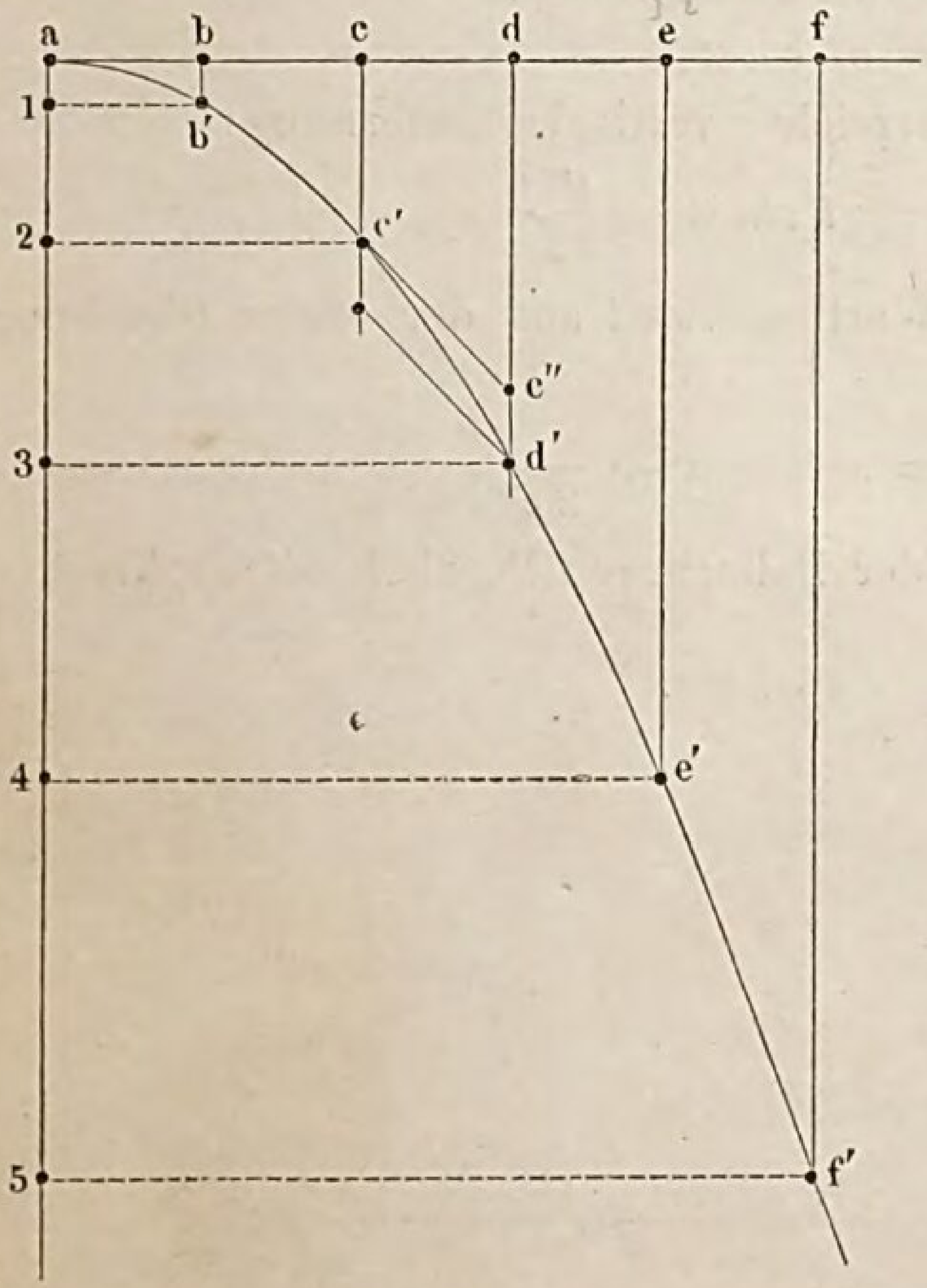
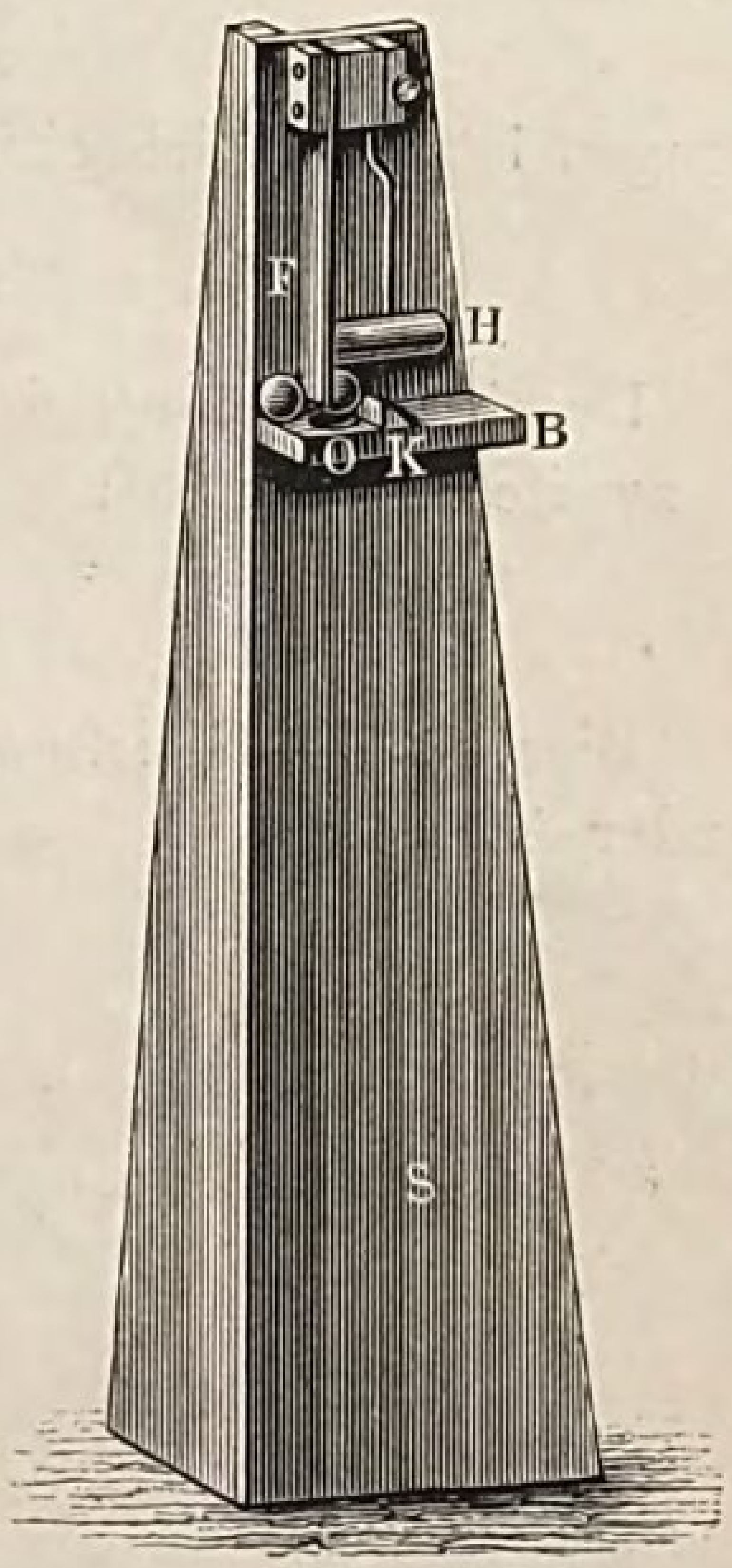


Fig. 122.



Dies ist genau dieselbe Zeit, welche der Körper zum freien Falle durch die Höhe h brauchen würde.

Dass ein horizontal geworfener Körper gleich schnell durch dieselbe Höhe fällt wie ein frei fallender, kann nach Weinhold durch den in Fig. 122 abgebildeten Apparat demonstrirt werden.

Lässt man den Hammer H fallen, so wird gleichzeitig die durch das federnde Holzplättchen F eingeklemmte Kugel O fallen gelassen und die andere davor liegende Kugel hinausgeschleudert. Sie fallen dann beide gleichzeitig auf der horizontalen Tischplatte auf, auf welche der Apparat beim Versuche gestellt wird.

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schiesst in der Höhe von 1,5 m über einem horizontalen Boden eine Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 m ab. Wie weit fliegt die Kugel?

Antwort:

$$x = 200 \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5}{9{,}8}} = 110{,}6 \text{ m}$$

In Wirklichkeit wird dieses Resultat durch den Luftwiderstand verkleinert.

Schiefer Wurf. Der Körper erhalte durch den Wurf eine Geschwindigkeit c in einer Richtung, welche mit dem Horizont einen Winkel $= \alpha$ einschliesse (Fig. 123). Diese Geschwindigkeit denke man sich zerlegt in zwei Componenten. Die horizontale Componente hat dann die Grösse $c \,.\, \cos\alpha$, die verticale die Grösse $c \,.\, \sin\alpha$. In der Zeit t ist demnach die erreichte horizontale Entfernung:

$$x = c\,t \cos\alpha$$

dagegen ist die gleichzeitig erreichte verticale Entfernung:

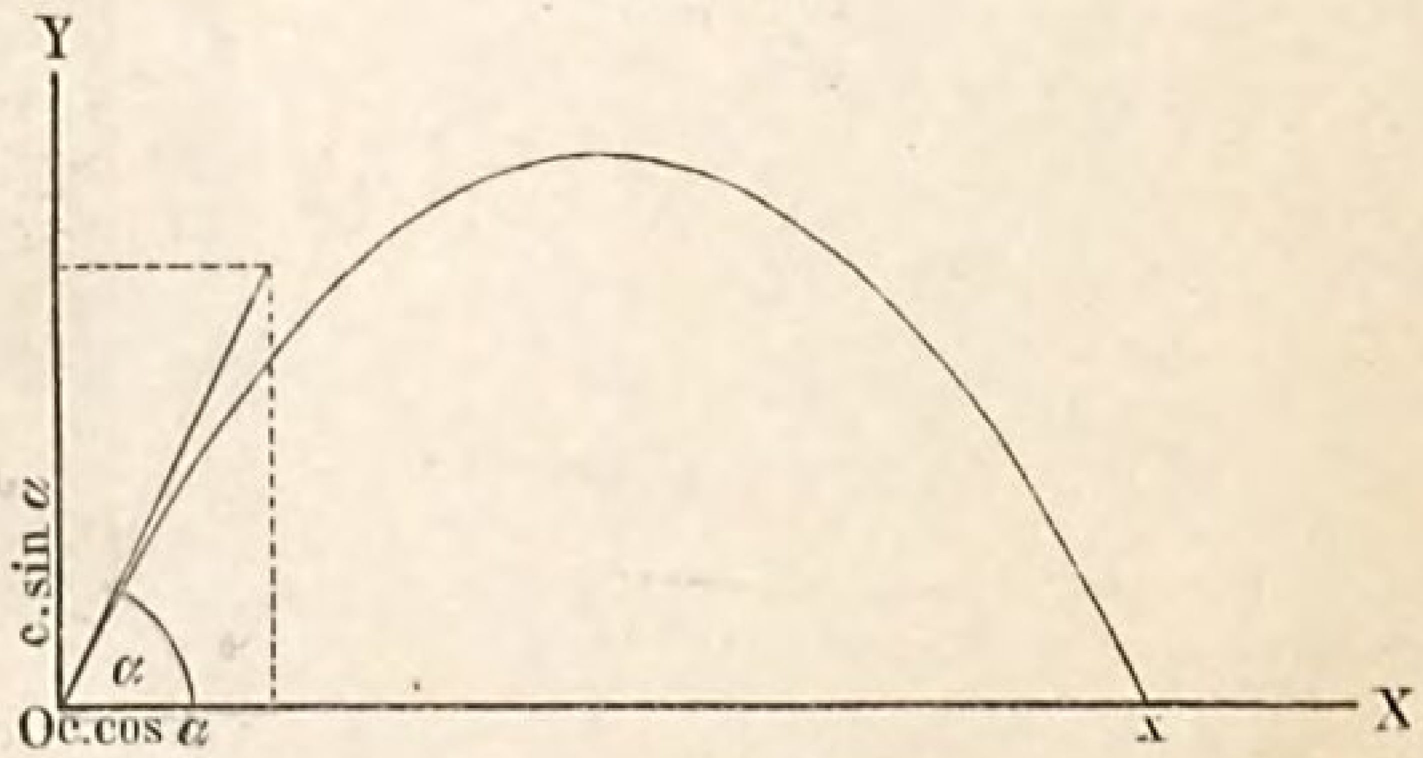
$$y = c\,t \sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2}$$

Durch Einsetzung des Werthes von t aus der ersten Gleichung in die zweite erhält man:

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{2\,c^2 \cos^2\alpha}\, x^2$$

Dies ist die Gleichung der Bahncurve (Parabel mit senkrecht stehender Achse).

Fig. 123.



Liegen Ausgangspunkt und Endpunkt der Wurfbahn in gleicher Höhe, so erhält man die Wurfweite, indem man $y = o$ setzt und x ausrechnet. Diese Rechnung giebt:

$$x = \frac{2\,c^2 \cos^2\alpha \operatorname{tang}\alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Der grösste Werth, den $\sin 2\alpha$ annehmen kann, ist $\sin 90^0 = \sin (2 \,.\, 45^0)$. Mithin ist für $\alpha = 45^0$ die Wurfweite am grössten, sie beträgt dann, da $\sin 2\alpha = 1$:

$$x_1 = \frac{c^2}{g}$$

Für $\alpha = 45 + \alpha'$ ist $\sin 2\alpha = \sin (90 + 2\alpha') = \cos 2\alpha'$,
für $\alpha = 45 - \alpha'$ ist $\sin 2\alpha = \sin (90 - 2\alpha') = \cos 2\alpha'$.

In beiden Fällen ist also auch die Wurfweite x gleich gross. Es ist also z. B. die Wurfweite dieselbe für 40° wie für 50°, für 20° und für 70° etc.

Da die Bahn symmetrisch ist, so muss der höchste Punkt derselben in der horizontalen Entfernung der halben Wurfweite liegen, also in:

$$x_1 = \frac{x}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Setzt man diesen Werth in die Curvengleichung und berechnet das zugehörige y, so erhält man die Wurfhöhe:

$$y = \frac{c^2 \sin 2\alpha \tan \alpha}{2g} - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2}$$

Beachtet man, dass $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin\alpha \cos\alpha$, so reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schiesst, am Boden liegend, eine Kugel mit 200 m Anfangsgeschwindigkeit unter 1° Elevation. Wie weit und wie hoch fliegt die Kugel?

$$c = 200,\ \alpha = 1^0$$

Wurfweite $x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ Wurfhöhe $y = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$\log x = 2\log c + \log \sin 2\alpha - \log g$ $\log y = 2\log c + 2\log \sin\alpha - \log 2g$

$2\log 200 = 4{,}602060$	$\log 200 = 2{,}301030$
$\log \sin 2^0 = 8{,}542819 - 10$	$\log \sin 1^0 = 8{,}241855 - 10$
Summa $= 3{,}144879$	Summa $= 0{,}542885$
$\log 9{,}8 = 0{,}991616$	$\times\ 2 = 1{,}085770$
$\log x = 2{,}153263$	$\log 19{,}6 = 1{,}292646$
$x = 142{,}3$ m	$\log y = 0{,}793124 - 1$
	$y - = 0{,}621$ m

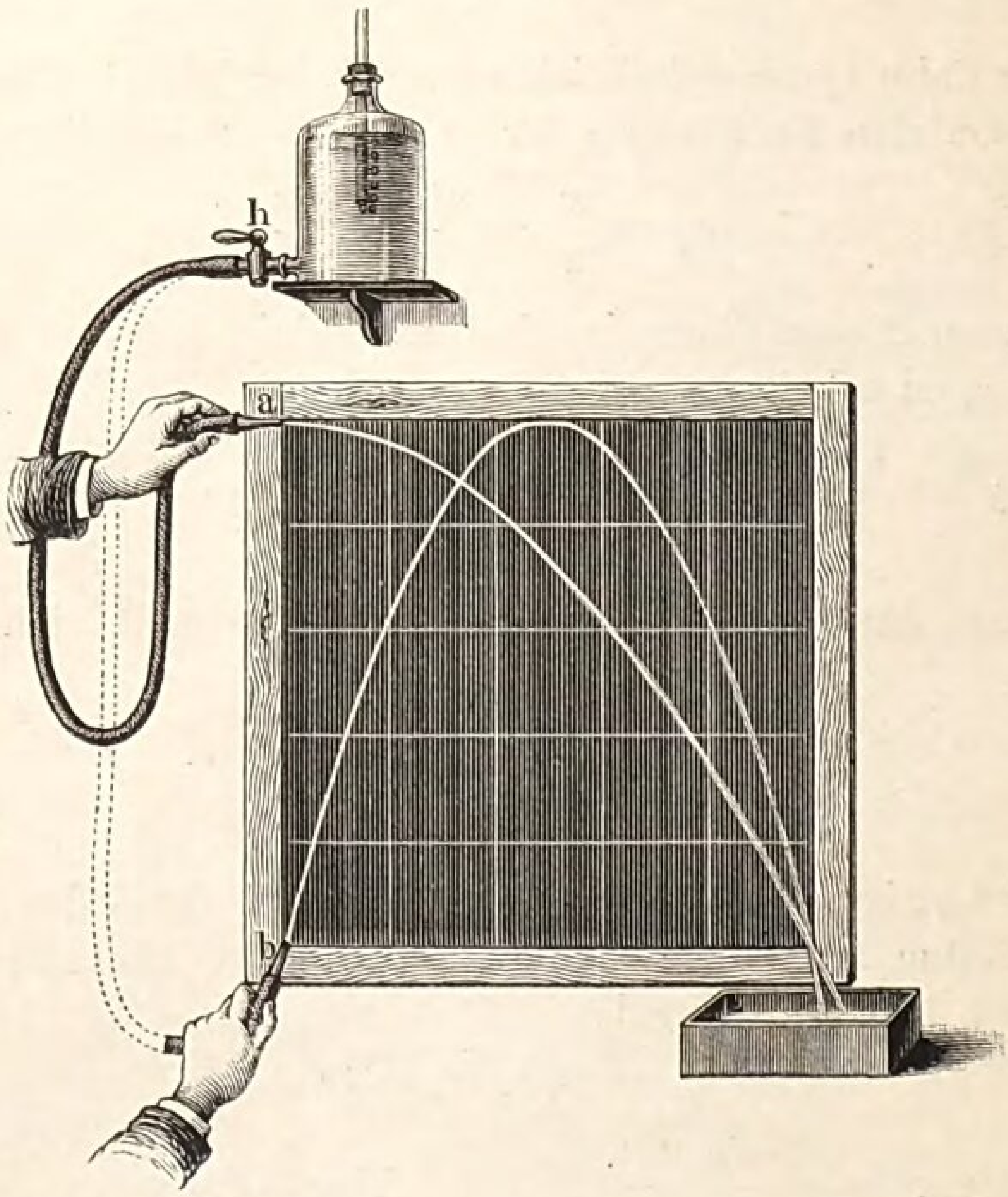
In Folge Luftwiderstandes wird der absteigende Parabelast erheblich steiler gestaltet und die Wurfweite verkürzt.

Um die Bewegung beim horizontalen und schiefen Wurfe zu demonstriren, bedient man sich am besten der Wasserstrahlen, da sie den Vortheil bieten, dass die Wurfbahn längere Zeit sichtbar erhalten bleibt. Eine hierzu dienliche Anordnung mag in Fig. 124 dargestellt sein.

Die Wurfbahnen werden auf einer mit einem Quadratnetz bedeckten Tafel vorgezeichnet und dann durch Oeffnen des Hahns h der in passen-

der Höhe aufgestellten Mariotte'schen Flasche*) ein constanter Strom Wassers dem Kautschukschlauch zugeführt. Das Ende desselben ist mit einer etwas verengten Mündung versehen, welche einen vollen Strahl

Fig. 124.



ausfliessen lässt. Man setzt diese Mündung bei *a* oder *b* in gewünschter Neigung mit freier Hand an und regulirt die Ausflussgeschwindigkeit durch Zusammendrücken des Schlauches, bis der Wasserstrahl der vorgezeichneten Curve folgt.

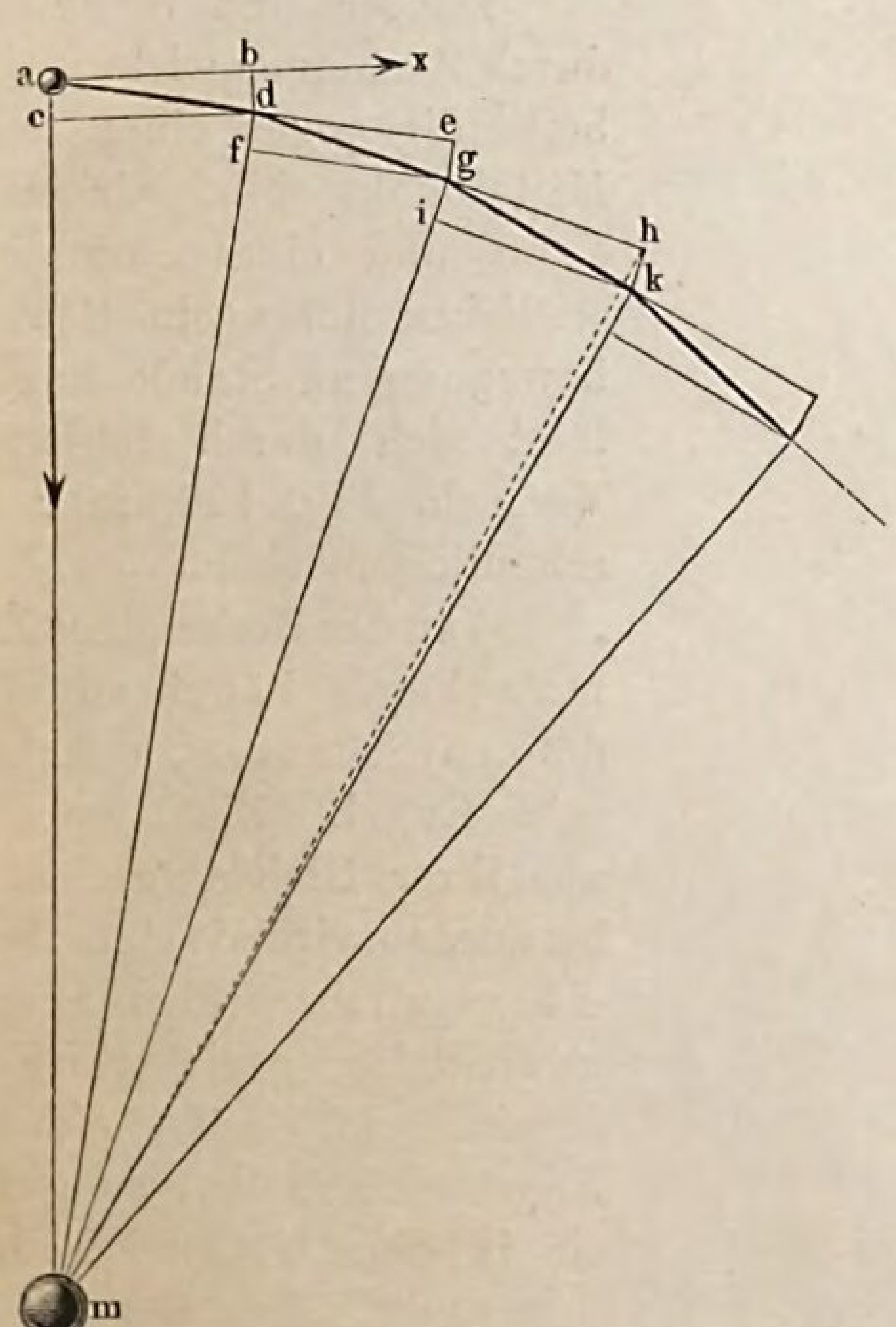
39 **Centralbewegung.** Bisher haben wir angenommen, dass die Richtung der Beschleunigung während der Bewegung stets dieselbe, d. h. sich selbst parallel bleibe. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Punkt, von dem die beschleunigende Kraft ausgeht, in unendlicher Ferne sich befindet. Dass wir die Richtung der Schwerkraft an verschiedenen Stellen der Bahn eines geworfenen Körpers als parallel betrachten konnten, liegt nur daran, dass die Länge der durchlaufenen Bahn verschwindend klein ist gegen die Entfernung des Erdmittelpunktes, gegen welchen der geworfene Körper stets hingetrieben wird. Sobald aber die Bahn des

*) Die Mariotte'sche Flasche wird später besprochen werden; sie bezweckt, dass der Druck des Wassers, also auch seine Ausflussgeschwindigkeit constant bleibe.

Körpers eine namhafte Länge im Vergleich zur Entfernung des Anziehungsmittelpunktes hat, haben wir es mit einer Centralbewegung zu thun. In diese Kategorie gehört die Bewegung des Mondes um die Erde, der Erde und der übrigen Planeten um die Sonne. Denken wir uns, dass der Punkt *a*, Fig. 125 welcher durch eine stetig wirkende Anziehungskraft nach dem Punkte *m* hingetrieben wird, beim Beginne seiner Bewegung durch irgend eine momentan wirkende Kraft einen Stoss in der Richtung *ab* erhalten hätte, so wird er sich weder in der Richtung *ab*, noch in der Richtung *ac* bewegen, sondern in einer anderen *ad*, die sich nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte ausmitteln lässt. Um die Betrachtung einfacher zu machen, wollen wir annehmen, dass die stets nach *m* gerichtete anziehende Kraft stossweise in kleinen Intervallen wirke. Man wird sich bei dieser Betrachtungsweise um so weniger von der Wahrheit entfernen, je kleiner man sich die Intervalle denkt.

Wenn der seitwärts gerichtete Stoss für sich allein den materiellen Punkt in einem kleinen Zeittheilchen *t* von *a* nach *b*, die anziehende Kraft, für sich allein wirkend, ihn in derselben Zeit nach *c* führen würde, so bewegt er sich unter Einwirkung beider Kräfte in dem Zeittheilchen *t* von *a* nach *d*. In *d* angekommen, würde er sich in der Richtung *de* weiter bewegen, und zwar würde in der Zeit *t* der Weg gerade so gross sein wie *ad*, wenn nicht die anziehende Kraft von Neuem wirkte, und zwar so, als ob der Körper in *d* einen Stoss erhalten hätte, der ihn, für sich allein wirkend, in der Zeit *t* von *d* nach *f* geführt haben würde. Durch diese abermalige Einwirkung der anziehenden Kraft wird also der Körper wieder von der Richtung *de* abgelenkt und nach *g* geführt. Man begreift daraus leicht, dass, wenn der Körper in *a* einmal einen seitwärts gerichteten Stoss empfangen hat, die anziehende Kraft aber stossweise in kleinen Intervallen wirkt, dass alsdann der Körper ein Polygon beschreiben muss, welches sich einer krummen Linie um so mehr nähert, je kleiner jene Intervalle sind. Wenn die anziehende Kraft stetig

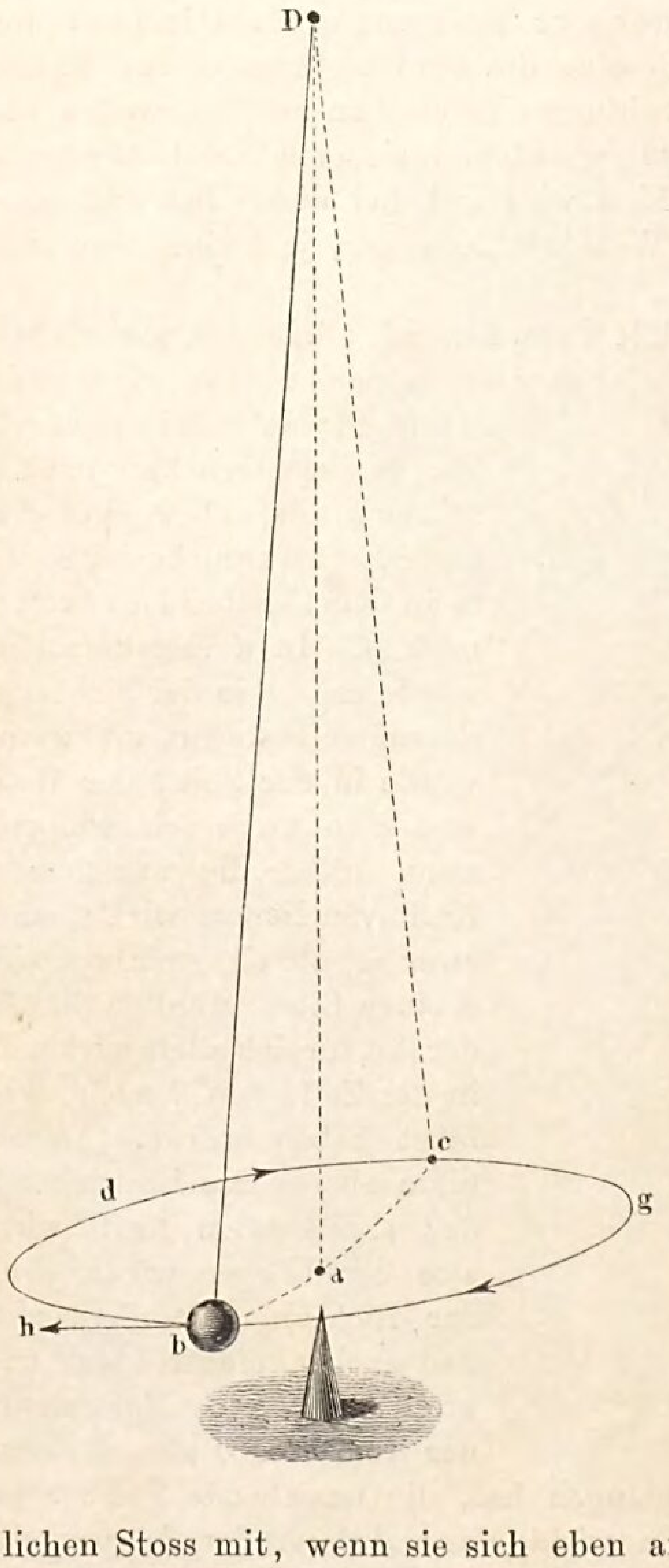
Fig. 125.



wirkt, wie dies in der Natur wirklich der Fall ist, so ist die Bahn eine krumme Linie, deren Natur von dem Verhältniss der sie bedingenden Kräfte abhängt.

Die Kraft, welche den Körper stets nach dem Anziehungsmittelpunkte hintreibt, wird mit dem Namen Centripetalkraft bezeichnet. Wenn in irgend einem Momente der Centralbewegung die Centripetalkraft zu wirken aufhörte, so würde von dem Augenblicke an der Körper sich in der Richtung der Tangente fortbewegen, und zwar mit einer lebendigen Kraft, welche den Namen Tangentialkraft führt.

Fig. 126.



Je nach dem Verhältniss zwischen Tangentialkraft und Centripetalkraft kann die Bahn ein Kreis, eine Ellipse etc. sein.

Die Art und Weise, wie durch Zusammenwirken einer beständig gegen einen festen Mittelpunkt hin wirkenden Kraft und eines einmaligen seitlichen Stosses eine Centralbewegung zu Stande kommt, lässt sich durch folgenden Versuch, Fig. 126, sehr anschaulich machen.

Von der Decke eines Zimmers herab hängt an einer dünnen Schnur eine metallische Kugel. Zieht man sie aus ihrer Gleichgewichtslage heraus, so wird sie stets durch eine gegen ihre frühere Gleichgewichtslage gerichtete Kraft afficirt sein. Lässt man die Kugel einfach los, so geräth sie in eine einfache Pendelbewegung, deren Gesetze wir später betrachten werden; theilt man ihr aber einen seitlichen Stoss mit, wenn sie sich eben an der Stelle ihrer grössten Ausweichung befindet, so wird sie von nun an eine krumme Linie um den Punkt der Gleichgewichtslage herum beschreiben, welche bei gehörig

abgemessener Stärke des seitlichen Stosses sehr nahe kreisförmig sein wird.

Die Verbindungslinie des Centrums der Centralbewegung mit dem jeweiligen Orte des Körpers heisst der Leitstrahl oder der Radius Vector des Körpers. Es lässt sich nun ein für alle Arten von Centralbewegungen gültiger wichtiger Satz beweisen, welcher lautet:

Der Radius Vector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachtet man die Fig. 127, so ersieht man sofort, dass $\triangle\, amd = \triangle\, dme$, da ja $ad = de$ und der Scheitel m gemeinsam ist. Ferner ist $\triangle\, dme = \triangle\, dmg$, weil beide Dreiecke auf derselben Basis dm stehen und $dm \mathbin{/\!/} eg$ ist. Es ist folglich auch $\triangle\, amd = \triangle\, dmg$. Dasselbe liesse sich von allen folgenden Dreiecken beweisen. Diese Dreiecke sind nun aber nichts Anderes als die in aufeinanderfolgenden gleichen kleinen Zeiträumen beschriebenen Flächen. Da wir uns nun zwei beliebige in gleichen Zeiten vom Radius Vector beschriebene Flächen in

Fig. 127.

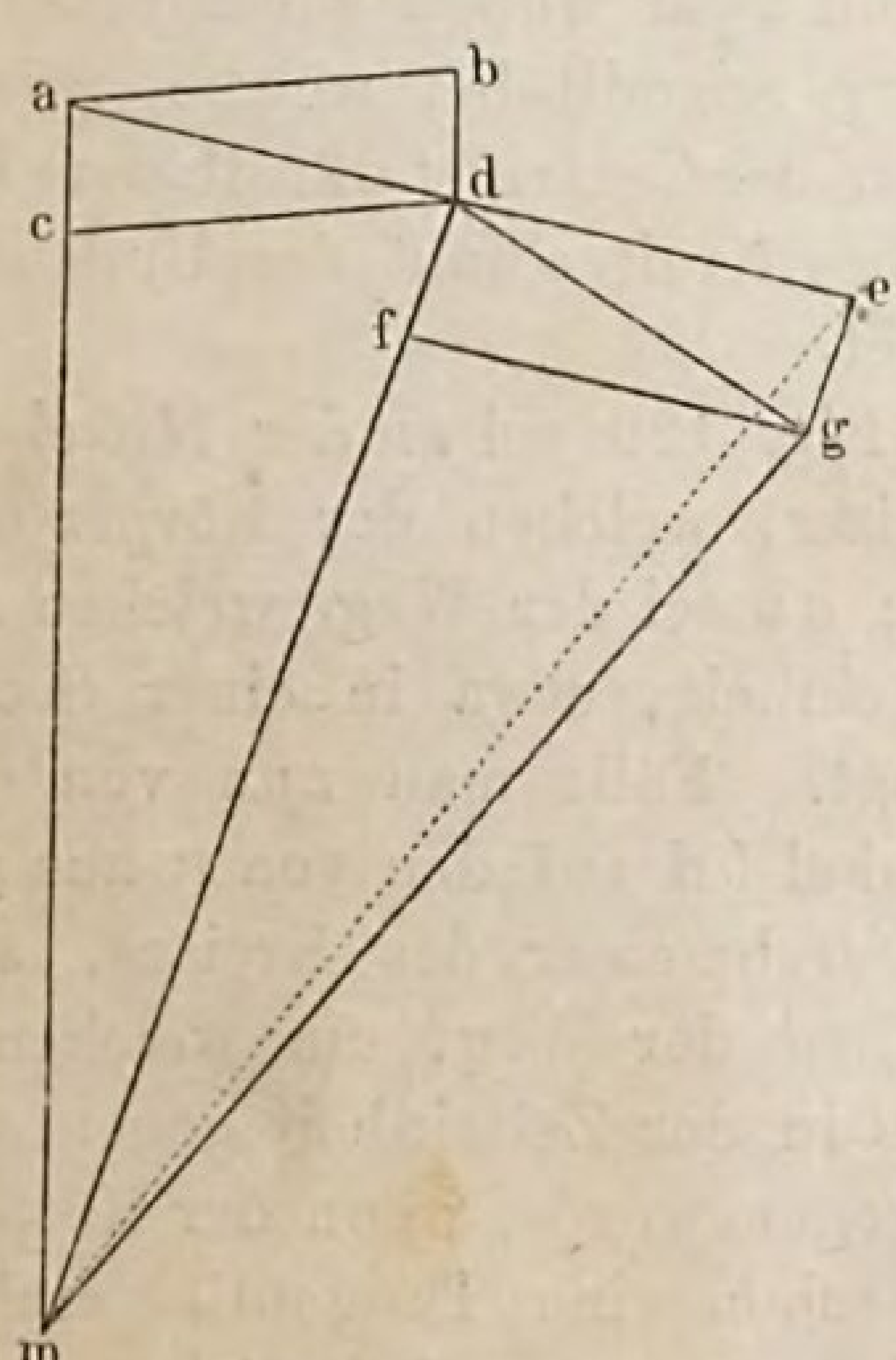
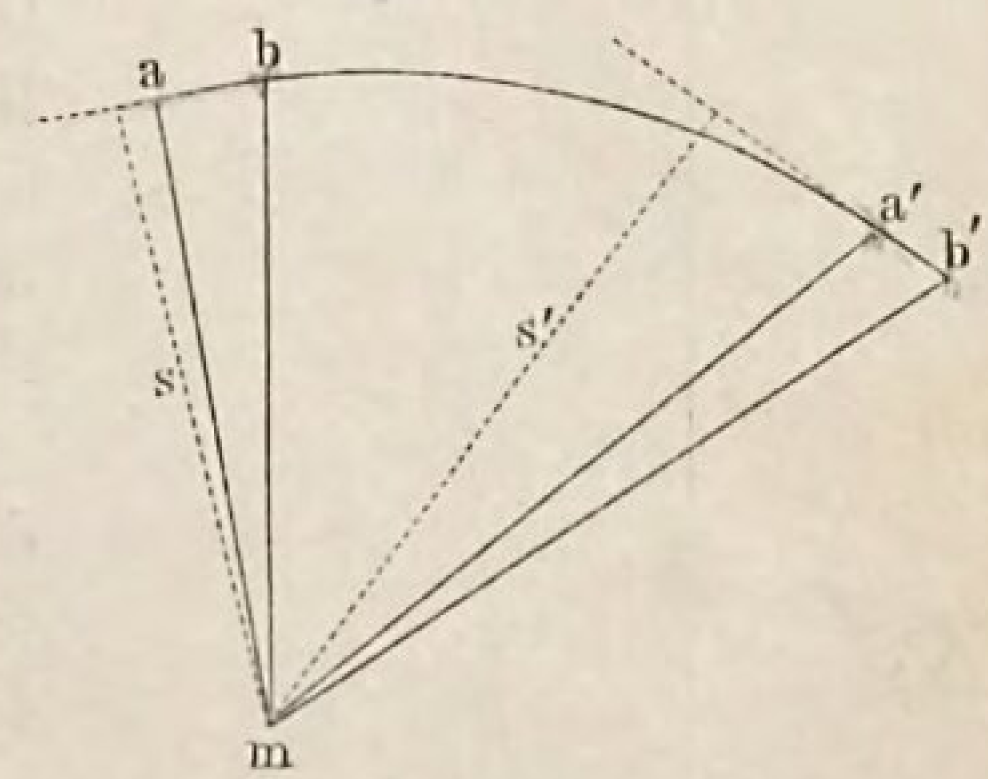


Fig. 128.



gleich viele und gleich grosse derartige Dreiecke zerlegt denken können, so folgt daraus die Richtigkeit des obigen Satzes.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der folgende:

Die Geschwindigkeiten an zwei Punkten der Bahn verhalten sich verkehrt wie die senkrechten Abstände der an diese Punkte gezogenen Tangenten vom Mittelpunkte der Centralbewegung.

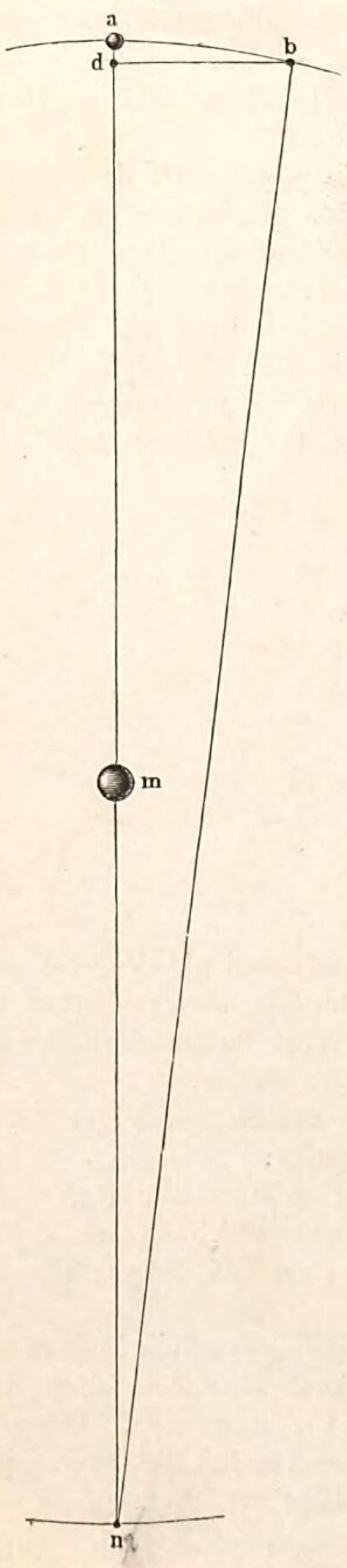
Es seien in Fig. 128 ab und $a'b'$ zwei in unendlich kleinen aber gleichen Zeiträumen zurückgelegte Bahnstrecken. Dieselben fallen wegen ihrer Kleinheit mit den Tangenten an a und a' zusammen. Die senkrechten Abstände dieser Tangenten von m seien s und s', die Geschwindigkeiten in a und a' seien v und v'. Es gilt dann zunächst:

$$v : v' = ab : a'b'$$

Gemäss dem obigen Satze über die Gleichheit der Flächenräume ist $\triangle\, amb = \triangle\, a'mb'$, folglich auch:

$$ab \cdot s = a'b' \cdot s'$$

Fig. 129.



denn dies sind die Producte der Grundlinien dieser Dreiecke mit ihren Höhen.

Daraus folgt:

$$ab : a'b' = s' : s$$

also auch:

$$v : v' = s' : s$$

Die Geschwindigkeit längs der Bahn ist also im Allgemeinen keine constante. Dies ist nur dann der Fall, wenn die senkrechten Abstände der Tangenten vom Mittelpunkte immer gleich gross sind, also bei der k r e i s f ö r m i g e n Centralbewegung.

Wir können uns hier nur mit der kreisförmigen Centralbewegung beschäftigen, und zwar wollen wir zunächst die Beziehung ausmitteln, welche zwischen der Grösse der Centripetalkraft, dem Halbmesser des Kreises und der Umlaufszeit stattfindet.

In Fig. 129 sei m der Mittelpunkt des Kreises, welchen der Körper a beschreibt; ab sei der Weg, welchen er in der Zeiteinheit, etwa in einer Secunde zurücklegt. Fällt man nun von b ein Perpendikel bd auf den von a aus gezogenen Durchmesser des Kreises, so ist offenbar ad der Weg, um welchen der Körper a in der Zeiteinheit gegen m hin sich bewegen würde, wenn der Körper in a nicht schon eine Tangentialgeschwindigkeit hätte, sondern lediglich durch die Centripetalkraft gegen m hin getrieben würde.

Einem bekannten Satze der Geometrie zufolge ist nun ab (wenn wir den Bogen als geradlinig betrachten, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, wenn ab nur ein kleiner Theil des Kreisumfanges ist) die mittlere Proportionale zwischen ad und an, es ist also:

$$ab^2 = ad \times an$$

und daraus:

$$ad = \frac{ab^2}{an}$$

Es ist aber an der Durchmesser des Kreises, also $2r$, wenn wir mit r den Halbmesser desselben bezeichnen; ferner ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Bogen ab gleich dem Kreisumfange, dividirt durch die Umlaufszeit, also $ab = \frac{2\pi r}{t}$. Bezeichnen wir nun den Weg ad, um welchen sich der Körper a unter alleinigem Einfluss der Centralkraft dem Mittelpunkte m in der Zeiteinheit nähern würde, durch p, so haben wir:

$$p = \frac{2\pi^2 r}{t^2}$$

Die Endgeschwindigkeit v, welche der Körper unter dem Einfluss der Centripetalkraft am Ende der ersten Secunde erlangen würde, wenn er von a aus gegen m fiele, ist aber gleich $2p$, also:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

Da aber die Endgeschwindigkeit nach der ersten Secunde gleich ist der Beschleunigung, so ist diese selbst durch obigen Ausdruck gegeben. Die Grösse der Centripetalkraft ist wie die Grösse jeder constanten Kraft gleich dem Producte der Masse und der Beschleunigung.

Beträgt also die Masse des Körpers m, so ist die Centripetalkraft K gegeben durch den Ausdruck:

$$K = \frac{4\pi^2 r m}{t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Will man statt der Umdrehungszeit t die peripherische Geschwindigkeit u einführen, so hat man zu überlegen, dass:

$$u = \frac{2r\pi}{t}$$

also:

$$u^2 = \frac{4r^2\pi^2}{t^2}$$

mithin:

$$K = \frac{u^2 m}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Diese beiden Formeln liefern die Centripetalkraft gemessen nach absolutem Maasse. Wollten wir sie im praktischen Maasse (nach Kilogrammgewicht) erhalten, so hätten wir noch mit $g = 9{,}81$ zu dividiren.

Fliehkraft. Die im vorigen Paragraphen berechnete Centripetal- 40
kraft wirkt unter so eigenthümlichen Umständen, dass der Körper, auf den sie wirkt, sich doch nicht in der Richtung der Kraft dem Anziehungs-

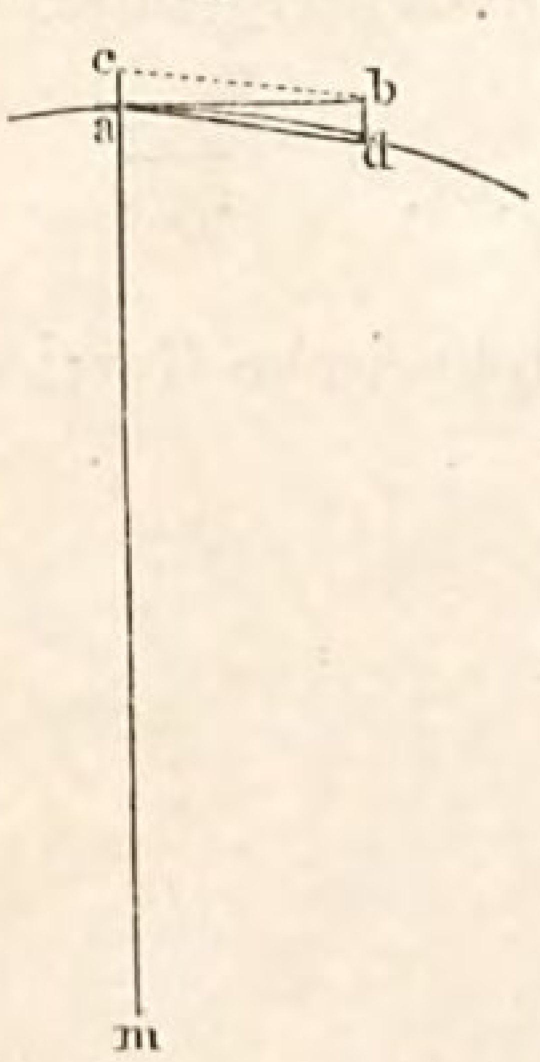
centrum nähert, sondern immer in gleicher Entfernung von demselben bleibt. Die Centripetalkraft bewirkt nur, dass durch die von ihr dem Körper gegen das Centrum ertheilte Beschleunigung die Entfernung vom Centrum, welche durch die tangentiale Geschwindigkeit eintreten würde, compensirt wird. Die Centripetalkraft wirkt also wie ein Widerstand, der den Körper hindert, sich vom Centrum weiter zu entfernen.

Ein solcher Widerstand kann aber auch auf andere Weise geleistet werden, z. B. dadurch, dass man den Körper nöthigt, innerhalb einer kreisförmigen Rinne oder am Ende einer Schnur befestigt, sich zu bewegen, deren anderes Ende am Mittelpunkte angebunden ist.

Man kann sich im letzteren Falle die Centripetalkraft in Form eines Zuges an dieser Schnur vorstellen, ja man könnte die Grösse derselben aus der Spannung entnehmen, welche eine an Stelle dieser Schnur befindliche elastische Spirale zeigen würde. Wie bei allen Kräften, so ist auch hier Action und Reaction gleich, d. h. die Spirale wird ebenso stark nach dem Centrum hin wie gegen den bewegten Körper hin angezogen. Diese letztere der Centripetalkraft entgegengesetzt gerichtete aber an Grösse gleiche Kraft heisst Fliehkraft, Centrifugalkraft oder auch Schwungkraft.

Man kann sich das Auftreten dieser Fliehkraft auch auf folgende Weise erklären. Die Bewegung in Folge der tangentialen Geschwindigkeit würde in kleinem Zeitintervall von a nach b (Fig. 130) vor sich gehen. In dieser Richtung kann sie aber nicht erfolgen wegen des Widerstandes der Schnur. Sie geht also nach der Componente ad vor sich; dies ist aber nur möglich, wenn gleichzeitig eine andere Componente auftritt, welche mit der ersten zusammen die ursprüngliche ab ersetzen kann. Diese andere Componente ist ac, welche als Fliehkraft erscheint. Sobald die Schnur durchschnitten wird, tritt an Stelle der beiden Componenten sofort wieder die Resultirende ab, d. h. die ursprüngliche tangentielle Geschwindigkeit, vermöge welcher der Körper in der Richtung der Tangente fortfliegt; das Fortfliegen erfolgt also nicht in der Richtung der Fliehkraft, welche sofort erlischt, sobald die Nöthigung entfällt, dass der Körper statt nach ab nach ad gehe.

Fig. 130.



Man unterscheidet manchmal eine so zu Stande kommende Bewegung als gebundene Centralbewegung von der im vorigen Paragraphen behandelten freien Centralbewegung.

Die Grösse der Fliehkraft ist, da sie der Centripetalkraft an Grösse gleich ist, ebenfalls gegeben durch die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke:

$$F = \frac{4\,\pi^2\,r\,m}{t^2} = \frac{u^2 m}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

wobei r den Radius, m die Masse, t die Umlaufszeit, u die peripherische Geschwindigkeit bedeuten.

Um die Fliehkraft im praktischen Kraftmaasse, d. h. nach Gewicht auszudrücken, hat man noch durch $g = 9{,}81$ zu dividiren. Man hat dann:

$$F = \frac{4\pi^2}{g} \frac{rm}{t^2} = 4{,}024 \frac{rm}{t^2} \quad \text{.} \quad 2)$$

Dabei ist r nach Metern, m nach Kilogrammen zu messen, um die Fliehkraft ebenfalls in Kilogrammgewicht zu erhalten.

Aus den obigen Formeln folgen die nachstehenden Sätze:

1. Die Fliehkraft ist proportional der Masse m.
2. " " " bei gleicher Umlaufszeit t proportional dem Radius.
3. " " " bei gleichem Radius verkehrt proportional dem Quadrat der Umlaufszeit.
4. " " " bei gleichem Radius direct proportional dem Quadrate der peripherischen Geschwindigkeit.
5. " " " bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit verkehrt proportional dem Radius.

Um diese Gesetze zu demonstriren, und überhaupt um Versuche über die Fliehkraft anzustellen, bedient man sich eines eigenen Apparates, welcher die Schwung- oder Centrifugalmaschine genannt wird.

Fig. 131.

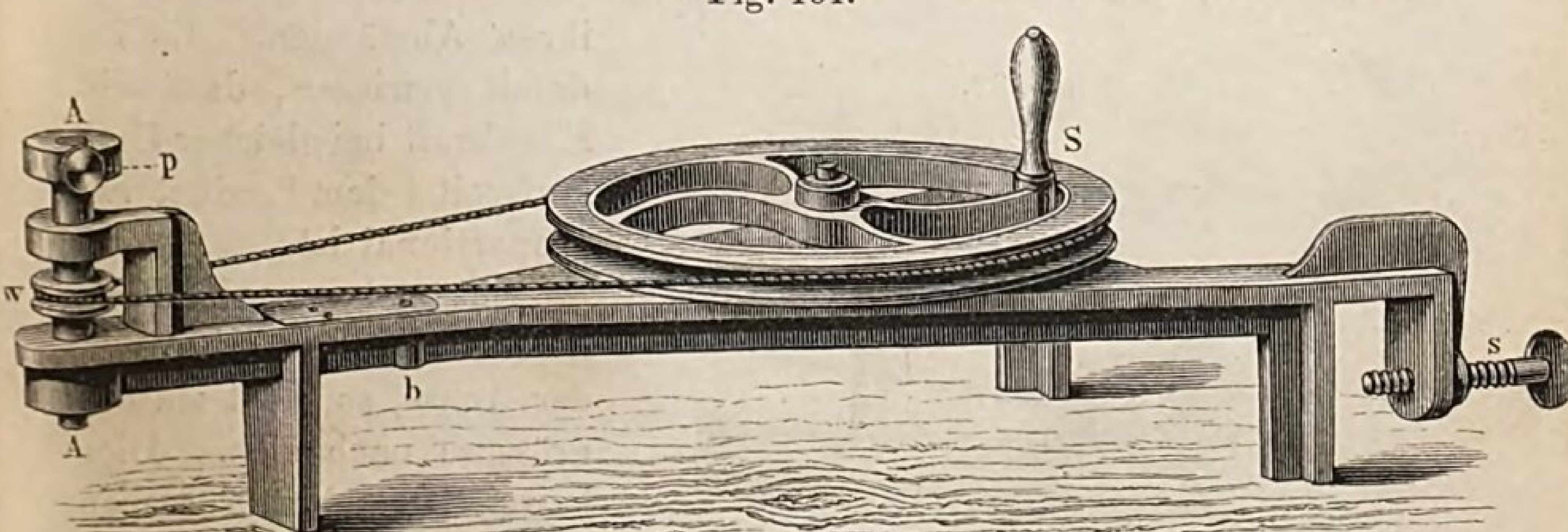


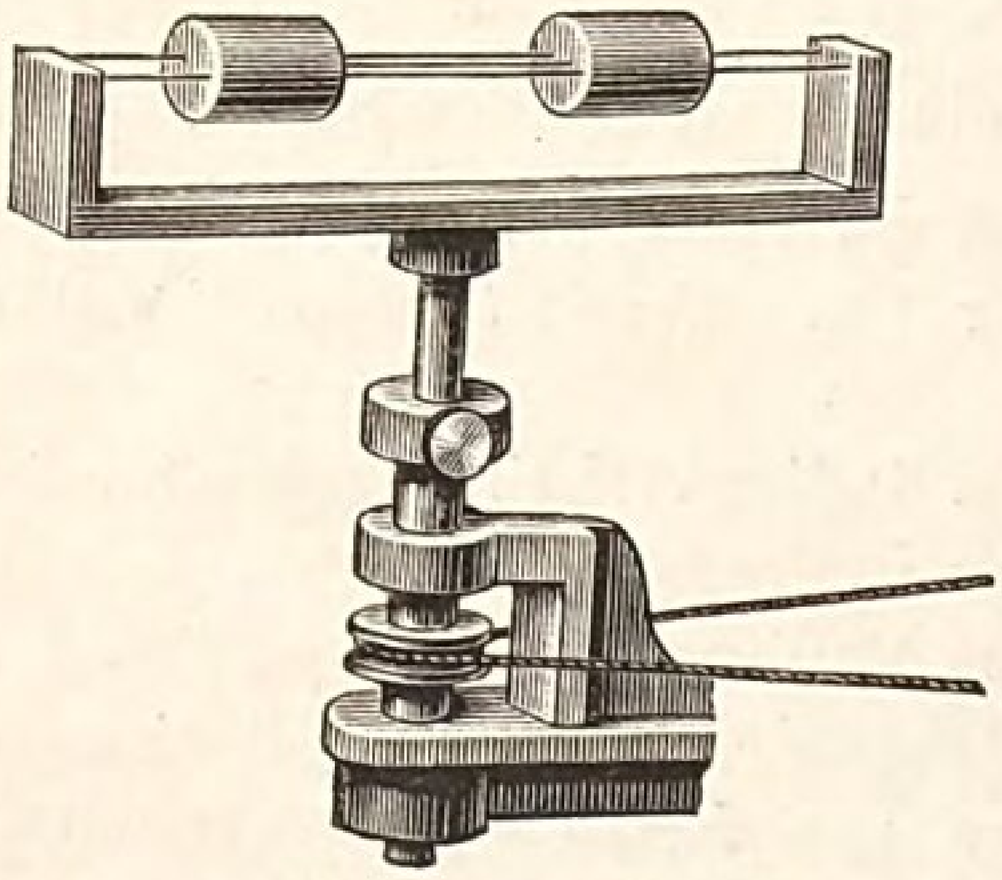
Fig. 131 zeigt eine solche Schwungmaschine zweckmässiger Construction in ungefähr $^1/_5$ der natürl. Grösse *).

Dieselbe soll so gebaut sein, dass sie sich sowohl in horizontaler als auch in verticaler Lage gebrauchen lässt. Sie soll ferner gestatten, dass nicht bloss Apparate über der Achse AA befestigt, sondern auch unterhalb derselben angebracht werden können. Die an das eiserne

*) Dieselbe ist dem Buche „Physikalische Demonstrationen von D. A. F. Weinhold“ entnommen; eine ähnliche Construction rührt vom Mechaniker Stöhrer in Leipzig her.

Gestell angegossene Schraubenzwinge *s* gestattet ein Festklemmen an den Tisch bei verticaler Stellung. Die Achse des Schwungrades ist verstellbar, um die Schnur (Darmsaite mit Hackenschloss) nachspannen zu können. Bei *b* ist eine verticale Bohrung mit Schraubengewinde angebracht, die zur Befestigung verschiedener Vorrichtungen dient. Die Nebenapparate werden mittelst Zapfens in die cylindrische Bohrung der Achse *A A* eingesetzt und mittelst der Schraube *p* angeklemmt.

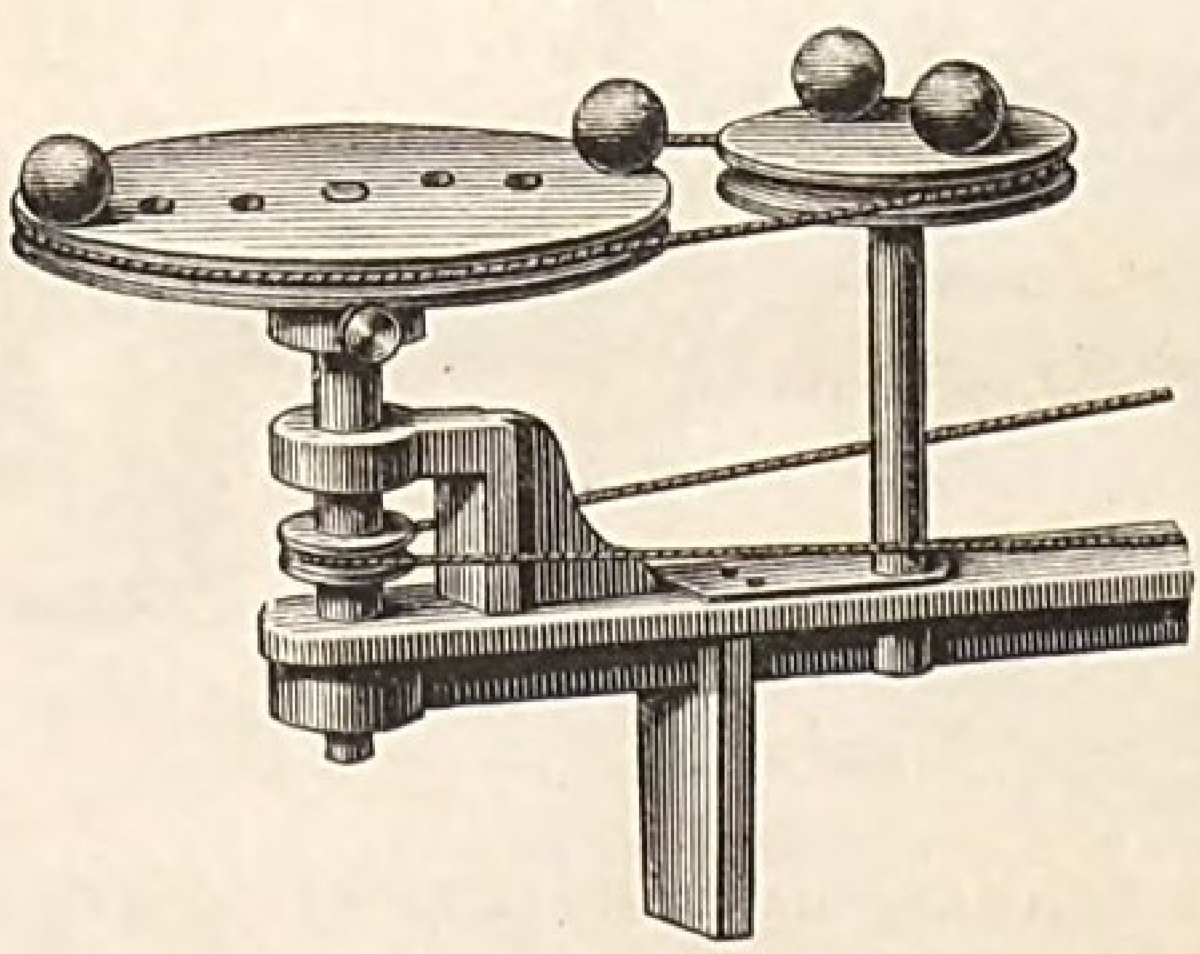
Fig. 132.



Um den ersten der obigen Sätze, nämlich den Einfluss der Masse zu zeigen, kann man sich eines Apparates, wie er in Fig. 132 abgebildet ist, bedienen.

Derselbe ist ohne weitere Beschreibung verständlich. Die beiden Cylinder (oder Kugeln) sind von ungleicher Masse und zwar im einfachen Verhältnisse, z. B. 1 : 2 stehend. Haben beide gleichen Abstand von der Achse, so fliegt stets die schwerere nach aussen, indem sie die leichtere nach sich zieht. Wählt man aber die Abstände verkehrt proportional den Massen, so halten sich die Fliehkräfte das Gleichgewicht, und die Körper bleiben auch bei raschester Rotation in ihren Abständen. Es ist damit erwiesen, dass die Fliehkraft bei gleicher Umlaufszeit *t* dem Product *rm* proportional ist.

Fig. 133.

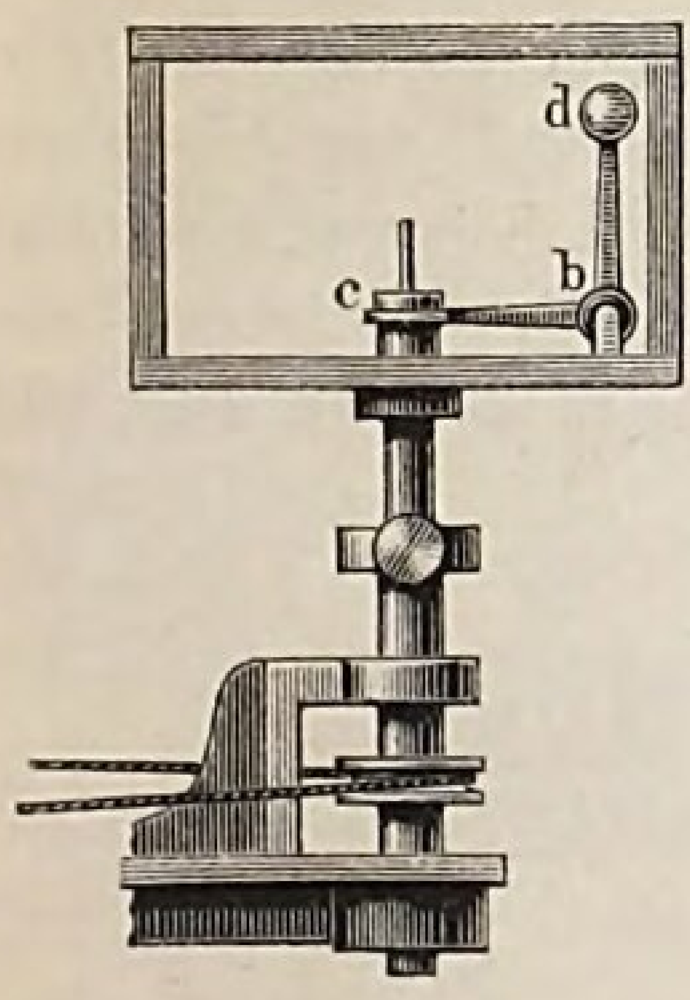


Entfernt man die kleinere Masse noch weiter von der Achse, so zieht sie die grössere nach sich. Dies beweist, dass dem grösseren Radius bei gleicher Umlaufszeit grössere Fliehkraft zukommt. Dasselbe lässt sich zeigen, indem man die in Fig. 133 *) abgebildete grössere Scheibe ohne die kleinere daneben stehende in ihren sechs Vertiefungen mit sechs gleich schweren Kugeln belegt. Beim langsam beschleunigten Drehen verlassen zuerst die äussersten Kugeln den Platz, zuletzt die innersten.

*) Die Abbildung dieses Apparates ist ebenfalls dem citirten Buche von A. Weinhold entnommen

Um zu zeigen, dass bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit und gleicher Masse die Fliehkraft grösser ist, wenn der Radius kleiner ist (Satz 5), wird die kleinere Scheibe aufgesetzt und mit der grösseren durch eine Schnur verbunden. Da die nun an den Rand aufgesetzten Kugeln sich unmittelbar über der Schnur befinden, haben sie gleiche peripherische Geschwindigkeit. Es werden dann die Kugeln der kleineren Scheibe zuerst abgeworfen.

Fig. 134.



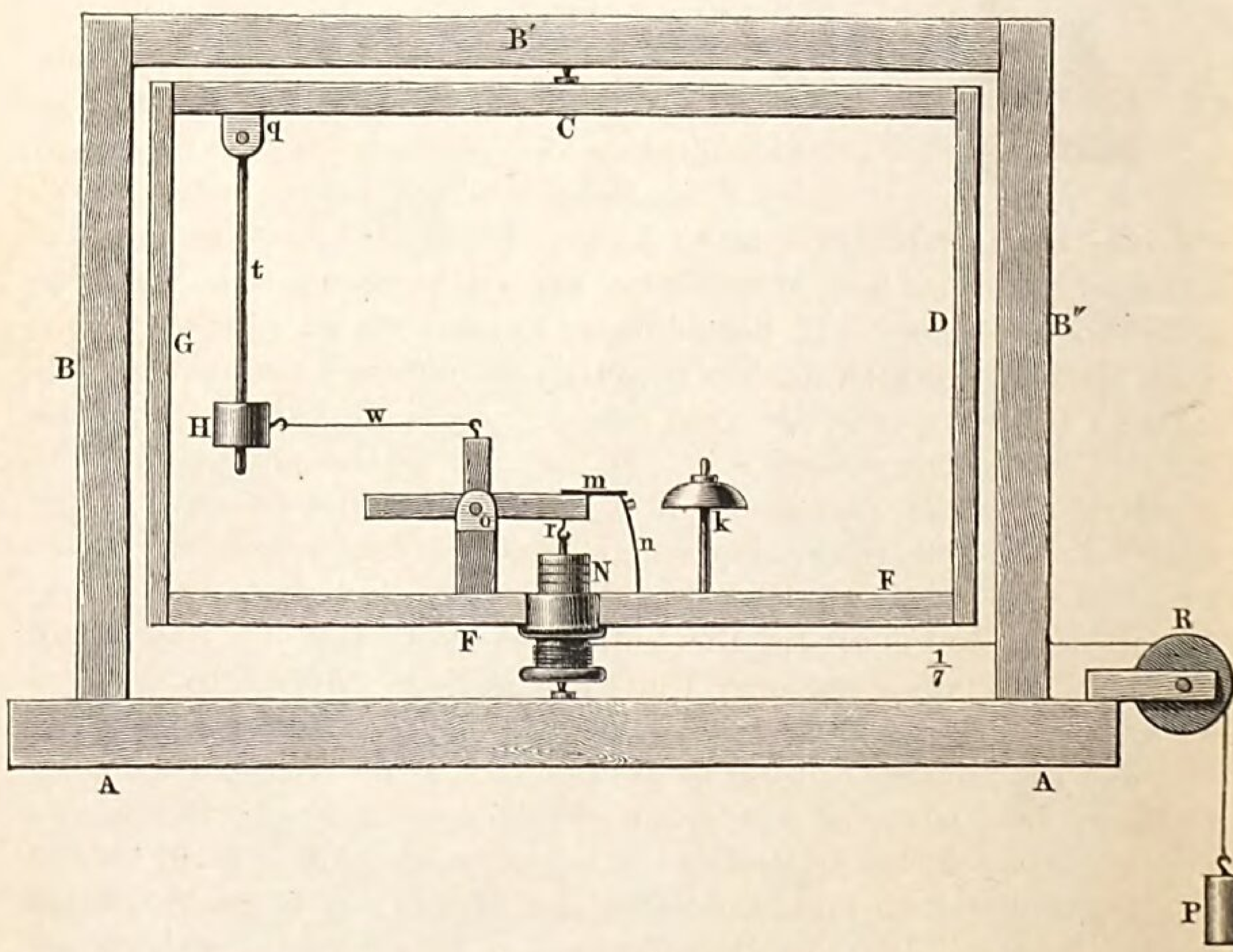
Dass endlich die Fliehkraft unter übrigens gleichen Umständen dem Quadrat der Umlaufszeit verkehrt proportional ist, lässt sich annäherungsweise mit Hülfe des Apparates Fig. 134 nachweisen. Innerhalb eines Rahmens, welcher, wie der vorige Apparat, auf die Schwungmaschine aufgesetzt werden kann, ist ein Winkelhebel $d\,b\,c$ angebracht, welcher bei b um eine horizontale Achse leicht drehbar ist. Bei d trägt er eine Metallkugel, bei c aber eine Metallplatte, auf welche verschiedene Gewichte aufgelegt werden können. Sobald dieser Apparat um seine Achse gedreht wird, strebt die Kugel d sich von derselben zu entfernen und die Gewichte bei c zu heben, was in der That erfolgt, sobald die Schwungkraft der Kugel d gross genug geworden ist. Nehmen wir an, das auf c gelegte Gewicht sei so justirt, dass die Kugel d an das Seitenbrett anschlägt, wenn das Schwungrad der Schwungmaschine einmal in der Secunde umgedreht wird, so wird bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit dasselbe erfolgen, wenn auf c so viel Gewicht gelegt wird, dass der Druck, mit welchem die Platte c auf ihrer Unterlage aufliegt, viermal so gross ist als vorher.

Der beschriebene Apparat ist zwar einfach, wirkt aber sehr ungenau. Genauere Resultate sind mit einem vor längerer Zeit von Schleiermacher construirten Apparate zu erhalten, welchen die Fig. 135 bis 139 in etwas vereinfachter Form darstellen. Auf einem 70 cm langen und 15 cm breiten Brette AA ist der Holzrahmen $BB'B''$ eingesetzt, welcher aus Leisten von quadratischem Querschnitt besteht. Die verticale Mittellinie dieses Rahmens bildet die Umdrehungsachse eines leichten Holzrahmens $CDFG$, dessen unterer Arm F in einem runden Holzstück eingesetzt ist, dessen unterer Theil einen Cylinder von ungefähr 3 cm Durchmesser bildet.

Dieser Cylinder ist mehrfach von einer Schnur umschlungen, welche durch eine Höhlung des Holzstabes B'' hindurchgehend über die Rolle R läuft und das 136 g schwere Gewicht P trägt. Lässt man den bis dahin in einer beliebigen Stellung festgehaltenen Rahmen $CDFG$ in einem bestimmten Momente los, so wird er mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit um seine verticale Achse umgedreht, indem das Gewicht P mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit herabsinkt.

An dem oberen Arm C des beweglichen Rahmens ist eine Gabel q von starkem Messingblech angeschraubt, welche in Fig. 136 von der Umdrehungsachse aus gesehen in 0,4 der natürlichen Grösse dargestellt ist. Die Messinggabel q trägt die Zapfenlager, innerhalb deren das beiderseits in Spitzen endigende Stahlstückchen s leicht drehbar ist; dieses Stahlstückchen s trägt einen gegen 2 mm dicken Eisendraht t, an welchem unten ein ungefähr 144 g schwerer Cylinder H von Eisen angeschraubt ist. Durch einen Draht w ist H mit einem hölzernen Winkelhebel verbunden, dessen horizontale Drehungsachse o in ähnlicher Weise in einer Messinggabel angebracht ist, wie das Stahlstückchen s, Fig. 136.

Fig. 135.



An dem horizontalen Arme dieses Winkelhebels ist bei r ein Häkchen eingeschraubt, an welchem das Gewicht N hängt, dessen Achse mit der Umdrehungsachse des Rahmens $CDFG$ zusammenfällt.

Die Einrichtung des Gewichtes N, dessen untere Fläche auf dem Holze aufsitzt, ist aus Fig. 137 zu ersehen. An einem oben zum Haken gebogenen Eisenstäbchen ist unten eine Messingscheibe befestigt, welche mit dem Stäbchen zusammen 36 g wiegt. Auf diese unterste Scheibe können noch drei andere aufgelegt werden, deren jede gleichfalls 36 g wiegt und mit einem Einschnitt versehen ist, wie Fig. 138 zeigt.

Im Ruhezustande hängt t vertical herunter; der eine Arm des Winkel-

hebels steht vertical, der andere horizontal und das Gewicht N sitzt auf dem Boden auf. Sobald aber der innere Rahmen unter dem Einfluss des Gewichtes P zu rotiren beginnt, nimmt die Schwungkraft des eisernen Cylinders H allmälig zu, bis sie endlich gross genug wird, um den Winkelhebel zu drehen und das Gewicht N zu heben.

Es gilt nun den Moment hörbar zu markiren, in welchem die Schwungkraft von H gerade hinreicht, um N zu heben. Es geschieht dies auf folgende Weise. Auf dem horizontalen Arme des Winkelhebels ist bei m ein Messingblättchen aufgeschraubt, an dessen äusserem Ende eine kleine Rinne eingefeilt ist, wie man Fig. 139 sieht, welche den Querschnitt des Messingblättchens stark vergrössert darstellt. Wird m durch Drehung des Winkelhebels etwas in die Höhe gehoben, so kann man das obere Ende des schwach federnden Stahlstreifens n aus seiner Gleichgewichtslage etwas zurückbiegen, in die fragliche Rinne einsetzen und dadurch die Feder in der etwas zurückgebogenen Stellung erhalten, welche unsere Figur zeigt. Nahe an dem oberen Ende der Feder n ist eine kleine Eisenkugel an derselben befestigt. Sobald nun in Folge der wachsenden Rotationsgeschwindigkeit die Schwungkraft von H gross genug geworden ist, um N zu heben, weil n ausgelöst und das an der Feder befestigte Eisenkügelchen schlägt an der Glocke K an.

Um den Versuch anzustellen, wird der drehbare Rahmen in eine solche Stellung gebracht, dass die Schnur mehrmals um den centralen Cylinder herumgeschlungen ist und das Gewicht P sich nahe unter der Rolle R befindet.

Fig. 136.

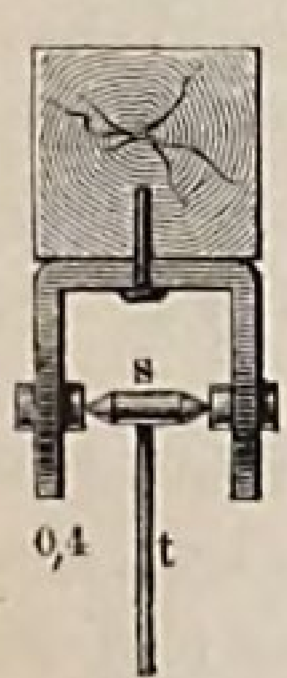


Fig. 138.



Fig. 137.

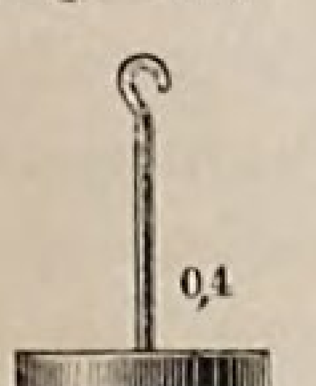


Fig. 139.



In dieser Stellung wird der Rahmen $CDFG$ mit der Hand festgehalten, um bei einem bestimmten Schlage eines in der Nähe aufgestellten, hörbar Secunden schlagenden Apparates losgelassen zu werden. Es werden nun die Secunden gezählt, welche vom Moment des Loslassens bis zu dem Moment vergehen, in welchem das Glöckchen ertönt. Dieser Zeit ist die Geschwindigkeit von H im Moment des Anschlages proportional.

Als bei r, Fig. 135, nur die sammt dem Stäbchen 36 g schwere Grundscheibe, Fig. 137, angehängt war, erfolgte der Anschlag 3 Secunden nach Beginn der Rotation.

Wird nun auf die Grundscheibe noch eines der 36 g schweren Gewichte, Fig. 138, aufgelegt, also N doppelt so schwer gemacht, als es beim ersten Versuch war, so muss auch die Schwungkraft von H 2 mal so gross, die Rotationsgeschwindigkeit $\sqrt{2}$ oder 1,4 mal so gross werden

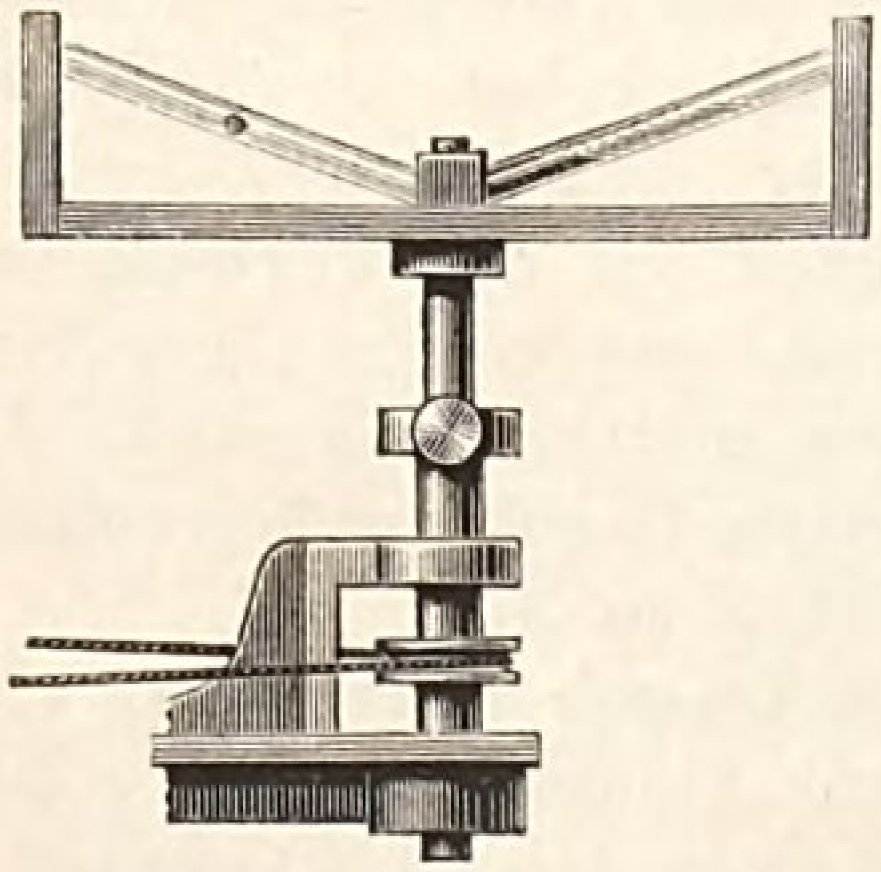
als vorher, wenn eine Hebung von N stattfinden soll, der Anschlag wird also 3 . 1,4 oder 4,2 Secunden nach Beginn der Rotation erfolgen.

Werden auf die Grundplatte zwei der Gewichte, Fig. 138, aufgelegt, so dass N dreimal so schwer ist als beim ersten Versuche, so ertönt das Glöcklein, wenn die Rotation $3 . \sqrt{3} = 3 . 1{,}73 = 5{,}2$ Secunden gedauert hat, also etwas nach dem fünften Secundenschlage.

Werden endlich drei der 36 g schweren Messingplatten aufgelegt, so dass N 4 mal so schwer ist als beim ersten Versuche, so erfolgt der Anschlag des Glöckleins, wenn die Rotationsgeschwindigkeit $\sqrt{4}$ also 2 mal so gross geworden ist, als im Moment des Anschlages beim ersten Versuche, also sechs Secunden nach Beginn der Rotation.

Der Fallraum des Gewichtes P beträgt in sechs Secunden ungefähr 6 dcm, der Apparat, Fig. 135, kann also auf einem Tische von gewöhnlicher Höhe aufgestellt werden. Es versteht sich von selbst, dass die Umdrehungsachse des Apparates genau vertical stehen, dass sich also der drehbare Rahmen nach Abhängung des Gewichtes P im Zustande des indifferenten Gleichgewichts befinden muss.

Fig. 140.



Wenn das Gewicht N 144 g beträgt, so muss die Rotation schon ziemlich schnell werden, um die Hebung von N zu bewirken, so dass sich der Luftwiderstand bereits geltend macht und der Anschlag nicht genau beim sechsten Secundenschlage, sondern etwas später erfolgt.

Ausser den beschriebenen Experimenten werden mit der Schwungmaschine meist noch folgende Versuche angestellt.

Der Apparat Fig. 140 zeigt zwei Glasröhren, welche, an beiden Enden zusammengeschmolzen oder auch nur mit Kork verschlossen, in einem passenden auf die Schwungmaschine aufzusetzenden Gestelle so befestigt sind, dass die nach aussen gekehrten Enden höher stehen als die nach innen gekehrten. Die eine dieser Röhren enthält eine kleine Kugel von Elfenbein oder schwerem Holz, die andere ist zum Theil mit Quecksilber und gefärbtem Wasser gefüllt. Sobald der Apparat in Rotation versetzt wird, läuft die Kugel in der einen Röhre in die Höhe, während in der anderen das Quecksilber die höchste Stelle in der Röhre einnimmt, worauf dann das Wasser und zu unterst die noch in der Röhre enthaltene Luft folgt.

Füllt man aber die Röhren mit Wasser und setzt ausserdem ein paar Kugeln ein, welche leichter sind als Wasser, also im Ruhezustande die äussersten höchsten Stellen der Röhren einnehmen, so werden dieselben während der Rotation durch die stärkere Fliehkraft des Wassers verdrängt und gegen die Achse geschoben.

Das Aufsteigen von Flüssigkeiten unter dem Einflusse der Schwungkraft lässt sich auch sehr nett mit dem Apparate Fig. 141 zeigen. Er besteht aus einem möglichst grossen Petroleum-Lampenglas, welches mit einer zum Aufschrauben auf die Schwungmaschine dienenden Fassung versehen ist. Eine in das Gefäss gegossene Flüssigkeit, welche im Ruhezustande den Boden bedeckt, steigt bei hinlänglich rascher Rotation in den Bauch des Gefässes, um hier einen Ring zu bilden, welcher nach innen mit einer verticalen Cylinderfläche begrenzt ist. Enthält das Gefäss Quecksilber und gefärbtes Wasser, so bildet das Quecksilber einen die weiteste Stelle des Gefässes einnehmenden silberglänzenden

Fig. 141.

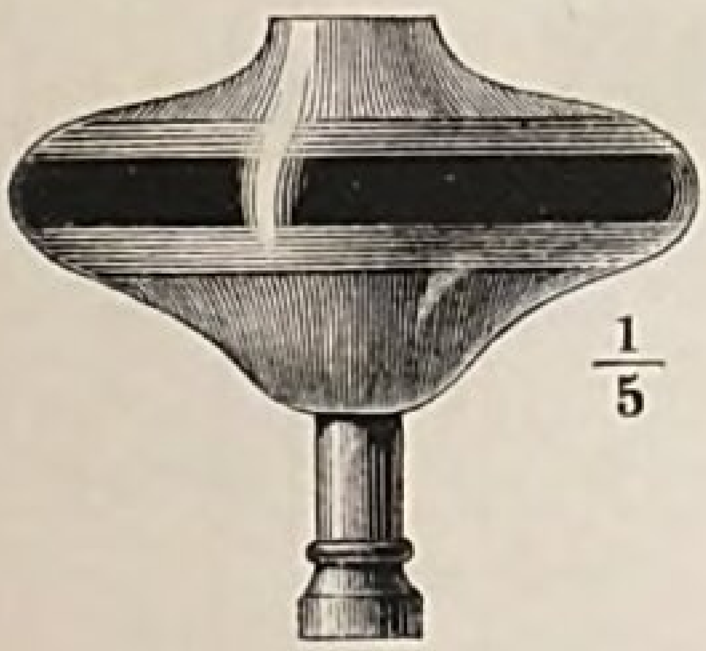
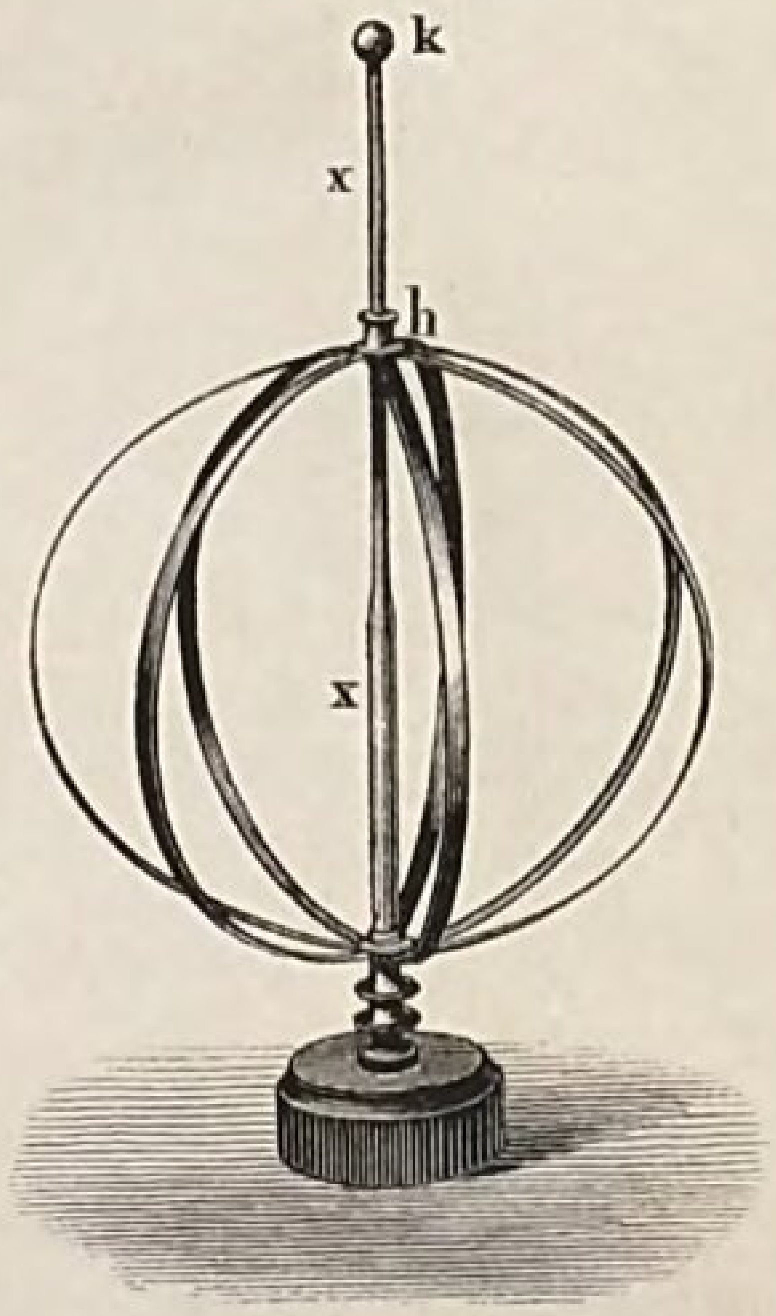


Fig. 142.



Ring, welcher oben und unten von dem dunkleren Wasserringe eingefasst erscheint.

Der in Fig. 142 abgebildete Apparat dient, um zu erläutern, wie die Abplattung der Erde eine Folge ihrer Achsendrehung ist.

An dem unteren Ende der eisernen Achse x, welche auf die Schwungmaschine aufgesetzt wird, sind mehrere elastische Streifen von Messingblech mittelst Charnieren befestigt. Oben laufen diese elastischen Streifen wieder in einer leicht auf der Achse x verschiebbaren Hülse h zusammen. Im Zustande der Ruhe strecken sich die Federn so, dass die Hülse h an dem Knopfe k ansteht; sobald aber der Apparat rasch um die Achse x rotirt, nehmen die Metallstreifen die in unserer Figur angedeutete Gestalt an, indem alle Theilchen derselben sich möglichst weit von der Rotationsachse zu entfernen streben. Je schneller die Umdrehung, desto mehr werden die Streifen gekrümmt, desto tiefer wird also die Hülse h herabgezogen.

Nach Weinhold lässt sich die Abplattung recht schön an einer Kugel aus weichem Thon von circa 16 cm Durchmesser (circa 4,2 kg Gewicht) zeigen, welche man in der durch Fig. 143 ersichtlichen Weise

mittelst zweier Bandschlingen an die Achse der Schwungmaschine anhängt. Die Abplattung kann bis zu etwa $^4/_5$ des Aequatordurchmessers getrieben werden; bei rascherem Drehen zerreisst die Thonkugel.

Fig. 143.

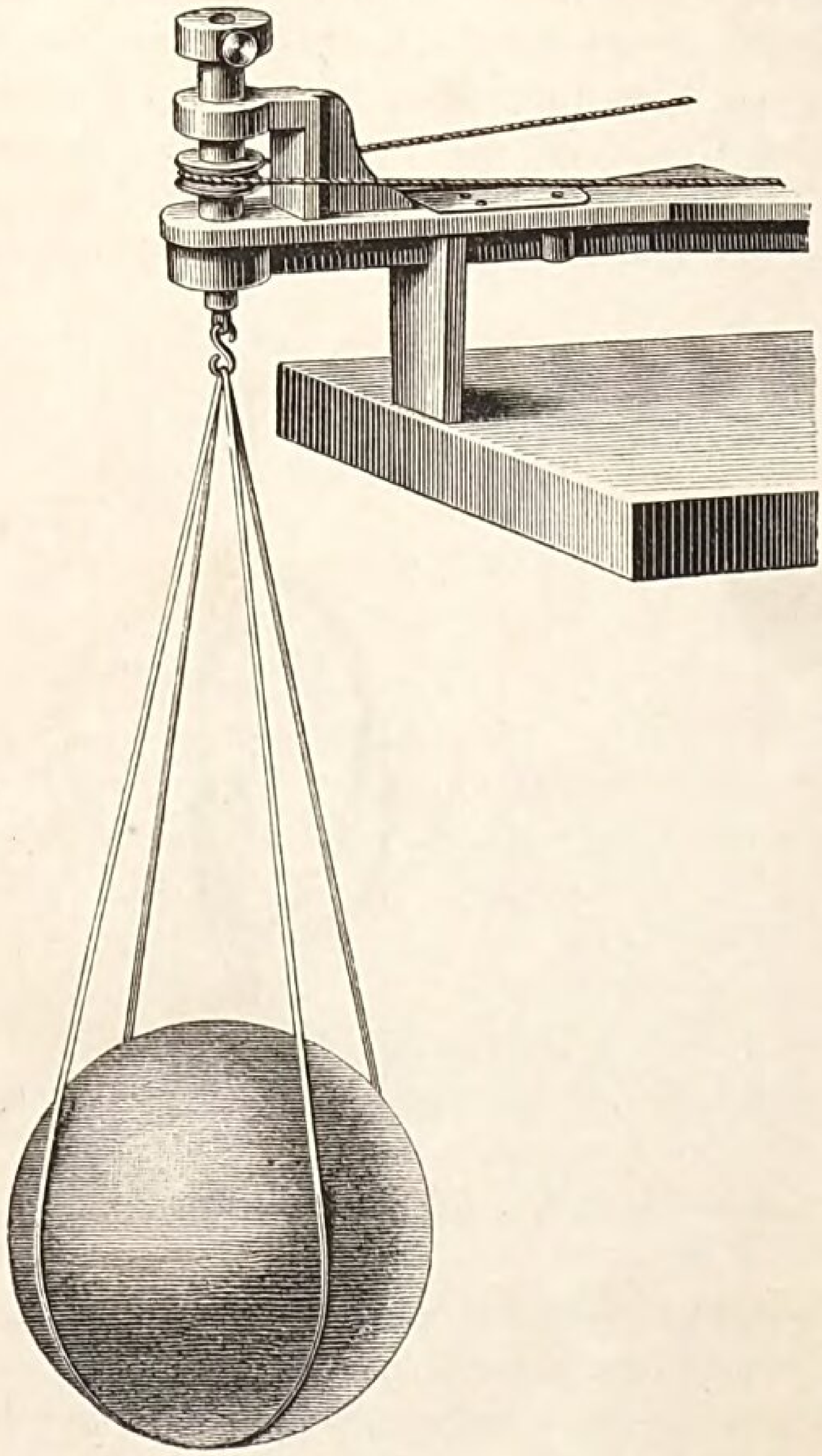
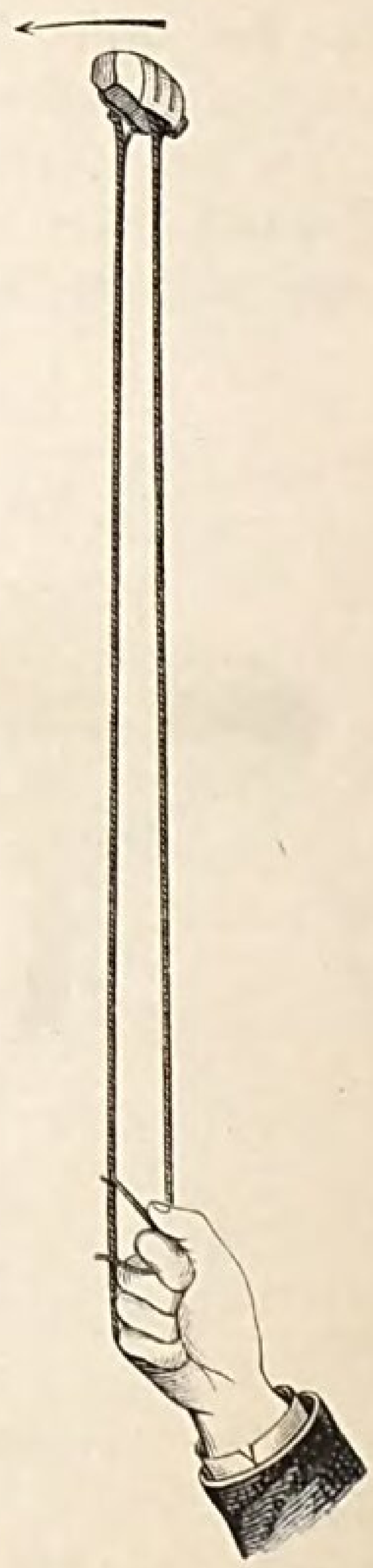


Fig. 144.



Die Schwungkraft tritt überall da auf, wo eine Rotation um eine feste Achse stattfindet und die einzelnen Theilchen auf irgend eine Weise verhindert sind, sich von jener Achse zu entfernen, also z. B. bei einem Schwungrade, einem Mühlsteine u. s. w. Bei einer Schleuder, wie sie Fig. 144 dargestellt ist, sieht man in der That den Stein in tangentialer Richtung fortfliegen, sobald die Hand das eine Schnurende fahren lässt, der Stein also nicht mehr zurückgehalten wird. Bei einem rasch umgedrehten Schleifsteine fahren die Wassertropfen in tangentialer Richtung weg, sobald die Schwungkraft grösser wird als die Adhäsion des Wassers zum Stein.

Wenn man ein Gefäss mit Wasser an einer Schnur befestigt und es mit der Hand in verticaler Ebene umschwenkt, so fliesst das Wasser

nicht aus, selbst wenn das Gefäss an der obersten Stelle seiner Kreisbahn sich befindet, wo der Boden nach oben und die Oeffnung nach unten gerichtet ist, weil unter diesen Umständen die Schwungkraft grösser ist als die Schwerkraft.

Dass die Fliehkraft eine bedeutende Stärke erlangen kann, mag folgendes Zahlenbeispiel lehren. Ein Stein von 1 kg Masse werde an einer Schnur von 1 m pro Secunde 2 mal im Kreise gedreht.

Nach 2) ist dann die Fliehkraft gleich dem Zuge von

$$4{,}024 \frac{1 \times 1}{(0{,}5)^2} = 16{,}096 \text{ kg}.$$

Mit Erfolg hat man in neuerer Zeit die Schwungkraft in der Industrie benutzt, z. B. in Zuckerfabriken, um den Zucker vom Syrup zu reinigen, in Färbereien, um Garne und Zeuge schnell zu trocknen etc.

Babo hat die Schwungkraft auch bei chemischen Arbeiten in Anwendung gebracht, namentlich um Krystalle von syrupartiger schmieriger Mutterlauge zu trennen und um das Absetzen von Niederschlägen zu beschleunigen, welche unter den gewöhnlichen Umständen sehr lange suspendirt bleiben. Wenn nämlich die beschleunigende Kraft, mit welcher sich die geschwungene Flüssigkeitsmasse von der Rotationsachse zu entfernen strebt, n mal so gross ist als die beschleunigende Kraft der Schwere, so ist auch die Differenz zwischen der Centrifugalkraft der Wasserpartikelchen und der Centrifugalkraft der suspendirten Theilchen n mal so gross als die Differenz der specifischen Gewichte des Wassers und des suspendirten Körpers, es muss also auch eine rasche Ausscheidung erfolgen, wenn der Werth von n gross genug ist.

Die ungleichmässig veränderliche Bewegung; Bewegung in Folge einer Kraft, die sich proportional der Zeit ändert. 41 Bei den bisher betrachteten Bewegungsarten war entweder die Geschwindigkeit constant (gleichförmige Bewegung) oder die Beschleunigung constant (gleichförmig veränderliche Bewegung). Wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, so ist die Bewegung eine ungleichmässig veränderliche. Bei dieser Bewegung kann nur mehr von einer „momentanen Beschleunigung" die Rede sein, deren Definition in analoger Weise durchzuführen ist, wie die Definition der momentanen Geschwindigkeit bei der gleichmässig veränderlichen Bewegung. Wir verstehen demnach unter momentaner Beschleunigung jenen Grenzwerth, dem wir uns nähern, wenn wir in dem Verhältniss zwischen Geschwindigkeitszunahme und Zeitdauer diese beiden Grössen immer mehr verkleinern. Man drückt dies wohl auch so aus, dass man sagt, die momentane Beschleunigung sei das Verhältniss einer unendlich kleinen Geschwindigkeitszunahme zur zugehörigen unendlich kleinen Zeit-

dauer*). Am klarsten wird die Vorstellung der momentanen Beschleunigung aber folgendermaassen gewonnen. Man denke sich das Bewegliche von jenem Zeitmoment an, für welches die momentane Beschleunigung gesucht wird, mit gleichmässig veränderlicher Bewegung, also ohne weitere Aenderung der Beschleunigung, eine Secunde lang fortschreiten. Die in dieser Zeit eingetretene Aenderung der Geschwindigkeit ist dann die gesuchte Beschleunigung.

Der einfachste Fall der ungleichmässig beschleunigten Bewegung ist offenbar jener, bei welchem die Beschleunigung in gleichen Zeiten um gleiche Grössen zunimmt.

Wir haben nun zu zeigen, wie man bei einer solchen Bewegung die in irgend einer Zeit erreichten Entfernungen, sowie die in irgend einer Zeit erlangten momentanen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnen kann.

Wir wollen dabei, um alle Einzelfälle umfassende Ausdrücke zu erhalten, voraussetzen, dass das Bewegliche im Zeitmomente $= 0$, wo wir die Secunden zu zählen anfangen, bereits eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn, eine Anfangsgeschwindigkeit und eine Beschleunigung besitze.

Es bedeute also:

ψ die Zunahme der Beschleunigung per Secunde,
φ die momentane Beschleunigung zur Zeit t,
φ_0 „ „ „ „ „ 0 (Anfangsbeschleunigung),
v „ „ Geschwindigkeit zur Zeit t,
v_0 „ „ „ „ „ 0 (Anfangsgeschwindigkeit),
s die Entfernung des Beweglichen vom Nullpunkt der Bahn zur Zeit t,
s_0 die Entfernung des Beweglichen vom Nullpunkte der Bahn zur Zeit 0 (Anfangsstellung).

Wir behaupten nun, dass dann die Werthe von s, v und φ gegeben seien durch die Gleichungen:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0 t^2}{2} + \frac{\psi t^3}{6} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi t^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Dabei können die vorkommenden Grössen auch gleich Null oder negativ sein. Ein negatives t würde bedeuten t Secunden vor dem Zeitmoment, von dem an die Secunden gezählt wurden. Ein negatives s

*) In der analytischen Mechanik wird dieses Verhältniss mit $\varphi = \frac{dv}{dt}$ bezeichnet. Da nach Anmerkung S. 79 $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist $\varphi = \frac{d\frac{ds}{dt}}{dt}$, wofür $\frac{d_2 s}{dt^2}$ gesetzt werden kann. Dieses Verhältniss heisst der zweite Differentialquotient von s nach t.

oder s_0 bedeutet eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn nach rückwärts (z. B. nach links, wenn die positiven Entfernungen nach rechts gerechnet werden). Ein negatives v bedeutet Geschwindigkeit nach links (ein positives v Geschwindigkeit nach rechts). Ein negatives φ bedeutet Beschleunigung nach links (also entweder Zunahme der Geschwindigkeit nach links oder Abnahme jener nach rechts). Endlich ein negatives ψ eine Abnahme einer positiven Beschleunigung (oder Zunahme einer negativen).

Den Beweis für obige Formeln können wir auf elementarem Wege*) etwa folgendermaassen führen. Sind t und t' zwei auf einander folgende Zeitmomente, so sind nach 1) die zugehörigen Entfernungen s und s':

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0}{2} t^2 + \frac{\psi}{6} t^3$$

$$s' = s_0 + v_0 t' + \frac{\varphi_0}{2} t'^2 + \frac{\psi}{6} t'^3$$

woraus der zurückgelegte Weg durch Subtraction gefunden wird:

$$s' - s = v_0 (t' - t) + \frac{\varphi_0}{2} (t'^2 - t^2) + \frac{\psi}{6} (t'^3 - t^3)$$

Da dieser Weg in der Zeit $t' - t$ zurückgelegt wird, so ist deren Verhältniss:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = v_0 + \frac{\varphi_0}{2} (t' + t) + \frac{\psi}{6} (t'^2 + t' t + t^2)$$

Dieses Verhältniss geht über in den Werth der momentanen Geschwindigkeit v zur Zeit t, wenn wir t' immer näher dem t setzen, für den Grenzwerth $t' = t$ wird also:

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi}{2} t^2$$

Damit ist also bereits erwiesen, dass, wenn für die momentane Geschwindigkeit v die Gleichung 2) gilt, dann für die Entfernung s die Gleichung 1) gelten muss, da wir von dieser auf jene geführt wurden.

Für einen Zeitpunkt t' ist die zugehörige momentane Geschwindigkeit v' gegeben durch

$$v' = v_0 + \varphi_0 t' + \frac{\psi}{2} t'^2$$

Demnach ist die Zunahme der momentanen Geschwindigkeit gleich:

$$v' - v = \varphi_0 (t' - t) + \frac{\psi}{2} (t'^2 - t^2)$$

*) In der Analytik erhält man aus dem Ausdruck für s den für v durch einmaliges, den für φ durch zweimaliges Differenziren. Die Berechnung des v und s aus ψ und den Anfangswerthen φ_0, v_0 und s_0 geschieht durch Integriren.

Dividiren wir diese Zunahme der Geschwindigkeit durch die Zunahme der Zeit $t' - t$, in welcher sie stattgefunden hat, so bekommen wir:

$$\frac{v' - v}{t' - t} = \varphi_0 + \frac{\psi}{2}(t' + t)$$

Dieser Ausdruck geht über in den Werth für die momentane Beschleunigung φ für die Zeit t, wenn wir t' immer näher an t nehmen, bis es zuletzt $= t$ geworden ist. Dann ist also:

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t$$

Wir erhalten also aus Gleichung 2) die Gleichung 1). Diese letztere folgt aber unmittelbar aus der Definition von ψ. Ist nämlich ψ die Zunahme der Beschleunigung per Secunde, so ist ψt die Zunahme in t Secunden und diese addirt zum Anfangswerth φ_0 muss den Werth der Beschleunigung zur Zeit t geben.

Die Gleichungen 1), 2) und 3) enthalten die Gleichungen für die gleichförmige und für die gleichmässig veränderte Bewegung als specielle Fälle in sich. Man erhält die letztere, indem man $\psi = 0$ setzt, die erstere, indem man auch $\varphi_0 = 0$ setzt. Nimmt man $s_0 = 0$, so beginnt die Bewegung zur Zeit 0 im Anfangspunkte der Bahn, setzt man $v_0 = 0$, so beginnt die Bewegung von der Ruhe aus, also ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Eine ungleichmässig veränderliche Bewegung entsteht durch eine veränderliche Kraft. Soll die Beschleunigung in gleichen Zeiten um Gleiches wachsen oder abnehmen, so muss die Kraft ebenfalls proportional der Zeit, d. i. gleichmässig veränderlich sein.

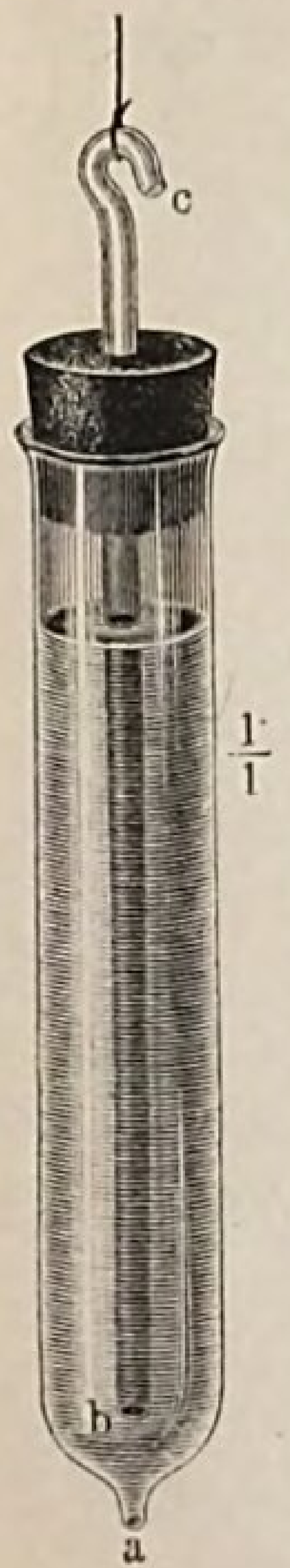
Da unseres Wissens bis jetzt kein Apparat existirt, der eine derartige Bewegung als Vorlesungsexperiment vorzuführen gestattet, so wollen wir hier eine Methode beschreiben, welche mittelst der Atwood'schen Fallmaschine dieses Ziel erreichen lässt.

Es handelt sich dabei offenbar nur darum, das konstante Uebergewicht an der Fallmaschine durch ein veränderliches zu ersetzen und zwar soll diese Veränderung proportional der Zeit (gleichmässig) vor sich gehen.

Man ersetzt das vordere Schälchen durch ein kleines Gefäss aus Glas, Fig. 145, das man sich aus einer abgekürzten Proberöhre herstellen kann. Am Boden desselben ist eine feine Oeffnung a, die obere Mündung ist durch einen Kork geschlossen, durch den ein an beiden Enden offenes Glasröhrchen mit Reibung hindurchgeht. Das obere Ende c ist hakenförmig umgebogen, das untere b reicht nahe an die Ausflussöffnung a hinan. Wird dieses Gefäss mit Wasser gefüllt (indem man es mit der Oeffnung c in Wasser taucht und bei a saugt), so fliesst nachher bei a das eingefüllte Wasser allmälig und, wie später bei Erklärung der Mariotte'schen Flasche gezeigt werden soll, mit constanter Geschwindigkeit aus. Diese Geschwindigkeit kann überdies durch Veränderung des Abstandes ab innerhalb weiter Grenzen regulirt werden.

Bei dem hier zu beschreibenden Versuche enthielt das Gläschen etwas über 20 g Wasser und liess per Secunde 1 g desselben ausfliessen. Dasselbe wurde (vorläufig bei a verschlossen) bei d an den Faden angebunden; zum Auffangen des ausfliessenden Wassers wurde eine Schale untergestellt.

Fig. 145.



Auf der Rückseite der Säule Fig. 146 wurde ein cylindrisches Gewicht m und ein stäbchenförmiges Abhebegewicht p angebracht. Oberhalb des letzteren war am Nullpunkt der Scala ein durchbohrtes Tischchen d' befestigt, welches das Gewicht m und p hinderte, höher zu steigen. Ein ähnliches Tischchen mit solcher Oeffnung in der Mitte, dass m durchgelassen, hingegen p zurückgehalten werden musste, war weiter unterhalb bei d'', d''', d^{V} zu befestigen.

Das stäbchenförmige Gewicht p wog 10 g, das Gewicht $m + p$ wog etwas weniger als das gefüllte Gläschen und wurde daher am Anfange des Versuches nach oben gezogen.

Die Gesammtmasse des Rades sammt den angehängten Theilen war so gross, dass ein Uebergewicht von 1 g eine Beschleunigung von 1,2 cm hervorbrachte.

Bei einem ersten Versuche wurde nun das untere Tischchen d'' ganz entfernt. Das Gläschen zeigte mit der Marke d an den Scalenpunkt 100. Sobald die Oeffnung bei a frei gemacht wurde, blieben Gläschen und Gegengewichte so lange ruhig hängen, bis durch das Ausfliessen des Wassers das Gleichgewicht hergestellt wurde. Im nächsten Moment begann sich auf der Rückseite ein Uebergewicht einzustellen, welches von Secunde zu Secunde um 1 g zunahm, also auch eine von Secunde zu Secunde um 1,2 cm wachsende Beschleunigung des Gläschens nach aufwärts erzeugen musste. Die Bewegung ist also jedenfalls eine solche, welche durch die Gleichung:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0 t^2}{2} + \frac{\psi t^3}{6}$$

dargestellt werden kann und zwar haben darin die constanten Grössen folgende Werthe:

$$s_0 = 100,\ v_0 = 0,\ \varphi_0 = 0,\ \psi = -1,2$$

Wir rechnen nämlich die Wege des Gläschens nach abwärts positiv, weil die Bezifferung der Scala nach abwärts steigt. Da die Beschleunigung nach aufwärts per Secunde um 1,2 cm wächst, so müssen wir

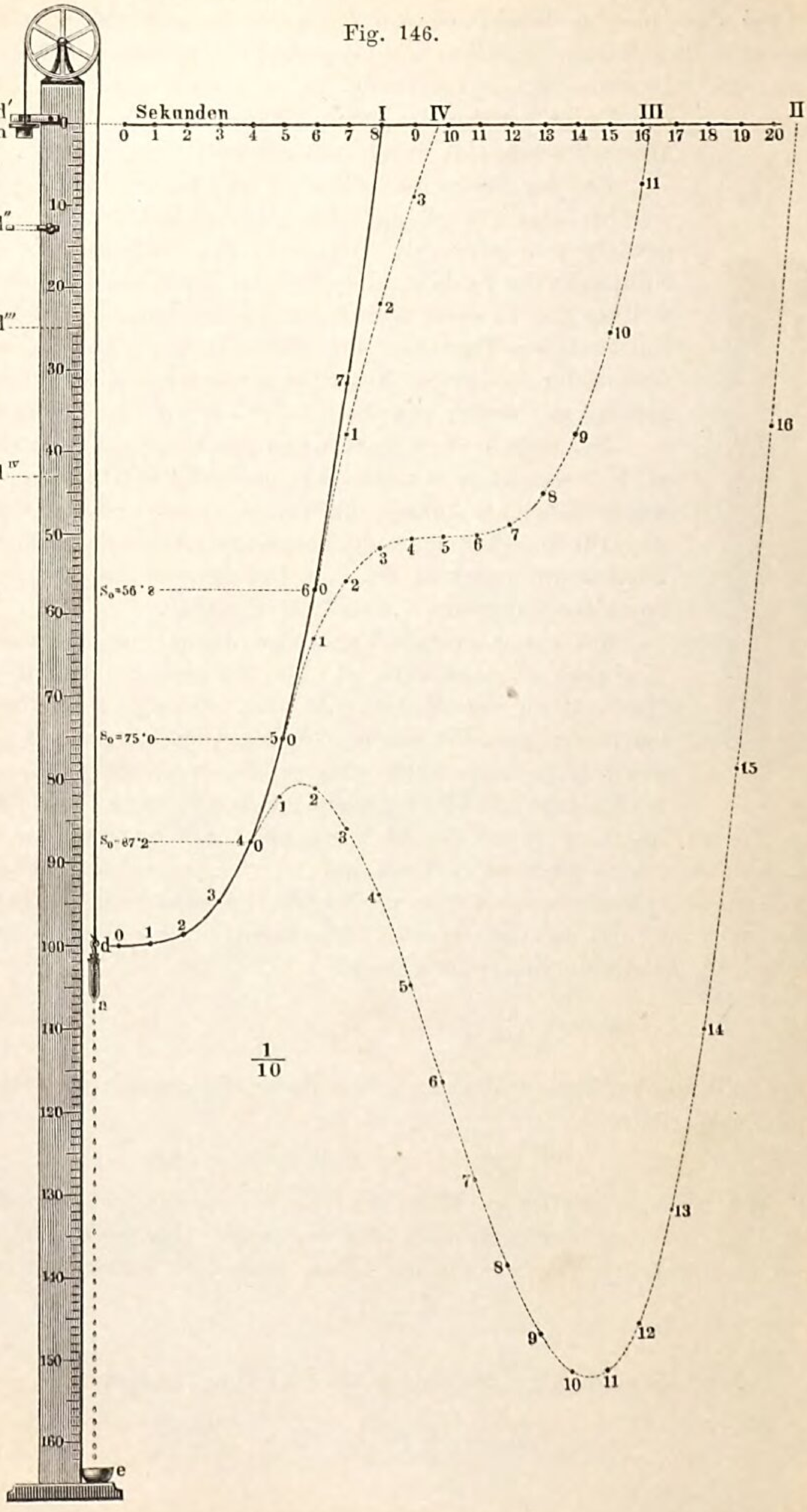
$$\psi = -1,2$$

setzen.

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung, so kommt:

$$s = 100 - \frac{1,2}{6} t^3 = 100 - 0,2\, t^3$$

Fig. 146.


Sekunden
I
IV
III
II
$S_0 = 56 \cdot 8$
$S_0 = 75 \cdot 0$
$S_0 = 87 \cdot 2$
$\frac{1}{10}$

ebenso findet man die Gleichung für die momentane Geschwindigkeit:

$$v = -0{,}6\,t^2$$

die numerische Rechnung ergiebt:

für $t = 1''$	$s = 100 - 0{,}2 = 99{,}8$	$v = -0{,}6$
2	$100 - 1{,}6 = 98{,}4$	$-2{,}4$
3	$100 - 5{,}4 = 94{,}6$	$-5{,}4$
4	$100 - 12{,}8 = 87{,}2$	$-9{,}6$
5	$100 - 25{,}0 = 75{,}0$	$-15{,}0$
6	$100 - 43{,}2 = 56{,}8$	$-21{,}6$
7	$100 - 68{,}6 = 31{,}4$	$-29{,}4$
8	$100 - 145{,}8 = -45{,}8$	$-38{,}4$

Nach diesen Werthen für s ist in Fig. 146 die Wegcurve I gezeichnet. Die Secunden sind auf der Abscissenachse (am oberen Rande) aufgetragen, ausserdem sind sie auf der Oberseite der Curve derselben beigeschrieben. Es ist dies eine Curve dritter Ordnung von der Gleichung $y = A - D x^3$, in welcher A und D die Werthe haben, die wir mit s_0 und ψ bezeichnet haben. In sieben Secunden steigt das Gläschen um 68,6 cm, um ebenso viel sinkt das Gewicht $m + p$; bringt man daher rückwärts an dem Scalenpunkte 68,6 ein undurchbrochenes Tischchen an, so muss mit dem Secundenschlage sieben der Anschlag erfolgen *). Dieser Umstand kann benutzt werden, um durch den Versuch auszuprobiren, wie gross ψ ist, oder wie man die Gesammtmasse zu reguliren hat, damit ein beabsichtigter Werth von ψ herauskomme.

Bei einem zweiten Versuche wurde wie früher verfahren, jedoch vorher ein durchbrochenes Tischchen an die Stelle d'' bei Scalenpunkt 87,2 befestigt. Bis dahin steigt bei dem beschriebenen Versuche das Gläschen in vier Secunden und kommt mit der Geschwindigkeit $v = -9{,}6$ daselbst an. In diesem Moment ist die erlangte Beschleunigung $\varphi = -4\,\psi = -4{,}8$ cm. Wird nun in demselben Moment das Gewicht $p = 10$ g abgehoben, so wird dadurch dem Gläschen eine positive Beschleunigung $\varphi = 12$ hinzugefügt, so dass es von da an eine Anfangsbeschleunigung $\varphi_0 = 12 - 4{,}8 = +7{,}2$ besitzt.

Für die nun erfolgende Bewegung, für welche wir die Zeiten von Neuem mit Null zu zählen beginnen, haben daher die Constanten der Gleichung:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0 t^2}{2} + \frac{\psi t^3}{6}$$

*) Das Secundenpendel wird bei diesen Versuchen nicht zur Auslösung der Bewegung benutzt. Man lässt das Pendel fallen, sobald man bemerkt, dass die Bewegung des Gläschens anfängt und beginnt die Zählung in diesem Moment mit Null.

Die Werthe:

$$s_0 = 87{,}2,\ v_0 = -9{,}6,\ \varphi_0 = +7{,}2,\ \psi = -1{,}2$$

Es ist also:

$$s = 87{,}2 - 9{,}6\,t + 3{,}6\,t^2 - 0{,}2\,t^3$$

ferner:

$$v = -9{,}6 + 7{,}2\,t - 0{,}6\,t^2$$

$$\varphi = 7{,}2 - 1{,}2\,t$$

Daraus ergiebt die numerische Rechnung:

für $t =$ 1	$s =$ 81,0
2	80,8
3	85,4
4	95,6
5	104,2
6	116,0
7	127,8
8	138,4
9	146,6
10	151,2
11	151,0
12	145,0
13	131,4
14	109,6
15	78,2
16	36,0
17	18,2

Diese Werthe sind zur Construction der Wegcurve II in Fig. 146 benutzt worden. Man ersieht daraus, dass die Bewegung zuerst nach aufwärts sich fortsetzt, dann nach abwärts umkehrt, nach einiger Zeit nochmals umkehrt, um dann immer rascher nach aufwärts zu gehen.

Um die Scalenpunkte zu finden, in welchen die Umkehr erfolgt, brauchen wir nur die Zeitpunkte t zu berechnen, in welchen die Geschwindigkeit $v = 0$ wird. Wir setzen also:

$$0 = -9{,}6 + 7{,}2\,t - 0{,}6\,t^2$$

die Gleichung führt zu

$$t = 6 \pm \sqrt{20}$$

woraus die zwei Werthe hervorgehen:

$$t' = 1{,}53$$

$$t'' = 10{,}47$$

Die erste Umkehr erfolgt also nach ungefähr $1\frac{1}{2}$ Secunden, die zweite nach $10\frac{1}{2}$ Secunden.

Setzt man diese in die Gleichung für s, so findet man die Umkehrpunkte

$$s' = 80{,}2$$
$$s'' = 151{,}75$$

Der Versuch bestätigt diese Resultate, abgesehen von den Abweichungen, welche durch die Reibung hervorgerufen werden*). Auf alle Fälle gelingt es leicht, den qualitativen Verlauf der Bewegung zur Anschauung zu bringen.

Bei einem dritten Versuche ändern wir nur die Stellung des durchbrochenen Tischchens, welches wir nach d''' an den Scalenpunkt 25 setzen. Das Uebergewicht p wird dann statt nach $4''$ erst nach $5''$ abgehoben, wie man aus der Tabelle für die s aus dem ersten Versuche entnehmen kann, da das Gläschen dann bei 75 steht. Aus der zugehörigen Tabelle für die Werthe von v entnimmt man $v = -15$ cm. Das φ ist am Ende der fünften Secunde $= -1{,}2 \times 5 = -6$. Kommt nun durch Abheben des Gewichtes p wiederum die positive Beschleunigung 12 hinzu, so wird die von diesem Moment an stattfindende Anfangsbeschleunigung $\varphi_0 = 12 - 6 = +6$ cm. Wir haben demnach:

$$s_0 = 75,\ v_0 = -15,\ \varphi_0 = +6,\ \psi = -1{,}2$$

folglich:

$$s = 75 - 15\,t + 3\,t^2 - 0{,}2\,t^3$$
$$v = -15 + 6\,t - 0{,}6\,t^2$$

Man berechnet für s die Werthe:

für $t = 1$	$s = 62{,}8$
2	55,4
3	51,4
4	50,2
5	50,0
6	49,8
7	48,4
8	44,6
9	37,2
10	25,0
11	6,8

Um allfällige Umkehrpunkte aufzusuchen, berechnen wir die Zeit t, für welche $v = o$ wird, man findet aus:

$$o = -15 + 6\,t - 0{,}6\,t^2$$
$$t = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5$$

*) Strenge genommen wäre auf den Umstand Rücksicht zu nehmen, dass die bewegte Gesammtmasse durch das Ausfliessen kleiner wird, was die Grösse von φ und ψ beeinflusst. Dieser Einfluss ist aber nicht merklich; ebenso kann die Einwirkung der beschleunigten Bewegung auf die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers vernachlässigt werden.

Wir erhalten also diesmal nur Einen Werth für t. Im Momente des fünften Secundenschlages (vom Abheben des p an) ist die Geschwindigheit momentan $= 0$, aber vorher und nachher ist sie nach aufwärts gerichtet (negativ). Die Wegcurve III, Fig. 146, lässt den Verlauf der Bewegung übersehen. Will man dieselbe bis an ihr oberes Ende vor sich gehen lassen, so muss man das auf das Tischchen abgelegte Uebergewicht p fortnehmen, bevor es wieder aufgenommen wird.

Lässt man in einem vierten Versuche das Abheben erst nach 6″ eintreten (wozu das Tischchen auf 43,2 gestellt werden muss), so beschreibt das Gläschen von $s_0 = 56,8$ an die durch die Wegcurve IV, Fig. 146, dargestellte Bewegung. Die Geschwindigkeit wird nicht mehr $= 0$, sondern nimmt nur anfangs ab, um später wieder zuzunehmen. Das Experiment zeigt aber nur den Anfang dieser Bewegung.

42 **Bewegung in Folge einer Kraft, welche sich proportional dem Wege verändert; schwingende oder harmonische Bewegung.** Eine besonders wichtige Art der ungleichmässig veränderlichen Bewegung ist jene, welche zu Stande kommt durch eine Kraft, deren Stärke an jedem Punkte der Bahn proportional der erlangten Entfernung von einem als Ruhepunkt bezeichneten Punkte ist. In letzterem Punkte selbst ist keine Kraft vorhanden.

Eine solche Bewegung kann auf mehrfache Weise hervorgebracht werden. Es dürfte für das Verständniss vortheilhaft sein, wenn wir auch diese Bewegung zuerst an der Atwood'schen Fallmaschine demonstriren, da hierdurch ihr Verhältniss zu den früheren in klares Licht gesetzt wird.

Zu den gewöhnlichen Fallversuchen, also zur Hervorbringung einer gleichmässig beschleunigten Bewegung, giebt man dem Uebergewicht eine constante Grösse. Zur Erzeugung der im vorigen Paragraphen beschriebenen Bewegung wendeten wir ein Uebergewicht an, welches proportional mit der Zeit sich änderte.

Diesmal soll das Uebergewicht proportional dem zurückgelegten Wege sich ändern. Wir erreichen dies am einfachsten durch die in Fig. 147 angedeutete Anordnung. Ueber die Rolle R ist ein Faden gelegt, der an beiden Enden gestielte Gewichtchen (Schälchen) p, p' trägt. Auf der einen Seite ist dann überdies unter dem Gewichtchen noch ein feines Metallkettchen $a\,a'$ angehängt, welches bei den später zu erwähnenden Versuchen eine Länge von 100 cm und ein Gewicht von 17,2 g besitzen mag. Beim Theilstrich 100 sind zwei Tischchen d, d' angesetzt. Die Masse von p' ist so regulirt, dass durch dieselbe das Gegengewicht p und die Hälfte des Kettchens im Gleichgewicht gehalten wird. Es bildet demnach die untere Hälfte des Kettchens ein Uebergewicht von 8,6 g, durch welches eine Anfangsbeschleunigung hervorgebracht wird, welcher man durch passende Wahl der Gesammtmasse einen beliebigen Werth geben kann. In dem Maasse aber, wie die Kette

sinkt, lagert sich ein immer grösserer Theil derselben auf dem Tischchen a' ab, welcher nicht mehr als Uebergewicht fungirt. Ist die Mitte des Kettchens am Tischchen angelangt, so ist die Beschleunigung $= 0$ geworden und erlangt von da an, da in Folge der Trägheit die Bewegung fortgesetzt wird, einen negativen Werth, der bis zur früheren Höhe des positiven Anfangswerthes ansteigt, während der Rest des Kettchens abgelagert wird. Wenn keine Reibung und kein Stoss stattfände, würde sich von da an das Kettchen immerfort schwingend, auf- und abbewegen, indem seine Mitte gleich weit nach oben und nach unten über den Punkt 50 hinausginge. In Folge der Reibung und Stösse nehmen aber die Wege bald ab und das Kettchen kommt zur Ruhe, indem sich seine Mitte gegenüber dem Punkt 50 einstellt.

Fig. 147.

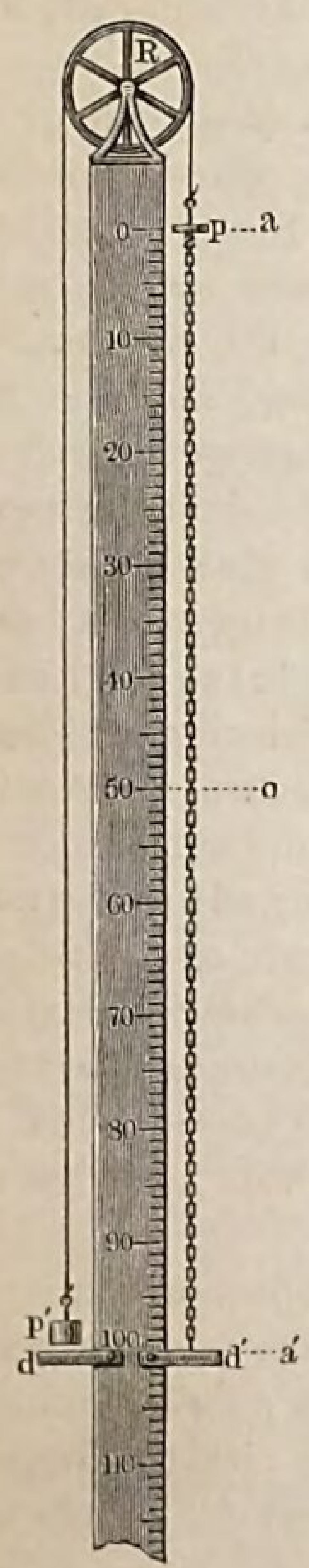
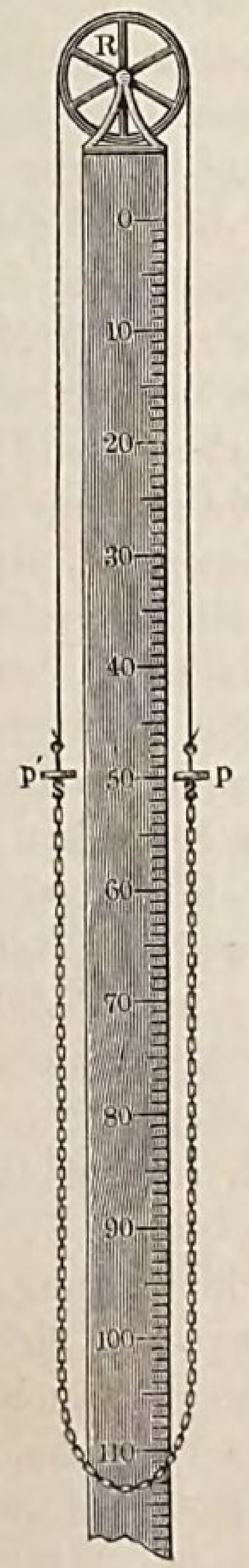


Fig. 148.



Bei dieser Versuchsanordnung ist der Einwurf zu erheben, dass die Gesammtmasse während der Bewegung sich (um die Masse des Kettchens) verändert; man muss also jedenfalls die Masse des Kettchens klein gegen die Gesammtmasse wählen. Eine andere Art, den Versuch anzustellen, ist in Fig. 148 angedeutet. Die Rolle R wird auf einen Vorsprung gestellt, so dass die über dieselbe gelegten Fadenenden nicht neben der Säule, sondern vor derselben herabhängen. Die Fadenenden tragen gestielte Gewichtchen p, p' und darunter eine Metallkette, welche mit beiden Enden an die Gewichtchen befestigt ist. Hebt man das Gewichtchen p um n cm, so sinkt gleichzeitig das Gewichtchen p' um n cm, folglich kommt auf die erstere Seite ein Uebergewicht gleich dem Gewichte von $2n$ cm des Kettchens. Dieses Uebergewicht, also auch die dadurch erzeugte Beschleunigung wächst proportional mit der zurückgelegten Wegstrecke, da die Gesammtmasse constant bleibt.

Legt man auf die Gewichtsstücke p und p' gleich grosse Zulagegewichte, so kann man hierdurch die Gesammtmasse vergrössern, ohne

dass zugleich die beschleunigende Kraft vergrössert wird; folglich ist es auf diesem Wege möglich, der Beschleunigung bei gleicher Entfernung von der Ruhelage einen beliebigen Werth zu ertheilen. Denselben Zweck erreichen wir durch Ersetzung des Kettchens durch ein solches von geringerem Gewichte.

Mit einem der beiden Apparate überzeugen wir uns zunächst, dass die Bewegung des aus dem Gleichgewicht gebrachten Kettchens eine periodische ist, d. h. dass die gleichen Bewegungen in gleichen Zeitintervallen wiederkehren. Wären keine Reibung und sonstige Hindernisse vorhanden, so würde dies genau der Fall sein. Den grössten Abstand des Beweglichen von seiner Ruhelage nach oben oder unten nennen wir die Amplitude oder die Schwingungsweite. Die Zeit, welche verstreicht von einer äussersten Lage bis zur anderen, also die Zeit zwischen zwei Umkehrungen oder zwischen zwei Durchgängen durch die Ruhelage, nennen wir Schwingungsdauer, die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde die Schwingungszahl, irgend eine momentane Entfernung des Beweglichen von der Ruhelage seine Elongation. Zeitmomente gleichen Bewegungszustandes nennt man gleiche Phasen. Phasendifferenz nennt man den Bruchtheil der Schwingungsdauer, welcher zwischen zwei momentanen Lagen des Beweglichen verfliesst.

Durch eine erste Versuchsreihe entdecken wir die auf den ersten Blick überraschende Thatsache, dass die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Schwingungsweite. Haben wir es z. B. durch geeignete Wahl der gleichen Gewichte p und p' dahin gebracht, dass das um 10 cm gehobene Gewicht p gerade binnen einer Secunde bis 10 cm unter die Ruhelage, also in Fig. 147 oder 148 von 40 bis 60, sich bewegt, so wird es in derselben Zeit auch von 30 bis 70, von 20 bis 80 etc. sich bewegen.

Da die Kraft, also auch die Beschleunigung, proportional mit der Entfernung von der Ruhelage (der Elongation) sich ändert, so entspricht einer nfachen Amplitude der Schwingungen auch eine nfache Anfangsbeschleunigung. Folglich ergeben die Versuche, dass sich die Schwingungsdauer nicht ändert, wenn das Verhältniss zwischen Amplitude und Anfangsbeschleunigung unverändert bleibt.

Durch eine zweite Versuchsreihe ermitteln wir den Einfluss der verschieden grossen Anfangsbeschleunigung bei gleicher Amplitude. Hat in der ersten Versuchsreihe die Masse des Kettchens $\frac{1}{n}$ der Gesammtmasse betragen, so belasten wir jetzt die Schälchen p und p' so viel, dass die Masse des Kettchens nur mehr $\frac{1}{4n}$ der Gesammtmasse beträgt, oder wir nehmen ein diesem Verhältniss entsprechend leichteres Kettchen. Die Anfangsbeschleunigung muss dann ein Viertel der früheren betragen. Der Versuch zeigt nun, dass dann die Schwingungsdauer das Doppelte der früheren beträgt. Sie ist also der Quadratwurzel

aus der Beschleunigung bei gleicher Amplitude *verkehrt proportional*.

Würde man dann die Amplitude auf das Vierfache vergrössern, so würde sich die Anfangsbeschleunigung auch auf das Vierfache, also bis zum früheren Werthe vergrössern und dennoch die Schwingungsdauer unverändert, also gleich dem doppelten der früheren bleiben. Daraus folgt, dass bei gleicher Anfangsbeschleunigung die Schwingungsdauer dem Quadrate der Amplitude proportional sein müsse.

Bezeichnen wir die Schwingungsdauer mit T, die Anfangsbeschleunigung mit φ_0, die Amplitude mit a, so können wir die bisher gefundenen Resultate dahin zusammenfassen, dass T proportional dem Ausdruck $\sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}$ sei, dass also die Formel für T die Form haben müsse:

$$T = k\sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}$$

worin k einen constanten Coefficienten bezeichnet.

Um den Zahlenwerth dieses Coefficienten auszumitteln, haben wir durch einen quantitativen Versuch zusammengehörige Werthe von T und $\frac{a}{\varphi_0}$ zu bestimmen.

Bei einem derartigen nach Fig. 147 angeordneten Versuche waren folgende Daten erhalten worden:

Masse des Rades*)	94 g
Masse der beiden Schälchen sammt aufgesetzten gleichen Gewichtsstücken	131 „
Masse des halben Kettchens	8,6 „
Masse des gleich grossen Gegengewichtes auf dem anderen Schälchen	8,6 „
Gesammtmasse**) . . .	242,2 g
Anzahl der Secunden für zwei Auf- und Niedergänge = ...	15 „
Daraus sich ergebende Schwingungsdauer $t = \frac{15}{4} =$	3,75″
Länge des halben Kettchens	50 cm

*) Unter der „Masse des Rades" ist hier nur die in Betracht kommende Masse (das sogenannte Trägheitsmoment) verstanden. Siehe hierüber §. 32. Man kann statt obiger Berechnung dieser Gesammtmasse dieselbe auch durch einen Fallversuch ausmitteln, indem man statt des Kettchens eine halb so grosse Masse auf das Schälchen giebt und ein bekanntes Uebergewicht auflegt.

**) Die Gesammtmasse ist in Wirklichkeit bei dieser Versuchsanordnung veränderlich, da bald mehr, bald weniger als die Hälfte des Kettchens dazu gehört; obiges ist der Mittelwerth.

Daraus folgt Masse des Kettchens pro Centimeter

Länge $= \frac{8,6}{50} =$ 0,172 g

Die Anfangsbeschleunigung bei 1 cm Amplitude berechnet sich daraus zu $\varphi_0 = 0,172 \; \frac{980,8}{242,2} =$ 0,6965

Daraus ergiebt sich dann der Werth der Constanten:

$$k = \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{\varphi_0}}} = t\sqrt{\varphi_0} = 3,75\sqrt{0,6965} = 3,75 \,.\, 0,834 = 3,127$$

Dieser Werth von k ist nahe dem Werthe der Ludolph'schen Zahl $\pi = 3,14159$, was kein Zufall ist, da, wie wir unten zeigen werden, wirklich der Werth von π herauskommen sollte. Indem wir dieses Resultat anticipiren, erhalten wir als Ergebniss unserer Versuche für die Schwingungsdauer die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}$$

Eine weitere Versuchsreihe gilt der Untersuchung der Geschwindigkeit, mit welcher die Ruhelage passirt wird. Hierzu eignet sich ebenfalls die Anordnung Fig. 147. Die Ruhelage entspricht daselbst jener Stellung des Gewichtchens p, wo es gegenüber dem Scalenpunkt 50 anlangt und die Hälfte des Kettchens abgelagert ist. Offenbar ist es für die erste Hälfte der Bewegung ganz gleichgültig, wann man die obere Hälfte des Kettchens durch einen Faden von verschwindendem Gewicht ersetzt und dafür dem Gewichte p ebensoviel zusetzt als die Hälfte des Kettchens wiegt. Dafür entfällt dann von dem Momente an, wo die Ruhelage passirt wird, jedes weitere Uebergewicht, also jede Beschleunigung; die Bewegung wird also von da an eine gleichförmige und folglich die Geschwindigkeit eine constante, also messbare. Um die Messung auszuführen, regulirt man die Schwingungsdauer auf eine gerade Anzahl von Secunden, so dass das Gewichtchen p mit einem Secundenschlage losgelassen, auch mit einem Secundenschlage die Ruhelage passirt. Man stellt dann ein Tischchen mit durchbrochener Platte so weit unterhalb der Ruhelage auf, dass das Gewicht p mit dem darauf folgenden Secundenschlage auffällt, nachdem Kettchen und Faden ungehindert passirt sind. Der Abstand zwischen Ruhelage und Tischchen ist dann gleich der momentanen Geschwindigkeit, welche der schwingenden Bewegung zukommt in dem Moment, wo die Ruhelage passirt wird. Es erhellt sofort, dass man auf ähnliche Weise die momentane Geschwindigkeit auch an anderen Punkten der Bahn ermitteln kann.

Das Resultat einer solchen Untersuchung, deren Ausführung wohl ohne Zahlenbeispiel verständlich sein dürfte, würde sein, dass die Ge-

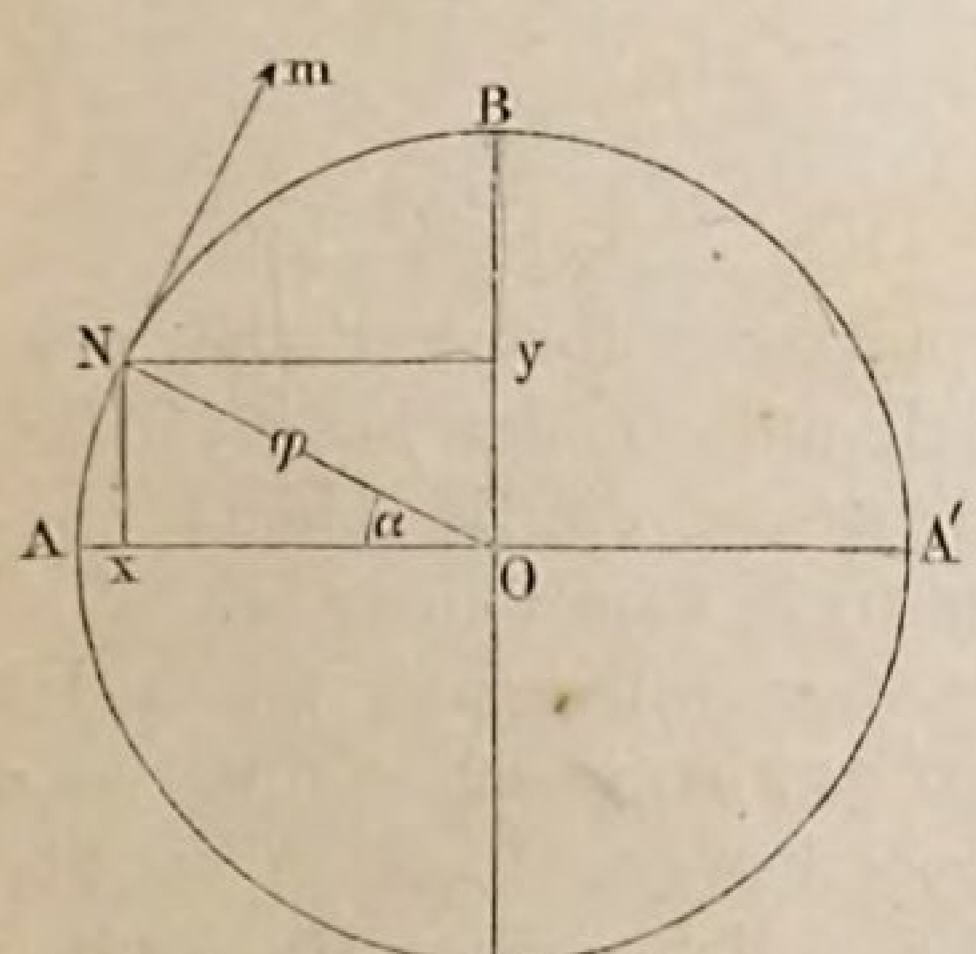
schwindigkeit der Quadratwurzel aus dem Product von Amplitude und Anfangsbeschleunigung gleich ist.

Aendert man daher an dem Apparate nichts, vergrössert aber die Amplitude beispielsweise auf das Doppelte, so wird zugleich die Anfangsbeschleunigung verdoppelt, das Product aus beiden also vervierfacht. Die Geschwindigkeit, mit der die Ruhelage passirt wird, ist dann die doppelte. Sie wird ebenfalls die doppelte, wenn man bei gleicher Amplitude durch Aenderung der Massen die Beschleunigung allein vervierfacht.

Theoretische Ableitung der Gesetze der schwingenden 43
Bewegung. Die im vorigen Paragraphen experimentell aufgefundenen Gesetze der schwingenden Bewegung lassen sich auf theoretischem Wege ableiten. Es gelingt dies auf einfache Weise, wenn man sich der Hülfsmittel der höheren Mathematik bedienen darf. Auf elementarem Wege kommen wir zu diesem Ziele am schnellsten, wenn wir von der im §. 40 abgehandelten kreisförmigen Centralbewegung ausgehen. Es wurde daselbst gezeigt, dass eine kreisförmige Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit entsteht, wenn auf einen materiellen Punkt von der Masse m, der in der Richtung der Tangente eines Kreises eine Geschwindigkeit u besitzt, eine beschleunigende Kraft k einwirkt, welche gegen das Centrum des Kreises gerichtet ist und die Grösse $k = \frac{u^2 m}{r}$ besitzt. Die Beschleunigung dieser Kraft ist also $\varphi = \frac{u^2}{r}$ oder wenn man statt der Geschwindigkeit u die Umlaufszeit einführt, mit Rücksicht auf $u = \frac{2 r \pi}{T}$:

$$\varphi = \frac{4 \pi^2 r}{T^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1)$$

Fig. 149.



Es stelle nun in Fig. 149 der Kreis $A\,B\,A'\,B'$ die Bahn dieser Centralbewegung vor. Der bewegte Punkt befindet sich momentan in N. Die von N nach dem Mittelpunkte O gerichtete Beschleunigung werde der Grösse nach durch den Radius $N\,O$ selbst vorgestellt. Wir denken uns nun dieselbe zerlegt nach den zwei Richtungen parallel zu $A\,A'$ und parallel zu $B\,B'$. Die Componenten werden die Grössen $x\,O$ und $y\,O$ haben.

Fassen wir diese Componenten getrennt ins Auge, so erkennen wir bald, dass jede derselben eine Beschleunigung vorstellt, welche in jedem Augenblicke ihre Grösse ändert; und zwar ist die Grösse der zu $A\,A'$ paral-

lelen Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem momentanen Abstande des Punktes N von der Geraden BB'. Ebenso ist die zu BB' parallele Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem jeweiligen Abstande von der Geraden AA'. Daraus folgt, dass sich die kreisförmige Centralbewegung auffassen lässt als die Resultirende zweier schwingender Bewegungen, welche senkrecht auf einander nach den Richtungen AA' und BB' stattfinden, welche beide die gleich grosse Amplitude = dem Radius r des Kreises und die gleiche Schwingungsdauer t besitzen. Die letztere ist gleich der Hälfte der Umlaufszeit T der kreisförmigen Bewegung.

Um diesen Sachverhalt recht deutlich zu übersehen, denke man sich gleichzeitig von dem Punkte A aus zwei materielle Punkte ausgehen. Der eine N bewege sich innerhalb der Zeit t mit gleichförmiger Geschwindigkeit u längs der Kreisperipherie von A über B nach A' und dann wieder in der Zeit t über B' nach A zurück. Der andere Punkt n bewege sich von A in der Zeit t durch den Durchmesser AA' nach A' und zwar mit einer Beschleunigung, welche in jedem Punkte durch den jeweiligen Abstand nO gegeben ist. Von A' kehre dieser Punkt wieder in der Zeit t nach A zurück. Es werden dann stets die beweglichen Punkte N und n sich senkrecht über einander befinden, so dass also n immer als die Projection von N auf den Durchmesser AA' erscheint. Wir können daher auch kurz sagen: die schwingende Bewegung von A nach A' und zurück verläuft genau so, wie die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung von A über B, A', B' nach A, vorausgesetzt, dass beide gleiche Dauer haben.

Für diese Dauer T folgt aus 1) der Werth:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

folglich für das halb so grosse t (entsprechend einem Hin- oder Hergange):

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

welche Formel für die Schwingungsdauer mit jener übereinstimmt, welche wir im vorigen Paragraphen experimentell aufgefunden haben, da der Radius r identisch ist mit der Amplitude a und die Beschleunigung φ identisch mit der Anfangsbeschleunigung φ_0 in dem Punkte A.

Man erkennt ferner sofort, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der schwingende Punkt n die Mitte bei O passirt, gleich sein müsse der Geschwindigkeit, mit welcher der im Kreise bewegte Punkt N die Stelle bei B passirt, also überhaupt gleich der peripherischen Geschwindigkeit u. Aus $\varphi = \frac{u^2}{r}$ folgt nun

$$u = \sqrt{\varphi r}$$

d. h. der schwingende Punkt geht durch die Ruhelage mit einer Geschwindigkeit, welche der Quadratwurzel aus dem Product von Anfangsbeschleunigung und Amplitude gleich ist. Auch diesen Satz haben wir bereits im vorigen Paragraphen als Ergebniss der Versuche bezeichnet.

Zur vollständigen Charakterisirung einer Bewegung gehört eine Formel für den Weg oder genauer für die in einer beliebigen Zeit erreichte Entfernung von dem Nullpunkte der Bahn.

Wir wählen, da es bequemer ist, nicht A, sondern O zum Nullpunkte der Bahn und rechnen die erlangten Entfernungen nach rechts positiv, nach links negativ; dann ist:

$$s = On = -r \cos NOn$$

Bezeichnen wir die Zeit, welche verflossen ist, von dem Momente an, wo die schwingende Bewegung in A ausgegangen, bis zu dem Momente, wo sie in n angekommen ist, mit ϑ, so haben wir zur Bestimmung des Winkels α die Proportion:

$$\vartheta : t = \alpha : 180$$

oder:

$$\alpha = 180 \frac{\vartheta}{t}$$

oder auch:

$$\alpha = 360 \frac{\vartheta}{T}$$

wenn T wiederum die Zeitdauer einer Doppelschwingung bedeutet.

Für den Abstand s ergiebt sich folglich:

$$\left.\begin{array}{l} s = -r \cos 360 \dfrac{\vartheta}{T} \\ \text{oder:} \\ s = -r \cos 2\pi \dfrac{\vartheta}{T} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Nach dieser Gleichung ist also $s = r$ für:

$$\vartheta = {}^1\!/_2\, T,\ \vartheta = {}^3\!/_2\, T,\ \vartheta = {}^5\!/_2\, T \text{ etc.}$$

es ist ferner:

$$s = 0$$

für:

$$\vartheta = {}^1\!/_4\, T,\ \vartheta = {}^3\!/_4\, T,\ \vartheta = {}^5\!/_4\, T \text{ etc.}$$

es wird:

$$s = -r$$

für:

$$\vartheta = 0,\ \vartheta = T,\ \vartheta = 2\,T,\ \vartheta = 3\,T \text{ etc.}$$

Berücksichtigt man ferner den Umstand, dass die momentane Geschwindigkeit v der schwingenden Bewegung an jedem Orte die Projec-

tion der gleichzeitigen tangentiellen Geschwindigkeit u der Kreisbewegung ist, so erhält man:

$$v = u \cdot \cos m\, Ng$$

also auch, da $\sphericalangle\, m\, Ng$ complementär zu $\sphericalangle\, \alpha$ ist:

$$v = u \cdot \sin \alpha$$

Zählen wir die positive Geschwindigkeit von links nach rechts, so bleibt v positiv von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 180^0$; es ist also hier kein Zeichenwechsel vorzunehmen, wie es für s nöthig war. Setzen wir für α seinen Werth, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} v &= u \sin 360 \frac{\vartheta}{T} \\ v &= u \sin 2\pi \frac{\vartheta}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Die Geschwindigkeit wird also gleich Null für

$$\vartheta = 0,\ \vartheta = \tfrac{1}{2} T,\ \vartheta = T,\ \vartheta = \tfrac{3}{2} T \text{ etc.}$$

also gerade für solche Momente, in welchen s ein Maximum erreicht, während umgekehrt v in solchen Momenten am grössten wird, in denen

$$s = 0$$

nämlich

$$v = u$$

für

$$\vartheta = \tfrac{1}{4} T,\ \vartheta = \tfrac{5}{4} T \text{ etc.}$$

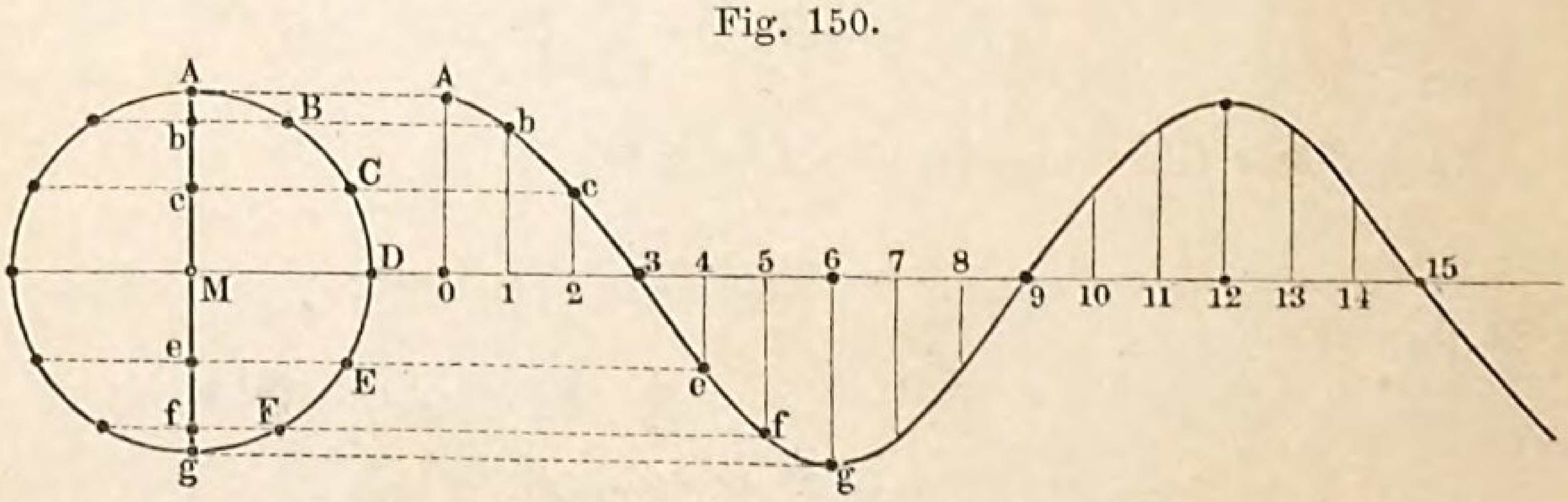
und

$$v = -u$$

für

$$\vartheta = \tfrac{3}{4} T,\ \vartheta = \tfrac{7}{4} T \text{ etc.}$$

Fig. 150.



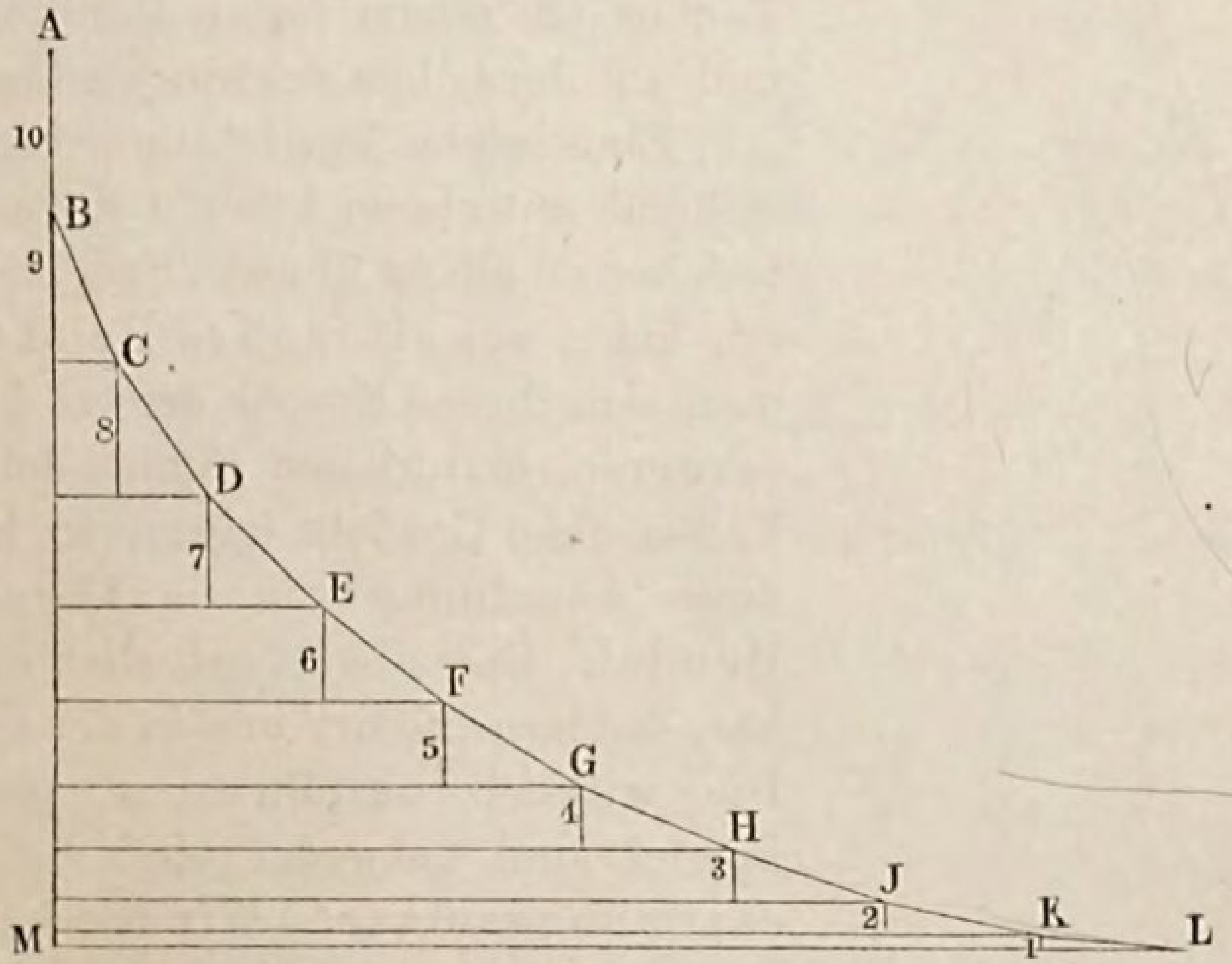
Wir wollen nun noch, wie wir es bisher bei allen Bewegungsarten gemacht haben, den Verlauf der schwingenden Bewegung durch eine Curve darstellen, deren Abscissen die verflossenen Zeiten, deren Ordinaten die erlangten Entfernungen vom Nullpunkte der Bahn vorstellen.

Fig. 150 zeigt die Construction einer solchen Curve. Die schwingende Bewegung erfolge längs der Geraden Ag um die Ruhelage M.

Theilen wir die Peripherie in eine Anzahl, z. B. 12, gleiche Theile und ziehen durch die Theilpunkte B, C, D, E, F Senkrechte auf Ag, so werden dadurch die Punkte b, c, d, e, f bestimmt, wo der zwischen A und g schwingende Punkt nach $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}$ etc. seiner, doppelten, Schwingungsdauer T ankommt. Verlängert man nun die Gerade MD und trägt auf derselben von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte 0 an beliebige gleich lange Stücke auf, deren Enden man mit 1, 2, 3, 4 etc. bezeichnet, und errichtet man auf diesen Punkten Ordinaten, welche der Reihe nach den Abständen AM, bM, cM, Null, eM, fM, gM, fM, eM, Null, cM, bM, AM etc. gleich sind, so stellt die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten die Schwingungscurve dar. Wir werden dieser Curve noch öfter, besonders in der Akustik begegnen.

Das einfache Pendel. Im §. 37 haben wir gezeigt, dass man in der schiefen Ebene ein Mittel hat, eine Bewegung zu erzeugen mit 44

Fig. 151.

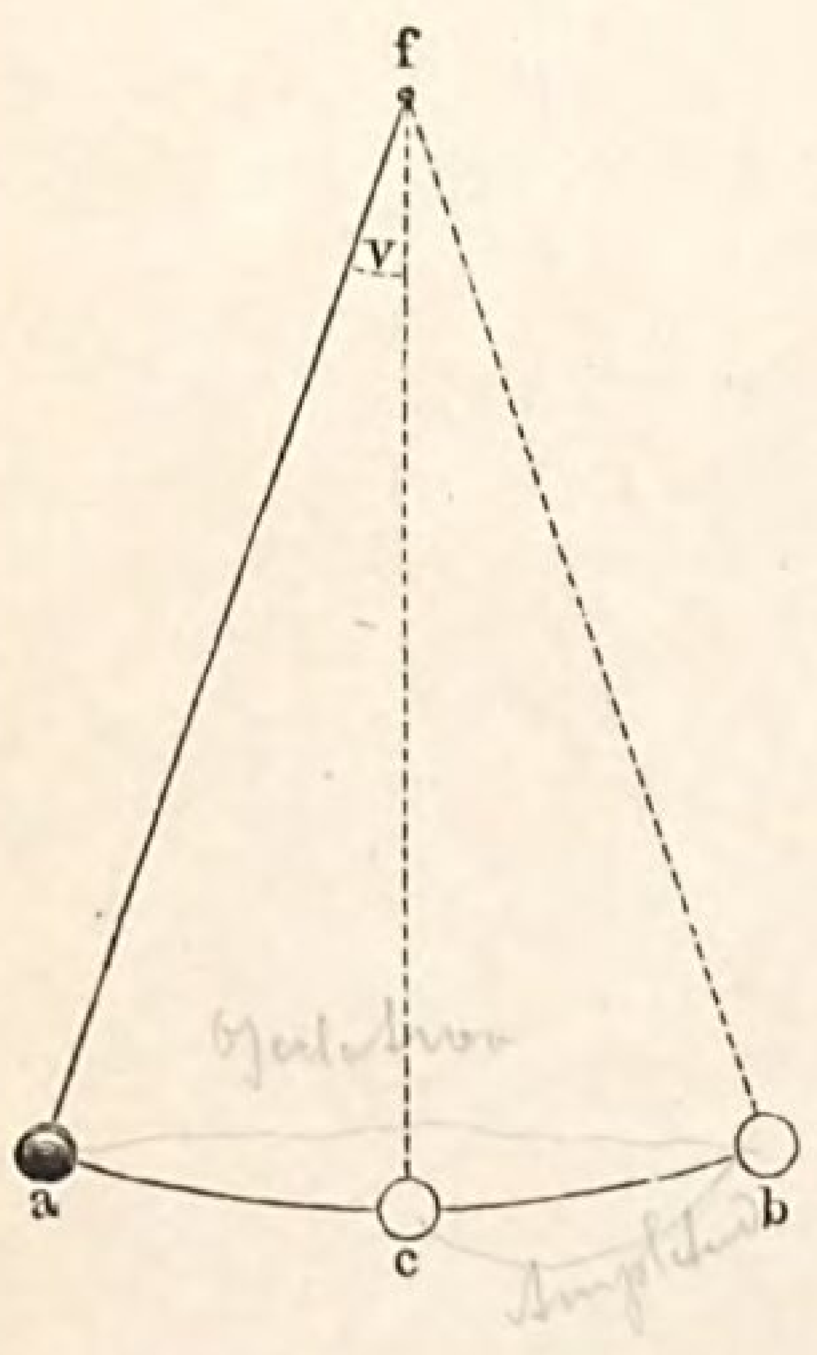


einer Beschleunigung, welche einen beliebigen Bruchtheil der Beschleunigung beim freien Fall beträgt. Die Beschleunigung über die schiefe Ebene ist nämlich gleich jener beim freien Fall multiplicirt mit dem Verhältniss der Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Es liegt daher auch wohl der Gedanke nahe, eine ungleichmässig beschleunigte Bewegung dadurch hervorzubringen, dass man eine veränderliche Beschleunigung durch veränderliche Neigung der Bahn erzeugt. Betrachten wir z. B. die Bahn, welche in Fig. 151 dargestellt ist; dieselbe setzt sich aus vielen kleinen, aber gleich langen Stücken zusammen, dabei ändert sich von einem zum anderen die Beschleunigung im Verhältniss der Höhen dieser schiefen Ebenen. In Fig. 151 ist die

Länge aller einzelnen schiefen Ebenen constant = 10 mm, die Höhen aber nehmen von 10 mm an je um 1 mm ab. Ist also die Beschleunigung längs des senkrechten Stückes $AB = g$, so ist sie längs $BC = {}^9/_{10}\,g$, längs $CD = {}^8/_{10}\,g$, längs $DE = {}^7/_{10}\,g$ und so fort, längs KL nur noch ${}^1/_{10}\,g$. Die Beschleunigung ändert sich also proportional dem zurückgelegten Wege, wodurch eine Bewegung erzeugt werden muss, welche nach demselben Gesetze vor sich geht, wie die Bewegung eines schwingenden Körpers. Um dies vollkommen zu erreichen, müssten nur noch die Aenderungen der Neigung der Bahn statt sprungweise in continuirlicher Weise erfolgen, also die Bahn der Figur durch eine Curve ersetzt werden, welche ihre Neigung in der besprochenen Weise ändert. Eine solche Curve, welche, wie Huyghens gezeigt hat, eine Cykloïde ist, nähert sich innerhalb gewisser Grenzen sehr einem Kreisbogen und kann daher mit grosser Annäherung durch einen solchen ersetzt werden. Statt aber den Körper über eine kreisförmig gebogene Unterlage rollen zu lassen, ist es zweckmässiger, ihn dadurch zur Einhaltung einer kreisförmigen Bahn zu zwingen, dass man ihn mittelst eines Fadens an einem festen Punkte aufhängt und um denselben schwingen lässt.

Fig. 152.



Eine solche Vorrichtung, Fig. 152, bestehend aus einem kleinen Körper (Kugel), welcher an einem dünnen Faden aufgehängt ist, heisst ein einfaches Pendel. Denkt man sich diesen Körper ersetzt durch einen schweren, materiellen Punkt, der an einem Faden ohne Gewicht hängt, so heisst man diese Anordnung ein mathematisches Pendel. Dasselbe ist natürlich nie herstellbar, sondern existirt nur in der Vorstellung. Die wirklich ausführbaren physischen Pendel sind entweder einfache oder zusammengesetzte. Wir beschäftigen uns hier zunächst mit den Gesetzen des mathematischen Pendels, die wir auch als jene des einfachen Pendels gelten lassen dürfen, später werden wir dann das zusammengesetzte Pendel in Behandlung ziehen.

Bringt man die Kugel des Pendels aus ihrer Gleichgewichtslage, d. h. bringt man das Pendel aus seiner verticalen Stellung, so macht es, wenn man es loslässt, ohne ihm irgend einen Anstoss zu geben, Schwingungen, welche fortwährend in derselben Verticalebene bleiben. Bringt man z. B. das Pendel in die Lage fa, so beschreibt die Kugel den Bogen ac, in c kommt sie mit solcher Geschwindigkeit an, dass sie auf der anderen Seite bis b steigt, d. h. zu der Höhe des Punktes a; vom Punkte b geht die Kugel abermals zurück, durchläuft in umgekehrter Richtung wieder den Bogen bca und setzt auf dieselbe Weise ihre Schwingungen

fort. Beim Niedergange des Pendels nimmt seine Geschwindigkeit fortwährend zu, beim Aufsteigen nimmt sie ab; in dem Momente also, in welchem das Pendel die Gleichgewichtslage passirt, hat es seine grösste Geschwindigkeit.

Der Winkel $afc = v$ heisst Ausschlagswinkel oder auch nur Ausschlag.

Die Bewegung von a bis b oder von b bis a heisst eine Oscillation; von a bis c ist eine halbe niedergehende, von c bis b eine halbe aufsteigende Oscillation.

Als Amplitude bezeichnet man häufig den ganzen Bogen ab, es ist aber zweckmässiger, damit, wie im vorigen Paragraphen, die Hälfte der ganzen Bahn, also den Bogen ac zu bezeichnen.

Die Oscillationsdauer oder Schwingungsdauer ist die Zeit, welche das Pendel nöthig hat, den ganzen Bogen ab zu durchlaufen.

Nach dem ersten Anblicke sollte man aus den Versuchen schliessen, dass die Bewegung eines Pendels immer fortdauern müsste, denn wenn es von a ausgehend auf der anderen Seite zu einer gleichen Höhe b ansteigt, so muss es von b ausgehend auch wieder bis a steigen, und es wird so denselben Weg zum zweiten, zum dritten Male etc. bis ins Unendliche machen müssen.

Dieser Schluss würde ganz richtig sein, wenn b wirklich absolut gleiche Höhe mit a hätte; aber die Reibung am Aufhängepunkte f, der Widerstand der Luft, welche die Kugel vor sich wegtreiben muss, machen es unmöglich, dass die Kugel genau wieder bis zu der Höhe steigt, von welcher sie herabfiel. Die Abnahme der Amplituden wird freilich erst nach einer Reihe von Schwingungen merklich.

Die von Galilei zuerst aufgestellten Gesetze der Pendelschwingungen sind folgende:

1. Die Schwingungsdauer des Pendels ist unabhängig vom Gewicht der Kugel und von der Natur ihrer Substanz.

2. Bei kleinen Ausschlägen ist die Schwingungsdauer nahezu unabhängig von der Grösse der Amplitude (Isochronismus).

3. Die Schwingungsdauer ungleich langer Pendel verhält sich wie die Quadratwurzel aus den Pendellängen.

Das erste Gesetz folgt als nothwendige Consequenz, wenn vorher erwiesen ist, dass die Anziehungskraft der Erde auf alle Materien gleich gross ist und folglich alle Körper gleiche Beschleunigung des freien Falles erhalten. Denn da beim Pendel eine Componente dieser Beschleunigung als wirksame Kraft auftritt und die Bewegung derselben auf den Fall über eine schiefe Ebene zurückgeführt werden kann, so ist es ebenso sicher, dass alle Körper bei gleicher Pendellänge gleich schnell schwingen, wie dass sie gleich schnell frei fallen. In Wahrheit haben jedoch die Physiker umgekehrt aus der Thatsache der gleichen Schwingungsdauer bei Pendeln aus verschiedenem Materiale und Gewicht den Beweis

abgeleitet, dass die Accelleration der Schwere für alle Körper gleich gross sei.

Um von dem Einflusse des Luftwiderstandes unabhängig die Schwingungsdauer von Pendeln zu vergleichen, hat Newton hohle hölzerne Kugeln gleicher Grösse an Fäden gleicher Länge aufgehängt und mit den verschiedensten Materialien, wie Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser, Weizen, angefüllt schwingen lassen. Es konnte kein Unterschied nachgewiesen werden.

Das zweite Gesetz ist erwiesen, sobald gezeigt worden ist, dass beim Pendel mit Annäherung dieselben Bewegungsbedingungen vorhanden sind wie bei der schwingenden Bewegung, die wir in dem vorausgegangenen Paragraphen studirt haben.

Fig. 153.

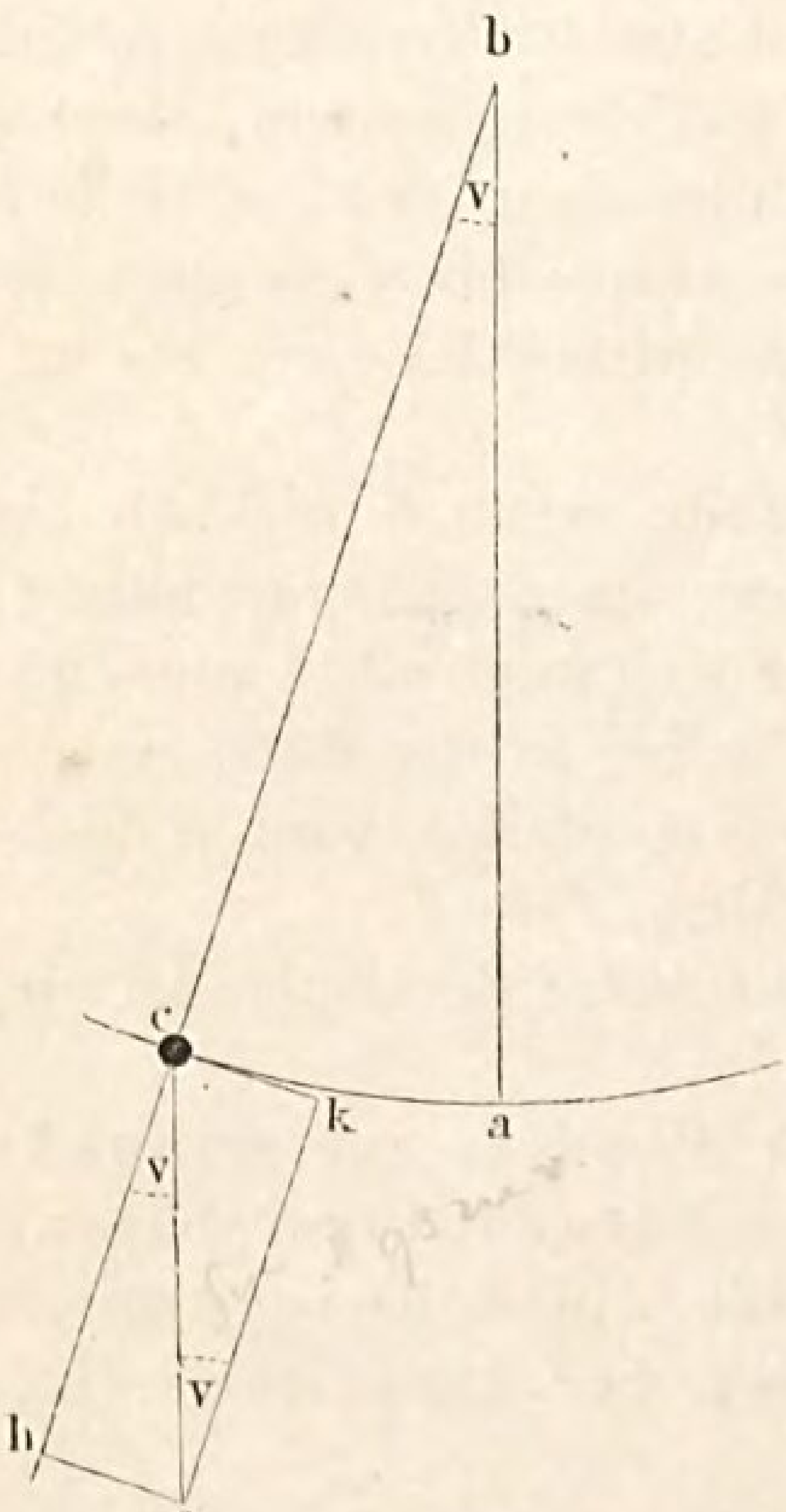
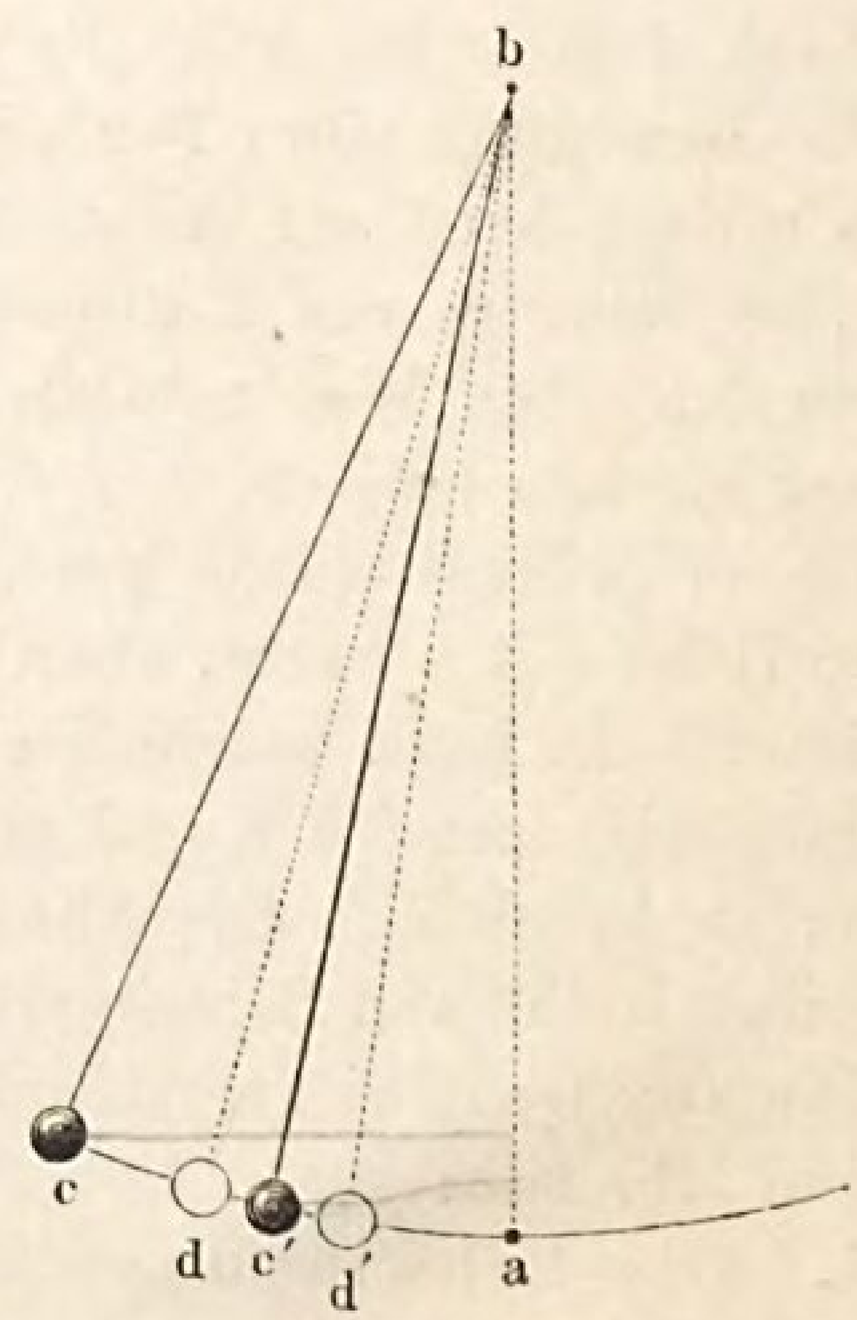


Fig. 154.



Fassen wir die Fig. 153 ins Auge. Die Pendelkugel befindet sich momentan in c. Die Schwerkraft sucht derselben eine Beschleunigung $= g$ zu ertheilen, welche durch die Gerade cf nach Richtung und Grösse vorgestellt sein mag. Von dieser Beschleunigung kann nur die Componente ck in der Richtung der Tangente zur Bewegung beitragen. Die andere Componente ch kann nur den Faden spannen. Nun ist:

$$ck = cf \, . \, \sin v = g \sin v$$

Die Beschleunigung, welche die Pendelkugel erfährt, ist also in jedem Punkte der Bahn proportional dem Sinus des Ausschlagswinkels. Da nun aber für kleine Winkel die Sinus nahezu proportional den Winkeln selbst sind, so ist damit auch eine angenäherte Proportionalität zwischen Weg und Beschleunigung gegeben, folglich erwiesen, dass die

Gesetze der schwingenden Bewegung auch für das Pendel angenähert gelten müssen, so lange die Amplituden klein sind.

Um ein Zahlenbeispiel beizubringen, welches zeigt, wie nahe die Bögen und die Sinus derselben übereinstimmen, wenn man unter 5^0 bleibt, möge folgende Tabelle dienen:

Winkel	Bogenlänge (Radius = 1)	Sinus
1^0	0,0174533	0,0174524
2^0	0,0349066	0,0348995
3^0	0,0523599	0,0523360
4^0	0,0698132	0,0697565
5^0	0,0872665	0,0871558

Man sieht, dass bis 3^0 der Unterschied erst in der fünften Decimale auftritt und daselbst noch nicht $^1/_{2000}$ des Werthes erreicht.

So lange man also den Ausschlagswinkel nicht über 3^0 steigen lässt, kann man mit genügender Annäherung behaupten, dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude sei, also die Schwingungen isochron seien.

Die Behauptung, dass dasselbe Pendel zu einer grösseren Schwingung nicht mehr Zeit brauche als zu einer kleineren, klingt auf den ersten Blick paradox. Durch folgende Betrachtung ist aber leicht einzusehen, wie dieses Resultat zu Stande kommen muss.

Denken wir uns dicht hinter einander zwei gleiche Pendel aufgehängt, das eine bis c, das andere bis c' gehoben und gleichzeitig losgelassen, so werden sie gleichzeitig in den Punkten d und d' ankommen, wenn $c'\,d' = {}^1/_2\, c\,d$. Die beschleunigende Kraft in d ist aber doppelt so gross als in d', ausserdem aber langt das eine Pendel in d mit einer Geschwindigkeit an, welche doppelt so gross als diejenige ist, mit welcher das andere den Punkt d' passirt, und daraus folgt denn, dass auch in dem nächsten kleinen Zeittheilchen das eine Pendel einen doppelt so grossen Weg zurücklegt als das andere. Auf diese Weise fortschliessend findet man endlich, dass beide Pendel gleichzeitig in a ankommen müssen.

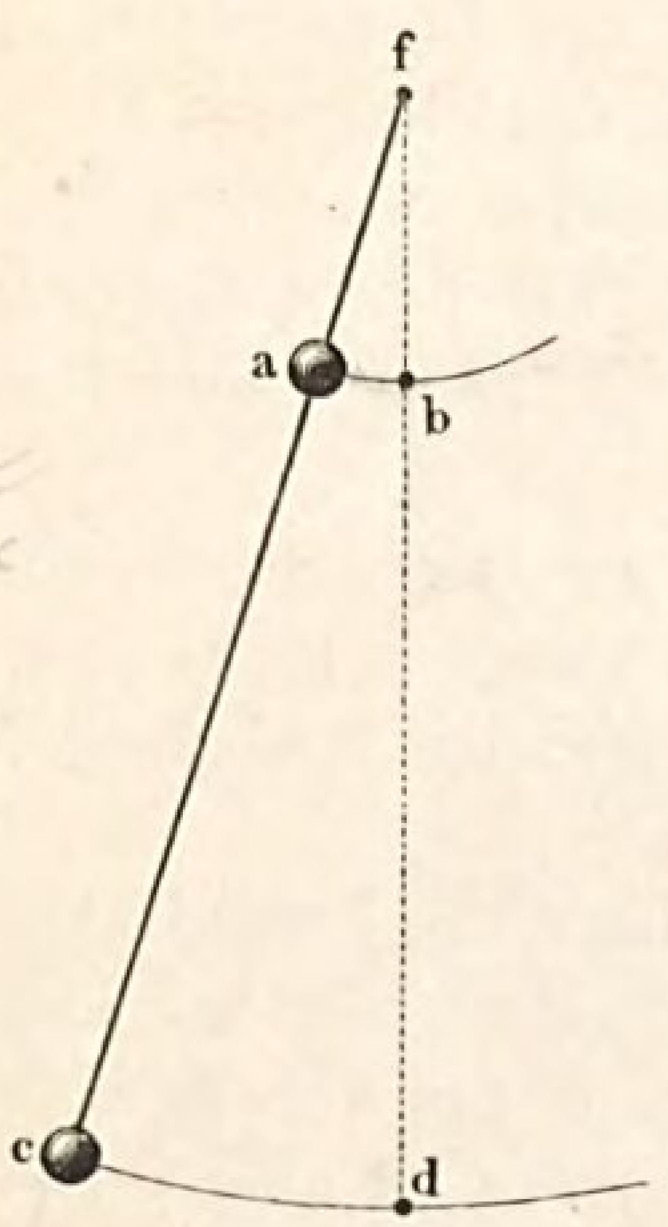
Die Schlussweise lässt sich auch noch anwenden, wenn das Verhältniss der Ausschlagswinkel nicht gerade das von 1 zu 2, sondern ein anderes ist, weil für kleine Ausschlagswinkel die beschleunigende Kraft stets der Entfernung von der Gleichgewichtslage proportional ist; und so lässt sich allgemein zeigen, dass bis zu der Grenze hin, bis zu welcher $\sin v$ mit $\frac{a\,c}{b\,c}$ vertauscht werden darf, die Schwingungsdauer von der Grösse der Ausschlagswinkel unabhängig ist.

Um dies Gesetz durch den Versuch zu bestätigen, muss man die Zeit genau bestimmen, welche nöthig ist, damit ein Pendel mehrere hun-

dert Schwingungen macht. Macht man diese Beobachtung zu Anfang der Bewegung, wenn die Amplitude 2^0 bis 3^0 ist, später, wenn sie nur noch 1^0 bis 2^0 beträgt, und zuletzt, wenn die Oscillationen so klein geworden sind, dass man sie mit der Lupe beobachten muss, so findet man, dass die Oscillationen in diesen drei Stadien so gut wie vollständig isochron sind.

Das dritte Gesetz, welches sagt, dass die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional sei, ergiebt sich auf folgende Weise. Man denke sich den Schwingungsbogen *ab*, Fig. 155, eines Pendels in so viel gleiche Theile getheilt, dass man jedes dieser Bogentheilchen als geradlinig betrachten kann. Wenn nun der Ausschlagswinkel eines längeren Pendels eben so gross ist, so muss sich der Schwingungsbogen *cd* desselben zu *ab* verhalten wie die Pendellänge *fc* zu *fa*. Denken wir uns den Bogen *dc* in eben so viel gleiche Theile getheilt wie den Bogen *ab*, so werden auch die einzelnen Theile im Verhältniss der Pendellängen stehen. Wenn also das eine Pendel 4 mal so lang ist als das andere, so werden auch jene Unterabtheilungen des Bogens *dc* 4 mal so gross sein als die entsprechenden Theile des Bogens *ab*. Der Winkel, welchen das oberste, das zweite, dritte etc. Bogentheilchen von *ab* mit der Horizontalen macht, ist gleich dem Winkel, welchen das erste, zweite, dritte etc. Bogentheilchen von *cd* mit derselben macht; auf den entsprechenden Theilen von *ab* und *cd* ist demnach auch die beschleunigende Kraft dieselbe.

Fig. 155.



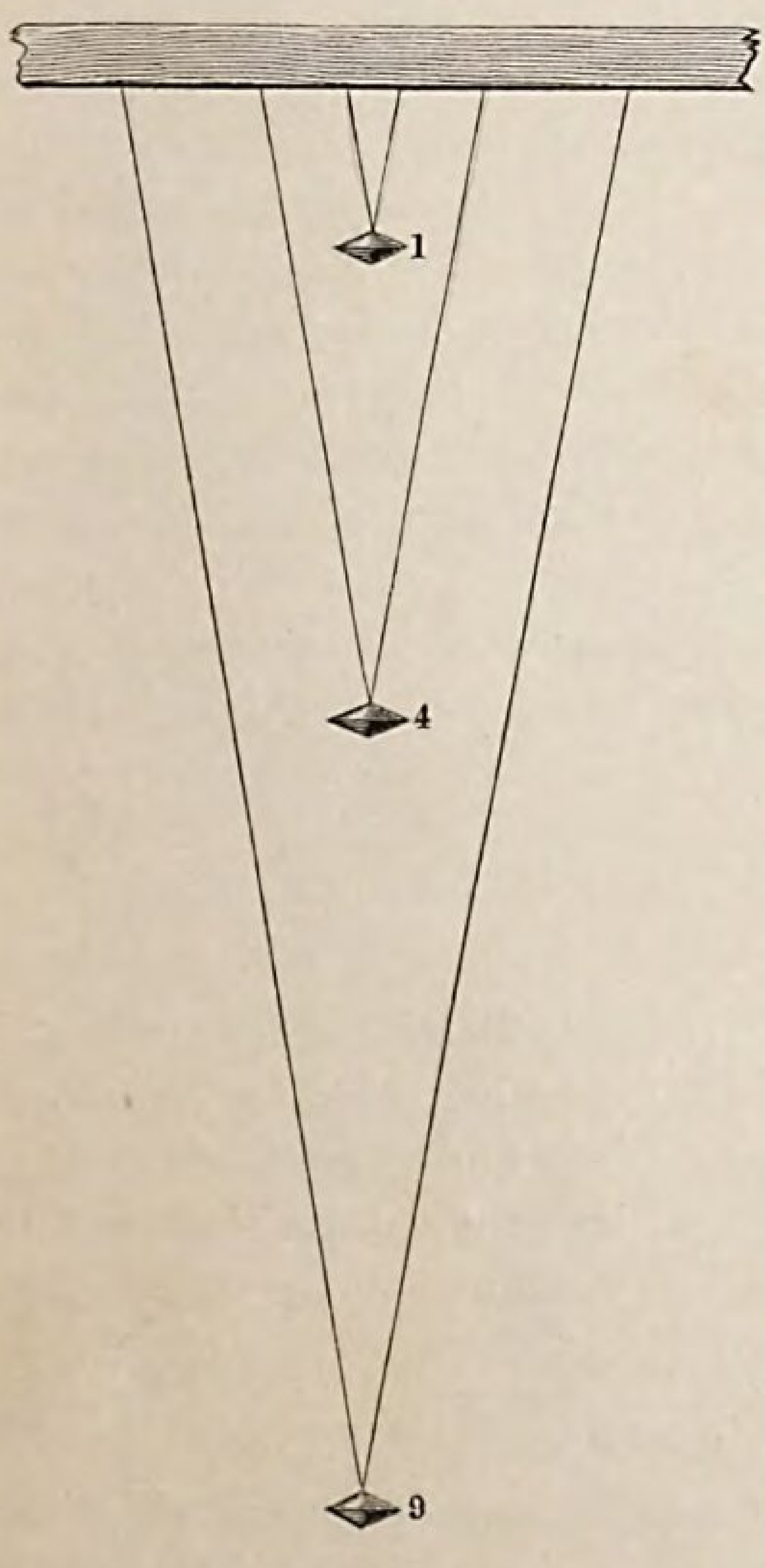
Wenn aber verschiedene Wege mit gleicher beschleunigender Kraft durchlaufen werden, so lehrt uns die Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, dass sich die Fallzeiten verhalten wie die Quadratwurzeln der Fallräume; wenn also der Bogen *cd* 2-, 3-, 4-, *n* mal so gross ist als der Bogen *ab*, so wird die Zeit, in welcher ein Theilchen von *cd* durchlaufen wird, auch $\sqrt{2}$-, $\sqrt{3}$-, $\sqrt{4}$-, $\sqrt{n}$ mal so gross sein als die, in welcher das entsprechende Theilchen von *ab* durchlaufen wird. Da dies aber für alle Bogentheilchen gilt, so gilt es auch für ihre Summe, was denn mit anderen Worten heisst, die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional.

Um die Richtigkeit des dritten Gesetzes durch den Versuch nachzuweisen, hat man nur die Schwingungsdauer verschieden langer Pendel zu vergleichen. Wenn sich z. B. die Pendellängen wie die Zahlen 1 : 4 : 9 verhalten, so verhalten sich die entsprechenden Schwingungszeiten wie

1 : 2 : 3. Am bequemsten hängt man zu diesem Versuche die Kugeln an einem doppelten Faden auf, wie Fig. 156 zeigt. Während ein Pendel, dessen Länge 4 dm ist, eine Oscillation macht, macht das viermal kürzere Pendel zwei Oscillationen; und während ein Pendel von 1 dm Länge dreimal hin- und hergeht, macht ein 9 dm langes nur einen Hin- und Hergang.

Die eben besprochenen Gesetze sind von der Intensität der Schwere ganz unabhängig. Wenn die Schwerkraft auch hundertmal stärker oder schwächer wirkte, so würden kleine Schwingungen eines und desselben Pendels doch isochron bleiben, und die Schwingungszeiten verschieden langer Pendel würden sich noch immer wie die Quadratwurzeln ihrer Länge verhalten. Die absolute Dauer der Oscillationen ändert sich aber mit der Intensität der Schwerkraft. Dasselbe Pendel wird schneller oscilliren müssen, wenn die Intensität der Schwerkraft wächst, und langsamer, wenn sie abnimmt.

Fig. 156.



Eine solche Aenderung der Oscillationsdauer wird beobachtet, wenn man ein Pendel in verschiedene geographische Breiten schwingen lässt. Um in einem Vorlesungsexperiment den Einfluss der Aenderung der beschleunigenden Kraft zu demonstriren, hat E. Mach den in Fig. 157 abgebildeten Apparat construirt. Der Rahmen RR ist um ein Charnier bei C drehbar, kann geneigt und umgelegt werden; hierdurch wird das an steifen Stäben aufgehängte Pendel P genöthigt, in schief stehenden Schwingungsebenen zu schwingen. Der Gradbogen G dient zur Messung und Festklemmung der geneigten Lage. Bei derselben kommt von der ganzen Schwerkraft von vornherein nur eine Componente von der Grösse $g \cos \beta$ zur Wirkung, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, um welchen die Schwingungsebene aus ihrer ursprünglich senkrechten Lage gedreht wurde. Die Schwingungsdauer des geneigten Pendels verhält sich dann zu jener des senkrechten wie 1 zu $\sqrt{\cos \beta}$.

Die sämmtlichen aufgeführten Pendelgesetze sind in der einen Formel für die Schwingungsdauer enthalten:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

worin t die Dauer einer Schwingung hin oder zurück, l die Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwere bedeuten. Wir gelangen zu dieser Formel, welche ebenfalls nur für kleine Schwingungsbögen angenähert gilt, aus der Formel 3) des §. 44:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}}$$

indem wir für r und φ ihre Werthe einsetzen. Aus Fig. 158 ersieht man, dass der senkrechte Abstand cd gegeben ist durch $cb \,.\, \sin\beta = l \sin\beta$.

Fig. 157.

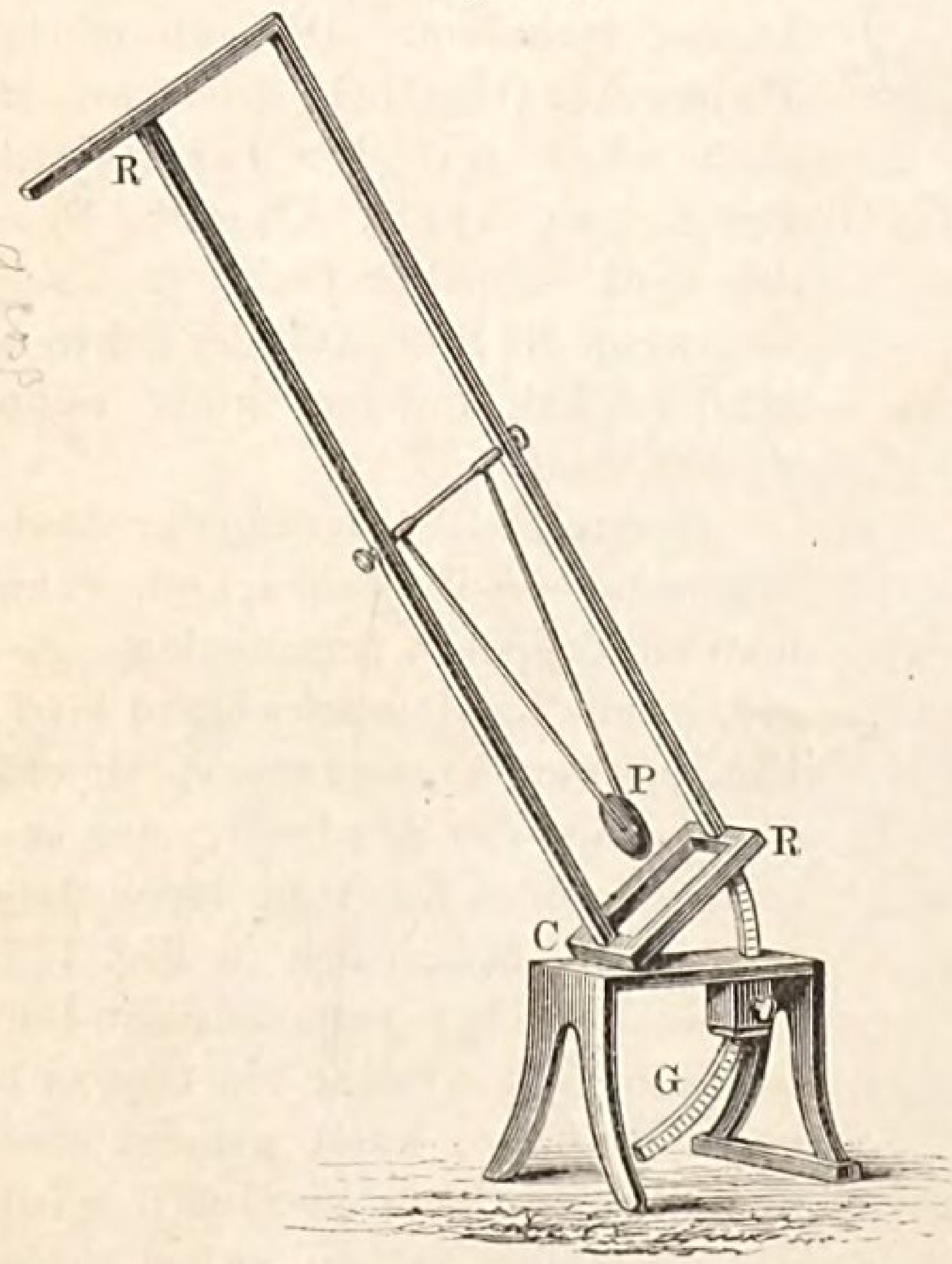
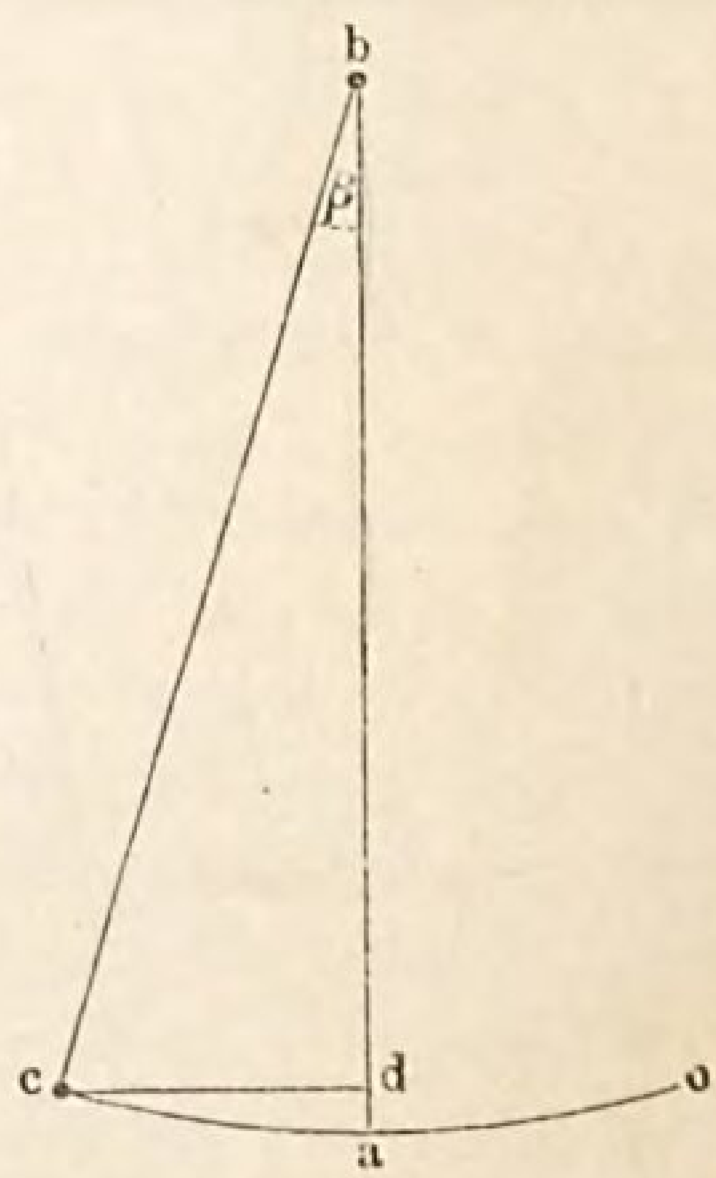


Fig. 158.



Die Beschleunigung in c ist gegeben durch $g \,.\, \sin\beta$. Da wir nun angenähert statt des Bogens ac die Senkrechte cd setzen dürfen, so erhalten wir:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} = \pi \sqrt{\frac{l \sin\beta}{g \sin\beta}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die genaue Formel der Schwingungsdauer ist nur durch ein elliptisches Integral auszudrücken. In Form einer Reihe ausgedrückt, ist diese Schwingungsdauer bei einem Ausschlagswinkel $= \alpha$:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots\right]$$

Dabei genügen fast immer die ersten beiden Glieder innerhalb der Klammer.

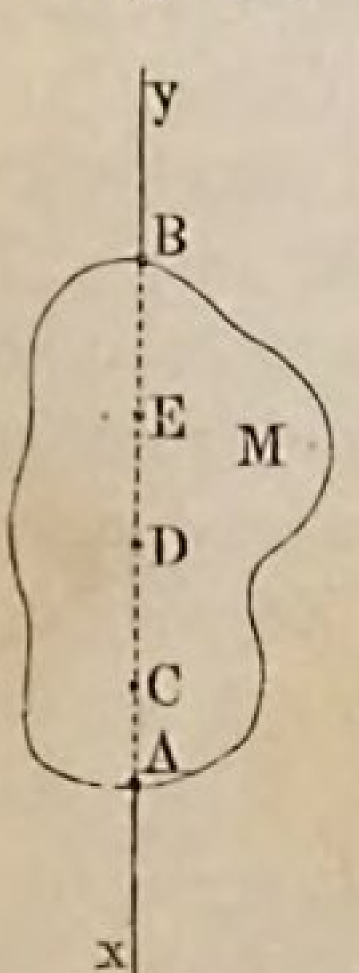
Diese Formel können wir hier nicht ableiten.

Zweites Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen fester Körper.

Zusammensetzung zweier in einer Ebene liegender Componenten, welche an fest verbundenen Punkten angreifen. 45 Bei den bisherigen Betrachtungen über die Bewegung der Körper dachten wir, strenge genommen, immer nur an einen materiellen Punkt; oder wir liessen wenigstens die übrigen materiellen Punkte des Körpers ausser Acht, weil ihre Bewegung genau dieselbe war, wie die des betrachteten Punktes.

Fig. 159.



Es ist nun aber der Fall ins Auge zu fassen, dass zwei Kräfte nicht auf ein und denselben Punkt, sondern auf zwei verschiedene, mit einander starr verbundene Punkte eines Körpers wirken. Einen festen Körper können wir hier als ein System von mehreren mit einander starr verbundenen materiellen Punkten ansehen. Die Punkte, auf welche die Kräfte unmittelbar wirken, heissen die Angriffspunkte derselben.

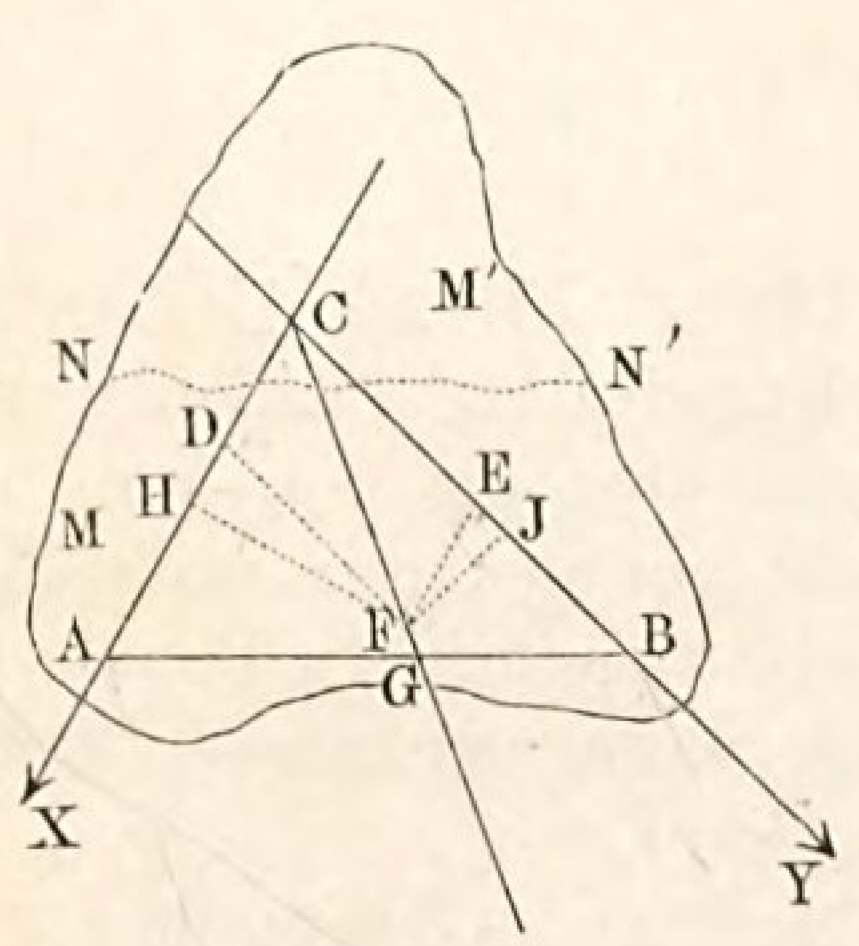
Es ist sofort einleuchtend, dass ausser dem einen Angriffspunkte, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt, auch alle jene Punkte des festen Körpers, welche in der Richtung der Kraft liegen, ebenfalls als Angriffspunkte betrachtet werden können. Wenn z. B. an dem festen Körper M, Fig. 159, im Punkte A eine Kraft angreift, welche nach x oder nach y gerichtest it, so ist die Wirkung dieselbe, wie wenn dieselbe Kraft in irgend einem Punkte der Richtung xy, z. B. in B, C, D oder E angreifen würde. Dabei wird nur vorausgesetzt, dass diese Punkte wirklich starr und unverschiebbar verbunden, also nicht etwa elastischer Bewegungen gegen einander fähig seien.

Auf diesen Satz von der Verlegung des Angriffspunktes gestützt, können wir sofort daran gehen, einige weitere Sätze abzuleiten über die gemeinschaftliche Wirkung zweier Kräfte, welche an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angebracht werden.

I. Zusammensetzung zweier in einer Ebene wirkender Componenten, welche, unter einem Winkel gegen einander gerichtet, zwei verschiedene Punkte eines festen Körpers angreifen.

Auf die Punkte A und B des festen Körpers MM', Fig. 160, seien in der Richtung und mit der Grösse AX und BY zwei Kräfte wirksam. Die Wirkung dieser Kräfte bleibt unverändert, wenn dieselben statt in A und B in dem Durchscheidungspunkte C angreifen. Ihre Resultirende muss daher, wie bisher, durch das Kräftenparallelogramm gefunden werden, welches wir construiren, indem wir $CD = AX$, $CE = BY$ abschneiden, die Parallelen DF und EF, endlich die Diagonale CF ziehen, deren Verlängerung die Richtung der resultirenden Kraft angiebt. Ihre Grösse ist gleich CF und als ihr Angriffspunkt kann jeder Punkt des Körpers, der in der Richtung von CF liegt, angesehen werden. Wir dürfen also diesen Angriffspunkt auch in dem Punkte G annehmen, wo die Resultirende die Gerade AB schneidet.

Fig. 160.



An diesem Resultate würde offenbar Nichts geändert, wenn man von dem Körper längs der Linie NN' ein Stück abtrennen würde, wodurch der Punkt C ausserhalb des angegriffenen Körpers fallen würde, denn da die starre Verbindung der übrigen Punkte des angegriffenen Körpers dieselbe bleibt, so muss auch die Lage und Grösse der Resultirenden dieselbe bleiben.

Ziehen wir nun die Hülfslinien $FH \perp CA$ und $FJ \perp CB$, so sind die Dreiecke DHF und EJF ähnlich und es gelten somit die Proportionen:

$$\begin{aligned} FH : FJ &= DF : EF \\ &= CE : CD \\ &= BY : AX \end{aligned}$$

Ebenso wie die senkrechten Abstände FH und FJ verhalten sich aber offenbar alle senkrechten Abstände irgend eines anderen Punktes der Resultirenden von den Richtungen der Componenten.

Daraus folgt also der Satz:

Die senkrechten Abstände irgend eines Punktes der Resultirenden von den Richtungen der Componenten verhalten sich verkehrt wie die Grössen dieser Componenten.

Durch Gleichsetzung der Producte der äusseren und der inneren Glieder dieser verkehrten Proportion kann man diesem Satze auch die folgende Form geben:

Das Product aus dem senkrechten Abstande irgend eines Punktes der Resultirenden von der Richtung der Componente mit der Grösse der letzteren ist beiderseits gleich gross.

Dieses Resultat gilt, wie begreiflich, ebenso für zwei Geschwindigkeits- wie für zwei Kraftcomponenten.

Das Product einer Kraft mit dem senkrechten Abstande eines Punktes von der Richtung dieser Kraft wird das statische Moment oder das Drehungsmoment dieser Kraft in Bezug auf die durch den Punkt gehende Achse, welche auf der Ebene der Kraft und des Punktes senkrecht steht, genannt.

II. Zusammensetzung zweier paralleler Componenten, welche, nach derselben Seite gerichtet, an zwei Punkten eines festen Körpers wirken.

Denken wir uns in Fig. 160 die in A und B angreifenden Componenten allmälig in parallele Lage gebracht, so rückt der Punkt C ins Unendliche hinaus und die Resultirende wird parallel zu den Componenten. Der senkrechte Abstand irgend eines Punktes der Resultirenden von einer Componente wird zum constanten Abstande zwischen diesen beiden Geraden. Endlich wird die Grösse der Resultirenden, d. i. die Diagonale des Parallelogramms, für diesen Fall gleich der Summe der Componenten.

Wir fassen dies in den Satz zusammen:

Die Resultirende zweier paralleler an zwei fest verbundenen Punkten nach derselben Seite wirkender Kräfte (Geschwindigkeiten) ist der Grösse nach gleich der Summe der Componenten, ihrer Richtung nach den letzteren parallel und so gelegen, dass die Producte ihrer Abstände von den Componenten mit der Grösse der letzteren beiderseits gleich sind.

Um also beispielsweise die Resultirende der beiden parallelen Componenten AX und BY zu finden, welche die Punkte A und B, Fig. 161 (a. f. S.) angreifen, theilen wir den Abstand AB im Punkte C so, dass $AC \,.\, AX = BC \,.\, BY$ und ziehen $CZ = AX + BY$ parallel zu letzteren. Zieht man Ca und Cb senkrecht auf die Richtungen der Componenten, so geben auch diese senkrechten Abstände, multiplicirt mit ihren zugehörigen Componenten, gleiche Producte auf beiden Seiten.

Da, wie ersichtlich, die Lage des Punktes C nur vom Grössenverhältnisse und nicht von der Richtung der parallelen Componenten ab-

hängt, so bleibt C der Angriffspunkt der Resultirenden für alle beliebigen (unter sich parallelen) Richtungen der Componenten.

Man nennt den Punkt C den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** (Geschwindigkeiten).

III. Zusammensetzung zweier paralleler Componenten, welche an zwei fest verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Richtung wirken.

Es seien A und B, Fig. 162, die festverbundenen Punkte, an denen Kräfte (Geschwindigkeiten) angebracht werden, welche der Grösse und Richtung nach durch die Stücke AX und BY vorgestellt werden. Es sei beispielsweise BY viermal so gross als AX. Wir zerlegen zunächst die Componente BY, welche die grössere ist, in zwei andere, deren eine, gleich gross mit AX aber entgegengesetzt gerichtet, in A angreift, die

Fig. 161.

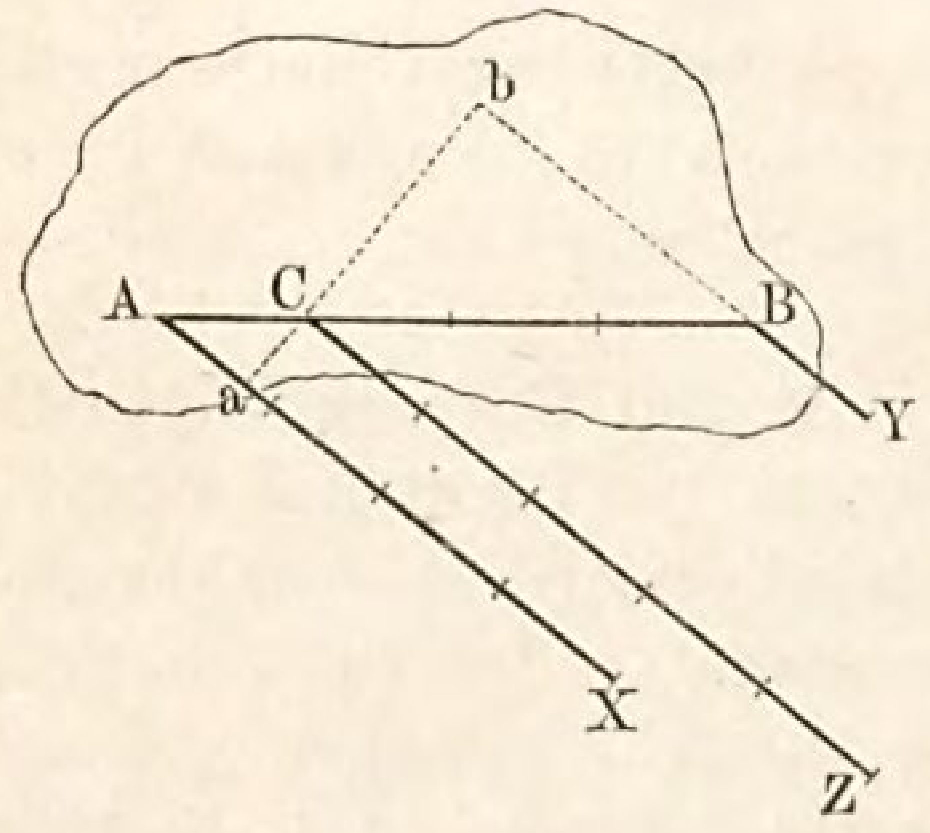
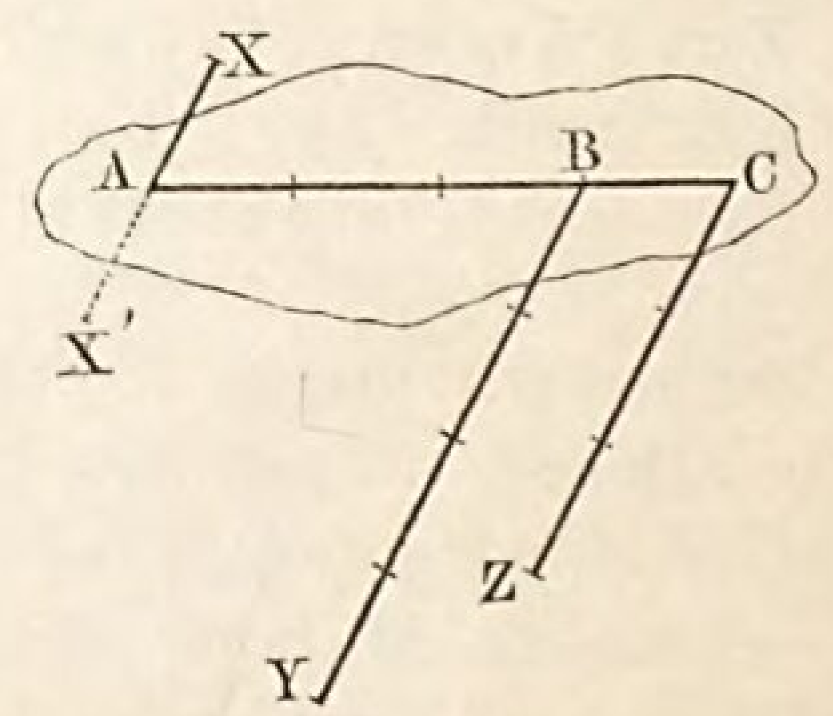


Fig. 162.



andere CZ, gleich der Differenz $BY - AX$, muss dann in einem Punkte C angreifen, welcher so liegt, dass $AB : CB = CZ : AX$ ist, also in unserem Beispiele muss $BC = \frac{1}{3}\, AB$ sein. Nach Anbringung der Componenten AX' und CZ können wir uns die Componente BY entfernt denken, da sie vollständig ersetzt ist. Nun heben sich aber die Componenten AX und AX' gegenseitig auf. Es bleibt also schliesslich die Resultirende CZ übrig. Wir erhalten daher den Satz:

Die Resultirende zweier paralleler an fest verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Seite wirkender Kräfte (Geschwindigkeiten) ist der Grösse nach gleich der Differenz der Componenten, der Richtung nach parallel und gleich gerichtet mit der grösseren Componente und so gelegen, dass ihre Abstände von den Componenten multiplicirt mit deren Grösse gleiche Producte geben.

In den beiden durch die Figuren 161 und 162 dargestellten Fällen ist sofort ersichtlich, dass gar keine Bewegung erfolgen kann, wenn in dem Punkte C, welcher als Angriffspunkt der Resultirenden erscheint

eine dieser letzteren gleiche, aber entgegengesetzte Componente angebracht wird. Diese Componente kann aber auch durch einen Widerstand ersetzt werden, welcher den Punkt *C* an der Bewegung überhaupt hindert; es ist dann die Bewegung des ganzen Körpers verhindert.

Drehpaare; deren Eigenschaften und Zusammensetzung. 46 Im vorausgehenden Paragraphen wurde gezeigt, dass zwei parallele, nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Componenten im Allgemeinen eine Resultirende haben, welche in der Richtung der grösseren Componente mit der Differenz der Componenten wirksam ist. Durch Hinzufügung einer dieser Resultirenden gleichen entgegengesetzten Componente oder durch Feststellung ihres Angriffspunktes kann die Bewegung des Körpers verhindert werden.

In dem einen speciellen Falle jedoch, in welchem die ursprünglichen Componenten gleich gross und entgegengesetzt sind, erhält man zwar für die Resultirende den Werth Null, aber trotzdem kann der Körper

Fig. 163.

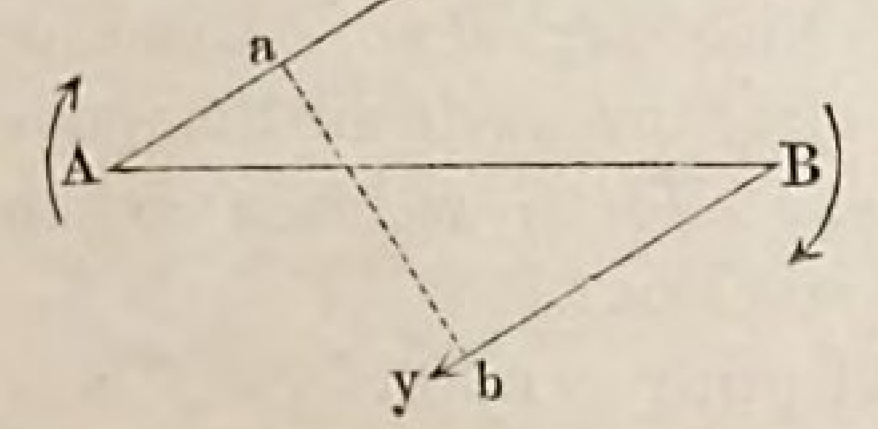
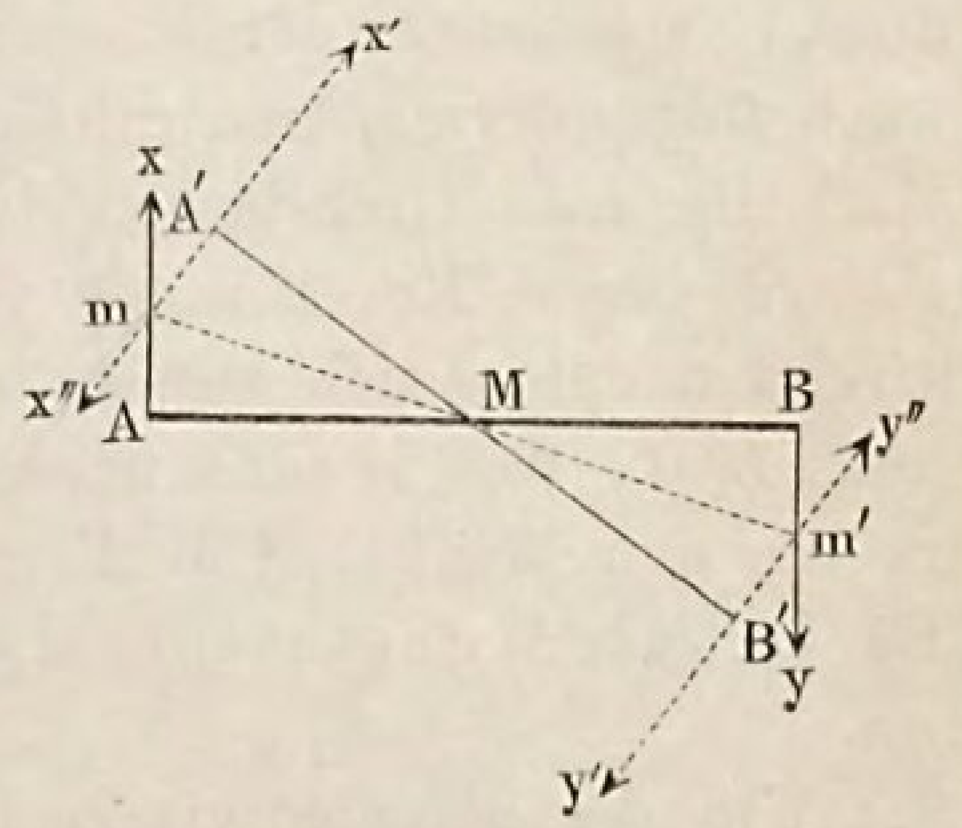


Fig. 164.



nicht in Ruhe bleiben, sondern er wird eine drehende Bewegung annehmen, Fig. 163. Es giebt dann keine einzelne Gegenresultirende, mit der man die Bewegung aufheben könnte, auch keinen einzelnen Punkt, durch dessen Feststellung man die Bewegung verhindern könnte.

Zwei solche gleiche und entgegengesetzte Componenten werden ein Componentenpaar (Geschwindigkeitspaar, Kräftepaar) oder auch kurz ein Drehpaar (Drehzwilling) genannt. Ihr senkrechter Abstand *ab*, Fig. 163, heisst der Arm des Drehpaares. Das Product aus dem Arm und der Grösse einer der Componenten heisst das Moment des Drehpaares. Ist also eine der beiden Componenten der Grösse nach $= P$, ihr Abstand $= d$, so ist $P \cdot d$ das Moment des Drehpaares. Mit der Bezeichnung Drehpaar $(P \cdot d)$ soll ausgedrückt sein ein Drehpaar, bestehend aus zwei Componenten von der Stärke P im Abstand d.

Ein solches Drehpaar hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass es ohne Aenderung der Wirkung in seiner Ebene gedreht, parallel mit sich selbst verschoben, ja sogar in eine

mit der ursprünglichen Ebene fest verbundene parallele Ebene übertragen werden kann, dass ferner seine Componenten oder sein Arm geändert werden dürfen, wenn nur ihr Product, also ihr Moment und ausserdem die Drehungsrichtung unverändert bleiben.

Wir wollen diese Behauptung durch eine Reihe von Betrachtungen ableiten.

1. Aus Fig. 163 ist ersichtlich, dass man den beiden Angriffspunkten A und B die Punkte a und b, welche durch eine senkrechte Verbindungslinie erhalten werden, substituiren und dadurch das schiefwinklige Drehpaar in ein rechtwinkliges von gleichem Moment verwandeln kann.

2. In Fig. 164 sei AB der Arm des rechtwinkligen Drehpaares mit den Componenten Ax und By. Ziehen wir durch die Mitte M eine beliebig geneigte Gerade $A'B' = AB$, welche ebenfalls in M halbirt wird, so wird offenbar die Wirkung nicht geändert, wenn wir in den Endpunkten A' und B' die gleichen und entgegengesetzten Componenten $A'x'$, $A'x''$ und $B'y'$, $B'y''$ anbringen, welche sich gegenseitig aufheben. Sind diese Componenten der Grösse nach gleich Ax und By, so können wir aber auch folgendermaassen die Gesammtwirkung bestimmen: Ax giebt mit $A'x''$ eine Resultirende von der Richtung Mm, ebenso By mit $B'y''$ eine ebenso grosse Resultirende von der Richtung Mm'. Diese beiden Resultirenden heben sich auf, es bleiben also nur noch die Componenten $A'x'$ und $B'y'$, welche das neue Drehpaar bilden, welches gegen das frühere um den Winkel AMA' gedreht erscheint.

Es ist also gestattet, das Drehpaar um seine Mitte zu drehen.

3. Um die perspectivische Darstellung zu erleichtern, wollen wir in Fig. 165 zwei mit einander parallele Ebenen als die oberen Flächen zweier neben einander liegender Prismen darstellen. Auf der tiefer liegenden Ebene befinde sich das rechtwinklige Drehpaar Ax und By an dem Arm AB. Es soll gezeigt werden, dass sich dasselbe ohne Aenderung der Wirkung an die Kante der oberen Ebene übertragen lasse.

Wir denken uns an dieser Kante die Gerade $A'B'$ gleich und parallel AB gezogen, an den Endpunkten A' und B' je zwei darauf senkrechte Componenten gleich und parallel mit Ax und By angelegt. Es ist klar, dass diese vier Componenten, $A'x'$, $A'x''$, $B'y'$, $B'y''$, sich gegenseitig aufheben, also ohne Wirkung sein müssen.

Ziehen wir nun die Hülfslinien AB' und BA'; dieselben müssen sich in einem Punkte M schneiden und gegenseitig halbiren, denn $ABB'A'$ sind die Ecken eines Parallelogramms.

Combiniren wir nun die Componenten Ax mit $B'y''$, dann By mit $A'x''$, so geben diese Combinationen je eine an M wirkende horizontale Resultirende von doppelter, unter sich gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung. Es fallen somit die Wirkungen von Ax, By'' $B'y$, $A'x''$

als sich gegenseitig aufhebend fort, und bleiben nur noch die Componenten $A'x'$ und $B'y'$ übrig, welche das übertragene Drehpaar bilden. Es ist somit erwiesen, dass eine solche Uebertragung in eine parallele Ebene an der Wirkung eines Drehpaares nichts ändern kann.

4. Das Drehpaar mit dem Arm AB und den Componenten Ax und By, Fig. 166, soll ersetzt werden durch ein gleich wirkendes, dessen Arm BC ist. Wir setzen an die Punkte B und C beiderseits die gleich grossen Componenten Bz', yz''', Cz'', Cz an, deren Grösse so bemessen ist, dass $Cz : By = AB : BC$. Unter dieser Bedingung halten sich dann die Componenten Ax und Cz'' zusammen einerseits und Bz''' andererseits das Gleichgewicht, so dass sie also ohne Aenderung der Wirkungen fortgelassen werden können. Es bleiben mithin die Componenten Bz' und Cz, welche mit dem Arm BC das neue Drehpaar bilden. Da $Cz \,.\, BC = AB \,.\, By$, so hat dieses Drehpaar dasselbe Moment wie das frühere.

Es können also Drehpaare durch andere von gleichem Momente und gleicher Drehrichtung, welche in derselben oder

Fig. 165.

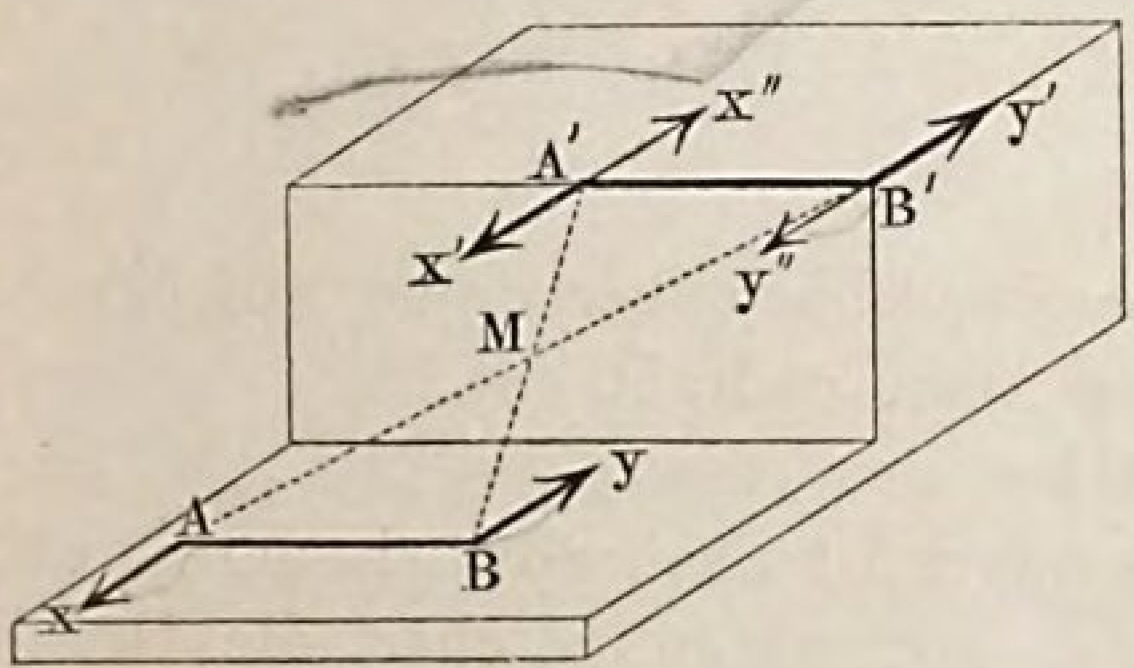
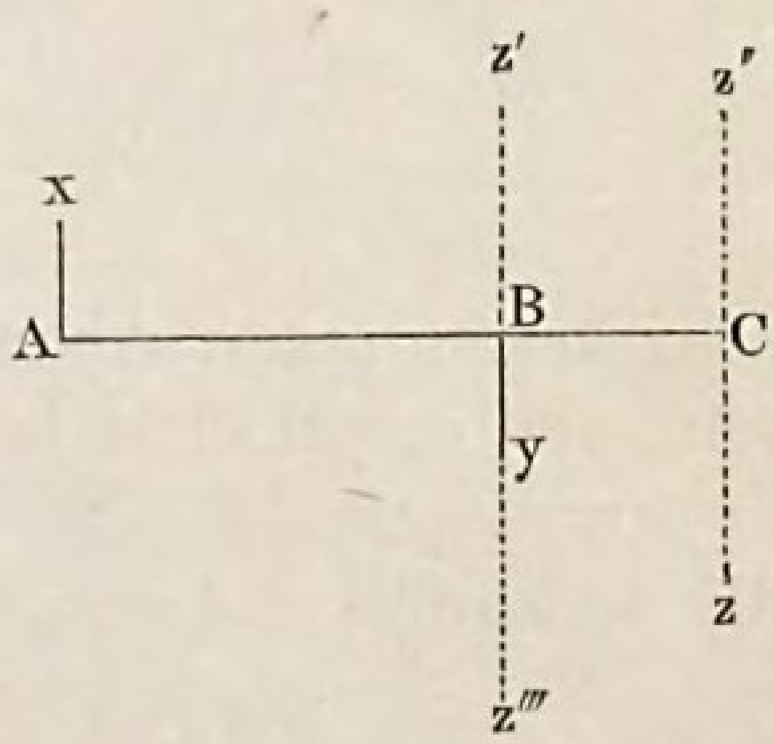


Fig. 166.



in einer parallelen Ebene liegen, für einander gesetzt werden. Drehpaare, deren Arm $= 1$ genommen ist, heissen reducirte Drehpaare. Um ein Drehpaar vom Arme d und den Componenten P in ein reducirtes von gleichem Momente zu verwandeln, bringt man am Arm $= 1$ Componenten von der Grösse $= Pd$ an.

Drehpaare, welche einander ersetzen können, heissen äquivalent. Aequivalente Drehpaare haben daher stets drei Stücke mit einander gemein. Erstens gleiches Moment, zweitens gleiche Drehrichtung, drittens gleiche Lage der Ebene, d. h. ihre Ebenen müssen parallel sein.

Eine sehr einfache und zweckmässige Methode, verschiedene Drehpaare darzustellen, ist folgende: Man bezeichnet die Lage der Ebene des Drehpaares durch eine auf dieser Ebene errichtete Senkrechte. Die Richtung der Drehung bezeichnet man dadurch, dass man diese Senkrechte von der Ebene an nach jener Seite zieht, von welcher gesehen die Drehung rechtsläufig (wie ein Uhrzeiger) gesehen wird. Endlich bezeichnet man die Grösse des Moments durch die Länge der Senkrechten. Diese letztere wird dann die Achse des Drehpaares

genannt, womit aber noch durchaus nicht gesagt sein soll, dass um diese Achse die Drehung des Körpers erfolgen müsse.

Der Vortheil dieser Darstellung eines Drehpaares durch seine Achse besteht darin, dass man, um zwei oder mehrere Drehpaare zusammenzusetzen, einfach ihre Achsen zusammensetzen kann, wie wenn es Kraft- oder Geschwindigkeitscomponenten wären. Die resultirende Achse ist die Achse des resultirenden Drehpaares.

Zusammensetzung parallelachsiger Drehpaare. Es seien in Fig. 167 in perspectivischer Zeichnung (wobei die Dimensionen von vorn nach rückwärts etwa auf $^1/_3$ verkürzt erscheinen) zwei Drehpaare dar-

Fig. 167.

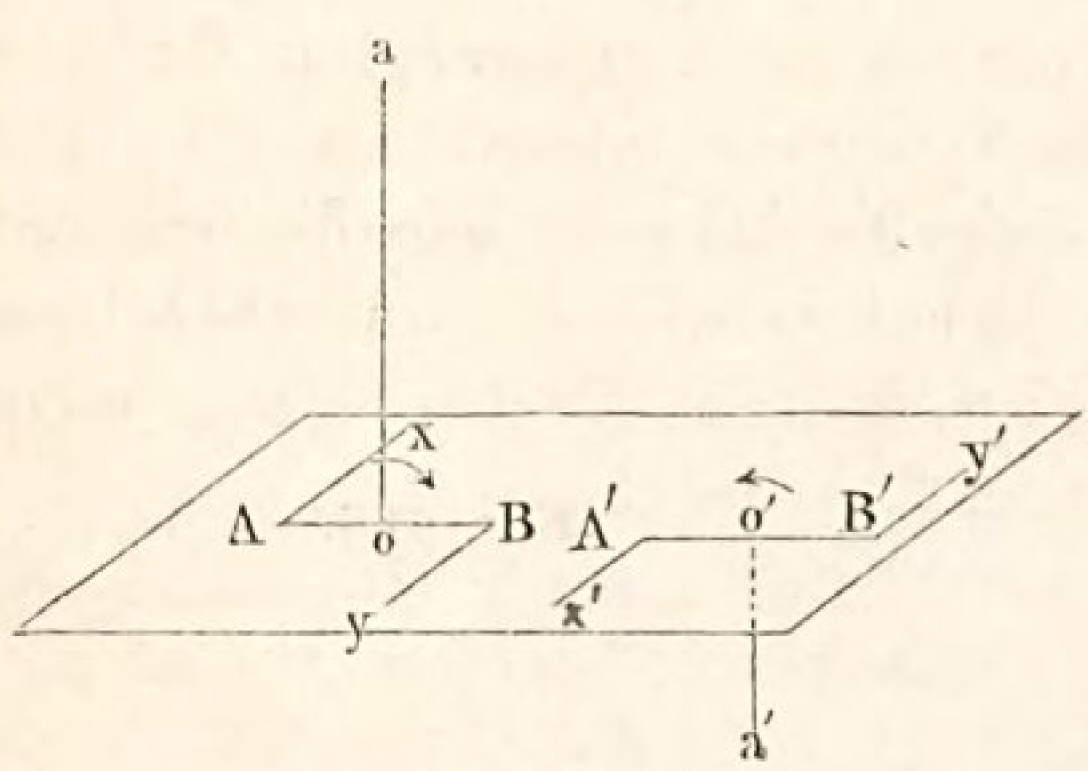
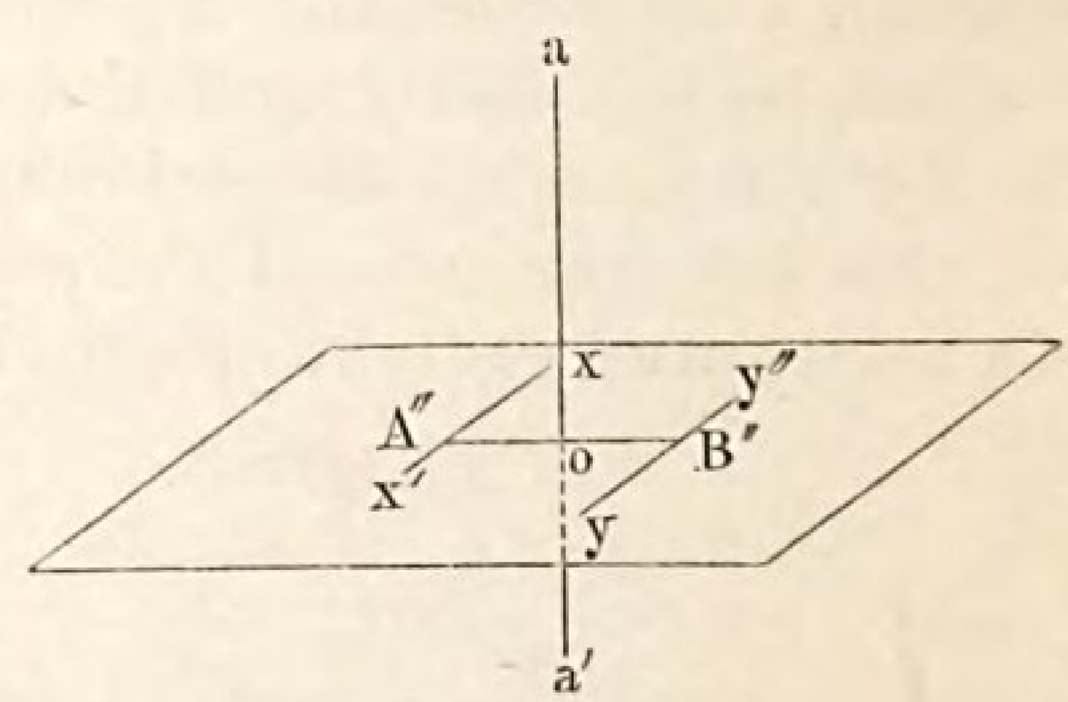


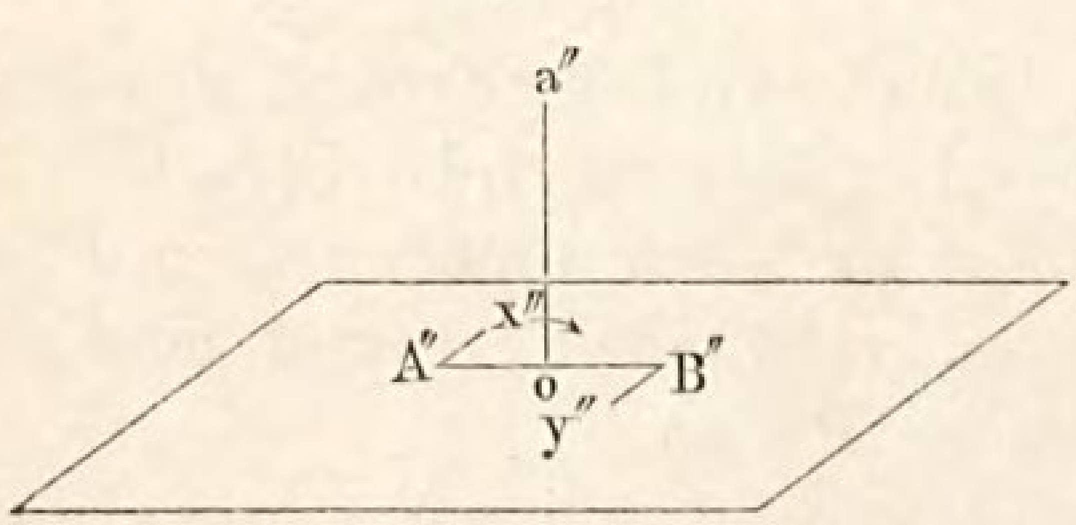
Fig. 168.



gestellt, welche man zuvor auf dieselbe Ebene übertragen, auf den Arm 1 reducirt und in parallele Lage der Arme gedreht hat.

$oa = Ax = By$ ist die Achse des einen, $o'a' = A'x' = B'y'$ ist die Achse des anderen. Die letztere ist nach abwärts gerichtet, weil von unten gesehen die Drehungsrichtung rechtläufig erscheint.

Fig. 169.



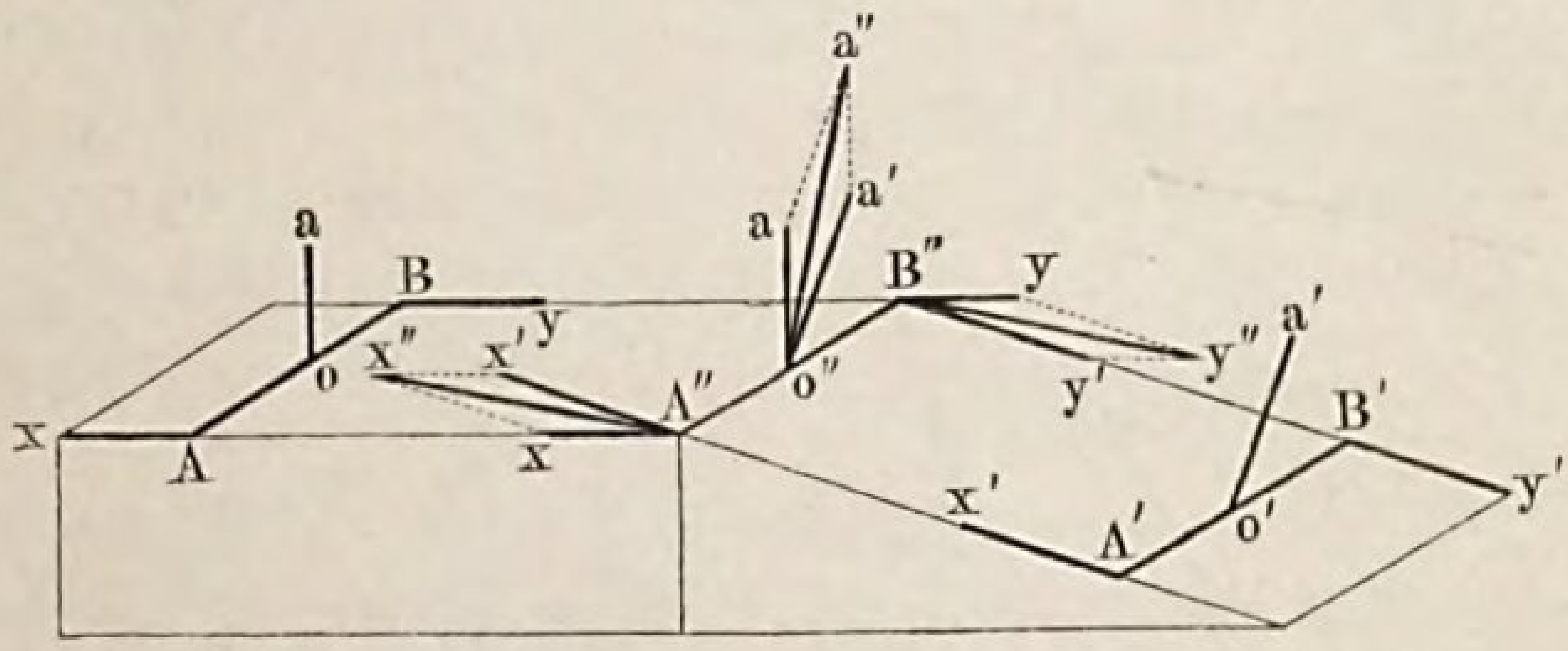
Durch Verschiebung kann man nun die beiden Drehpaare so zusammenlegen, dass die Achsen in eine Gerade fallen, Fig. 168. Ebenso fallen die Componenten an den Enden mit gleichen Buchstaben in je eine Gerade. Die Resultirenden dieser Componenten sind daher gleich ihrer algebraischen Summe (hier in Folge entgegengesetzten Zeichens ist zu subtrahiren). Folglich muss auch die Achse des resultirenden Drehpaares, Fig. 169, gleich sein der algebraischen Summe der Achsen der zusammenzusetzenden Paare. (Die nach abwärts gerichtete Achse ist negativ in Rechnung zu bringen.)

Ebenso können eine beliebige Anzahl von parallelachsigen Drehpaaren zusammengesetzt werden, indem man die sämmtlichen Achsen mit dem Anfangspunkte zusammenlegt und algebraisch summirt.

Zusammensetzung von Drehpaaren, deren Achsen gegen einander geneigt sind.

Es seien in Fig. 170 gegeben das in horizontaler Ebene gelegene Drehpaar AB mit der verticalen Achse oa und das auf der schiefen Ebene gelegene Drehpaar $A'B'$ mit der Achse $o'a'$. Beide Drehpaare seien zuvor auf den Arm 1 reducirt und so gedreht, dass ihre Arme mit der Durchschnittskante der beiden Ebenen parallel liegen. Verschiebt man dann beide Arme in die Kante, so erhalten die Componenten die Lagen $A''x$, $A''x'$, $B''y$, $B''y'$, deren Resultirende $A''x''$ und $B''y''$ durch Construction des Kräftenparallelogramms erhalten werden. Die Ebene des resultirenden Drehpaares ist nun die durch die Punkte x'', A'', B''

Fig. 170.



und y'' zu legende Ebene. Die Achse des resultirenden Drehpaares ist die Gerade $o''a''$, welche auf der obigen Ebene senkrecht steht und die Länge $= A''x'' = B''y''$ besitzt. Man ersieht aber sofort, dass wir diese resultirende Achse aus den früheren Achsen $o''a$ und $o''a'$ direct erhalten können, indem wir mit denselben das Kräftenparallelogramm $o''a\,a''a'$ construiren und dessen Diagonale ziehen.

Daraus folgt also, dass man mit den Achsen der Drehpaare ganz ebenso operiren kann wie mit Kraftcomponenten, indem man sie nach Analogie des Kräftenparallelogramms zusammensetzt.

Zusammensetzung beliebiger, einen starren Körper angreifender Kraftcomponenten. Mit Hülfe der in den beiden vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze ist man nun im Stande, für eine beliebige Anzahl von Kraftcomponenten (Geschwindigkeitscomponenten), welche in beliebiger Grösse und Richtung auf fest verbundene Punkte eines Körpers wirken, die Resultirende abzuleiten. 47

Man verfährt dabei in folgender Weise: Man wählt einen beliebigen Punkt des Körpers O und denkt sich an demselben eine Anzahl von Componenten angebracht, welche sowohl an Anzahl als auch an Grösse und Richtung mit jenen Componenten übereinstimmen, welche ursprünglich gegeben sind. Ausser diesen denkt man sich dann noch eine gleiche

Anzahl von Componenten gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung angebracht. Es ist klar, dass durch diese beiden Systeme gleichgerichteter und entgegengerichteter Componenten Nichts geändert wird, da sie unter sich im Gleichgewicht stehen. Nun verbindet man in bekannter Weise die sämmtlichen an O angebrachten mit den ursprünglichen Componenten gleich gerichteten unter sich zu einer Resultirenden Oz. Es bleiben dann noch eine Anzahl von Drehpaaren übrig, die man auf den Arm 1 reducirt und nach und nach zu je zweien combinirt, wie im vorausgehenden Paragraphen gezeigt wurde. Zuletzt bleiben dann die Resultirende Oz und ein Drehpaar übrig, welche beide auch den Werth Null annehmen können.

Es folgt daraus, dass eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Kräfte im Allgemeinen eine fortschreitende und eine drehende Bewegung hervorbringen und dass jede Lagenänderung eines Körpers aus einer fort-

Fig. 171.

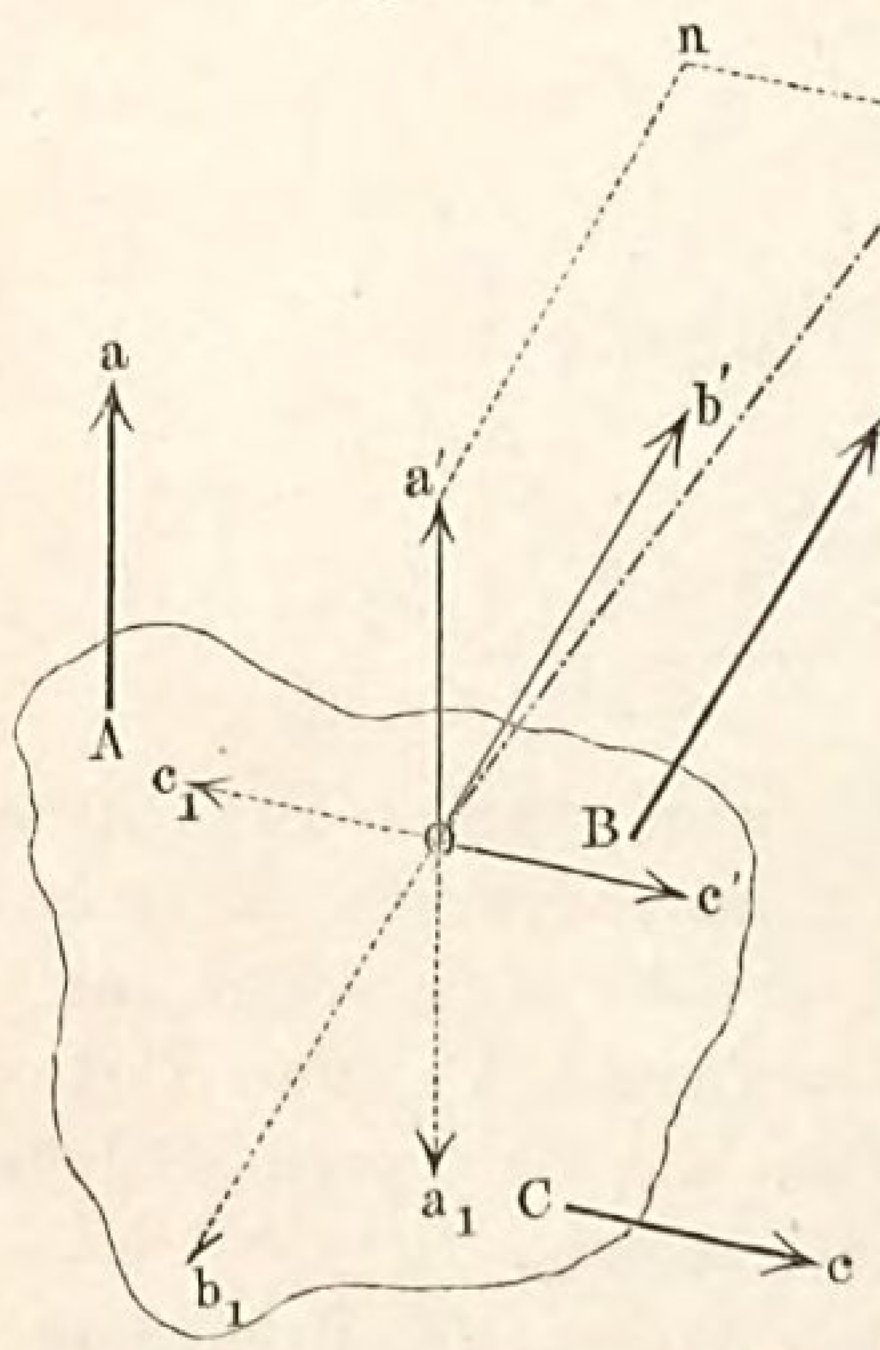
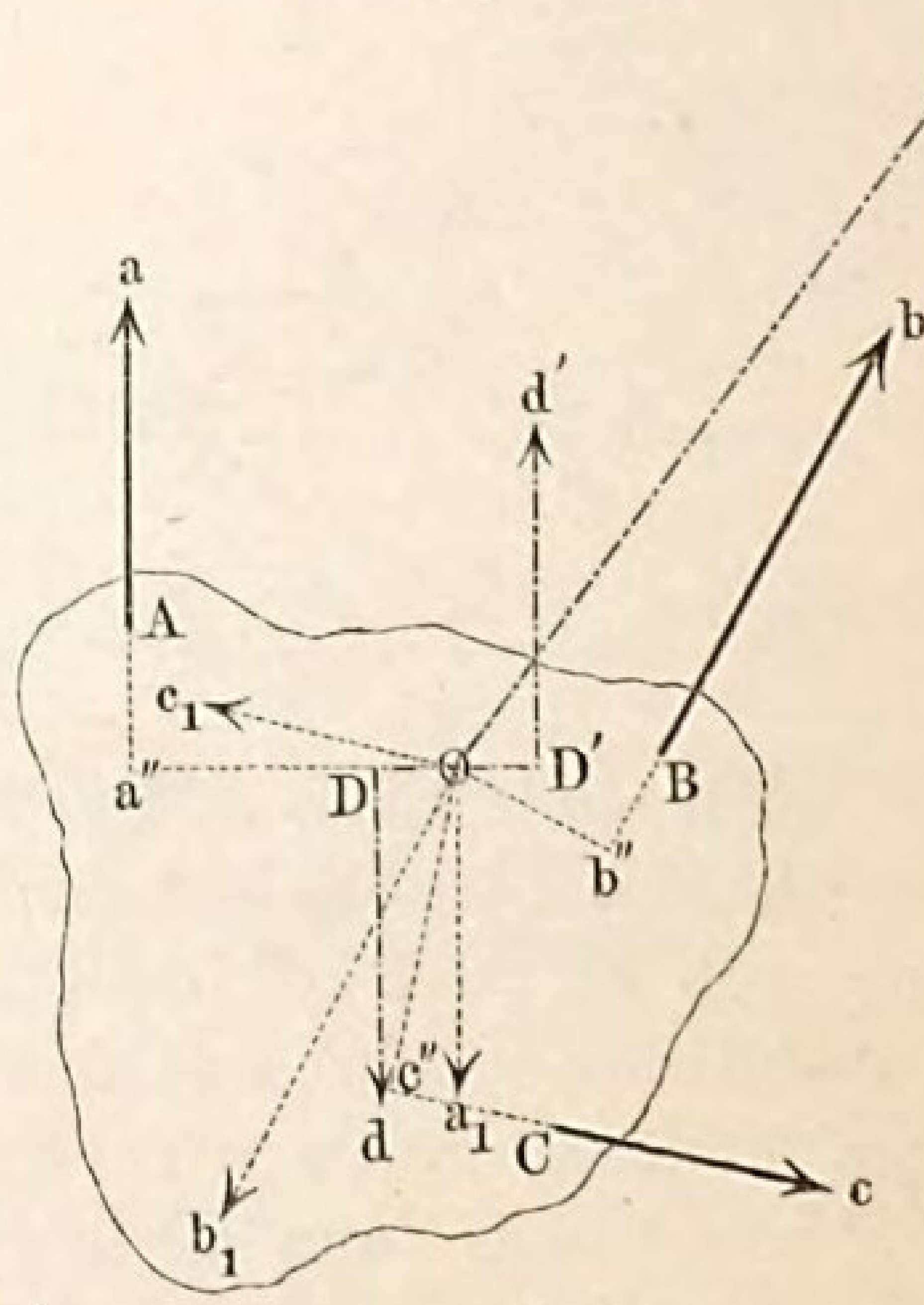


Fig. 172.



schreitenden und einer drehenden Bewegung zusammengesetzt werden kann.

Wir wollen, um die mitgetheilte Methode deutlicher auseinander zu setzen, ein Beispiel nehmen, bei welchem, um die Zeichnung nicht zu sehr zu compliciren, alle Componenten in einer Ebene sich befinden.

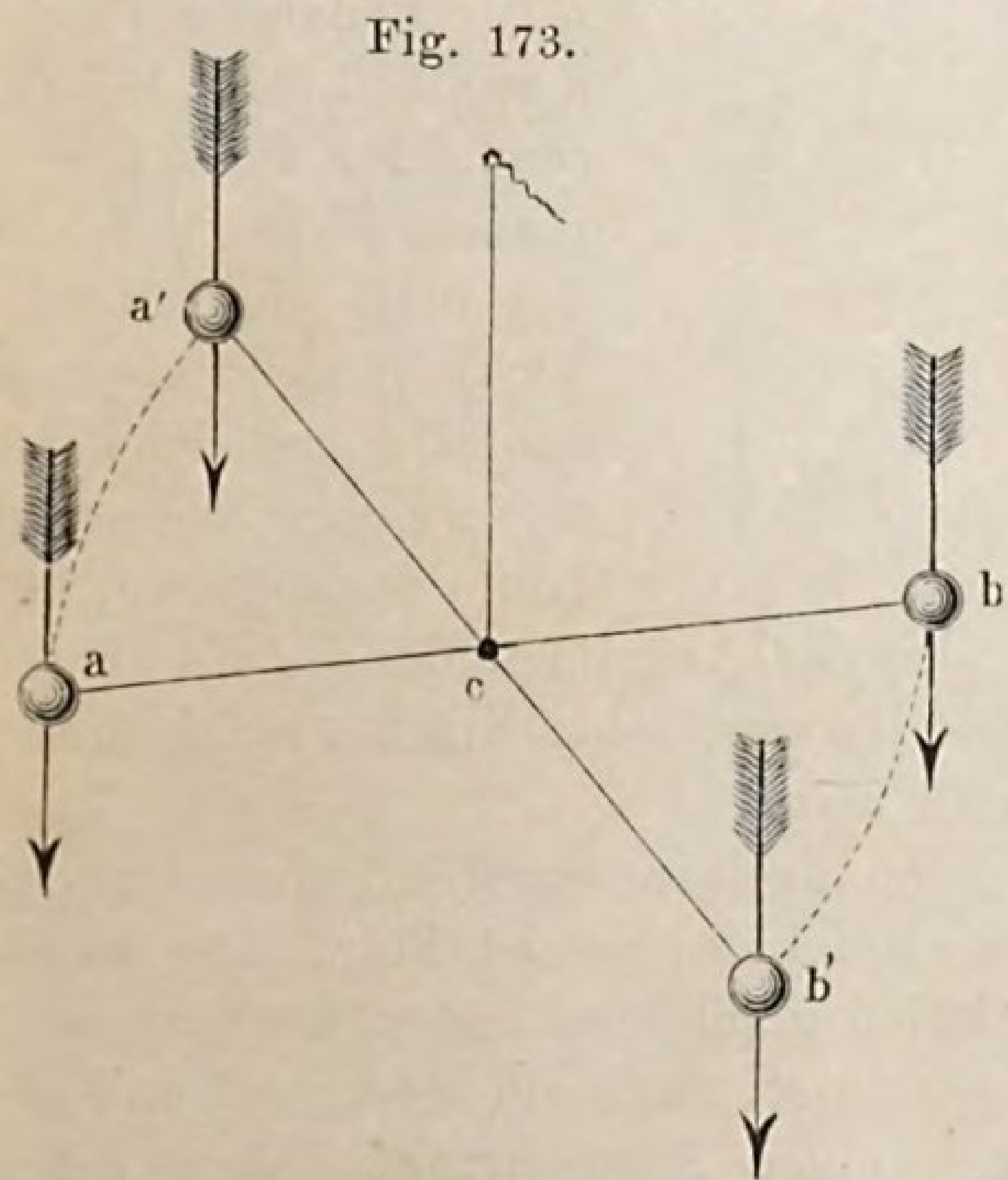
An den Punkten A, B und C des Körpers, Fig. 171, seien die Kräfte Aa, Bb und Cc nach der in der Zeichnung angegebenen Grösse und Richtung angebracht. Wir wählen willkürlich den Punkt O und bringen an demselben die Kräfte Oa', Ob' und Oc' parallel und gleich den früheren Kräften an, ausserdem noch die (gestrichelt ausgezogenen) entgegengesetzten Kräfte Oa_1, Ob_1 und Oc_1. Jetzt setzen wir Oa' mit Ob' zusammen, indem wir $a'n$ parallel zu Ob' und gleich lang wie dieses ziehen. Die (nicht ausgezogene) Resultirende On setzen wir mit Oc' zusammen, indem wir nz gleich und parallel Oc' construiren. Mit-

hin ist Oz die Resultirende der drei Kräfte Oa', Ob' und Oc'. Wir denken uns nun diese letzteren weggelöscht und es bleiben uns (Fig. 172) noch die Drehpaare Aa mit Oa_1, Bb mit Ob_1, Cc mit Oc_1 übrig. Die Figur zeigt, wie diese schiefen Drehpaare in rechtwinklige verwandelt werden können. Reducirt man hierauf noch alle drei Paare auf den Arm $DD' = 1$ und summirt sie mit Rücksicht auf das Zeichen, so bleibt endlich das nach links drehende Kräftepaar Dd und $D'd'$ am Arm DD' übrig, welches mitsammt der Resultirenden Oz alle ursprünglichen Kräfte zu ersetzen vermag. Damit ist aber noch nicht behauptet, dass der angegriffene Körper sich wirklich um den Punkt O drehen werde; denn dieser Punkt ist ja ganz willkürlich gewählt. Unsere Ableitung giebt nur resultirende Kräfte, die den ursprünglich vorhandenen an Wirkung gleich sind; welche Bewegung durch sie entsteht, hängt noch von anderen Umständen (von der Anordnung der Masse des Körpers oder von der Lage seiner Drehachse) ab.

Soll der Körper in vollständiger Ruhe bleiben, d. h. sollen die sämmtlichen Componenten mit einander im Gleichgewicht stehen, so muss sowohl die Resultirende der parallel zu sich in einen beliebigen gemeinsamen Angriffspunkt versetzten Kräfte = 0 sein, als auch das Moment des resultirenden Drehpaares = 0 sich ergeben.

Schwerpunkt. Jeder feste Körper, z. B. ein Stein, ein Stück 48
Holz etc., besteht aus einer gewissen Anzahl von Molekülen, welche in einer bestimmten gegenseitigen Lage zu einem Ganzen verbunden sind. Auf jedes dieser Moleküle wirkt die Schwere und treibt es mit einer gewissen Kraft gegen den Mittelpunkt der Erde hin. Die Richtung der Schwerkraft ist für alle Moleküle des Körpers dieselbe, er wird also durch eine Reihe unter sich paralleler Kräfte gegen die Erde getrieben. Die Resultirende (die Summe) aller dieser parallelen Elementarkräfte ist es, was wir das Gewicht des Körpers nennen*).

Fig. 173.



Der Angriffspunkt dieser Resultirenden wird der Schwerpunkt des Körpers genannt.

Die Lage dieses Schwerpunktes bleibt (in Beziehung auf den Körper

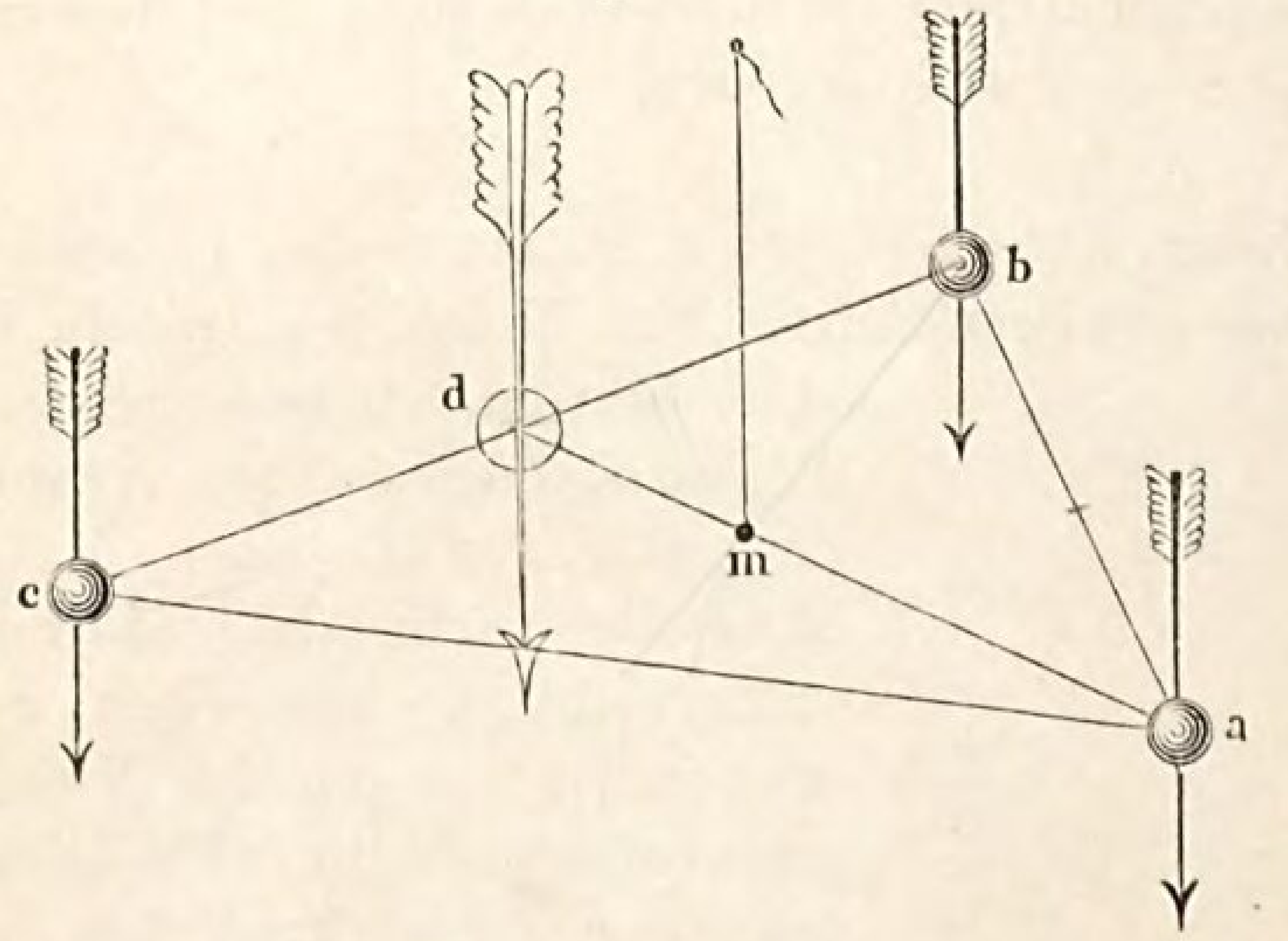
*) Vorausgesetzt, dass wir „Gewicht" als Kraft auffassen.

selbst) unveränderlich dieselbe, wie man den Körper auch drehen und wenden mag, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt.

Stellen wir uns vor, die beiden Punkte a und b (Fig. 173, a. v. S.) seien zwei gleich schwere, durch die gerade, feste, gewichtslose Linie ab verbundene Moleküle, so folgt aus dem in §. 45 abgeleiteten Satze vom Mittelpunkt der parallelen Kräfte, dass Gleichgewicht stattfinden muss, sobald nur der in der Mitte zwischen a und b liegende Punkt c unterstützt ist, welches auch der Winkel sein mag, welchen die Linie ab mit der Horizontalen macht. Findet also Gleichgewicht statt, wenn der Hebel die Lage ab hat, so bleibt es auch noch bestehen, wenn man ihn in die Lage $a'b'$ bringt. Der Punkt c ist der Schwerpunkt des aus den beiden schweren Molekülen a und b bestehenden Körpers. Ohne das Gleichgewicht zu stören, kann man die Wirkungen der Schwerkraft der beiden Moleküle im Schwerpunkte c vereinigt denken.

In jedem der drei Eckpunkte eines starren, gewichtslosen Dreiecks abc, Fig. 174, befinde sich ein Molekül, welches durch die Schwere mit einer Kraft p herabgezogen wird. Ohne das Gleichgewicht zu stören, können nun aber die beiden in c und b angreifenden Kräfte durch eine Kraft $2p$ ersetzt werden, welche in dem zwischen c und b in der Mitte liegenden Punkte d angreift. Die Resultirende der in d angreifenden Kraft $2p$ und der in a eingreifenden Kraft p geht aber jedenfalls durch den Punkt m, welcher die gerade Linie da so theilt, dass $ma = 2 . dm$. Der Punkt m ist also der Angriffspunkt der Resultirenden der drei in a, b und c angreifenden parallelen Kräfte, welches auch übrigens die Lage des Dreiecks sein mag.

Fig. 174.



Denken wir uns, a, b und c seien drei in unveränderlicher gegenseitiger Lage verbundene schwere Moleküle, so ist klar, dass m der Schwerpunkt dieses aus drei Molekülen gebildeten festen Körpers ist.

Gerade so aber, wie sich zeigen lässt, dass ein aus zwei und drei Molekülen gebildeter fester Körper einen Schwerpunkt haben müsse, lässt sich dieser Beweis auch auf feste Körper ausdehnen, welche durch vier, fünf und sechs etc. in gegenseitig unveränderlicher Lage verbundene Moleküle gebildet sind, dass endlich jeder feste Körper einen unveränderlichen Schwerpunkt haben muss, wie gross auch die Anzahl der Moleküle sein mag, aus denen er besteht.

Damit ein schwerer Körper im Gleichgewicht sei, braucht also nur die Bedingung erfüllt zu sein, dass sein Schwerpunkt unterstützt ist. Ist nur diese Bedingung erfüllt, so wird der Körper im Gleichgewicht sein, wie man ihn übrigens auch drehen und wenden mag.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich eine Methode ableiten, den Schwerpunkt der Körper durch den Versuch zu finden. Man hänge den Körper an einem Punkte *a* auf, Fig. 175, so wird die Verlängerung des den Körper tragenden Fadens in einem Punkte *c* aus dem Körper austreten. Auf der Linie *a c* muss nothwendig der Schwerpunkt liegen. Hängt man den Körper in einem zweiten Punkte *b*, Fig. 176, auf, so muss der Schwerpunkt abermals auf der Verlängerung des Fadens, also auf der Linie *bd*, liegen; der Schwerpunkt liegt also auf dem Durchschnittspunkte der Linien *b d* und *a c*. Der Schwerpunkt von homogenen ebenen Scheiben ist nach dieser Methode leicht zu bestimmen; bei anderen Körpern ist es jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, die Verlängerung des verticalen Fadens durch das Innere des Körpers genau zu verfolgen.

Fig. 175.

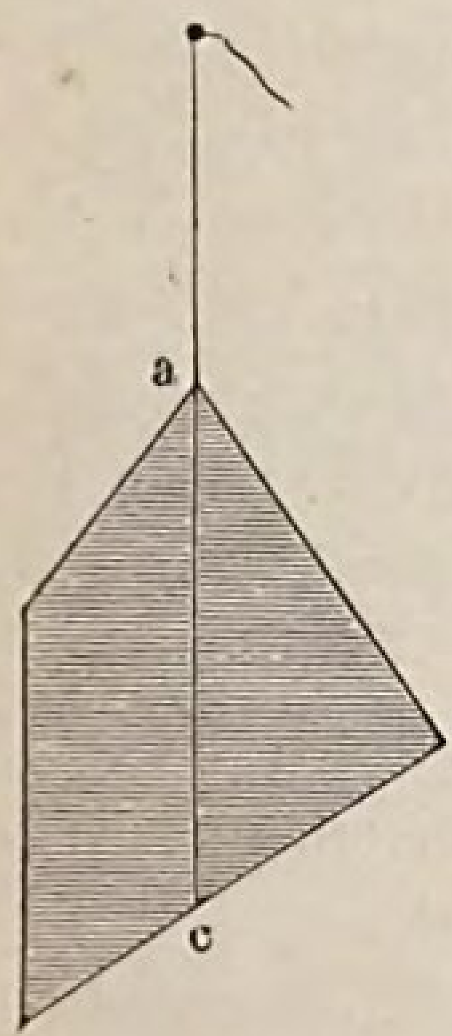
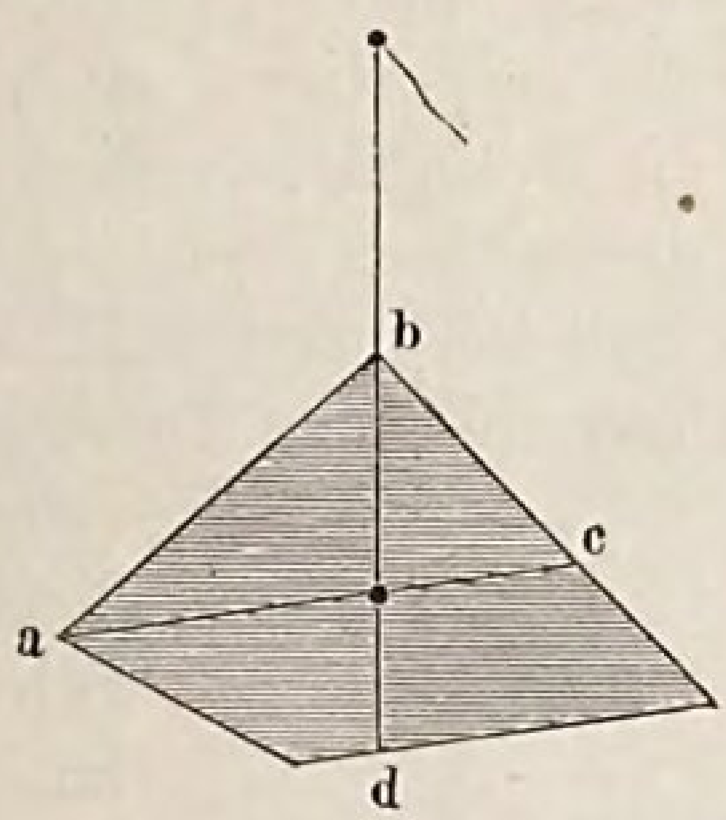


Fig. 176.



Der Schwerpunkt homogener Körper von regelmässiger Gestalt lässt sich durch einfache geometrische Betrachtungen bestimmen.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt offenbar in der Mitte ihrer Länge.

Fig. 177.

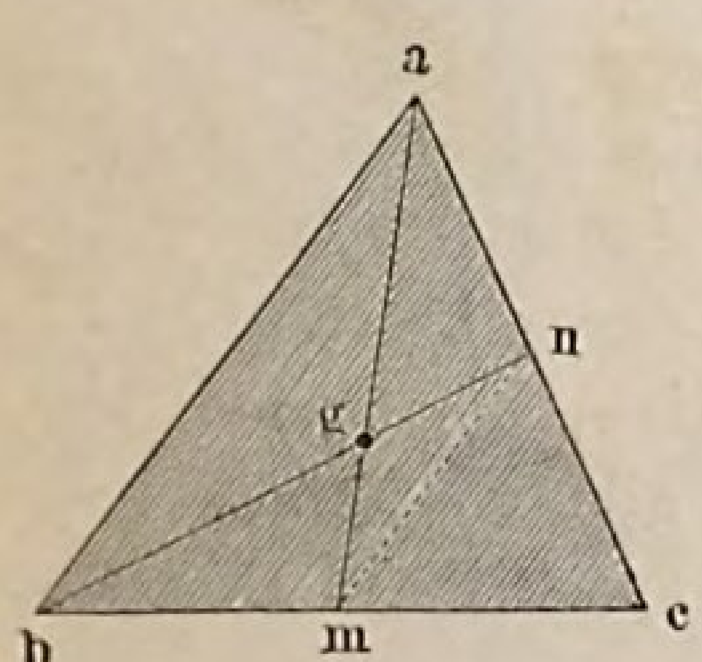
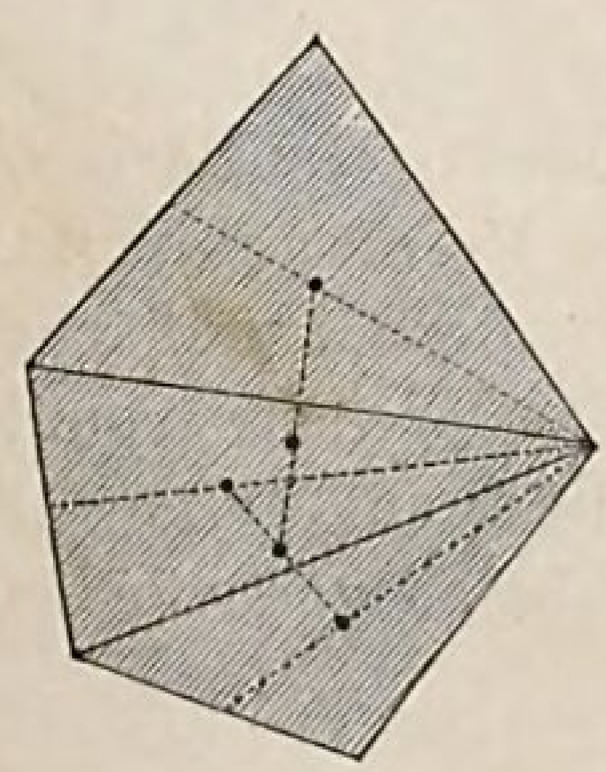


Fig. 178.



Der Schwerpunkt eines homogenen Dreiecks, Fig. 177, wird gefunden, indem man von zwei Spitzen desselben nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite gerade Linien zieht. Der Durchschnittspunkt *g* dieser beiden Linien ist der gesuchte Schwerpunkt. Die Wahrheit dieser Behauptung ist leicht einzusehen. Der Punkt *m* ist der Schwerpunkt der geraden Linie *bc*; denkt man sich nun im Dreieck irgend eine gerade Linie parallel mit *bc* gezogen, so wird sie offenbar durch die Linie *am* halbirt; auf der Linie *am* liegen also die Schwerpunkte aller im Dreieck parallel mit *bc* gezo-

genen Linien; *am* ist also so zu sagen eine Schwerlinie des Dreiecks, und offenbar muss der Schwerpunkt des Dreiecks auf *am* liegen. Dieselbe Schlussweise zeigt aber auch, dass der Schwerpunkt auf der Linie *nb* liegen müsse.

Der Punkt *g* liegt so, dass $gm = \frac{1}{3}\, am$ und $gn = \frac{1}{3}\, bn$ ist. Dies zu zeigen, ziehe man die Linie *mn*, so ist offenbar $mn = \frac{1}{2}\, ba$. Die Dreiecke *gmn* und *gab* sind aber ähnlich, und daraus folgt, dass $gm : ga = mn : ba$, dass also $gm = \frac{1}{2}\, ag$.

Der Schwerpunkt eines Polygons, Fig. 178, wird gefunden, wenn man es in Dreiecke zerlegt und den Schwerpunkt eines jeden bestimmt. Da nun die in dem Schwerpunkte dieser Dreiecke angreifenden Kräfte dem Flächeninhalte der Dreiecke proportional sind, so hat man nur noch nach den bekannten Regeln die Resultirende dieser Kräfte zu suchen.

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide, Fig. 179, wird gefunden, wenn man von den Spitzen *g* und *a* Linien nach den Schwerpunkten *h* und *k* der gegenüberstehenden Dreiecke zieht. Der Durchschnittspunkt g'' dieser beiden Linien ist der Schwerpunkt. Es ist leicht zu beweisen, dass $g''h = \frac{1}{4}\, hg$ ist.

Fig. 179.

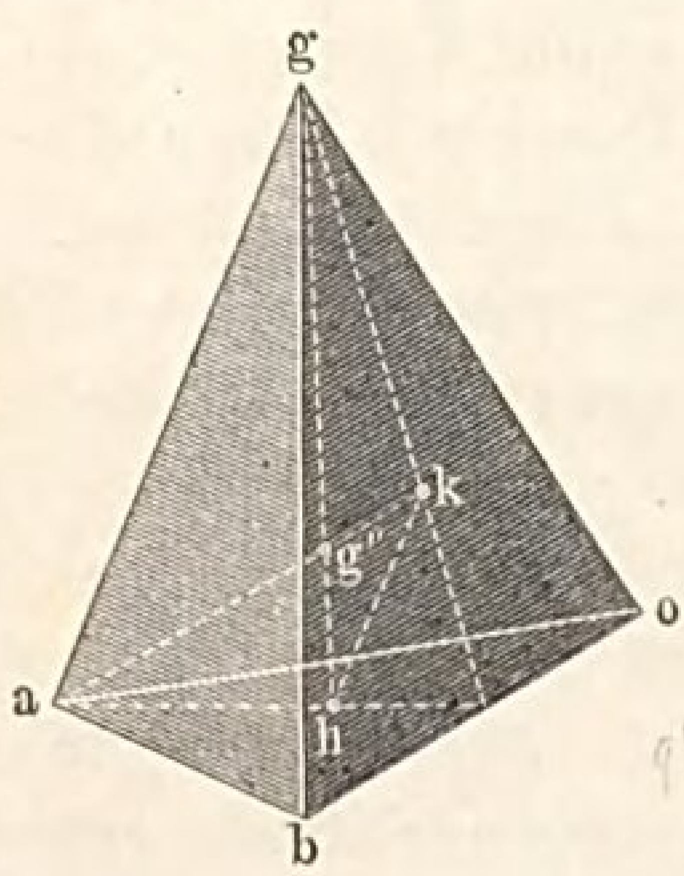
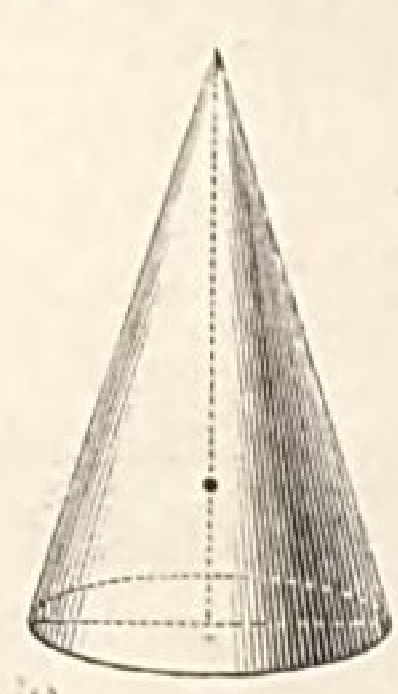


Fig. 180



Der Schwerpunkt eines Kegels, Fig. 180, von kreisförmiger Basis liegt auf der geraden Linie, welche von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Basis gezogen werden kann, und zwar ist seine Entfernung von dem Mittelpunkte der Basis $\frac{1}{4}$ dieser ganzen Höhe.

Der Schwerpunkt eines Prismas liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen, der eines Cylinders im Mittelpunkte seiner Achse, der Schwerpunkt einer homogenen Kugel in ihrem geometrischen Mittelpunkte; dasselbe gilt von einer Kugel, welche aus concentrischen Schalen verschiedenen specifischen Gewichtes zusammengesetzt ist.

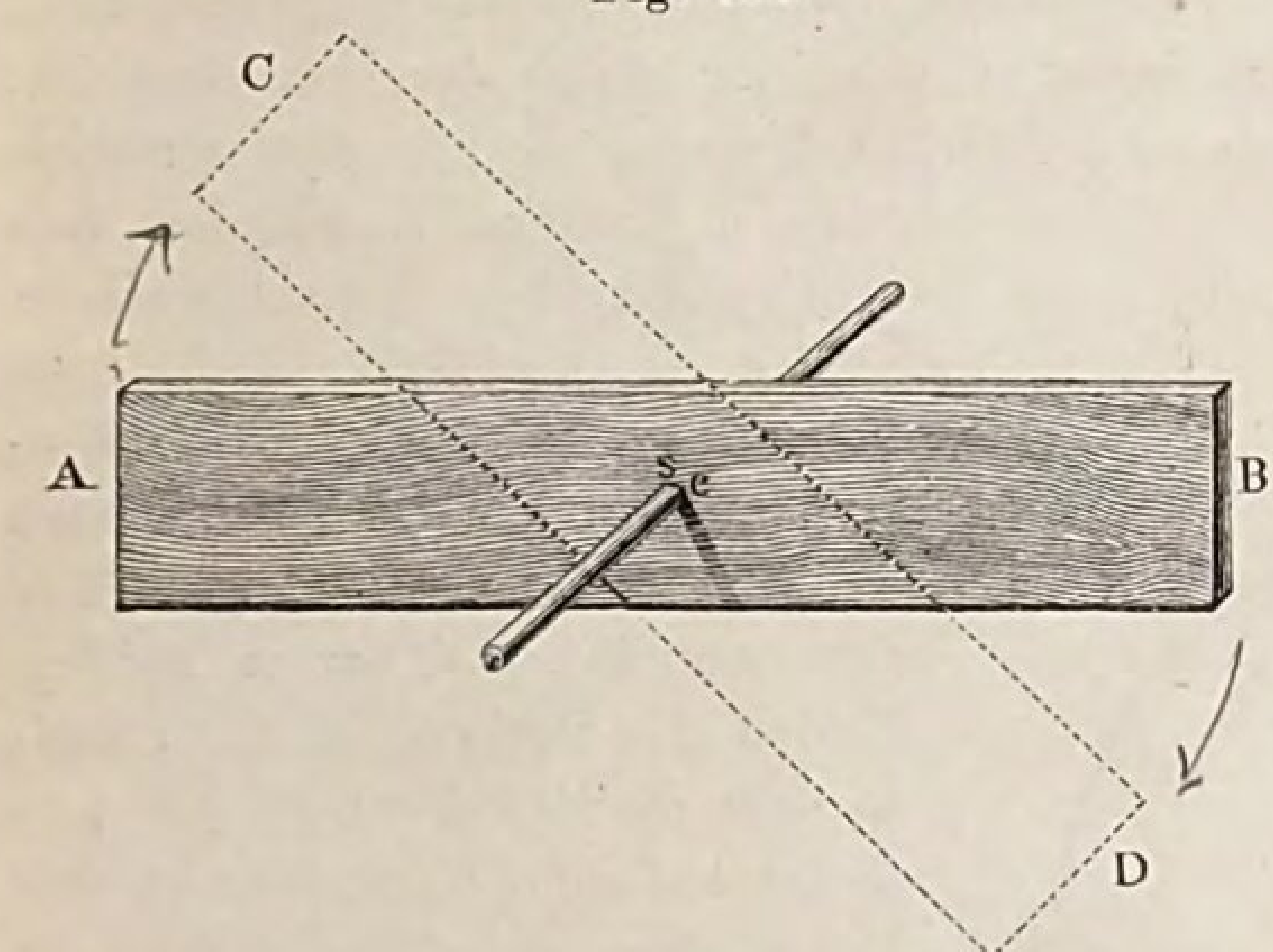
49 **Vom Gleichgewicht fester Körper.** Wir haben schon gesehen, dass die einzige Gleichgewichtsbedingung fester Körper die ist, dass ihr Schwerpunkt unterstützt sei. Diese Bedingung kann aber auf verschiedene Weise erfüllt sein, je nachdem die Körper in festen Punkten aufgehängt sind oder auf Unterlagen ruhen.

Betrachten wir zunächst einen Körper, der an einem festen Punkte gleichsam aufgehängt ist, um welchen er sich frei drehen kann, so ist er nur dann im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt *s* mit jenem

festen Drehpunkte c in einer Verticallinie liegt. Was die gegenseitige Lage dieser Punkte betrifft, so sind folgende drei Fälle möglich:

1. Der feste Punkt c (die feste Drehungsachse) geht durch den Schwerpunkt des Körpers selbst hindurch, wie dies z. B. Fig. 181 darstellt. In diesem Falle liegen s und c jedenfalls in einer Verticalen, welche Lage man übrigens auch dem Körper giebt, es findet also Gleichgewicht statt, wie er auch gestellt sein mag, für die Stellung AB also ebenso gut wie für die Stellung CD.

Fig. 181.



Es ist dies der Fall des indifferenten Gleichgewichts.

2. Der Schwerpunkt s liegt vertical unter dem Drehpunkt c, Figur 182. Dreht man den Körper aus dieser Lage heraus, so dass etwa der Schwerpunkt nach s' kommt, so führt die Schwerkraft den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurück, so-

Fig. 182.

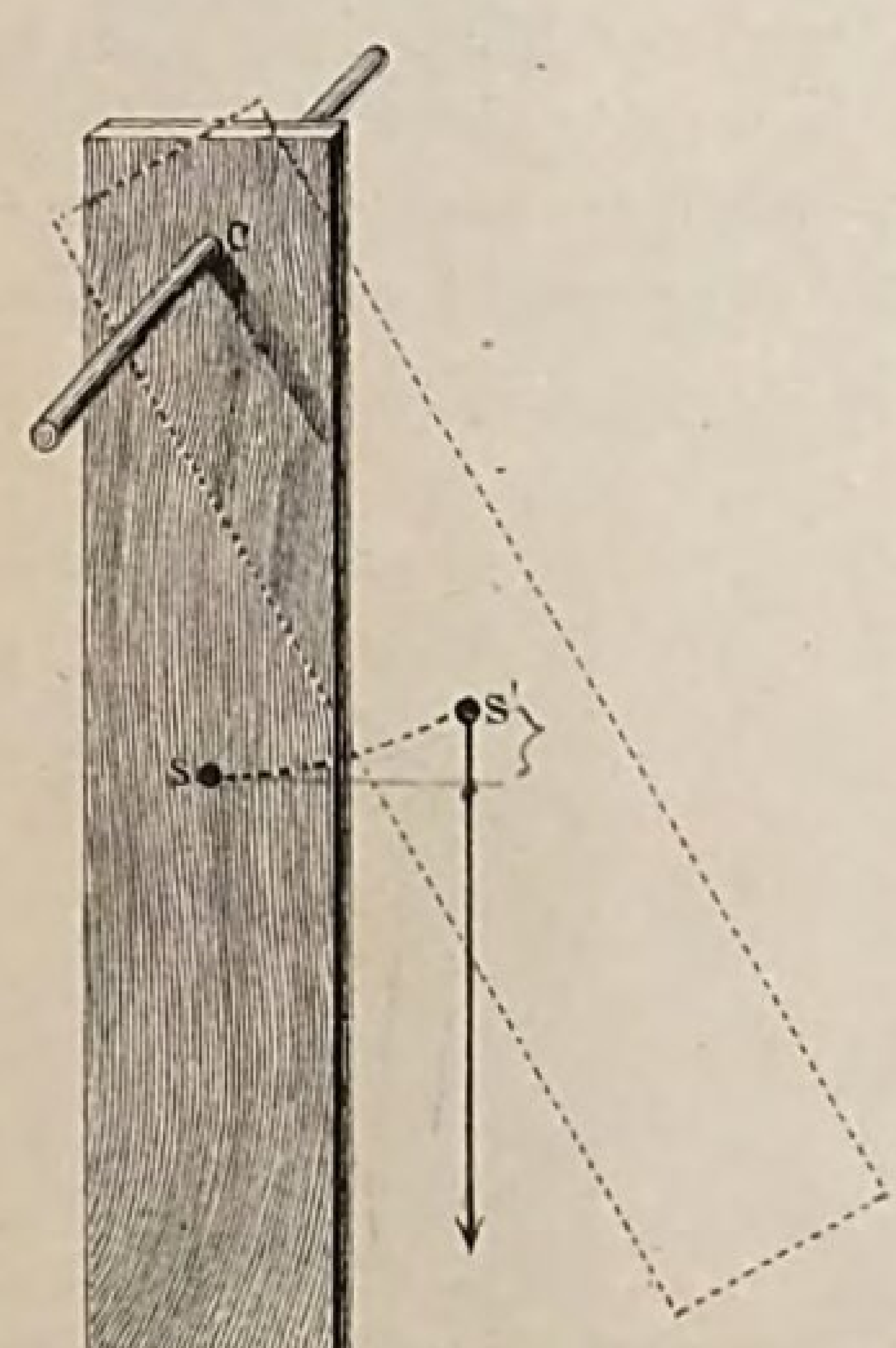
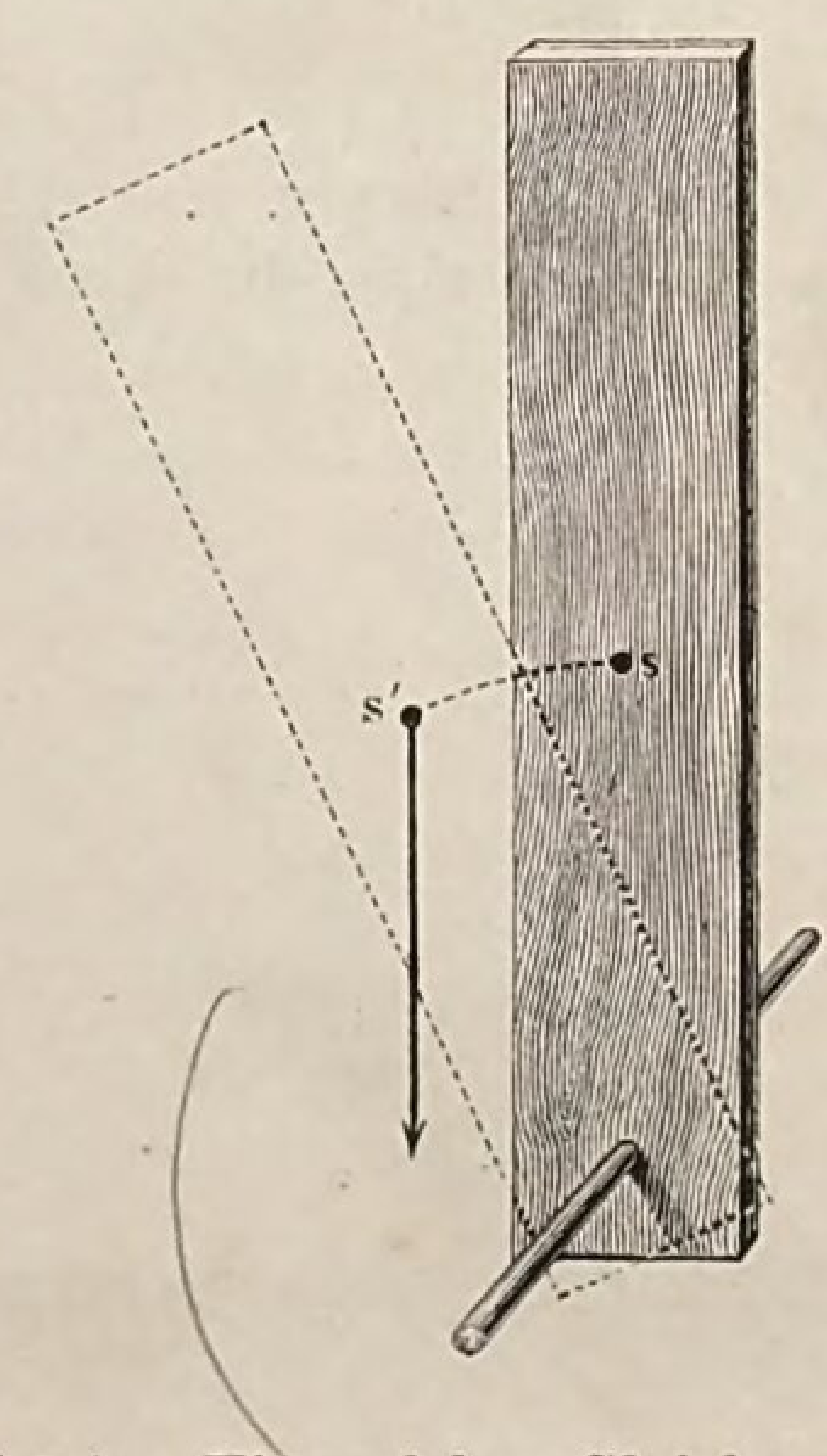


Fig. 183.



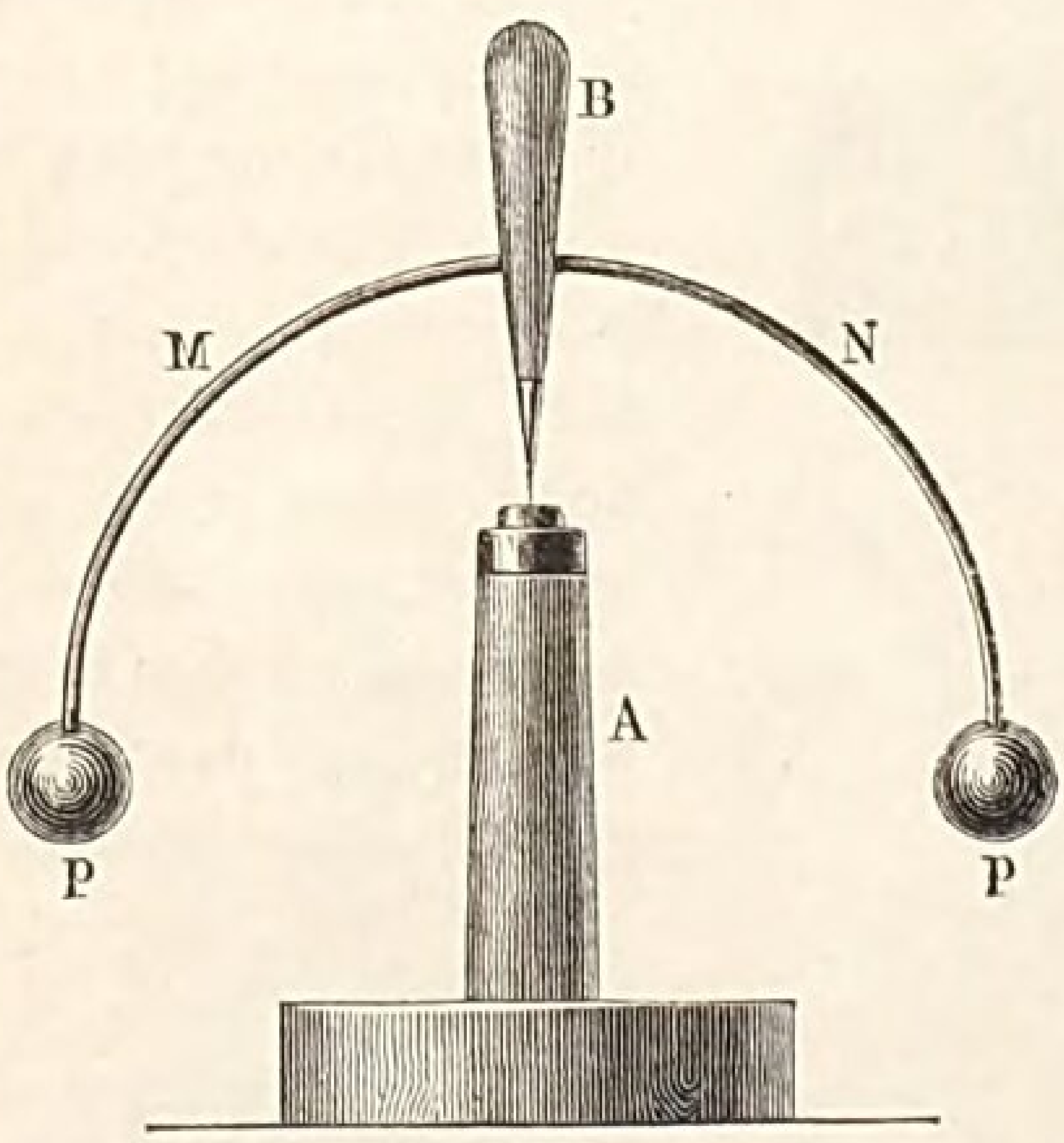
bald die störende Kraft zu wirken aufhört. Ein solches Gleichgewicht wird ein festes oder stabiles genannt. Liegt endlich

3. der Schwerpunkt *s* des Körpers vertical über dem Drehpunkt, wie Fig. 183 (a. v. S.), so befindet sich der Körper im Zustande des labilen oder unsicheren Gleichgewichts; denn wenn die geringste störende Kraft den Körper aus dieser Lage herausbringt, so wirkt die im Schwerpunkte *s'* angreifende Schwerkraft des Körpers dahin, ihn noch weiter von seiner Gleichgewichtslage zu entfernen, und er kann nicht eher wieder in die Ruhe kommen, als bis nach einer halben Umdrehung der Schwerpunkt vertical unter dem Drehpunkt angekommen ist.

Einen interessanten Fall des stabilen Gleichgewichts zeigt Fig. 184.

Ein Holzstück *B*, welches unten mit einer Stahlspitze versehen ist, wird mit dieser auf ein flach ausgehöhltes Metallstückchen gesetzt, welches die obere Endfläche des Stativs *A* bildet. Für sich allein würde es umfallen, weil sein Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkte liegt. Wenn aber durch *B* ein Drahtbogen *MN* gezogen wird, welcher an beiden Enden die Bleikugeln *pp* trägt, so dass durch dieselben der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Holzstückes *B* und der Bleikugeln unter die Stahlspitze fällt, so findet nun ein stabiles Gleichgewicht statt, *B* fällt nicht mehr um; der Körper ist jetzt eigentlich aufgehängt.

Fig. 184.



Wenn ein Körper mit mehr oder weniger breiter Basis auf dem Boden steht, so muss die durch seinen Schwerpunkt gezogene Verticale

Fig. 185.

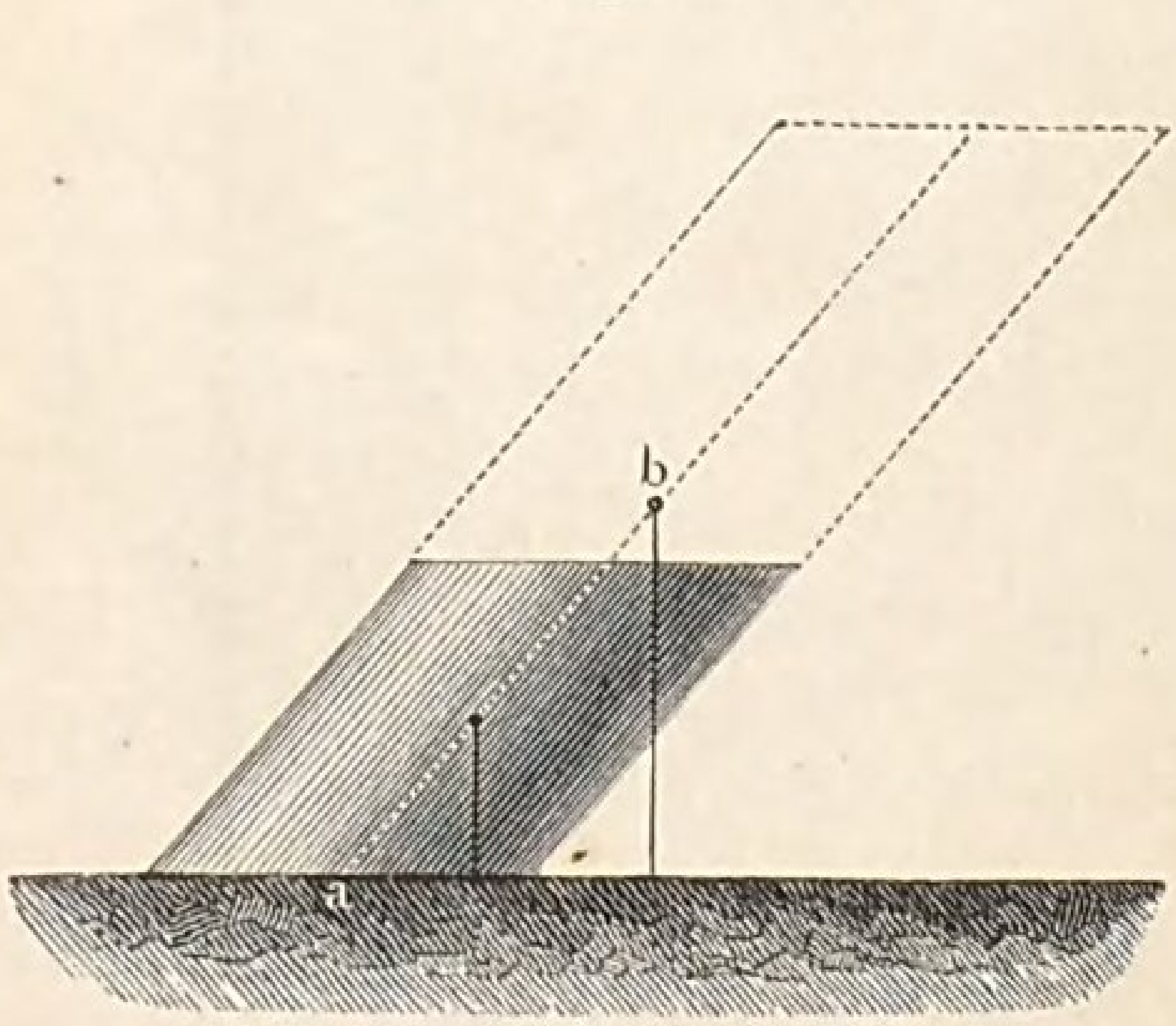
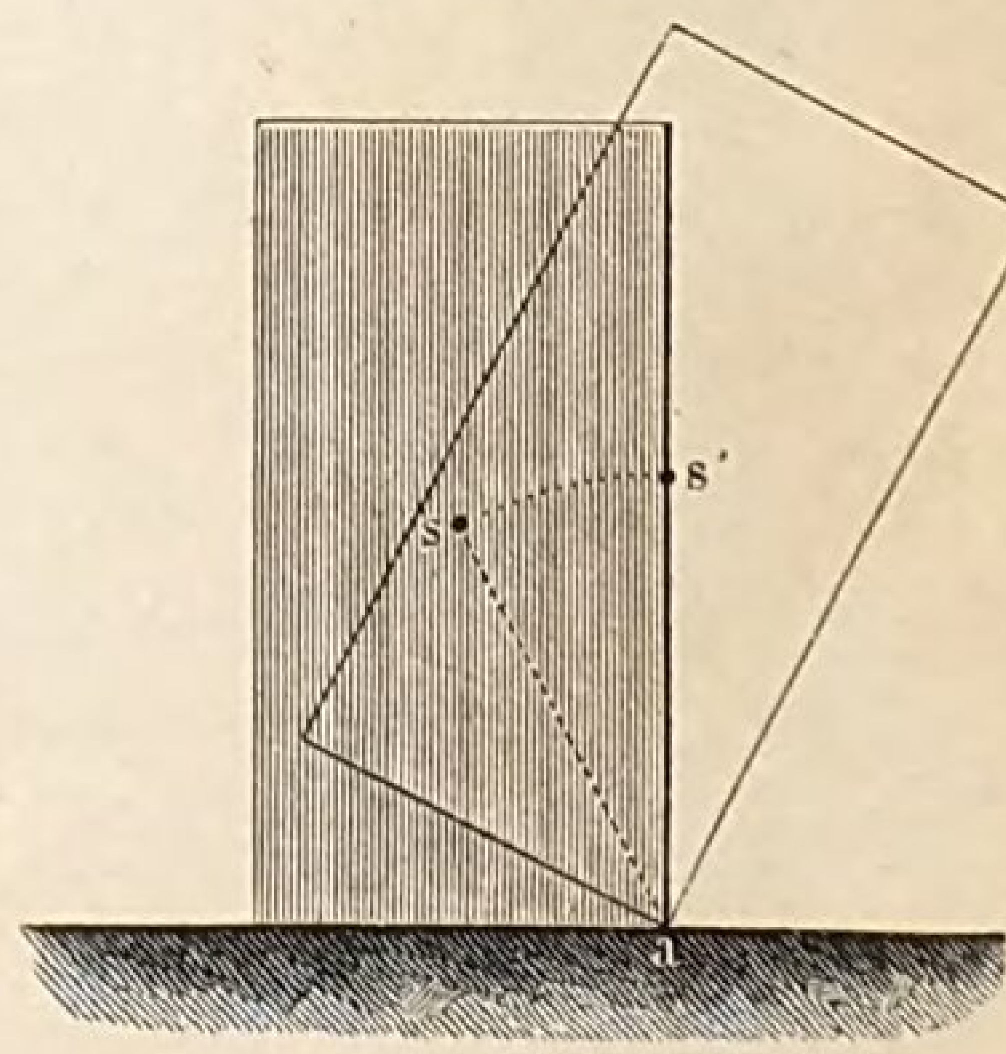


Fig. 186.



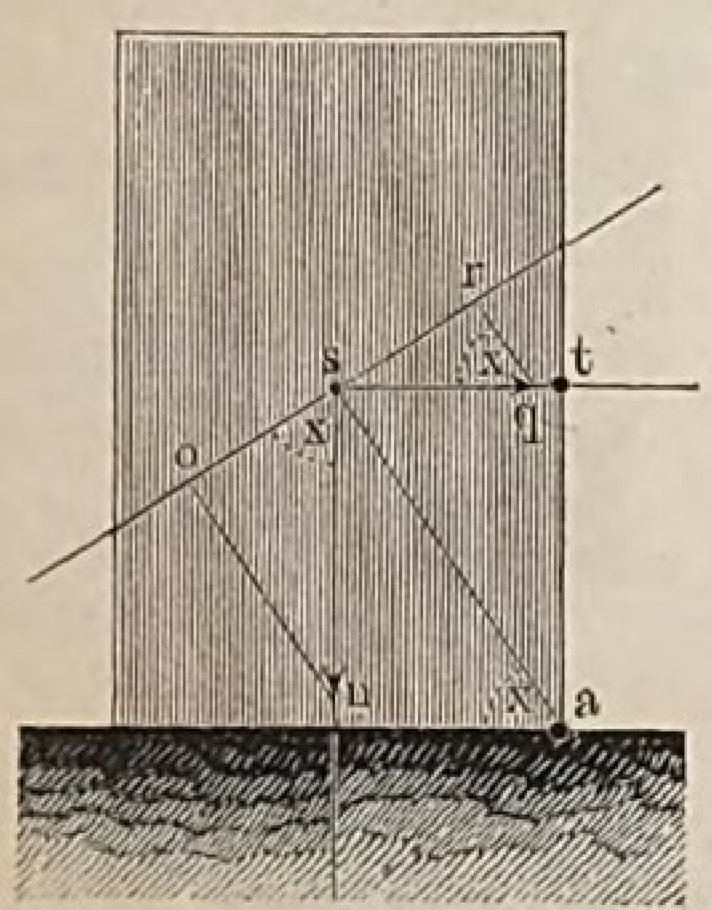
noch die Basis selbst treffen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Demnach muss der schiefe Cylinder, Fig. 185, im Gleichgewicht sein, wenn

er nur die in der Figur schattirte Länge hat; er würde umfallen müssen, wenn er die durch punktirte Linien angedeutete Höhe hätte.

Wenn ein auf irgend einer vieleckigen Basis stehender Körper umgeworfen werden soll, so muss er zunächst um eine seiner Grundkanten gedreht werden, bis sein Schwerpunkt vertical über dieser Umdrehungskante steht. Sollte z. B. der in Fig. 186 dargestellte Klotz umgeworfen werden, und dabei die Kante a die Rolle der Umdrehungskante spielen, so hätte man zunächst den Klotz so weit zu drehen, bis der Schwerpunkt s in die Lage von s' kommt; liesse die Kraft, welche das Umwerfen bewirken soll, eher nach, als der Schwerpunkt in s' angekommen ist, so wird der Klotz in seine ursprüngliche Lage zurückfallen müssen; hat man aber den Schwerpunkt nur im Mindesten über s' hinausgebracht, so wird nun der Körper von selbst ganz umfallen.

Ein Körper wird um so fester stehen, d. h. seine Stabilität (Standfestigkeit) ist um so grösser, je grösser die Kraft ist, welche man anwenden muss, um ihn aus seiner Gleichgewichtslage herauszubringen.

Fig. 187.



In Fig. 187 sei s der Schwerpunkt des Körpers, welcher um a umgekantet werden soll. Ist sein durch die Linie sn repräsentirtes Gewicht gleich P, so ist das statische Moment R, mit welchem die Schwerkraft des Körpers einer Drehung um a entgegenwirkt, gleich der rechtwinklig zu sa angreifenden Seitenkraft von P, also gleich so oder

$$R = P \cos x$$

wenn x den Winkel bezeichnet, welchen sa mit der Horizontalen macht.

Bezeichnen wir mit K eine horizontal in s angreifende Kraft sq, so ist deren rechtwinklig zu sa wirkende Seitenkraft Q, welche den Körper um a zu drehen strebt, gleich sr oder $K \sin x$. Für den Fall des Gleichgewichts zwischen K und P haben wir also:

$$K \sin x = P \cos x$$

$$K = P \frac{\cos x}{\sin x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Nun aber haben wir $\cos x : \sin x = st : ta$ oder $\cos x : \sin x = b : h$, wenn wir die Höhe des Schwerpunktes über der Basis mit h, die Länge st oder die halbe Breite der Basis mit b bezeichnen. Die Gleichung 1) geht also über in

$$K = P \frac{b}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Die Stabilität des Körpers ist also der Breite seiner Basis direct und der Höhe des Schwerpunktes über der Basis umgekehrt proportional.

Ein Körper steht also um so fester, je breiter seine Basis ist und je weniger hoch sein Schwerpunkt über dieser Basis liegt. Ein vierfüssiges Thier steht fest, wenn der Schwerpunkt seines ganzen Körpers über dem Viereck liegt, welches auf dem Boden durch seine vier Füsse bezeichnet ist. Wenn ein Mensch seinen Arm aufhebt, so wird der Schwerpunkt seines Körpers verschoben; wenn ein Vogel seinen Hals ausstreckt, so wird sein Schwerpunkt bedeutend nach vorn gerückt. Ein Mensch, welcher Lasten trägt, muss, je nach der Art des Tragens, seine Haltung ändern. Trägt er die Last auf dem Rücken (Fig. 188), so muss er sich vorbeugen, trägt er sie in der linken Hand (Fig. 189), so muss er den Oberkörper rechts neigen, denn sonst fiele der

Fig. 188.

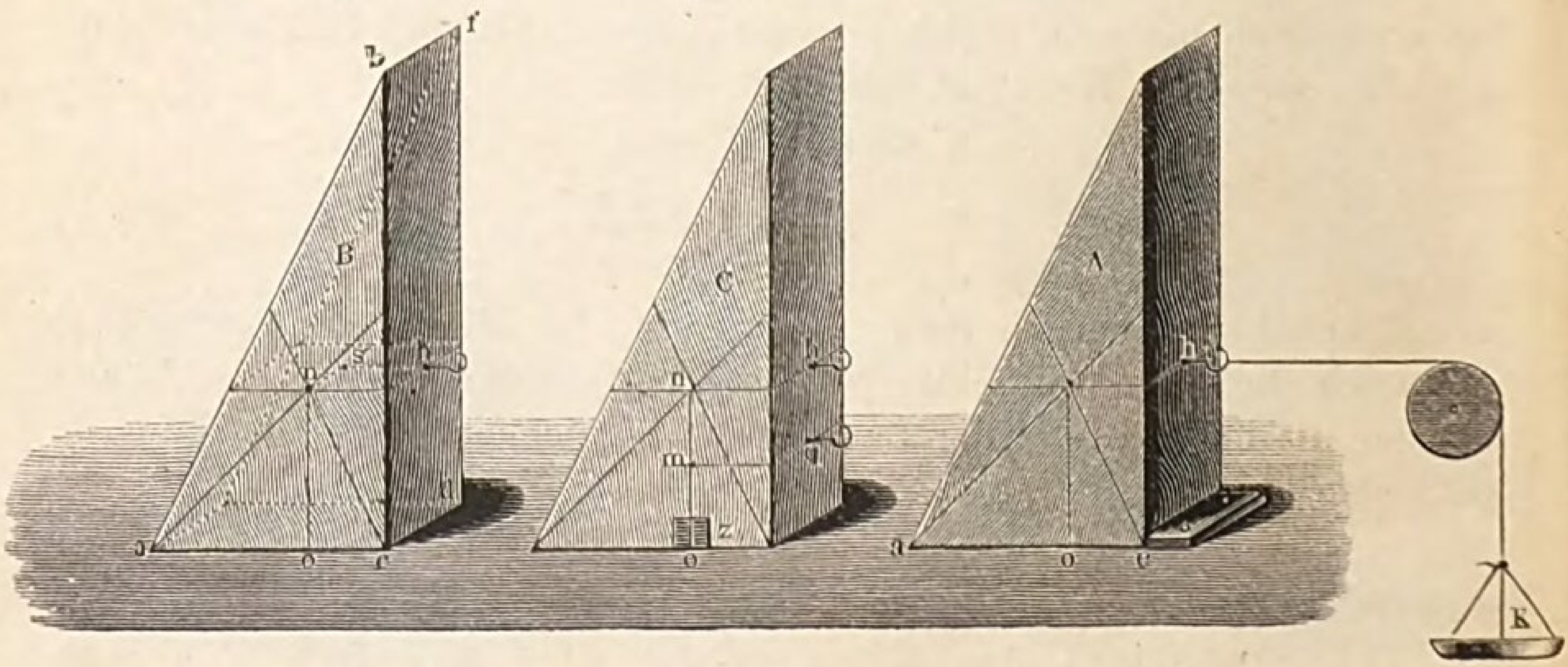


Fig. 189.



gemeinschaftliche Schwerpunkt des menschlichen Körpers und der getragenen Last ausserhalb der Verbindungslinie der Füsse, er müsste also umfallen.

Fig. 190. Fig. 191. Fig. 192.



Die Gleichung 2) bezieht sich ausdrücklich nur auf den Fall, dass die Richtung der Kraft K durch den Schwerpunkt des umzuwerfenden

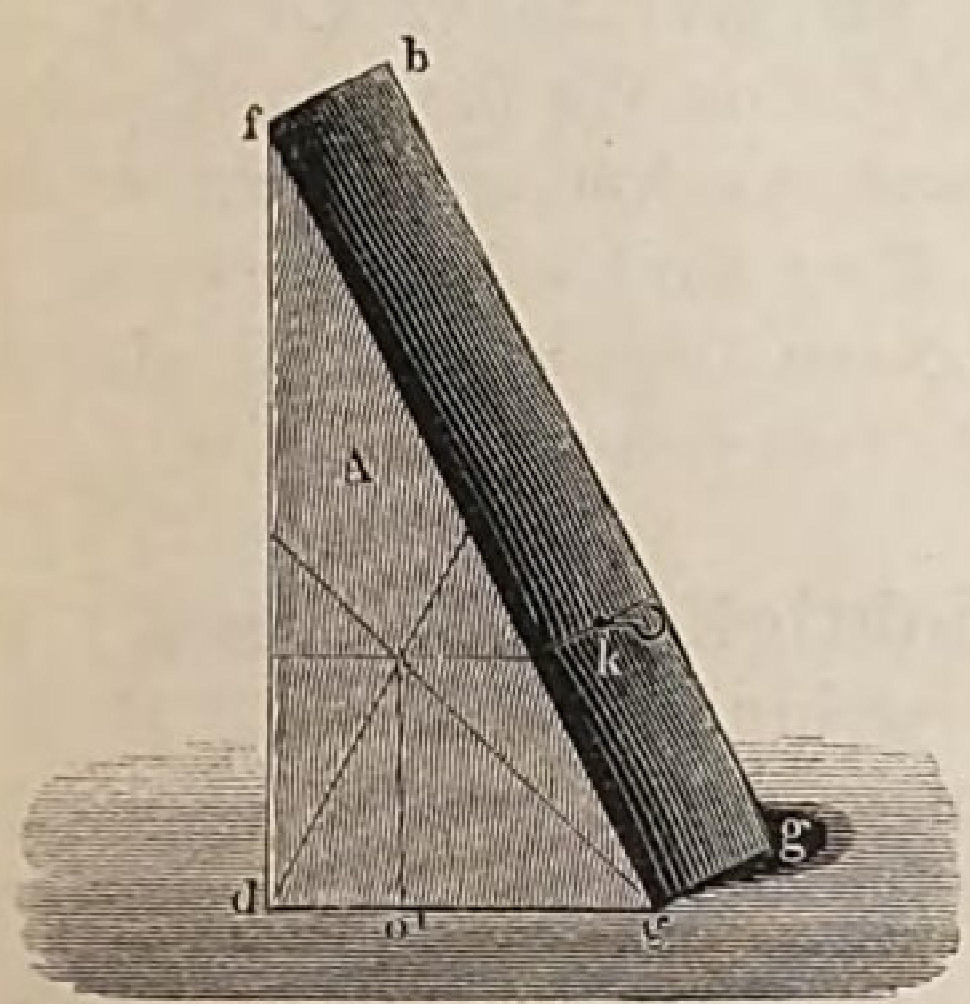
Körpers geht und dass sie rechtwinklig steht auf der durch die Umdrehungskante gelegten Verticalebene.

Um die Gesetze der Stabilität durch den Versuch zu bestätigen, hat Steinhauser drei gleiche keilförmige Körper construirt, welche in Fig. 190 bis 192 in $1/_5$ der natürlichen Grösse dargestellt sind (die Länge der Kante cd oder bf beträgt 6 cm). A, Fig. 192, ist aus schwerem, hartem Holze, etwa aus Hainbuchenholz, B und C, Fig. 190 und 191, sind aus leichtem, weichem Holze, etwa aus Linden- und Pappelholz, ausgeführt.

Auf der vorderen Dreiecksfläche abc ist durch Construction die Lage ihres Schwerpunktes n bestimmt. Denken wir uns durch n eine Linie parallel der Kante cd gelegt und auf derselben einen Punkt s bestimmt, welcher um $1/_2\, cd$ von n entfernt ist, so ist s der Schwerpunkt des Holzkeils. Denken wir uns ferner von s ein Perpendikel auf die Fläche $cdbf$ gefällt, so wird dieselbe in einem Punkte h getroffen, in welchem ein als Angriffspunkt der Kraft K dienender Haken eingeschraubt ist. Die Verlängerung von hs trifft die schräge Keilfläche in k, Fig. 193, wo gleichfalls ein Haken eingeschraubt ist.

Um mit einem dieser Körper den Versuch anzustellen, wird er mit der Kante, um welche er umgeworfen werden soll, an eine auf dem Tisch befestigte Schiene angelegt, wie Fig. 192 zeigt, und in h eine Schnur eingehängt, welche in entsprechender Richtung über eine Rolle hinweggeführt ist und welche an ihrem Ende eine zur Aufnahme von Gewichten bestimmte leichte Wagschale trägt.

Fig. 193.



1. Stellt man den Versuch einmal mit dem aus schwerem, das andere Mal mit dem aus leichtem Holz verfertigten Keil, Fig. 192 und 190, in der durch Fig. 192 erläuterten Weise an, so verhalten sich in beiden Fällen die zum Umwerfen nöthigen Kräfte (die an die Schnur anzuhängenden Gewichte) wie die Gewichte der beiden Holzkeile. Der Werth von K in Gleichung 1) ist also ceteris paribus dem Gewichte P des umzuwerfenden Körpers proportional.

2. Stellt man den Versuch mit demselben Keil A einmal in der durch Fig. 192 erläuterten Weise, dann aber so an, dass die Kante gg an der Schiene anliegt, dass also der Keil die Stellung Fig. 193 einnimmt, so wird im letzteren Falle die zum Umwerfen nöthige Kraft doppelt so gross sein, als im ersten. Im ersteren Falle ist der Werth von b in Gleichung $K = P\,\frac{b}{h}$ (Seite 209) gleich oc, Fig. 192, im letzteren Falle ist er gleich ao, während P und h in beiden Fällen gleiche Werthe haben.

Es ist aber leicht nachzuweisen, dass $ao = 2oc$, dass also im letzteren Falle der Werth von b in Gleichung $K = P\frac{b}{h}$ doppelt so gross ist als im ersteren.

3. Um den Einfluss der Höhe h des Schwerpunktes über der Basis nachzuweisen, ist in der Basis eines aus leichtem Holz verfertigten Keils C, Fig. 191, senkrecht unter dessen Schwerpunkt und parallel mit der Umdrehungskante ein Langwürfel z von Blei eingelassen, dessen Dimensionen so bestimmt sind, dass das Gewicht von C gerade gleich ist dem Gewichte des aus hartem Holz verfertigten Keils A. Durch das Bleistück z wird der Schwerpunkt des ganzen Keils etwa bis zur Höhe eines Punktes m heruntergerückt. Bringt man nun in gleicher Höhe mit m bei q ein Häkchen an, wie Fig. 191 zeigt, so bedarf es zum Umkanten des Keils C einer in q angebrachten horizontalen Kraft K', welche grösser ist als die Kraft K, welche man bei h, Fig. 192, anbringen muss, um den Keil A umzuwerfen und zwar verhält sich K zu K' wie mo zu no.

Wäre die horizontale Kraft, welche den Keil C, Fig. 191, umwerfen soll, nicht in q, sondern in h, also in gleicher Höhe angebracht, wie h am Keil A, Fig. 192, so würden in beiden Fällen gleich grosse Kräfte zum Umwerfen erforderlich sein.

Wenn der Angriffspunkt h der in horizontaler Richtung wirkenden Kraft K ungeändert bleibt, so wird für den Fall des Gleichgewichts der Werth von K offenbar nicht geändert, wenn der Schwerpunkt des Körpers in der Verticallinie von s, Fig. 190, auf- und niedergeschoben wird. Bei gleicher Höhe des Angriffspunktes h hat also die Höhe des Schwerpunktes über dem Boden keinen Einfluss auf die Grösse der zum Umkanten nöthigen Kraft K. Bei gleichbleibendem Werthe von K wächst aber der Winkel, um welchen der umzukantende Körper gedreht werden muss, um seinen Schwerpunkt vertical über die Umdrehungskante zu bringen. Einer momentan wirkenden Kraft gegenüber wird also der Körper doch um so fester stehen, je tiefer sein Schwerpunkt liegt.

50 **Die gleicharmige Wage; Richtigkeit derselben.** Die gleicharmige Wage, in einfachster Ausführung wie in Fig. 194 auch Krämerwage genannt, beruht auf den in den §. 45 und 49 abgeleiteten Sätzen und dient zur Vergleichung der Gewichte der Körper zum Zwecke der Bestimmung ihrer Massen.

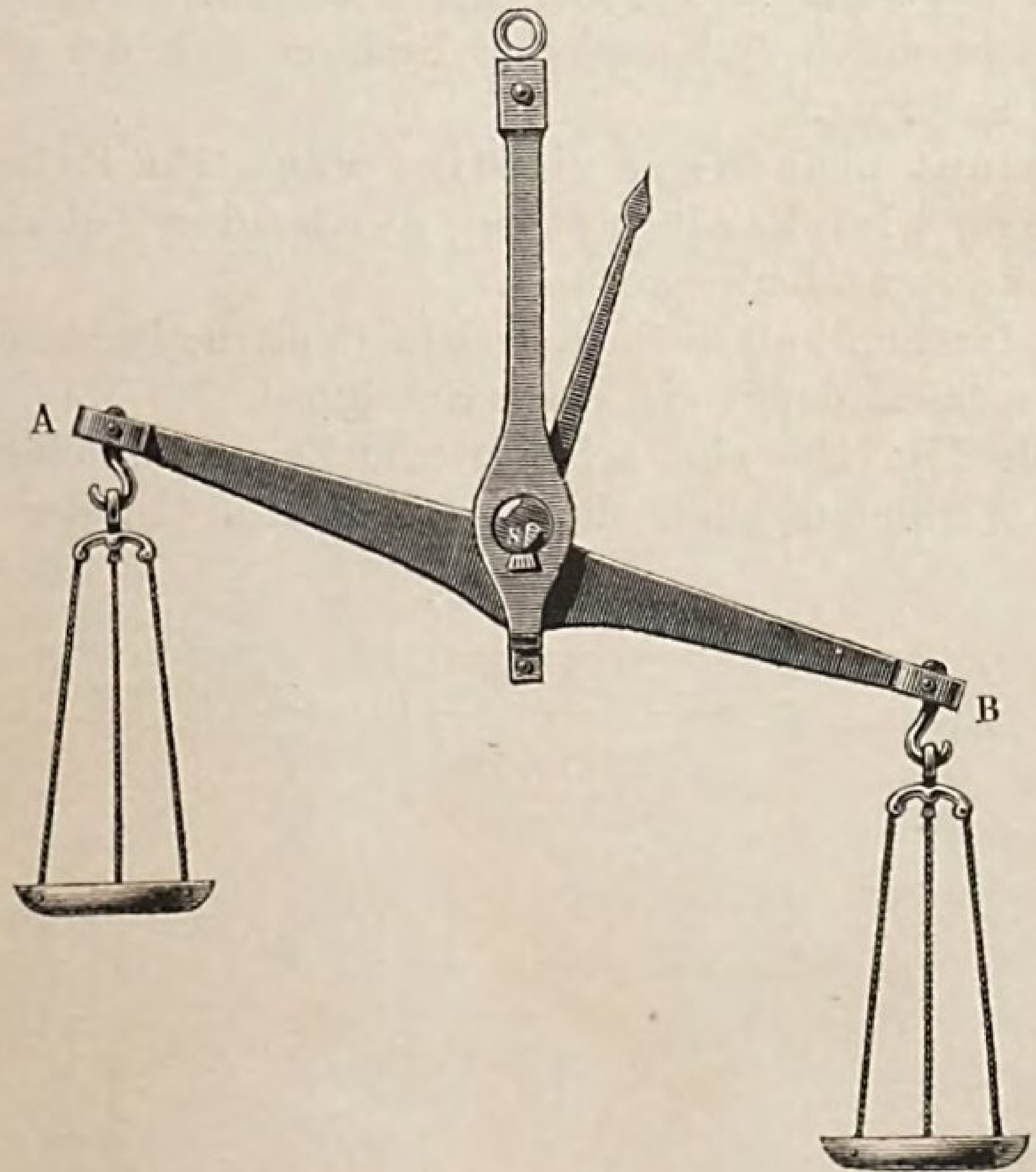
Die gleicharmige Wage besteht aus einem aus zwei symmetrischen Armen bestehenden Wagebalken AB, welcher um eine horizontale Achse (Mittelachse) drehbar und zwar im stabilen Gleichgewichte aufgehängt ist. Die Mittelachse wird durch die nach abwärts gerichtete Kante s eines am Balken befestigten Prismas aus hartem Materiale gebildet (Mittelschneide), welche auf einer Unterlage (Pfanne), ebenfalls aus hartem Materiale, aufruht. An den Enden des Balkens sind eben solche, aber nach aufwärts gerichtete Kanten (Endschneiden,

Endachsen) befestigt, auf welchen die Gehänge entweder ebenfalls mit Pfannen oder in einfacherer Weise aufgehängt sind, welche die Schalen tragen.

Zur leichteren Constatirung der horizontalen Lage des Wagbalkens oder auch zur Messung der Abweichung von derselben ist senkrecht auf die Längsrichtung des Balkens in der Mitte desselben nach aufwärts oder abwärts ein metallener Zeiger, die Zunge, befestigt, welche bei horizontaler Lage des Balkens auf eine Marke oder auf den mittleren Theilstrich einer Scala zeigt, welcher meistens, aber nicht immer, mit Null bezeichnet ist. Wenn die Zunge, sobald der Balken zur Ruhe gekommen ist, auf diesen mittleren Theilstrich zeigt, sagt man, die Wage „spiele ein“ oder sie sei im Gleichgewicht. Das Eintreten dieses Ruhezustandes wird aber nicht immer abgewartet, sondern meist aus den Ausschlägen der Zunge erschlossen.

Die Mittelpfanne ist nur bei Handwagen oder solchen von geringerer Genauigkeit, wie in Fig. 194, an einer Scheere aufgehängt. Bei genauen

Fig. 194.



Wagen ruht sie auf einer feststehenden Metallsäule. Ferner ist bei genauen Wagen dafür gesorgt, dass der Balken und die Schalen, manchmal auch die Gehänge, während des Nichtgebrauches der Wage separat unterstützt werden können, um einen schädlichen Druck auf die Schneiden und dadurch eine Abnutzung derselben zu vermeiden.

Es geschieht dies durch die Arretirungsvorrichtungen. End-

lich werden feine Wagen durch Wagekästen mit Glaswänden gegen Staub und Luftzug geschützt, deren Unterbau zwischen den Schubladen zur Unterbringung der Gewichte und Utensilien gewöhnlich noch eine durch einen Schlüssel in Drehung zu setzende Achse enthält, mittelst welcher die Arretirung aufgehoben oder wirksam gemacht werden kann.

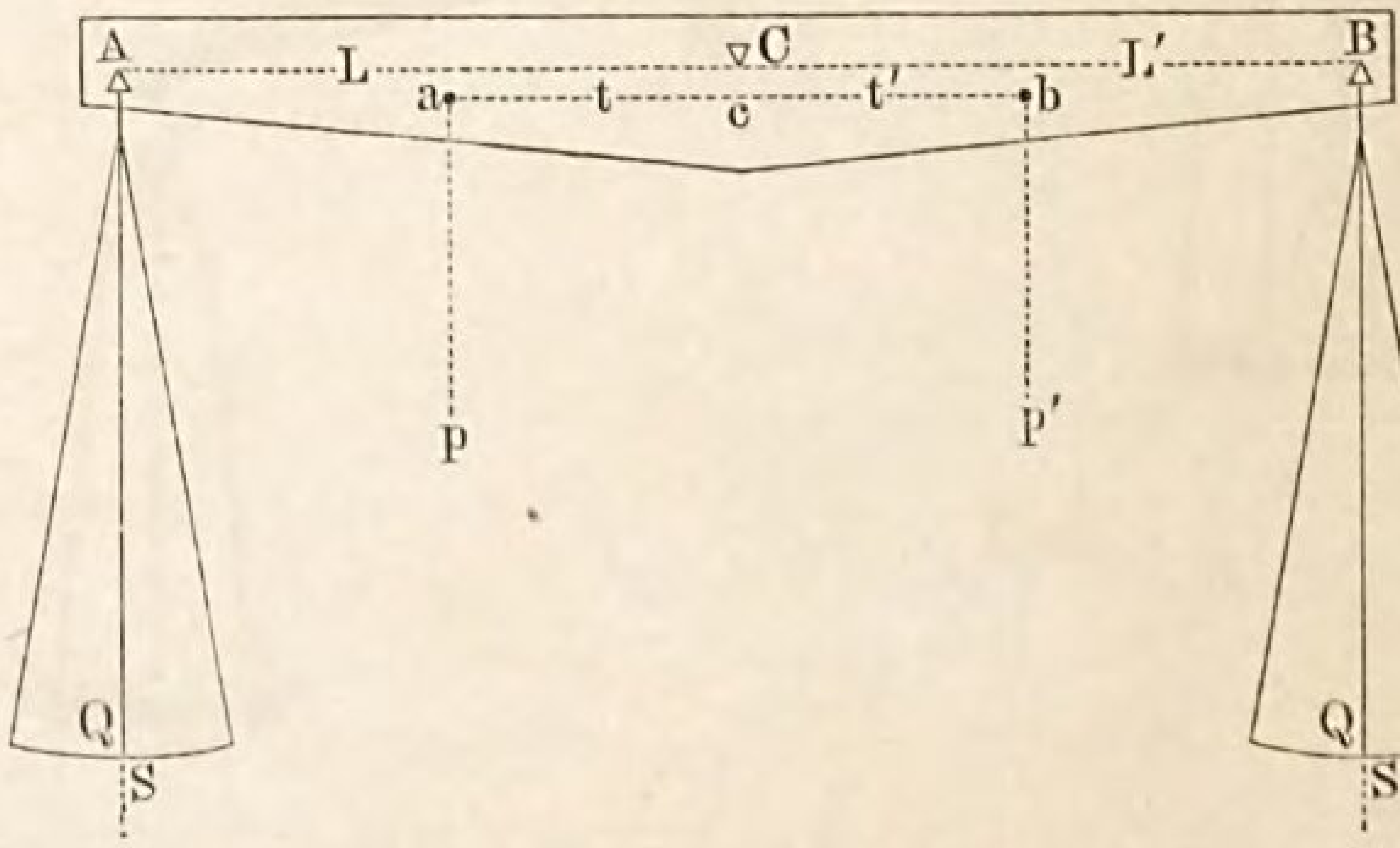
Dass der Wagebalken stabil aufgehängt, also die Mittelachse über dem Schwerpunkt angebracht sein müsse, damit man mit der Wage wägen könne, ist leicht einzusehen. Wäre die Aufhängung indifferent, also der Schwerpunkt in die Mittelachse fallend, so würde bei gleicher Belastung der Balken in jeder Lage stehen bleiben. Bei ungleicher Belastung würde ein grosses Uebergewicht keine andere Wirkung hervorbringen als ein kleines; beide würden die mehr belastete Schale bis zur Hemmung heruntersinken machen. Man hätte also kein Mittel zu erkennen, wie weit man noch vom Gleichgewichte entfernt ist. Bei labilem Gleichgewichte würde der Balken fortwährend auf der einen oder der anderen Seite bis zur Hemmung niedersinken. Nur bei der stabilen Aufhängung ist es möglich, aus der Grösse der Abweichung von der horizontalen Lage die Menge der noch fehlenden Gewichtsstücke zu schätzen und so durch systematisches Probiren sich der gleichen Belastung sicher zu nähern.

Man nennt eine Wage richtig, wenn ihr Balken bei beliebig grosser gleicher Belastung der beiden Schalen in horizontaler Lage zur Ruhe kommt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Constructionsbedingungen ererfüllt sein müssen, damit die Wage richtig sei.

Es stelle Fig. 195 eine schematische Zeichnung einer Wage vor. AB sei die Verbindungslinie der Endschneiden. In der Mitte dieser

Fig. 195.



Geraden soll, wie wir später erörtern werden, die Mittelschneide C und senkrecht darunter der Schwerpunkt c liegen. Wir wollen aber die Armlängen AC und BC vor der Hand als möglicherweise ungleich mit L und L' bezeichnen. Denkt man sich den Balken durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt, so kann man sich vorstellen,

dass jede dieser Hälften für sich einen Schwerpunkt habe. Diese Punkte seien in a und b gelegen, deren Abstände von der Mitte wir ebenfalls als möglicherweise ungleich mit l und l' bezeichnen. Es sollen ferner bedeuten:

p und p' die in a und b wirkenden Gewichte der Balkenhälften,
S und S' die Gewichte der beiden Schalen,
Q und Q' die gleichen Gewichte der beiderseits aufgelegten Gewichtsstücke.

Soll die Wage in horizontaler Lage zu Ruhe kommen, so muss auf beiden Seiten beim Eintritte dieser Lage die Summe der Drehungsmomente gleich gross sein. Es muss also die Gleichung erfüllt sein:

$$QL + SL + pl = Q'L' + S'L' + p'l' \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 1)$$

Soll diese Gleichung für beliebige gleiche Belastungen Q gültig bleiben, so muss $L = L'$ sein, d. h. die Wage muss genau gleicharmig sein (erste Bedingung der Richtigkeit).

Es bleibt somit von Gleichung 1), wenn wir $L = L'$ setzen, noch übrig:

$$SL + pl = S'L + p'l' \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 2)$$

Soll diese Gleichheit auch dann fortbestehen, wenn der Wagebalken in Folge Temperaturänderungen eine Aenderung seiner Dimensionen erleidet, so müssen zunächst:

$l = l'$ und $p = p'$ sein, woraus dann auch $S = S'$ folgt · · 3)

Das heisst also, es müssen die Schwerpunkte der Arme eine gleiche Entfernung von der Drehschneide haben und diese Arme sowie die Schalen gleiches Gewicht besitzen. Diese Bedingungen lassen sich dahin formuliren, dass die beiden Wagebalkenarme in Bezug auf Masse und ihre Vertheilung und Anordnung durchaus symmetrisch seien (zweite Bedingung der Richtigkeit) und die Schalen gleiches Gewicht besitzen (dritte Bedingung der Richtigkeit).

Es könnte scheinen, dass der Gleichung 2) auch dadurch entsprochen werden könnte, dass man ein grösseres Balkengewicht auf einer Seite durch ein entsprechend grösseres Schalengewicht auf der anderen Seite compensirt. Die Wage würde dann allerdings bei allen gleichen Belastungen, sowie unbelastet im Gleichgewichte bleiben, aber nur so lange als sich die Temperatur nicht ändert. Geschieht dies, so rücken die unsymmetrischen Massen der Arme von der Drehschneide hinweg oder nähern sich derselben und verändern dadurch die Drehungsmomente pl und $p'l'$ um ungleiche Werthe; ebenso ändern sich die Drehungsmomente SL und $S'L$ um ungleiche Grössen und diese sämmtlichen Aenderungen werden sich im Allgemeinen nicht compensiren, sondern die Wage unrichtig machen.

Aus 2) folgt, dass eine richtige Wage auch ohne Belastung der Schalen horizontal stehen muss, aus 3), dass dies auch dann eintreten muss, wenn man die Schalen wegnimmt oder vertauscht.

Aus dem Umstande allein, dass die Wage mit unbelasteten Schalen horizontal stehen bleibt, folgt aber noch nicht die Richtigkeit derselben, da, wie oben erwähnt, ein grösseres Gewicht des einen Armes durch ein grösseres Gewicht der anderen Schale compensirt sein könnte.

Auch das Horizontalstehen des Balkens ohne Schalen ist für sich noch kein Beweis für die Richtigkeit der Wage. Sie könnte nämlich ungleicharmig sein und diese Ungleichheit durch unsymmetrische Massenanordnung compensirt sein.

Um also eine Wage vollständig auf ihre Richtigkeit zu prüfen, hat man folgende Proben vorzunehmen:

1. Man lässt die Wage bei unbelasteten Schalen einspielen und vertauscht dann die Schalen. Zeigt sie beide Male auf 0 oder doch auf denselben Scalentheil, so sind die beiden Schalen gleich schwer.

2. Man belastet die beiden Schalen mit den grössten gleichen Gewichten, für welche die Tragkraft der Wage ausreicht und stellt, wenn nöthig, das Einspielen auf 0 durch kleine Zulegegewichtchen her; hierauf vertauscht man die Schalen sammt den darauf befindlichen Gewichten. Zeigt sich kein Unterschied in dem Einspielen, so ist die Wage gleicharmig.

3. Man bringt die Wage bei ziemlich grossen Belastungen zum Einspielen und setzt sie dann Temperaturänderungen aus, welche aber für beide Arme in gleicher Weise erfolgen müssen. Zeigt sich dann wieder kein Unterschied im Einspielen, so ist auch die Masse an beiden Armen symmetrisch angeordnet.

Ist durch die Probe 2. die Gleicharmigkeit der Wage erwiesen, so erkennt man aus dem Ausfalle der Probe 1., wann dieselbe die Gleichheit der Schalengewichte ergeben hat, überdies noch, ob auch die beiden Arme gleich schwer sind. In diesem Falle stellt sich die Wage vor und nach Vertauschung der Schalen horizontal. Nimmt sie aber hierbei beide Male nach derselben Seite dieselbe schiefe Stellung ein, so sind die Arme ungleich schwer. Weicht sie dagegen beide Male nach entgegengesetzten Richtungen um gleich viel ab, so folgt daraus die Ungleichheit der Schalen.

Die Probe 2. kann auch ohne Aushängen der Schalen ausgeführt werden, indem man die Wage zuerst ohne Belastung, wenn nöthig, durch eine kleine Zulage ins Einspielen bringt und dann vollkommen gleich grosse Gewichte beiderseits auflegt. Spielt die Wage neuerdings ein, so ist sie gleicharmig. Da man aber selten sicher ist, dass die verfügbaren grösseren Gewichte vollkommen gleich sind, so verfährt man am zweckmässigsten auf folgende Weise, wobei man den Fehler nicht bloss nachzuweisen, sondern auch der Grösse nach zu bestimmen vermag:

Man beobachtet den Ruhepunkt der Zunge bei unbelasteter Wage (aber mit angehängten Schalen), setzt dann die wenigstens angenähert gleichen Gewichte auf, deren genaue Werthe mit P und P' bezeichnet seien und fügt dann links oder rechts, wo es eben nöthig ist, noch das

Zulagegewichtchen p hinzu, um die Zunge wiederum auf dieselbe Ruhelage zu bringen. Hierauf vertauscht man die Gewichte und verfährt ebenso wie früher. Das diesmal auf der anderen Seite benöthigte Zulagegewichtchen betrage q.

Sind die Längen der beiden Arme $= L$ und L', so ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen:

$$L\,(P + p) = L'\,P'$$
$$L\,P' = L'\,(P + q)$$

Durch Addition beider erhält man:

$$L\,(P + P' + p) = L'\,(P + P' + q)$$

woraus das Verhältniss der Armlängen

$$\frac{L}{L'} = \frac{P + P' + q}{P + P' + p} = \text{(angenähert) } 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

folgt.

Die letzte Umformung beruht auf der Erwägung, dass die Gewichtchen $p + q$ gegenüber $P + P'$ sehr klein sind. In Folge dessen unterscheidet sich das Drehungsmoment $L\,p$ von $L'\,p$ nur um die verschwindend kleine Grösse $(L - L')\,p$. Man kann sich daher vorstellen, man habe statt auf der linken Seite das Gewichtchen p zuzulegen, dasselbe auf der rechten Seite fortgenommen.

Die obige Gleichung wird dann:

$$L\,(P + P') = L'\,(P + P' + q - p)$$

woraus sofort

$$\frac{L'}{L} = 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

folgt.

Aus dem gleichen Grunde kann man auch, falls beide Uebergewichtchen auf derselben Seite aufzulegen wären, eines derselben als negatives auf der anderen Seite ansehen. Für $P + P'$ kann man die Summe der Nennwerthe dieser Gewichte einsetzen.

Zahlenbeispiel: Man habe auf die bei leeren Schalen im Gleichgewicht befindliche Wage aufgelegt:

Links:	Rechts:
ein 500 g-Stück nebst 0,5 mg;	ein 200 g-Stück und 3 Stücke zu 100 g.

Die links zugelegten 0,5 mg stellen das Gleichgewicht her.

Hierauf vertausche man und habe bei wieder eingetretenem Gleichgewicht:

Links:	Rechts:
das 200 g-Stück und die 3 Stücke zu 100 g;	das 500 g-Stück nebst 5,5 g;

folglich ist:

$$p = 0{,}5\text{ mg} \quad q = 5{,}5\text{ mg} \quad P + P' = 1000\text{ g} = 1\,000\,000\text{ mg}$$

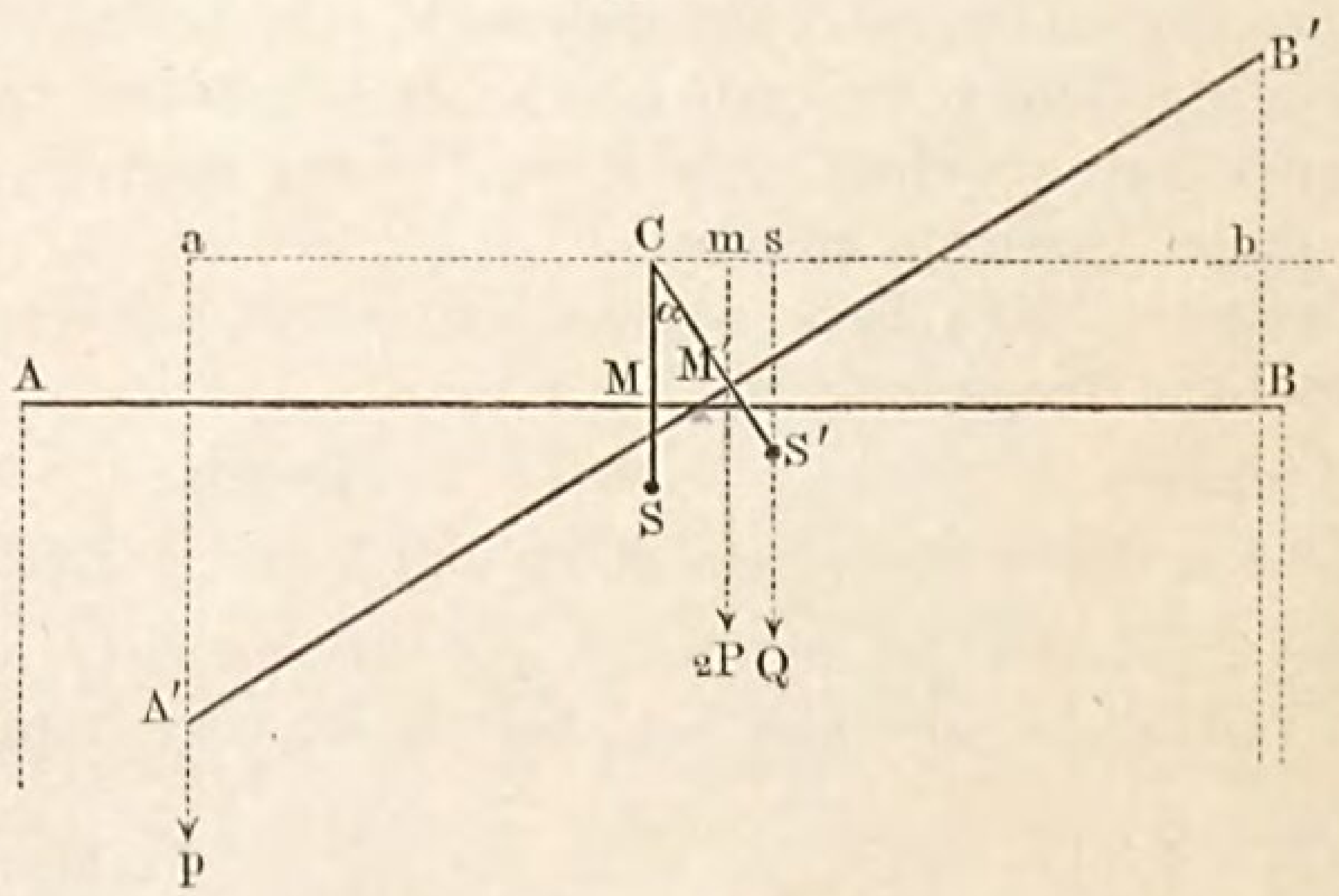
$$\frac{L}{L'} = 1 + \frac{5{,}5 - 0{,}5}{1\,000\,000} = 1{,}000005$$

Eine solche Ungleichheit ist bei den Wägungen entweder durch Rechnung zu corrigiren, oder durch die Methode der Wägung zu eliminiren, oder endlich an der Wage selbst mittelst hierzu angebrachter Adjustirungsvorrichtungen wegzuschaffen, worüber später Näheres mitgetheilt werden soll. Ueberhaupt sind die obigen Bedingungen der Richtigkeit nicht zugleich als die Bedingungen der Brauchbarkeit anzusehen. So z. B. ist eine kleine Ungleichheit im Gewichte der Schalen, ja sogar der Balkenhälften von geringer Bedeutung, da man sie durch die Art des Wägens ebenfalls eliminiren kann.

Viel wichtiger ist, dass die Wage bei wiederholter Arretirung und Auslösung immer wieder in gleicher Weise einspiele, dass ferner die Schwingungsbögen nur langsam abnehmen (also die Reibung an der Achse sehr gering sei), dass die Arretirung den Balken beiderseits gleichzeitig loslasse; ferner dass eine Verstellung der Gewichtsstücke auf derselben Schale keine Aenderung im Einspielen zur Folge habe, endlich dass die Wage die nöthige Empfindlichkeit habe, worüber der folgende Paragraph handeln soll.

51 **Empfindlichkeit der Wage.** Eine Wage, mit welcher man genau wägen will, muss empfindlich sein, d. h. sie muss schon bei einem sehr kleinen Uebergewicht p einen messbaren Ausschlag α geben. Die Empfindlichkeit ist also verkehrt proportional dem dazu erforderlichen Uebergewichte also direct proportional dem reciproken Werthe derselben $\frac{1}{p}$. Wir wollen nun untersuchen, von welchen Constructionsbedingungen diese Empfindlichkeit abhängt.

Fig. 196.



Es seien A und B in Fig. 196 die Endschneiden eines Wagebalkens, an denen die gleichen Gewichte P und P (die Schalen inbegriffen) hängen.

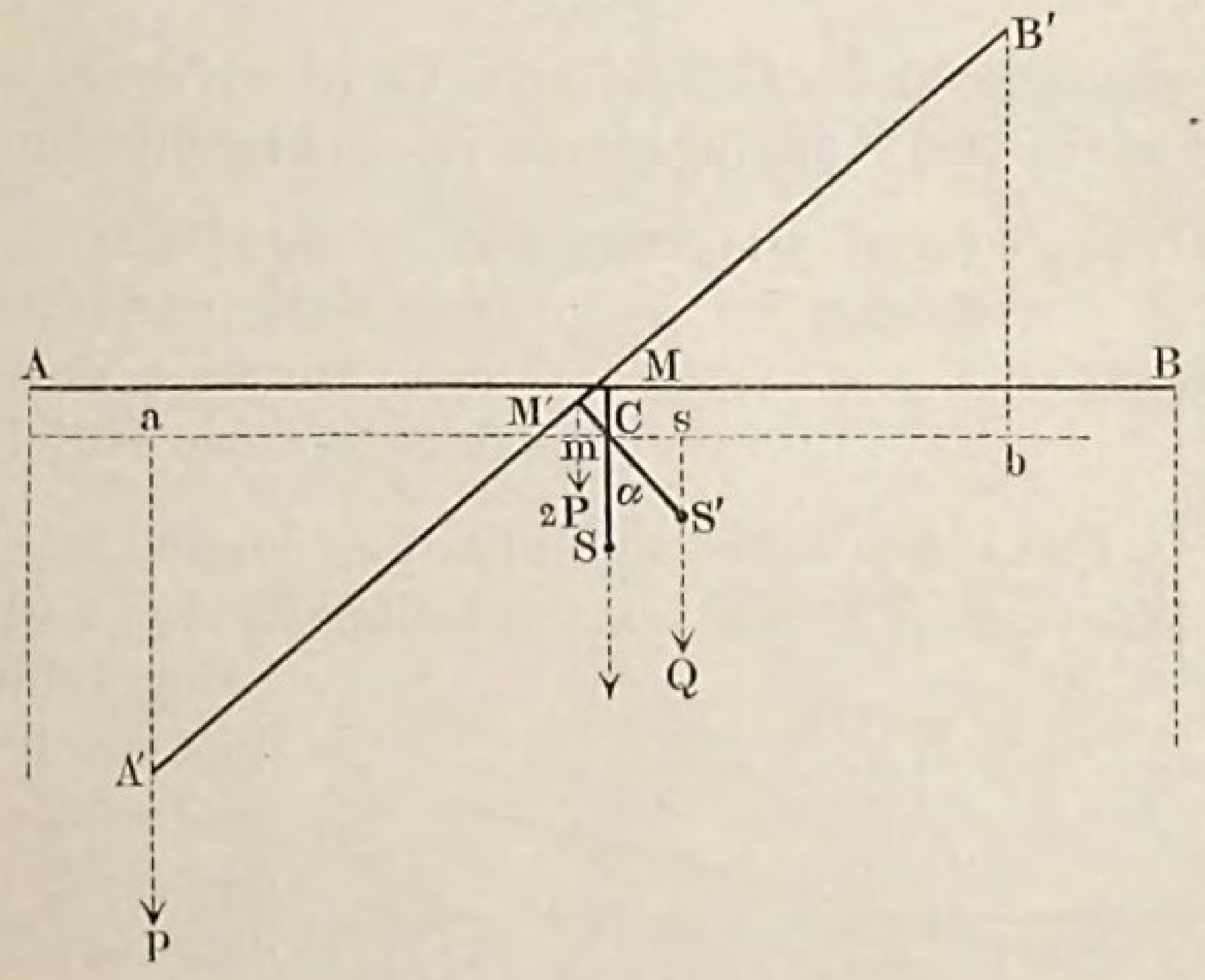
Durch die Mitte von AB in M denken wir uns in der Zeichnungsebene eine Senkrechte gezogen. In dieser müssen der Aufhängepunkt C (die Mittelschneide) und der Schwerpunkt S gelegen sein. Dass der

letztere unterhalb des ersteren sich befinden müsse, haben wir bereits erörtert, da sonst kein stabiles Gleichgewicht bestehen könnte. Hingegen ist in Bezug auf die Lage des Aufhängepunktes C bisher noch nichts festgestellt.

Nehmen wir daher einmal an, derselbe befinde sich über dem Mittelpunkte M, wie Fig. 196 zeigt, in C. Nach dem Auflegen des Uebergewichts p auf die linksseitige Schale nimmt die Wage die neue Ruhelage an, welche durch die Punkte A', B', M', S' gegeben ist. Diese Punkte haben sämmtlich um den Aufhängepunkt C dem Winkel α entsprechende Kreisbögen beschrieben.

Ist die Wage in Ruhe gekommen, so muss die Summe der Drehungsmomente beiderseits gleich gross sein. Die beiden gleichen Gewichte P und P können wir uns in dem Punkte M vereinigt denken. Das Gewicht des Balkens greift in S' an, das Uebergewicht p in A'. Ziehen wir die

Fig. 197.



Horizontale durch C und die verticalen Hülfslinien $A'a$, $M'm$, $S's$, $B'b$, so muss die Gleichung bestehen:

$$p \cdot Ca = Q \cdot Cs + 2P \cdot Cm$$

also:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \cdot Cs + 2P \cdot Cm}$$

Man ersieht aus diesem Ausdrucke zunächst, dass die Empfindlichkeit ausser von den übrigen Constructionsverhältnissen der Wage, insbesondere auch von der Grösse der Belastung der Endschneiden abhängt, und zwar nimmt in diesem Falle die Empfindlichkeit ab, wenn die Belastung zunimmt.

In Fig. 197 ist der andere Fall dargestellt, wo der Aufhängepunkt C sich unterhalb der Mitte M befindet. Für diese Lage erhält man:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \cdot Cs - 2P \cdot Cm}$$

Hier nimmt die Empfindlichkeit zu, wenn die Belastung $2P$ zunimmt. Soll die Wage nicht indifferent werden oder gar umschlagen, so darf jedoch $2P.Cm$ nicht gleich $Q.Cs$ oder gar grösser werden.

Diese Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Belastung ist bei einer guten Wage möglichst zu vermeiden. Man erreicht dies, indem man das Product $2P.Cm = 0$ macht. Dazu ist nur nöthig, die Länge $Cm = 0$ zu machen, indem man den Aufhängepunkt C in die Mitte M verlegt, so dass also alle drei Drehschneiden in eine Ebene zu liegen kommen.

In diesem dritten Falle geht die Figur in die einfachere Form (Fig. 198) über und die Gleichgewichtsbedingung lautet nun:

$$p \,.\, Ca = Q\, Cs$$

daraus folgt:

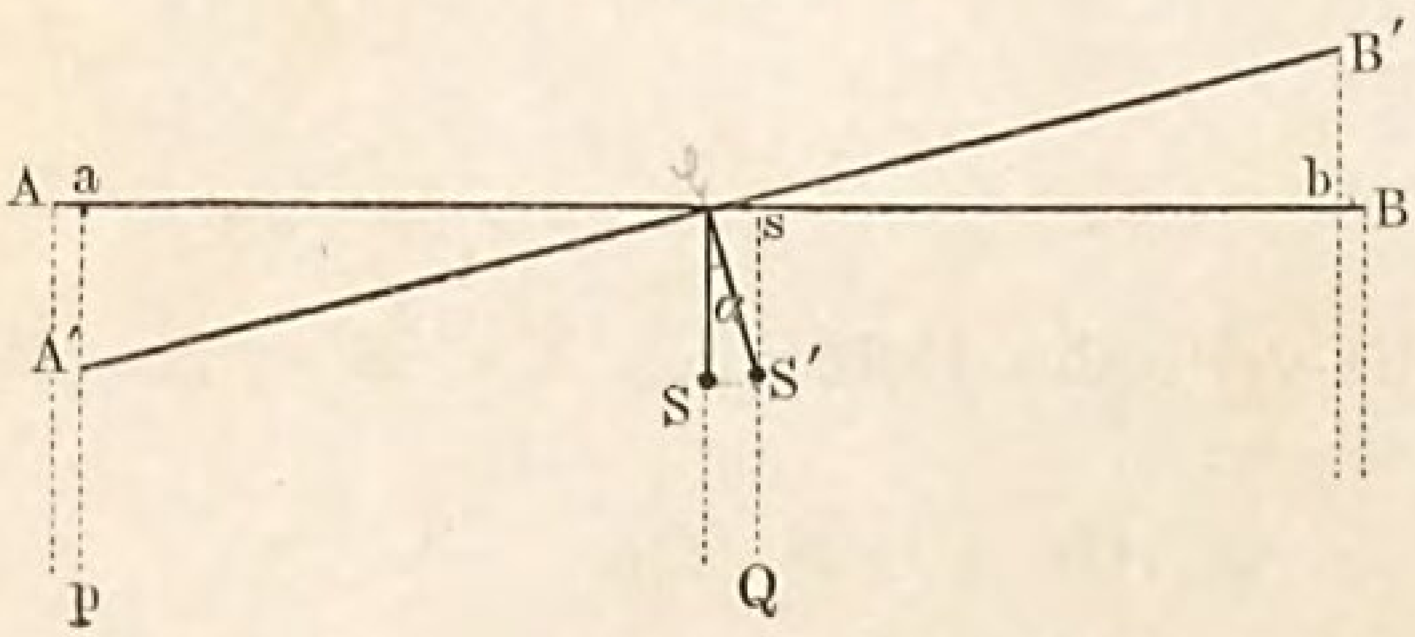
$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \,.\, Cs}$$

Da Ca proportional der Balkenlänge, Cs proportional dem Abstande des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt ist, so ergiebt sich hiermit:

Die Empfindlichkeit	direct	proportional	der Balkenlänge	1)
„ „	verkehrt	„	dem Balkengewichte . . .	2)
„ „	„	„	dem Abstande des Schwerpunktes von der Mittelschneide	3)

Wollte man aus dem Satze 1) schliessen, dass es für die Empfindlichkeit der Wage zweckmässig sei, ihrem Balken eine möglichst grosse Länge zu geben, so wäre dies ein Irrthum, denn man würde dadurch mit der aus 2) folgenden Bedingung, dass der Balken so leicht als möglich zu machen sei, in Widerspruch gerathen.

Fig. 198.

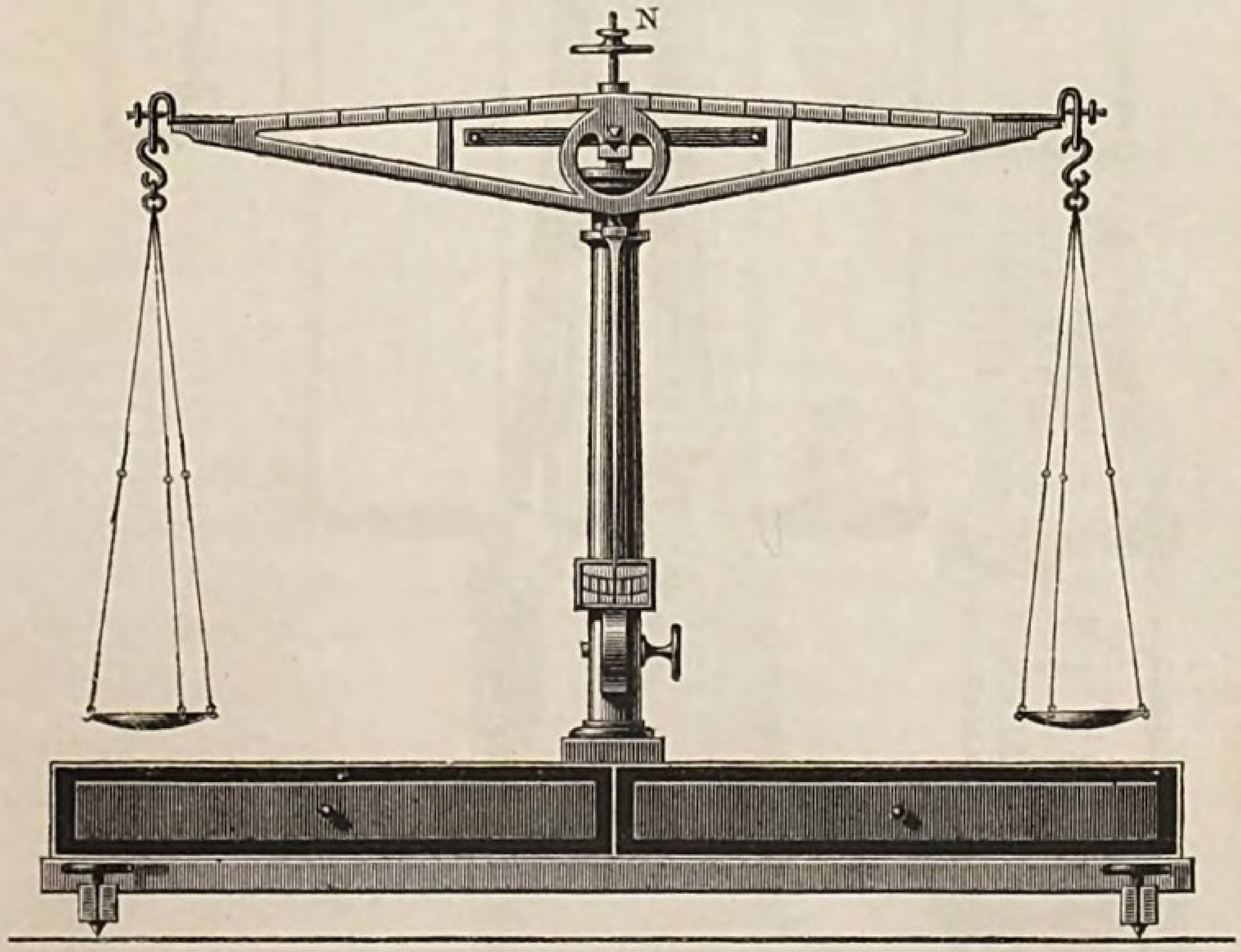


Soll nämlich der Balken fest genug bleiben, um sich unter der Belastung nicht merklich zu biegen, so muss bei Zunahme seiner Länge sein Gewicht in rascherem Verhältnisse zunehmen. Das Verhältniss $\frac{\text{Balkenlänge}}{\text{Balkengewicht}}$ und damit auch die Empfindlichkeit wird daher viel eher dadurch gesteigert, dass man den Balken verkürzt statt verlängert und da ausserdem kurze Balken noch den Vortheil rascherer Schwingungen für sich haben, so gebührt ihnen der Vorzug. Auf diesen Sachverhalt gestützt, hat Bunge in Hamburg zuerst Wagen mit sehr kurzen Balken construirt. Doch darf man auch in dieser Richtung nicht zu weit gehen, da sonst andere Missstände auftauchen.

Das möglichst geringe Gewicht des Balkens bei genügender Festigkeit sucht man ausserdem dadurch zu erreichen, dass man den Wagebalken in durchbrochener Form (Fig. 199) ausführt oder auch durch Strebespangen gegen Verbiegungen schützt.

Die aus 3) folgende Bedingung verlangt, dass der Schwerpunkt nahe dem Aufhängepunkte, d. i. der Mittelschneide liege. Dies ist stets und in beliebigem Grade zu erreichen mit Hülfe eines verschiebbaren Gewichtes, welches entweder längs der Zunge oder (meistens) oberhalb der Balkenmitte an einer senkrecht stehenden Schraubenspindel in Form einer geränderten Scheibe auf- und abzuschrauben ist. Theoretisch könnte hierdurch die Empfindlichkeit bis ins Unbegrenzte gesteigert werden. In der Praxis ist man aber durch den Umstand beschränkt, dass die dadurch empfindlicher gemachte Wage langsamer

Fig. 199.

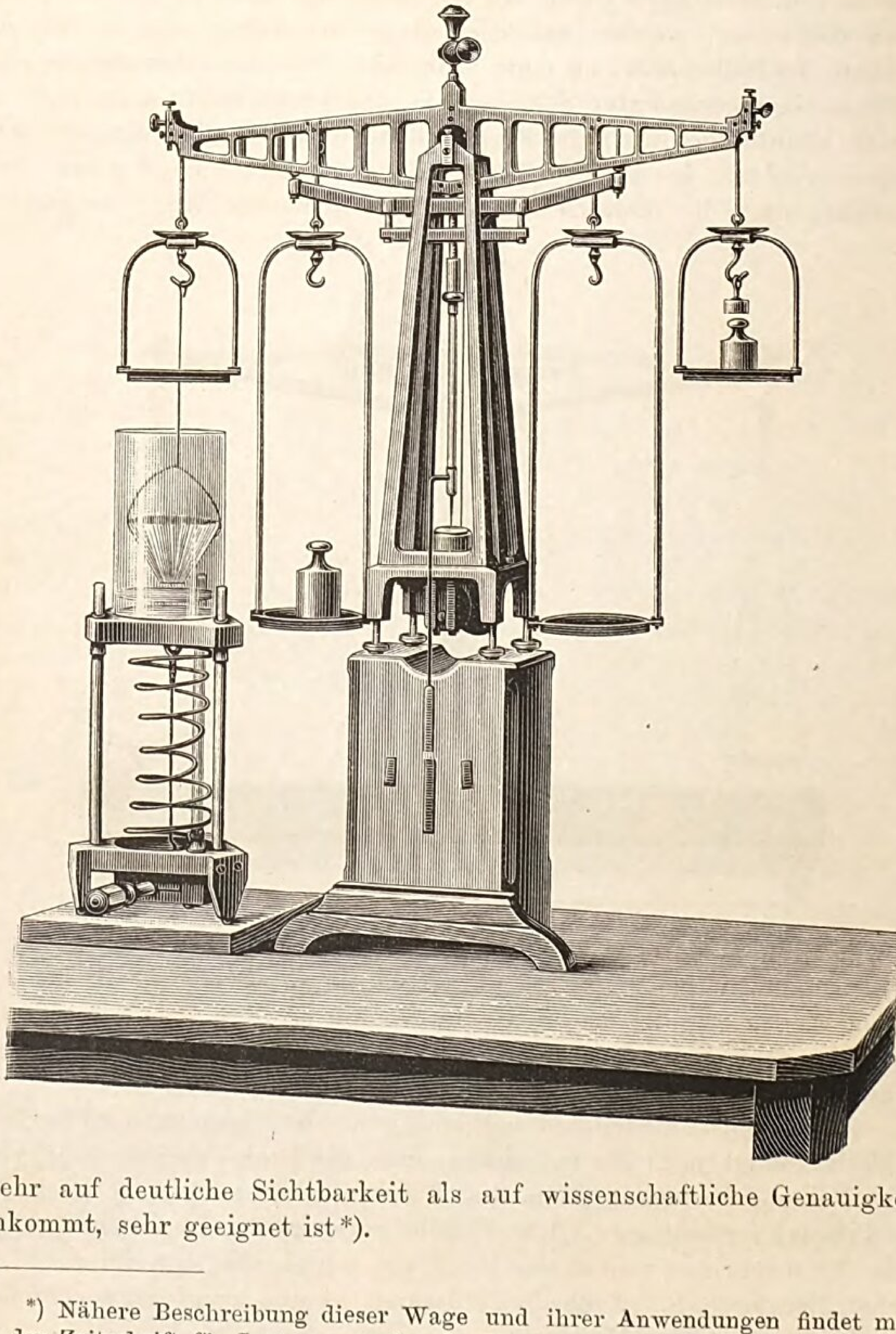


schwingt und dadurch das Wägen endlich zu zeitraubend wird. Auch werden dann die Einstellungen unregelmässiger. Bei gewöhnlichen genauen Wagen regulirt man den Schwerpunkt so, dass eine Schwingung ungefähr zehn Secunden dauert. Bei kurzarmigen Wagen kann die Schwingungsdauer auf sechs Secunden reducirt werden.

Zu den eben abgeleiteten mathematischen Bedingungen der Empfindlichkeit kommt noch die technische, dass die Drehschneiden möglichst ohne Reibung beweglich seien, was durch möglichste Schärfe der Kante des Prismas erreicht wird. Um dieselbe recht haltbar zu machen, wählt man für das Prisma und dessen Unterlage sehr hartes Material wie Stahl Achat, Bergkrystall. Auch die Endschneiden und zugehörigen Pfannen bestehen aus solchem Materiale.

Um die hier abgeleiteten Sätze über die Abhängigkeit der Empfindlichkeit der Wage von der gegenseitigen Lage der Mittelschneide zu den Endschneiden und zum Schwerpunkt experimentell zu demonstriren, kann man sich mit Vortheil der Demonstrationswage von Alb. Ruepr echt in Wien bedienen, welche auch sonst zu vielen Vorlesungsversuchen, wo es

Fig. 200.



mehr auf deutliche Sichtbarkeit als auf wissenschaftliche Genauigkeit ankommt, sehr geeignet ist*).

*) Nähere Beschreibung dieser Wage und ihrer Anwendungen findet man in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, März 1882, S. 99.

Fig. 200 giebt eine perspectivische Ansicht dieses Apparates nebst einem überschüssigen Schalenpaar und einer Vorrichtung zu Wägungen unter Wasser. Die Zunge trägt eine (abnehmbare) Verlängerung, deren Bewegung über der einfachen Scala auf grosse Distanz deutlich sichtbar ist. Zur Ausgleichung kleiner Gewichtsdifferenzen kann man sich der an dem senkrechten Fortsatze oberhalb des Balkens drehbaren „Fahne“ bedienen. Die Vorrichtung zur Verrückung des Schwerpunkts besteht aus einer auf der Zunge verschiebbaren Hülse. Hebt man diese bis zu einer angebrachten Marke, so kommt die Wage in das indifferente Gleichgewicht, bei weiterer Hebung wird ihre Aufhängung eine labile. Schiebt man die Hülse ungefähr 1 cm unter die erwähnte Marke herab, so erhält die Wage eine Empfindlichkeit, welche ein Uebergewicht von 20 mg dem Auditorium noch sicher zu erkennen giebt. Geht man noch weiter, endlich bis zur Grenze herunter, so nimmt die Empfindlichkeit ab, so dass schliesslich 2 g Uebergewicht erforderlich werden, um einen Grad Ausschlag zu geben.

Um den Einfluss der relativen Stellung der Mittelschneide zu den Endschneiden zu zeigen, sind letztere derartig verstellbar befestigt, dass sie aus ihrer normalen Lage um 5 mm gesenkt oder gehoben werden können. Zu diesem Zwecke werden die beiden seitlichen Lappenschrauben gelüftet, die beiden vertical wirkenden Kopfschrauben nieder- oder emporgeschraubt und dann die Lappenschrauben wiederum fest angezogen.

Die dadurch bewirkte Verrückung des Schwerpunktes kann mittelst der Hülse an der Zunge ausgeglichen werden, so dass die unbelastete Wage wieder sehr empfindlich ist. Sind die Endschneiden um 5 mm gesenkt worden, so zeigt sich dann eine rasche Abnahme dieser Empfindlichkeit mit Zunahme der Belastung, so dass zuletzt bei 1 kg Belastung auf jeder Seite 1 g Uebergewicht erforderlich ist, um einen deutlichen Ausschlag zu geben. Hat man dagegen die Endschneiden um 5 mm über ihre normale Lage gehoben, so zeigt die Wage bei Vermehrung der Belastung eine zunehmende Empfindlichkeit, welche bei weiterer Vermehrung der ersteren in das indifferente und dann ins labile Gleichgewicht übergeht.

Hat man bei verhältnissmässig kleinen Belastungen die normale Lage der Endschneiden durch Herstellung constanter Empfindlichkeit hervorgebracht, so kann man bei grossen Belastungen eine eintretende Biegung des Balkens an dem Umstande erkennen, dass dann in Folge der Senkung der Endschneiden wieder eine Abnahme der Empfindlichkeit bei steigender Belastung eintritt. Hebt man die Endschneiden so weit, dass die Empfindlichkeit wiederum constant erscheint, so beträgt diese Verrückung eben so viel wie die Biegung, da sich beide compensiren.

Auch in Bezug auf die Richtigkeit gestattet die Rueprecht'sche Demonstrationswage Abänderungen vorzunehmen.

Zu diesem Zwecke ist eine Einrichtung getroffen, dass die Endschneiden auch in horizontaler Richtung um 1 mm der Mittelachse

genähert, beziehungsweise von ihr entfernt werden können. Durch Vertauschung der nahe gleich belasteten Gehänge lässt sich dann die Ungleichheit der Arme constatiren, ihr Verhältniss messen und ihre Lage corrigiren.

52 Construction und Rectification einer genauen Wage.

So einfach in der Theorie die Construction einer richtigen und empfindlichen Wage erscheint, so schwierig ist die praktische Ausführung derselben für den Mechaniker. Da es nicht möglich ist, die Constructionsbedingungen, insbesondere die relativen Lagen von Schwerpunkt, Mittelschneide und Endschneiden zu einander von vornherein mit der äussersten Genauigkeit herzustellen, so müssen Vorrichtungen getroffen sein, welche die nachträgliche gegenseitige Vorstellung dieser Theile und dadurch die Rectificirung der Wage in methodischer Weise ermöglichen. Ausserdem erfordern die zum Schutze der Schneiden anzubringenden Arretirungsvorrichtungen mehr oder minder complicirte Constructionen.

Die beiden Endschneiden sollen, wie gezeigt wurde, mit der Mittelschneide in einer Ebene und parallel mit derselben in gleichen Abständen sich befinden.

Aus dieser richtigen Lage kann eine Endschneide auf folgende Weise in eine unrichtige Lage verschoben sein:

1. durch Parallelverschiebung in horizontaler Ebene, wodurch die Wage ungleicharmig wird;

2. durch Parallelverschiebung in verticaler Ebene, wodurch die Empfindlichkeit abhängig wird von der Grösse der Belastung;

3. durch Drehung in horizontaler Ebene, wodurch das Verhältniss der Längen der Balkenarme abhängig wird von der zufälligen Lage der Gehänge auf den Endschneiden;

4. durch Drehung in verticaler Ebene, wodurch während der Schwingungen der Wage Ungleicharmigkeit eintreten kann.

Aus 4. kann nur bei grober Abweichung von der richtigen Lage ein erheblicher Fehler entstehen und wird deshalb selten hierfür eine eigene Adjustirungsvorrichtung angebracht. Aus 2. folgt keine eigentliche Unrichtigkeit, sondern nur eine Unvollkommenheit der Wage, dagegen sind die Abweichungen aus 1. und 3. um so wichtiger und es sollen daher bei jeder guten Wage Adjustirungsvorrichtungen vorhanden sein, wodurch diese Fehler corrigirt werden können.

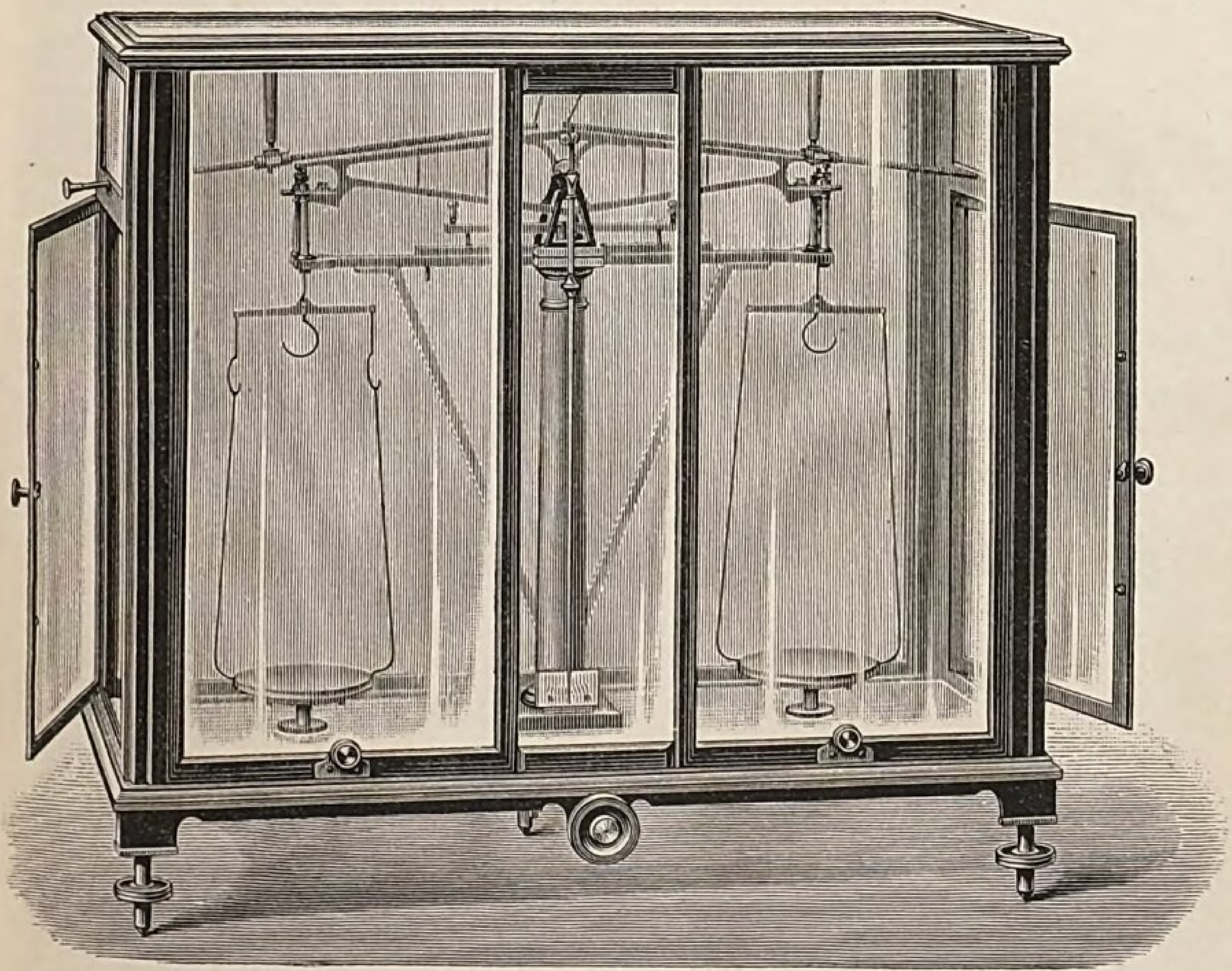
Wie man die Fehler 1. und 2. erkennt, wurde bereits oben gezeigt. Methoden zur Entdeckung der Fehler 3. und 4. werden weiter unten mitgetheilt werden.

Ausserdem sind noch zwei Adjustirungen des Schwerpunktes erforderlich, nämlich eine Vorrichtung zur Verschiebung desselben in verticaler und eine zur Verschiebung in horizontaler (mit dem Balken paralleler) Richtung.

Die Art und Weise, wie die Mechaniker*) diese Adjustirungsvorrichtungen für die Schneiden und den Schwerpunkt an dem Wagebalken anbringen, ist sehr mannigfaltig, ebenso wechselt die Construction der Arretirungsvorrichtungen von einer Wage zur anderen. Wir können hier nur einige Hauptformen erwähnen und wollen zunächst eine Wage mittlerer Tragkraft von Rueprecht in Wien (Nr. 26 des Katalogs) näher beschreiben. Die Figur 201 giebt eine perspectivische Totalansicht derselben in $^1/_7$, die Figuren 202 bis 208 Detaildarstellungen in $^3/_4$ der wirklichen Grösse.

Der Wagekasten ist, um möglichst wenig Licht abzuhalten und insbesondere, um der Unbeständigkeit des Holzes auszuweichen, ganz aus

Fig. 201.



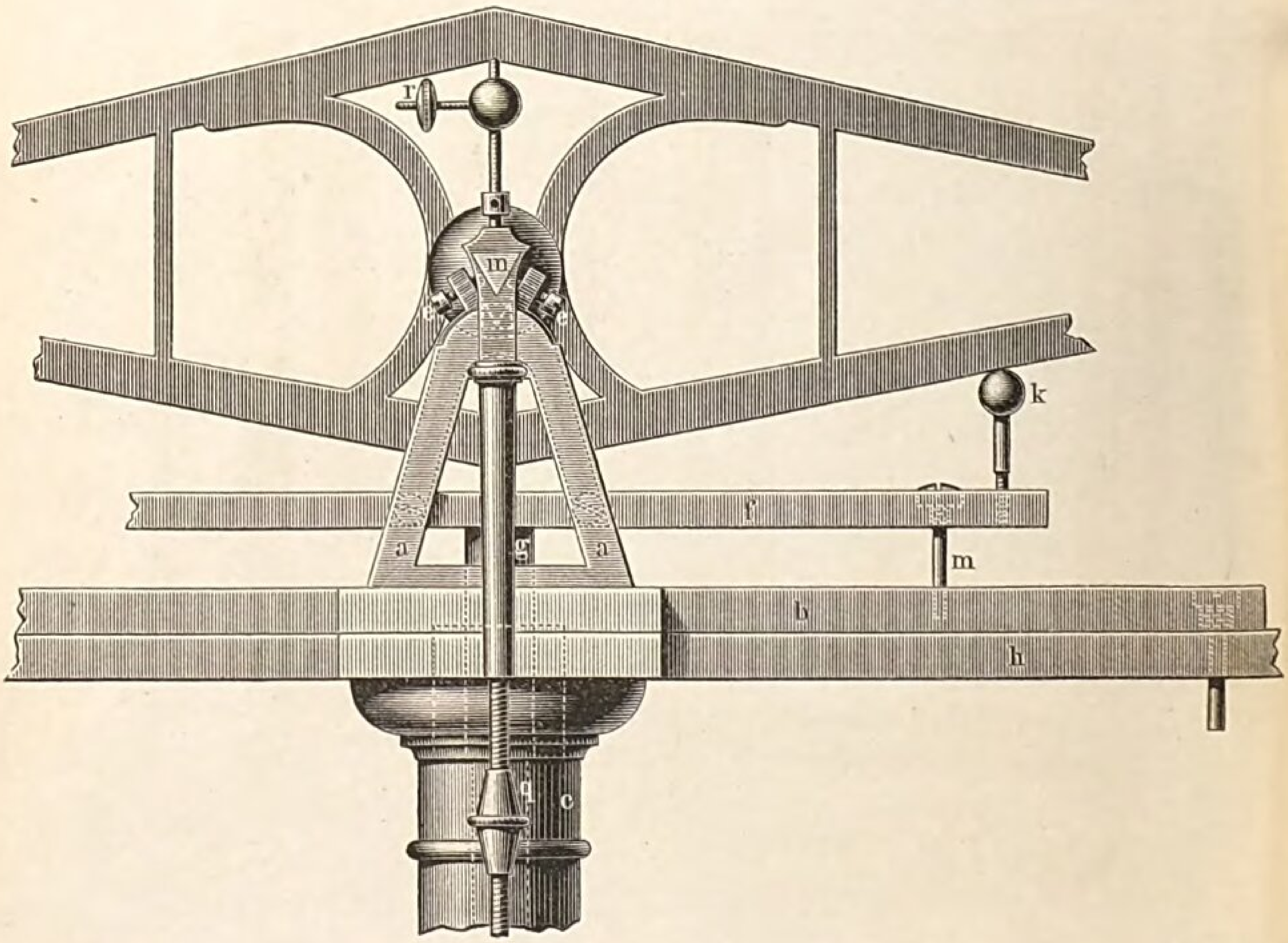
Messing und Glas gearbeitet. Die Schieberthüren an der Vorderseite werden durch Gegengewichte in jeder Lage im Gleichgewicht gehalten.

Die Wagsäule besteht aus drei concentrischen Theilen, zwei Hohlcylindern und einem cylindrischen Kern. Siehe Fig. 203. Der äussere

*) Vorzügliche Wagen werden beispielsweise ausgeführt von den Mechanikern Bunge in Hamburg, Oertling in London, Olland in Utrecht, Rueprecht in Wien, Sartorius in Göttingen, Sacré in Brüssel, Schickert in Dresden, Stollenreuther in München, Staudinger in Giessen, Stückrath in Berlin, Westphal in Celle.

Hohlcylinder *c* bildet die feststehende Säule, sie ist mit der horizontalen Lamelle *b* und den beiden Böcken *a, a* zu einem festen Ganzen zusammengeschraubt. Auf den Böcken sind die Planlagersteine aus Bergkrystall *p, p* befestigt, auf welche die Mittelschneide niedergelassen wird, wenn der Balken frei schwingen soll. Der cylindrische Kern *g* aus Stahl vermittelt die Balkenarretirung. Er trägt zu diesem Zwecke die fest mit ihm verbundene Lamelle *f* (Fig. 202) und nach aufwärts die beiden Böcke *d, d*, welche oben geschlitzt das Prisma *m* des Balkens aufnehmen, indem sich dessen schräge Flächen auf die polirten, abgerundeten, harten Stahlschrauben *e, e, e, e* auflegen. Durch passende Stellung der letzteren erhält das Prisma und damit der Balken seine richtige Lage, wobei die

Fig. 202.



Schneide des Prismas der Lagerebene genau parallel gestellt und auch ihre richtige Einstellung in Bezug auf eine verticale Achse gesichert wird. Eine weitere Unterstützung erhält der Balken gleichzeitig durch die Kugelschrauben *K*. Die Balkenarretirung erhält durch die cylindrischen Stifte *m* eine Führung im feststehenden Theile *b*.

Die Gehängearretirung wird durch den inneren Hohlcylinder *l* vermittelt, welcher im unteren Theile der Säule seine Führung findet und mit den beiden schief ansteigenden Stützen, Fig. 201, fest verbunden ist. Am oberen Ende ist dieser Hohlcylinder mit dem horizontalen

Träger *h* zusammengeschraubt, welcher selbst an seinen Enden je zwei Säulchen *i*, *i* zur Arretirung der Gehänge trägt. Die Art und Weise, wie der Träger *h* durch den äusseren Hohlcylinder *c* hindurch wirkt, ist aus Fig. 205 ersichtlich, welche den Träger *h* von oben gesehen zeigt. Der letztere besitzt zwei Ausschnitte in Form von concentrischen Kreissegmenten, durch welche der geschlitzte äussere Hohlcylinder, der als Tragsäule fungirt, hindurchtritt. Ausserdem erhält der Träger *h* noch eine Führung durch die cylindrischen Stifte *n*, welche vom feststehenden Theil *b* aus in Bohrungen von *h* eingreifen.

Fig. 203.

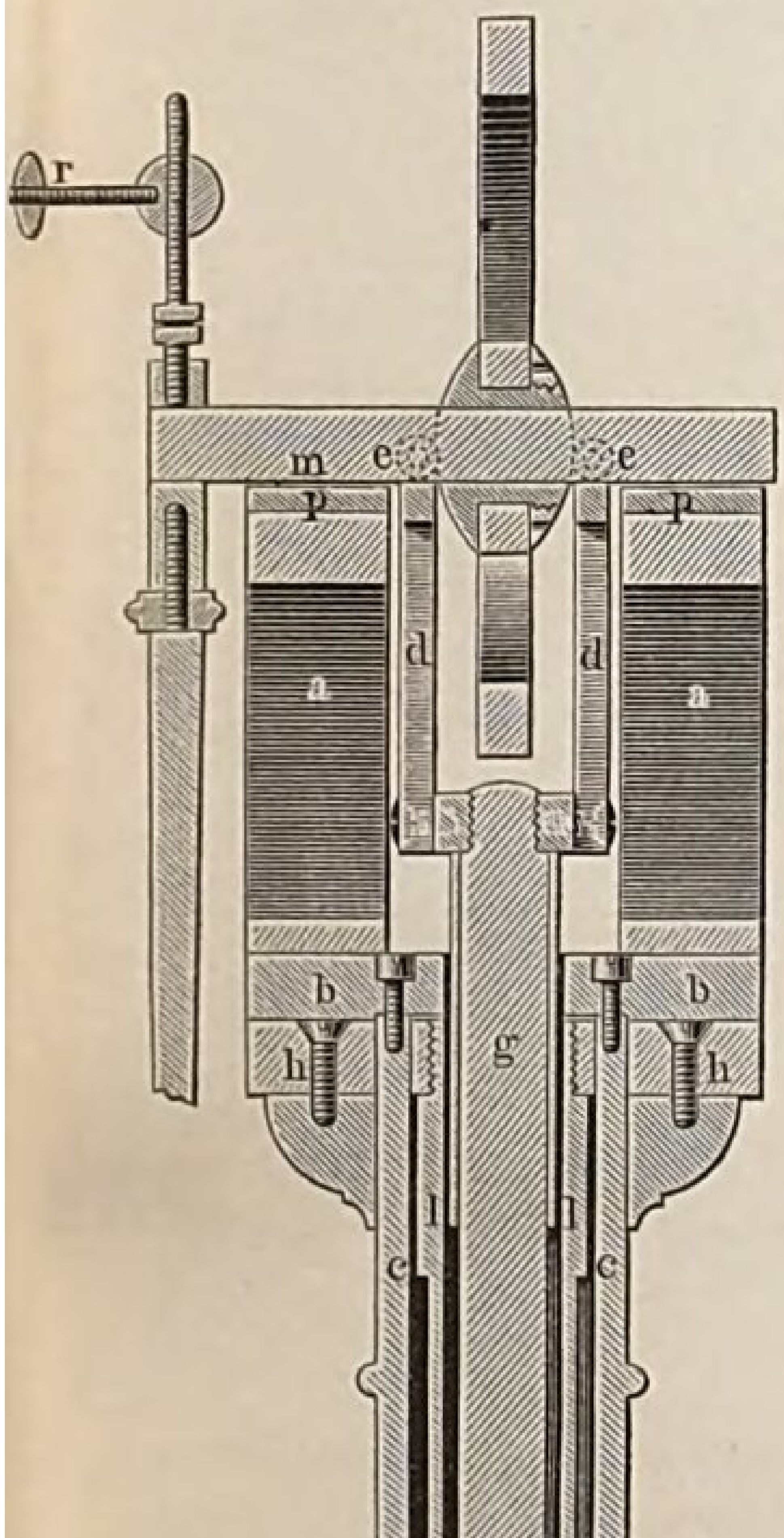


Fig. 204.

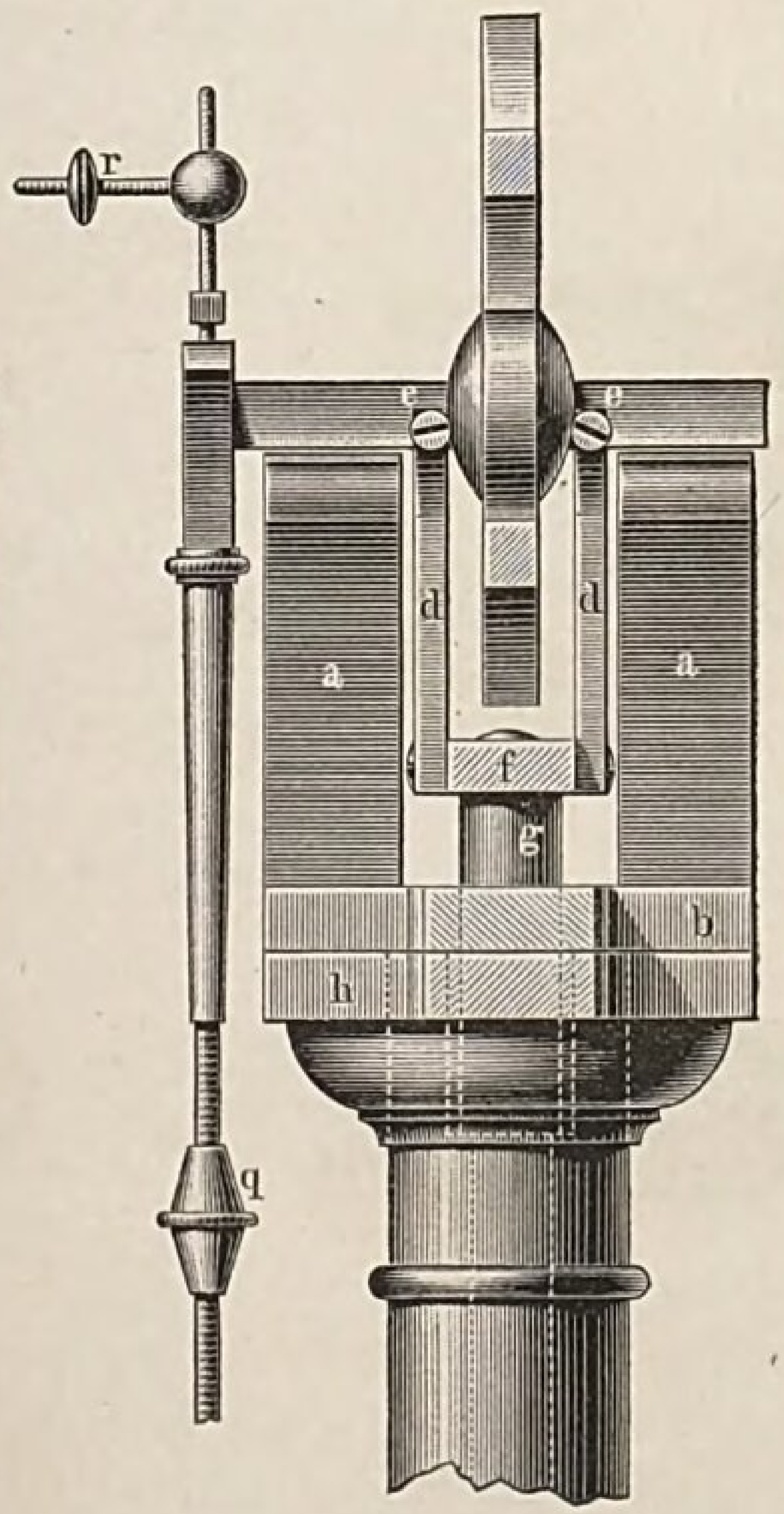
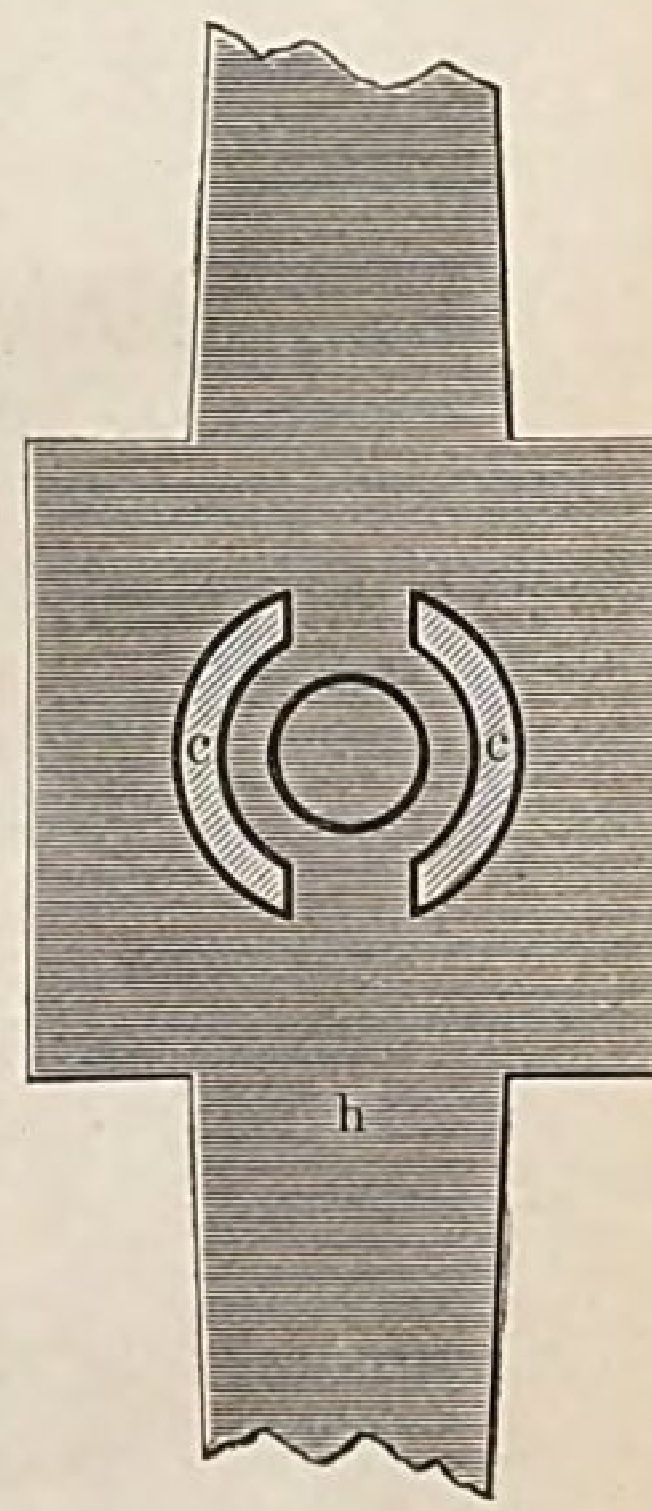


Fig. 205.



Die Hebung und Senkung der beiden Arretirungsvorrichtungen erfolgt durch die Drehung zweier an einer Welle unterhalb der Säule liegender Excenter. (In der Figur nicht sichtbar).

Die Schalenarretirung wird mittelst eines dritten Excenters an derselben Stelle durch Hebelübertragung vermittelt.

Der Vorgang bei der Lösung der Arretirung ist derartig, dass zuerst die Schalen von der Unterstützung frei werden, danach die Gehänge mit ihrer Last auf die Seitenachsen aufgesetzt werden und erst

jetzt die Mittelschneide des Balkens mit den Lagersteinen in Berührung kommt. Die Arretirung erfolgt in umgekehrter Reihenfolge*).

Der Wagebalken hat die aus der Fig. 202 ersichtliche durchbrochene Form. Die Art der Befestigung des Prismas *m* aus Bergkrystall ist aus dem Querschnitt Fig. 203 hinlänglich ersichtlich; sie gestattet eine Drehung des Prismas um eine seiner Schneide parallele Achse. Ebenso ersichtlich ist aus Fig. 203 und der Seitenansicht Fig. 204 die Befestigung der Zunge mit dem Laufgewichte *q* zur Regulirung der Lage des Schwerpunktes in verticaler, sowie die Vorrichtung *r* zur Verschiebung derselben in horizontaler, dem Balken paralleler Richtung.

Von den Adjustirungsvorrichtungen für die Endschneiden sind bei dieser Wage zwei vorhanden, von denen die eine die Endschneide

Fig. 206.

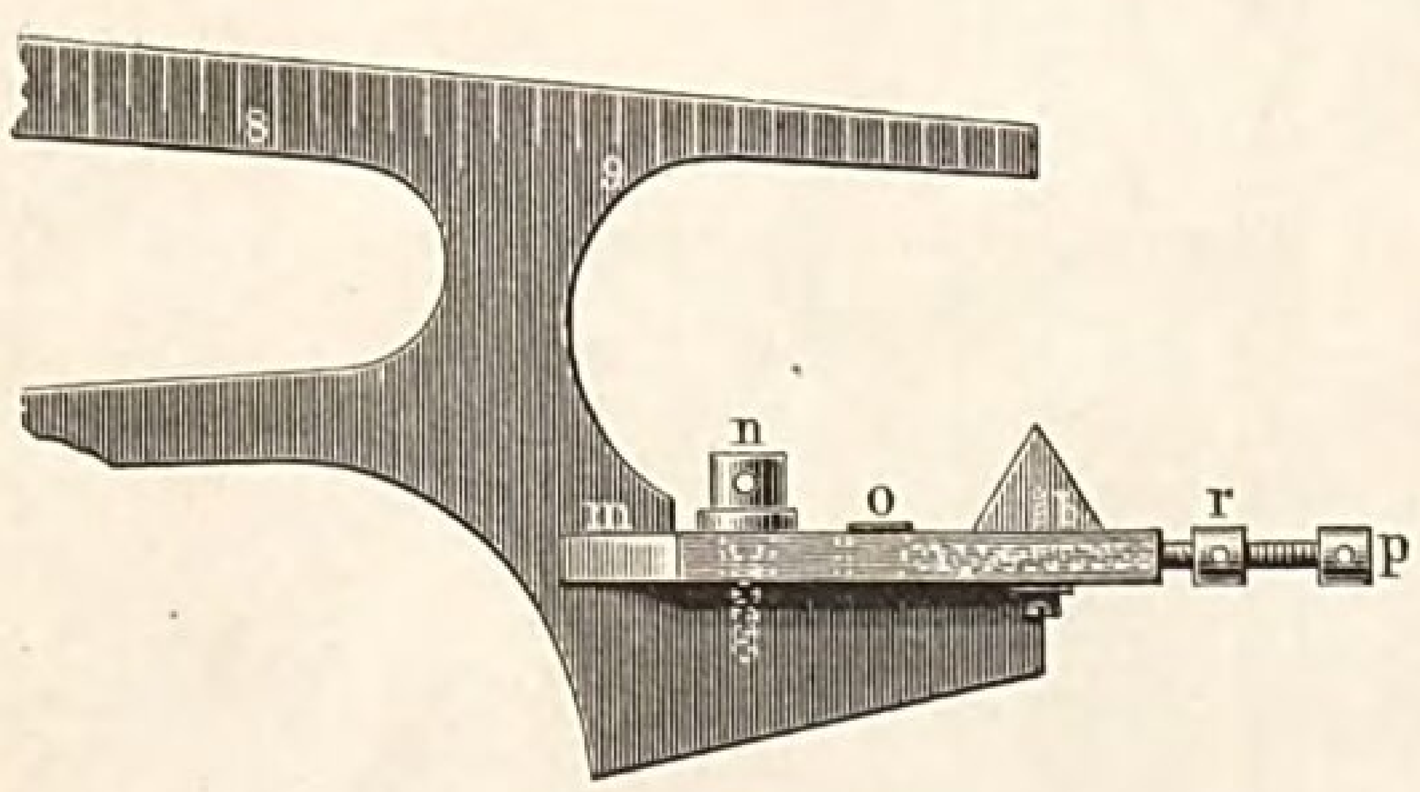


Fig. 207.

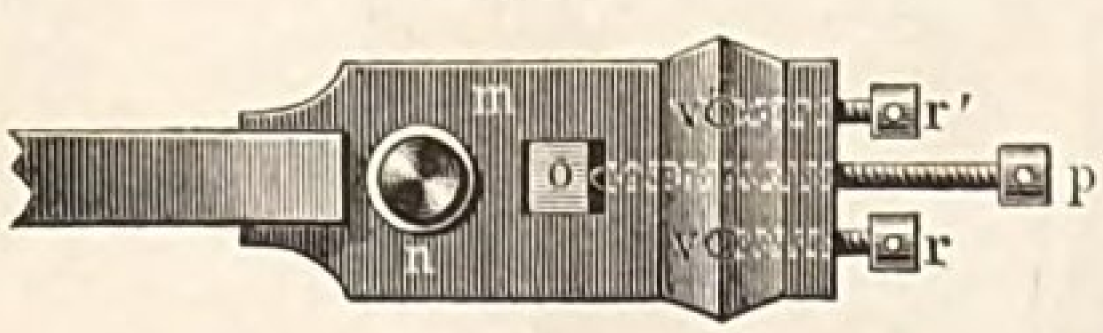
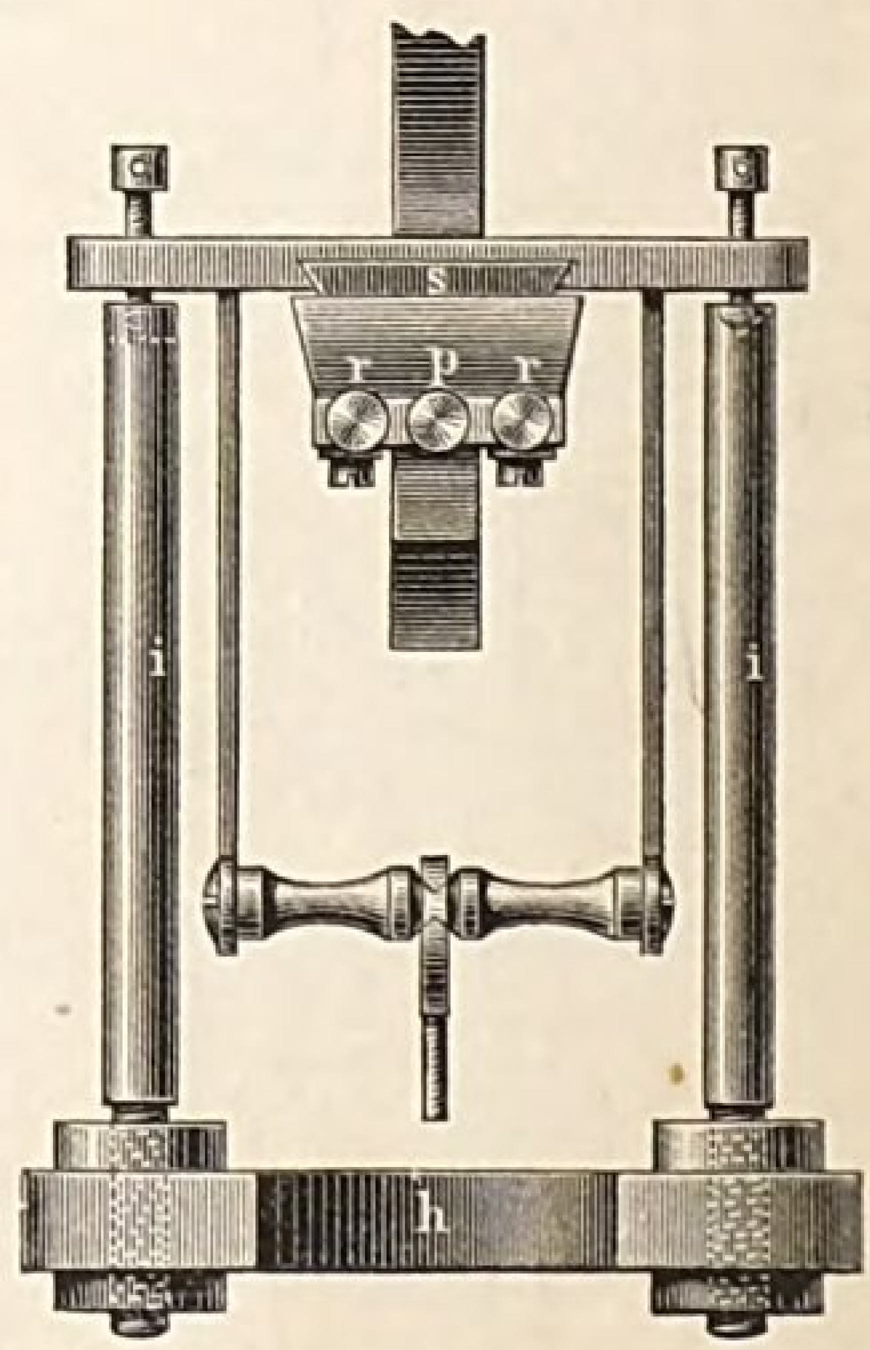


Fig. 208.



in der Richtung des Balkens horizontal zu verschieben, die zweite dieselbe in horizontaler Ebene zu drehen gestattet (Figuren 206 bis 208).

Das Bergkrystallprisma *b*, Fig 206, ist mit der Schneide nach aufwärts durch die zwei Schrauben *v* und *v'* an den stählernen Prismenträger *m* angeschraubt, welcher selbst durch die Schraube *n* mit dem Balken fest verbunden, bei Lüftung der letzteren aber ein wenig längs desselben verschiebbar ist. Er erhält dabei seine horizontale Führung

*) Man findet oft auch die umgekehrte Anordnung und es lassen sich für beide Gründe vorbringen. Für das Lösen der Arretirung ist die oben beschriebene Anordnung vorzuziehen, für die Arretirung selbst verdient die entgegengesetzte Reihenfolge den Vorzug. Siehe Löwenherz, Metrologische Instrumente S. 251 des Berichtes über die wissenschaftlichen Apparate der Londoner Ausstellung 1876 (Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn 1878).

einerseits an seinen geschlitzten Enden, andererseits an dem prismatischen Stück *o*, welches durch einen viereckigen Ausschnitt des Trägers emporragt. Die Bewegung erfolgt durch die Schraube *p*. Zur Parallelstellung endlich dienen die Schrauben *r*, *r'*, welche gegen den Hals der Fixirungsschrauben der Seitenachsen drücken und deren Verschiebung bewerkstelligen können. Die richtige Höhe der Endschneide und eine allfällig nöthige Drehung derselben in einer durch sie senkrecht auf den Balken gelegten Verticalebene muss bei dieser Construction durch Abfeilen des Prismenträgers oder Unterlegen des Prismas erreicht werden.

Fig. 208 stellt die stählernen Gehänge der Wage vor, in welche bei *s* die Planfläche aus Bergkrystall prismatisch eingefügt ist. Seine beiden Bügel sind durch eine in der Mitte eingekerbte und hier rein auspolirte harte Stahlwalze verbunden. In dieser rechtwinklig zur Seitenachse stehenden Kerbe hängt eine schneidige und gehärtete Stahlöse, welche die Wagschale trägt.

Eine Construction, welche alle vier theoretisch gebotenen Rectificationen mit der Endschneide und zwar unabhängig von einander vorzunehmen gestattet, hat sich Georg Westphal in Celle patentiren lassen. Dieselbe ist folgende:

An dem Endtheil des Balkens *A* (Figuren 209 bis 214, a. f. S.) ist der Theil *B* und auf diesem die Endachse *C* befestigt; die Adjustirungen geschehen in folgender Weise:

1. Stellung der Endachsen in die richtige Höhe gegen die Mittelachse, so dass eine an die Schneide der Mittelachse und durch die Mitte ihrer Länge gelegte gerade Linie so viel oberhalb der beiden Endachsen liegt, als es die verlangte und zulässige Empfindlichkeit des Wagebalkens erforderlich macht.

Die Unterkante des Balkens *A* ist an seinem Ende, da wo der Theil *B* angesetzt ist, im Querschnitt spitzwinklig, die Oberkante von *B* dem entsprechend gearbeitet, wie Fig. 213 zeigt. Die beiden Pressschrauben *a a*, Fig. 209 u. 210, mit untergelegten Stahlplättchen verbinden beide Theile fest mit einander. Die Löcher für dieselben in *B* sind grösser gebohrt, als die Hälse von *a a* dick sind, so dass, wenn *a a* gelöst, eine Verschiebung von *B* nach allen Richtungen möglich wird. In einem Vorsprung *b* auf der Oberkante an *B* (s. besonders wieder Fig. 213) sind zwei Stellschrauben *c c* mit viereckigen Köpfen angebracht, welche gegen den Balken treten und vorerst so gestellt sind, dass der Vorsprung *b* in der Längsrichtung parallel der Seitenfläche des Balkens steht. Schraubt man sie nun, während *a a* genügend gelöst sind, mittelst eines passenden Schlüssels beide gleichmässig in den Vorsprung hinein, so muss sich letzterer parallel vom Balken abbewegen, dadurch aber der Theil *B* und somit die Endachse sich senken; beim Herausschrauben von *cc* und Andrücken von *B*, so dass die Schrauben wieder gegen den Balken liegen, wird die Achse umgekehrt sich heben, und zwar wird ihre Schneide dabei immer parallel zu ihrer ersten Lage bleiben.

2. Stellung jeder Endachse in eine unter die Schneide der Mittelachse gelegte horizontale Ebene.

Sollte die gedachte Ebene das eine Ende einer Endachse eher berühren, als das andere, so muss *B* unter der schiefen Unterkante an *A*, anstatt es vorher parallel dem Balken zu nähern oder zu entfernen, gedreht, daher die eine der Schrauben *c* gelöst und die andere um ebenso viel angezogen werden, wodurch das eine Ende der Schneide von *C* sich hebt und das andere um ebenso viel sich senkt.

Fig. 209.

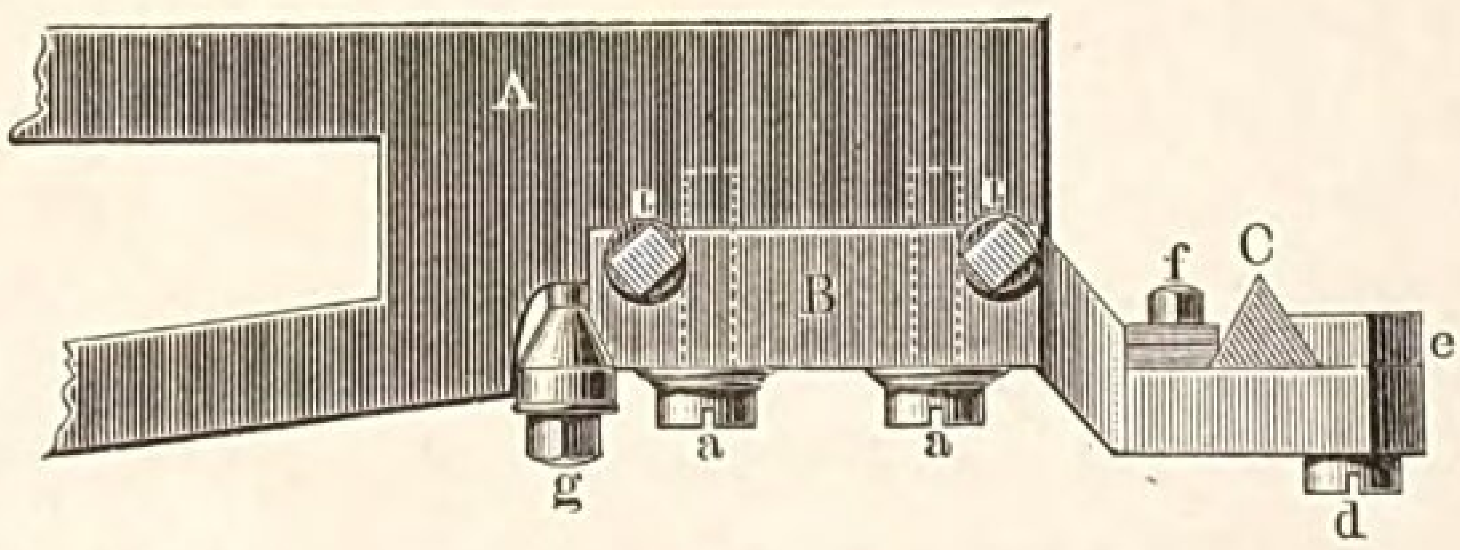


Fig. 213.

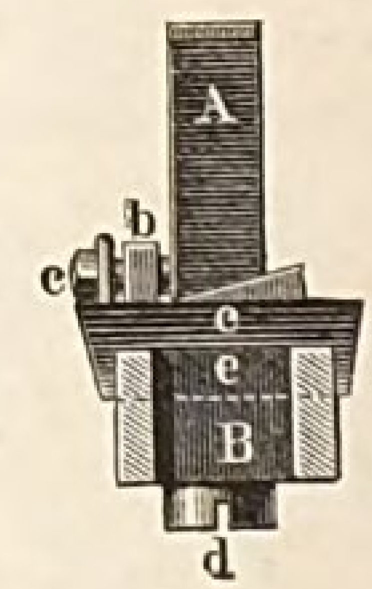


Fig. 210.

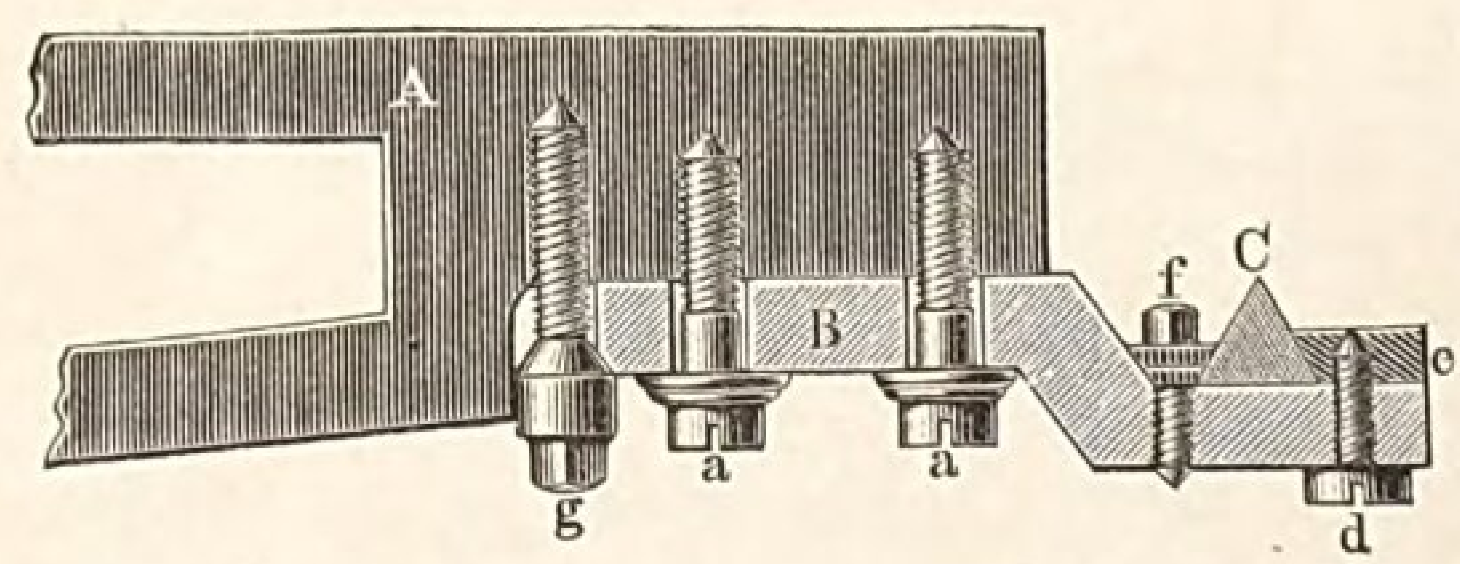


Fig. 214.

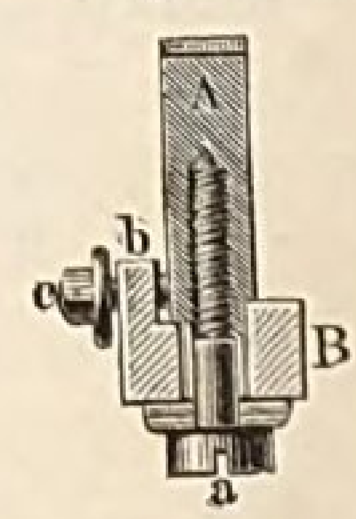


Fig. 211.

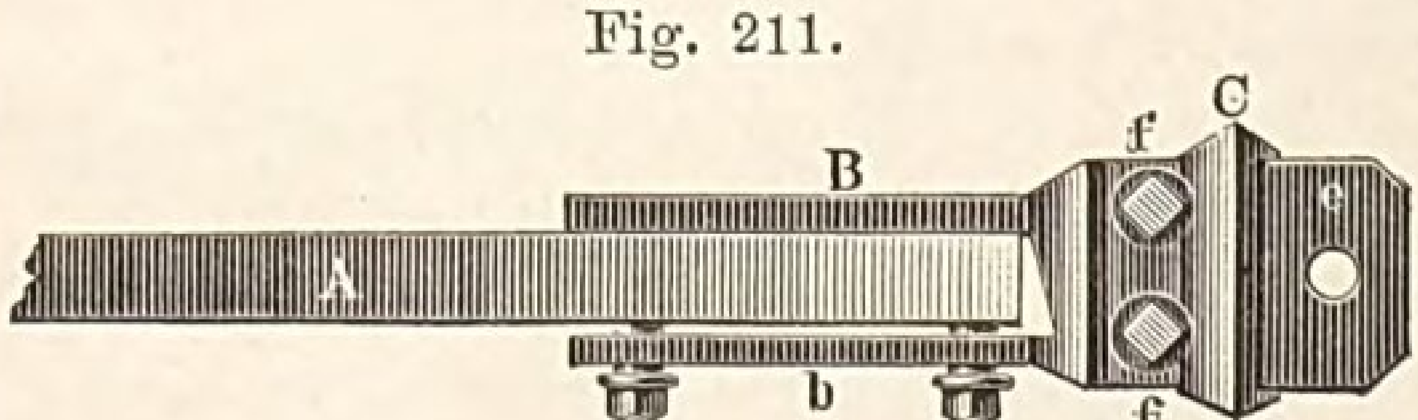
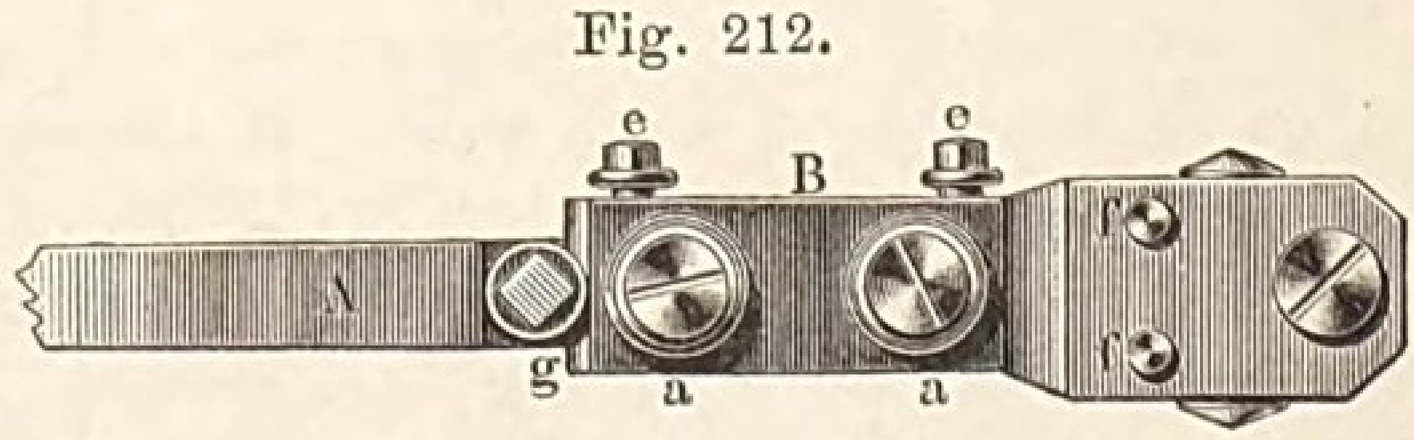


Fig. 212.



3. Parallele Stellung der Schneide jeder Endachse zu einer durch die Schneide der Mittelachse gelegten senkrechten Ebene.

Die Endachse *C* bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Unterfläche auf *B* ruht. Die rechte Seitenfläche liegt in ganzer Länge und etwa bis zur halben Höhe, so weit es das Spiel der Gehänge gestattet, gegen die Seitenkante eines auf *B* mit der Schraube *d* befestigten Plättchens *e*.

Sie wird gegen letzteres angedrückt durch zwei Stahlschrauben *ff*, die in *B* ihr Gewinde haben. Der Kopf dieser Schrauben besteht ausser dem Vierkant für den Schlüssel aus einem Cylinder und einem darunter befindlichen Conus. Der Cylinder liegt (in der Zeichnung) links gegen einen Absatz von *B*, während der Conus sich rechts gegen die Seite der Achse legt. Durch Anziehen der beiden Schrauben *ff* wird daher die Achse fest gegen *e* und auf *B* angepresst.

Löst man nun eine der beiden Schrauben *ff* und zieht die andere ebenso viel an, so wird die Achse sich drehen, indem zugleich das Plättchen *e* um die Schraube *d* sich ebenso viel dreht, womit das Mittel für die verlangte Parallelstellung gegeben ist.

4. Stellung der Endachsen in gleiche Entfernung von der Mittelachse.

Diese wird hervorgebracht durch Verschiebung des Theiles *B* in der Längsrichtung des Balkens mittelst der Schraube *g*, welche ebenso construirt ist wie *ff*. Der Cylinder ihres Kopfes legt sich links gegen den Balken, der Conus rechts gegen *B*.

Schraubt man also nach Lösung der beiden Pressschrauben *aa* *g* tiefer in den Balken hinein, so wird der Conus den Theil *B* sammt der Achse nach rechts schieben, dieser Hebelarm also länger werden. Schraubt man umgekehrt *g* heraus, so hat man den Theil *B* nach links hinüber zu drücken.

Wir wollen hier einige Mittheilungen über die Methoden einschalten, deren man sich bedient, um die Abweichungen der Endschneiden vom Parallelismus mit der Mittelschneide zu erkennen. Es giebt deren insbesondere zwei*).

Erste Methode von Gauss mit Spiegel**). Nehmen wir zunächst an, die Endschneide sei innerhalb der Horizontalebene also um eine verticale Achse so verdreht, dass das dem Beschauer zugekehrte Ende der Mittelschneide genähert, das rückwärtige Ende aber von derselben weiter entfernt sei. Sobald die Wage schwingt, beschreibt dann die Endschneide die Mantelfläche eines Kegelstutzes, dessen Achse in die verlängerte Mittelschneide fällt und zwar mit dem Scheitel gegen den Beschauer gerichtet. Es ist folglich klar, dass die Schneide beim Steigen sich nach vorn neigen muss, beim Sinken dagegen nach rückwärts.

Dieselbe Neigung nach vorn und nach rückwärts während der Schwingungen muss auch die Pfanne des Gehänges mitmachen. Befestigt man daher auf dieser Pfanne einen kleinen Spiegel, dessen Ebene möglichst nahe senkrecht auf die Schneide gestellt ist, so neigt sich auch dieser beim Neigen der Endschneide nach vorn über, beim Sinken neigt er sich oben zurück. Beobachtet man daher mittelst eines senkrecht

*) Eine dritte auf Anwendung der Anlegelibelle beruhende liefert nicht genügende Resultate.

**) Göttingische gelehrte Anzeigen 1837, März 13. Gauss' sämmtl. Werke, Band V., S. 511.

auf den Spiegel gerichteten Fernrohrs das Bild einer vertical aufgestellten Scala, so schwingt auch dieses Bild senkrecht auf und nieder.

Sollte die Endschneide auch in verticaler Ebene vom Parallelismus abweichen, so würde das Spiegelbild ausser der verticalen Bewegung auch noch eine Seitenbewegung zeigen. Man hat also an den Adjustirungsvorrichtungen so lange zu operiren, bis im Spiegel keine Verschiebung des anvisirten Bildes mehr eintritt.

Zweite Methode mittelst Probirgehänge*). Man behängt die zu prüfende Endschneide mit einem eigens zu diesem Zwecke angefertigten Probirgehänge mit sehr schmaler Pfanne, die man auf der Schneide vor- und zurückschieben kann. Zeigt sich dabei kein Unterschied in der Einstellung der Wage, so ist sie von diesem Fehler frei. Diese Methode dürfte sich für die Praxis am meisten empfehlen, da sie leicht ausführbar ist.

Um bei den Wägungen den Gebrauch von Gewichtsstücken unter 1 cg vermeiden zu können, bedient man sich des von Berzelius angegebenen Milligrammhakens, d. i. eines aus Draht hergestellten Laufgewichtes von 1 cg Gewicht, welches man rittlings auf den in zehn gleiche Längstheile getheilten Wagebalkenarm aufsetzt. Befindet sich dieser Milligrammhaken auf dem ersten, zweiten, dritten etc. Theilstriche, von der Mittelschneide an gerechnet, so ersetzt er dort ein auf die Wagschale gelegtes Gewicht von ein, zwei, drei etc. Milligramm. Die Unterabtheilungen können dann noch weiter geschätzt werden.

Strenge genommen sollte der Milligrammhaken auf der Verbindungslinie der Schneiden aufgehängt werden, weshalb auch bei manchen Wagen ein eigens hierzu bestimmtes, an den Wagebalken befestigtes Reiterlineal vorhanden ist. Dasselbe braucht übrigens nicht die ganze Länge des Balkens zu besitzen, falls nur das Gewicht des zugehörigen Milligrammreiters so regulirt wird, dass es auf den äussersten mit 10 bezeichneten Theilstrich aufgesetzt einem auf die Schale aufgelegten Centigrammgewichte äquivalent ist.

Die Verschiebung und Abnahme des Reiters erfolgt entweder mit Pinsel oder Pincette oder, was bei genaueren Wagen immer der Fall ist, durch eine eigene von der Aussenseite des Kastens in Bewegung zu setzende Vorrichtung, die Reiterverschiebung, welche das Oeffnen des Wagekastens während des letzten Auswägens vermeiden lässt. Dieselbe besteht aus einer oberhalb des Balkens oder des Reiterlineals parallel mit diesem verschiebbaren und um seine Achse drehbaren, massiven oder hohlen Messingstange, welche die Seitenwand des Kastens durchsetzt und in passender Weise geführt ist. Ihr äusseres Ende trägt einen geränderten Knopf, ihr inneres Ende einen Seitenarm mit seitlich hervorragendem Stifte, mittelst welchem man in die Oese des Milligrammreiters eingreifen und denselben darauf abheben kann, indem man den Knopf

*) Prof. Hartig, „Civilingenieur" 1867.

passend dreht. Auf analoge Weise erfolgt das Wiederaufsetzen des Reiters an anderer Stelle. Bei manchen Wagen ist diese Einrichtung noch dahin vervollkommnet, dass die Bewegung des den Reiter abhebenden Stiftes in genau senkrechter Richtung (statt in einem Bogen) erfolgt. Auf jeden Fall soll dafür Sorge getragen sein, dass die Bewegung des Reiterträgers gehemmt wird, bevor er auf den Balken aufschlagen oder den Reiter zu weit abheben würde.

Die Fig. 201 zeigt zwei einfache Reiterverschiebungen auf beiden Seiten des Balkens.

Zum Schlusse wollen wir erwähnen, dass es Wagen giebt, welche kunstreiche Mechanismen enthalten, durch welche man aus Distanz, ohne den Kasten zu öffnen, die aufgelegten (zu vergleichenden) Gewichtsstücke vertauschen kann *), ja auch solche, welche eine vollständige Abwägung mit vielen Gewichtsstücken in einem luftleer gepumpten Kasten auszuführen gestatten **). Endlich sei noch einer neuestens construirten Vorrichtung von Rueprecht gedacht ***), welche unterhalb des Bodens des Wagekastens angebracht werden kann, durch welche ein auf die Schale gesetzter Körper sofort annähernd abgewogen wird, so dass man sogleich weiss, welche grösseren Gewichtsstücke aufzusetzen sind, und keine Zeit mit dem Probiren derselben verliert — ein Vortheil, der beim Wägen hygroskopischer Körper besonders hervortritt.

Gebrauch der Wage. Die Aufstellung der Wage hat auf 53
einer vor Erschütterungen möglichst gesicherten Unterlage, am besten auf einem an die Mauer befestigten horizontalen Tischbrette zu geschehen. Dabei ist insbesondere noch Sorge zu tragen, dass dieser Standort nicht der Erwärmung von Seite des Ofens oder des directen Sonnenlichtes ausgesetzt sei. Sind die Schneiden der Wage von Stahl, so ist Alles sorgfältig zu meiden, was dieselben zum Rosten veranlassen könnte. Das Local soll daher möglichst trocken sein und es dürfen in demselben keinerlei Objecte aufbewahrt werden, welche saure Dämpfe, wenn auch nur in geringer Menge, entwickeln (Reagentien, galvanische Batterien, Löthwasser). Um die Luft im Wagekasten trocken zu erhalten, stellt man ein Gefäss mit hygroskopischen Substanzen hinein. Es empfiehlt sich dazu besser Aetzkalk als Chlorcalcium, weil letzteres durch Dissociation Spuren von Salzsäure entwickeln kann. Bei Anwendung des ersteren muss auf dessen Volumzunahme Rücksicht genommen werden.

*) Eine solche Wage von Rueprecht in Wien dient im Bureau des internationalen Maass- u. Gewichtscomités in Paris zur Vergleichung der Kilogrammetalons. Sie findet sich beschrieben und abgebildet in den *Travaux et Mémoires* dieses Comités, Band I.

**) Siehe über die Vacuumwage von Stückrath den Bericht über die wissensch. Instrumente der Berliner Gew. Ausst. 1879 von L. Löwenherz, Seite 186.

***) Nach brieflicher Mittheilung des Erfinders.

Die Aufstellung mittelst der Fussschrauben des Kastens soll so geschehen, dass der arretirte Balken horizontal steht. Man stellt meistens mittelst eines Senkels oder einer Libelle, welche vom Mechaniker angebracht sind; diese Hülfsmittel müssen daher so adjustirt sein, dass beim Einspielen des Senkels oder der Libelle die Arretirung dem Balken eine horizontale Lage verschafft. Kleine Abweichungen von dieser Bedingung bringen jedoch keinen Nachtheil. Dass unter allen Umständen bei arretirtem Balken die Zunge auf den mittleren Theilstrich der Scala zeigen soll, versteht sich von selbst. Vor jedesmaligem Aufsetzen oder Abnehmen von Gewichten muss die Wage arretirt werden.

Vor dem Wägen muss mittelst eines feinen Pinsels der auf Balken, Gehängen und Schalen abgelagerte Staub vorsichtig entfernt werden. Da dies nicht auf beiden Seiten in vollkommen gleicher Weise möglich ist und insbesondere auch die Schalen in Folge des Gebrauches ihr Gewicht verändern, so wird die Zunge der Wage, wenn letztere auch ursprünglich aufs Genaueste rectificirt worden war, bei unbelasteten Schalen im Allgemeinen nicht mehr auf die Mitte der Scala einspielen. Soll daher eine sogenannte einfache Wägung vorgenommen werden, bei welcher der abzuwägende Körper auf die eine Seite, die Gewichte auf die andere Seite gesetzt werden, bis die Zunge einspielt, so muss vorher die Abweichung der Zunge durch eine der hierzu vorhandenen Vorrichtungen (drehbare Fahne, Laufgewichtchen) beseitigt werden.

Wägt man nach der unten beschriebenen Tarirmethode oder der Methode der Doppelwägung, so entfällt die Nothwendigkeit dieser Regulirung. Sie entfällt auch dann, wenn der abzuwägende Körper in einem Gefässe gewogen werden soll, welches man dann vorher auf die Schale setzt und durch Gewichte auf der anderen Seite bis zum Einspielen der Zunge austarirt.

Bestimmung des Ruhepunktes. Es wäre zu zeitraubend, die Wage jedesmal so lange schwingen zu lassen, bis sie zur Ruhe kommt. Man beobachtet vielmehr die Ausschläge auf beiden Seiten. Bei minder genauen Wägungen nimmt man an, dass der Ruhepunkt der Zunge in der Mitte zwischen zwei auf einander folgenden Umkehrpunkten gelegen sei. Da die Amplitude der Schwingungen fortwährend abnimmt, so ist dies nicht genau richtig und deshalb leitet man den Ruhepunkt aus einer ungeraden Anzahl von beobachteten Umkehrpunkten ab, indem man von der jedenfalls nahe richtigen Annahme ausgeht, dass die Amplituden um gleiche Differenzen abnehmen.

Ist die Mitte der Scala mit Null bezeichnet, so rechnet man zweckmässig die Ausschläge nach der Seite, wo die Gewichte aufgelegt werden, als positiv, die auf der anderen Seite als negativ. Die Umkehrpunkte jeder Seite werden zuerst für sich zu einem arithmetischen Mittel vereinigt und dann aus beiden Mitteln wieder (unter Rücksicht auf das Zeichen) das Mittel genommen. Ein positives Resultat deutet an, dass der abzuwägende Körper mehr wiegt, als die aufgelegten Gewichte.

Beispiel: Nach Auflegung von 21,25 g und Aufsetzung des Reiters auf 5 waren die Umkehrpunkte auf Seite der:

	Last	Gewichte
	— 3,6	
	— 3,4	+ 4,1
	— 3,2	+ 3,9
Mittel =	— 3,4	+ 4,0
Ruhepunkt =		+ 0,3.

Daraus ersieht man, dass das Gewicht 21,255 g noch etwas zu klein ist. Statt aber den Reiter so lange hin- und herzuschieben, bis der Ruhepunkt Null herauskommt, ermittelt man die dem Ruhepunkte Null zugehörige Gewichtsmenge durch Interpolation mit Hülfe eines zweiten Schwingungsversuches, bei welchem der Milligrammreiter um einen Theilstrich nach aussen, also auf 6, geschoben wird.

Angenommen, man erhalte dann den Ruhepunkt — 0,6, so weiss man, dass Einem Milligramm eine Verschiebung des Ruhepunktes von 0,9 Scalentheil entspricht, dass man also nur $^1/_3$ mg hätte hinzufügen müssen, um den Ruhepunkt Null zu erhalten. Das gesuchte Gewicht wäre also gleich 21,2553 g.

Viel bequemer und weniger zu Rechenfehlern Anlass gebend ist es, wenn man die Mitte der Scala statt mit Null mit Zehn bezeichnet und alle Umkehrpunkte positiv rechnet. Man kann dann einfach in der Weise verfahren, dass man eine ungerade Anzahl, z. B. fünf Ausschläge beobachtet und in eine Reihe unter einander setzt, jedoch von dem ersten und letzten Ausschlag nur die Hälfte anschreibt. Hierauf addirt man diese Zahlen und dividirt durch die um Eins verminderte Zahl von Ausschlägen. Z. B. hätte man bei dieser Einrichtung statt der oben angeführten Zahlen folgende erhalten:

1.	Umkehrpunkt	bei 6,4, davon die Hälfte =	3,2
2.	„	ganz angeschrieben . . .	14,1
3.	„	„ „ . . .	6,6
4.	„	„ „ . . .	13,9
5.	„	bei 6,8, davon die Hälfte .	3,4
		Summa = . .	41,2
		Dividirt durch 4 . .	10,3 = Ruhepunkt.

Die Berechtigung dieses Verfahrens ist leicht abzuleiten. Da, so lange man bei der Anzahl von fünf Ausschlägen verbleibt, die Division mit der Zahl 4 immer wiederkehrt, so kann man dieselbe ganz unterlassen und die erhaltene Summe direct als Ruhepunkt der Wage ansehen. Die Belastungen werden demnach als gleich angenommen, sobald die Summe 40 herauskommt. Im Uebrigen wird wie oben verfahren.

Wägung nach der Tarirmethode. Man setzt auf die eine Schale (meist auf die rechtsseitige, weil man mit der rechten Hand leich-

ter den Reiter verschiebt) den abzuwägenden Körper, auf die andere (linksseitige) Schale eine Tara, zu welcher man am bequemsten einen zweiten Gewichtssatz benutzt, der nicht genau adjustirt zu sein braucht. Die letzte Ausgleichung geschieht dann mittelst des Reiters auf der rechten Seite, den man so lange verschiebt, bis angenähert der Ruhepunkt 0 (respective 10 oder 40) herauskommt. Derselbe wird notirt, ebenso die Reiterstellung.

Hierauf vertauscht man den abzuwägenden Körper mit genauen Gewichtsstücken und verschiebt den Reiter wieder, bis nahezu derselbe Ruhepunkt wie früher erscheint; dieser, so wie die Reiterstellung werden sammt den Gewichten notirt. Endlich verschiebt man noch den Reiter um einen Theilstrich, so dass ein Ruhepunkt eintritt von solcher Lage, dass der erstgefundene zwischen dem zweiten und dritten zu stehen kommt. Aus diesen beiden ermittelt man durch Interpolation jene Stellung des Reiters, welche wiederum den ersten Ruhepunkt herbeiführen würde. Bei dem folgenden Beispiele wird angenommen, dass man die Mitte der Scala mit 10 bezeichnet habe und die Zahl 40 als zugehörigen Ruhepunkt nehme.

	Linksseitige Schale	Rechtsseitige Schale	Reiter	Ruhepunkt
I.	Tara	abzuwägender Körper	3 mg	40,5
II.	Dieselbe Tara	Gewichte = 302,53 g	7 mg	41,5
III.	„ „	„ = 302,53 g	8 mg	40,1

Aus II. und III. berechnet man die Reiterstellung für den Ruhepunkt in I. wie folgt:

$$= 7\,\text{mg} + \frac{41,5 - 40,5}{41,5 - 40,1} = 7 + \frac{1}{1,4} = 7,7\,\text{mg}\ ^{*}).$$

Folglich ist das gesuchte Gewicht = 302,5377 — 0,003 = 302,5347 g.

Dieses Verfahren ist frei von dem Einfluss der Ungleicharmigkeit und des ungleichen Gewichtes der Arme oder Schalen.

Doppelwägung. Man legt einmal den abzuwägenden Körper auf die linke Schale, die Gewichte auf die rechte und sucht den Ruhepunkt; dann legt man den Körper auf die rechte Schale und ermittelt die Gewichte, welche, auf die linke Schale gelegt, denselben Ruhepunkt hervorbringen. Das gesuchte Gewicht ist dann strenge genommen gleich dem geometrischen Mittel der beiden beobachteten Gewichte, wofür aber stets mit vollkommen genügender Annäherung das arithmetische Mittel gesetzt

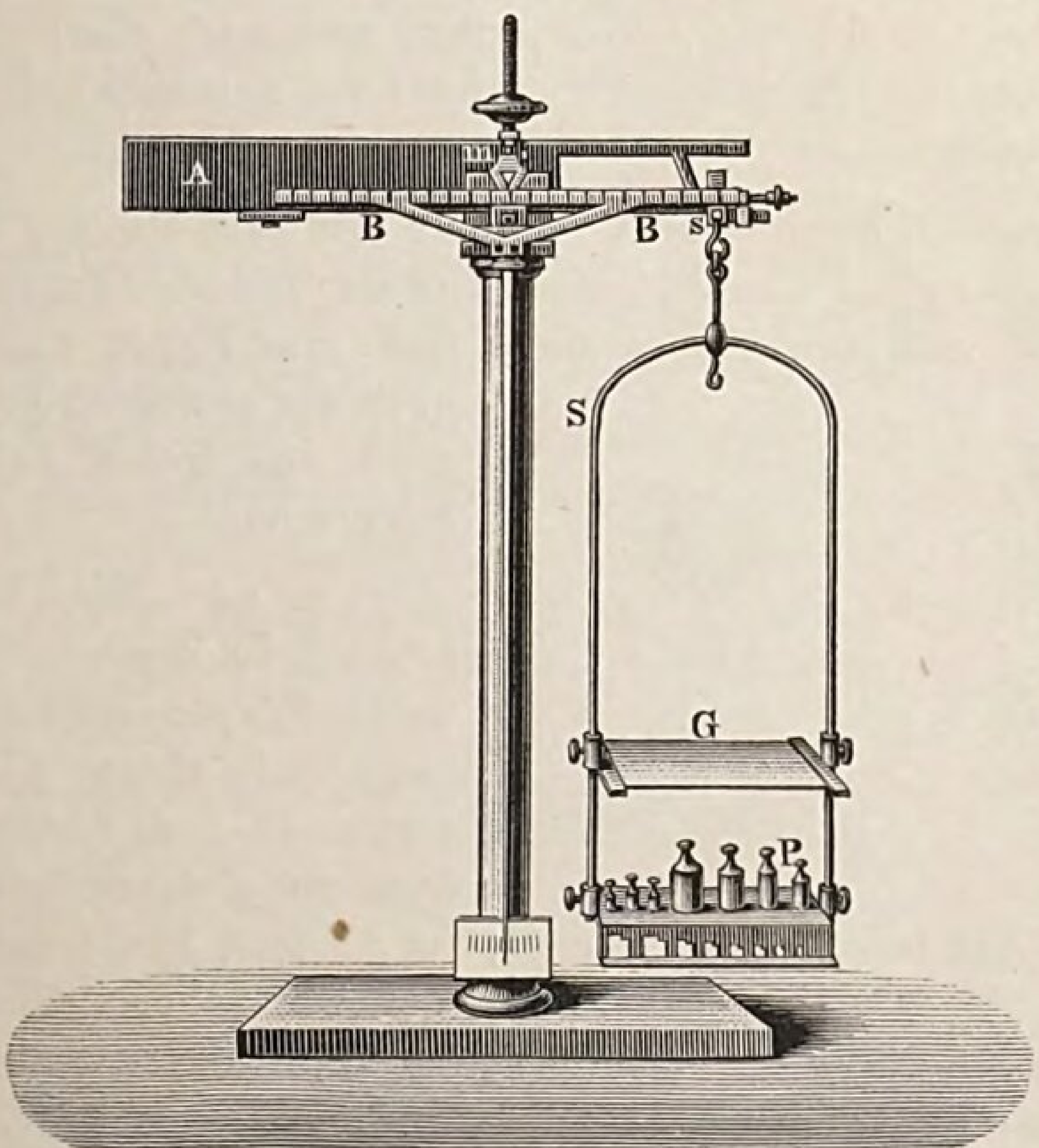
*) Da Wägungen zu den häufigsten Arbeiten des Physikers gehören, so verlohnt es sich, dieselben so bequem als möglich einzurichten. Man ersetzt dann die obige Interpolationsrechnung mit Vortheil durch ein graphisches Verfahren. Eine kleine abwischbare Tafel enthält ein passendes Quadratnetz eingravirt. Auf der Abscisse trägt man die Reiterstellungen in II. und III. auf, dazu die Ruhepunkte als Ordinaten. Diese werden (etwa durch Anlegen des Schreibstiftes) geradlinig verbunden. Wo diese Gerade die Ordinatenhöhe des Ruhepunktes I. besitzt, zeigt die zugehörige Abscisse die gesuchte Reiterstellung.

werden kann. Dieses giebt dann das gesuchte Gewicht unabhängig von der Ungleicharmigkeit der Balkenarme und dem ungleichen Gewichte der Schalen etc.

Von den beiden erwähnten Methoden wird die letztere häufig als die vorzüglichere erklärt; wir möchten aber in den meisten Fällen der Tarirmethode den Vorzug geben, da sie nicht bloss bequemer, sondern auch schneller in der Ausführung ist und deshalb auch bei Aenderungen des Auftriebes in der Luft genauere Resultate verspricht.

Eine unter gewissen Umständen recht empfehlenswerthe speciell auf die Tarirmethode eingerichtete Wage ist die Reimann'sche Substitutionswage, Fig. 215. Dieselbe besitzt nur eine Schale mit zwei Etagen,

Fig. 215.



deren untere zur Aufnahme der Gewichte, deren obere zur Aufnahme des abzuwägenden Körpers bestimmt ist. Das Gegengewicht wird durch den unsymmetrischen Balkenarm gebildet. Man beobachtet zuerst den Ruhepunkt ohne aufgelegten Körper, aber nach Auflegen sämmtlicher Gewichte. Dann setzt man den Körper auf die obere Etage und nimmt von der unteren so viele Gewichte weg, bis wiederum derselbe Ruhepunkt erreicht ist.

Diese Einrichtung hat freilich den Nachtheil, dass alle Wägungen bei der grössten Belastung ausgeführt werden, daher sich diese Wage wohl mehr zu chemischen Analysen als zu physikalischen Wägungen, wo grössere Belastungen vorkommen, eignen dürfte. Dafür hat sie den

Vortheil constanter Empfindlichkeit, wodurch die Wägungsoperation erheblich beschleunigt wird.

54 **Einfluss verticaler Beschleunigung auf den Druck oder Zug einer Masse; Poggendorff's Wage.** Denken wir uns zwei Körper A und B (Fig. 216) auf einander gelegt. Die Masse des oberen Körpers B betrage m, folglich der Druck desselben auf den unteren Körper im Ruhezustande mg, wenn g die Accelleration der Schwere ist. Dieser selbe Druck wird gemäss des Princips der Wechselwirkung (§. 30) auch auf den oberen Körper ausgeübt. Um dies besser einzusehen, können wir uns denken, dass zwischen beide Körper eine Spiralfeder gelegt werde (Fig. 217). Es ist klar, dass dieselbe, indem sie zusammengedrückt wird, nach unten und nach oben den gleichen Druck ausüben muss*), welchen die direct auf einander gelegten Körper gegenseitig ausüben.

Der untere Körper drückt offenbar nur deshalb auf den oberen, weil er ihn am Fallen hindert; wenn also der untere Körper selbst fällt, so hindert er auch den oberen nicht mehr am Fallen und somit hört auch der gegenseitige Druck während des freien Fallens beider Körper auf.

Fig. 216.

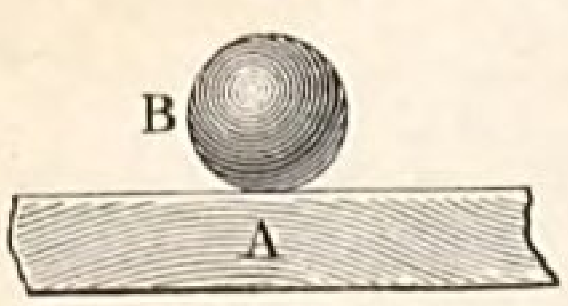
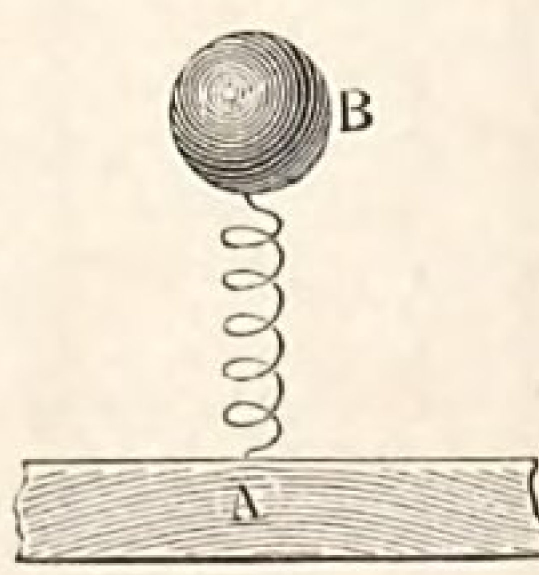


Fig. 217.



Um auch dies klarer einzusehen, denken wir uns zuerst beide Körper vertical über einander mit einem Abstande zwischen beiden festgehalten und dann zu gleicher Zeit frei fallen gelassen. Beide fallen gleich schnell; ihr Abstand bleibt daher während des Fallens immer gleich gross. Würden wir daher beide Körper vor dem Fallenlassen durch eine nicht gespannte Spiralfeder verbunden haben, so würde diese Feder auch während des Fallens keinen Druck und keinen Zug erleiden; die beiden Körper würden daher auch dann auf einander keine Kraft ausüben, wenn sie von vornherein unmittelbar mit einander in Berührung stünden.

Was wird aber erfolgen, wenn wir den unteren Körper nicht mit der Accelleration des freien Falles g, sondern mit einer kleineren γ nach abwärts bewegen? Der untere Körper hindert dann den oberen Körper zwar nicht vollständig, zwingt ihn aber doch, eine um $g - \gamma$ kleinere Beschleunigung anzunehmen als er bei voller Freiheit annehmen würde. Es ist klar, dass unter diesen Umständen der gegenseitige Druck die Grösse $m\,(g - \gamma)$ haben wird. Für $\gamma = 0$, d. h. für den Fall der Ruhe,

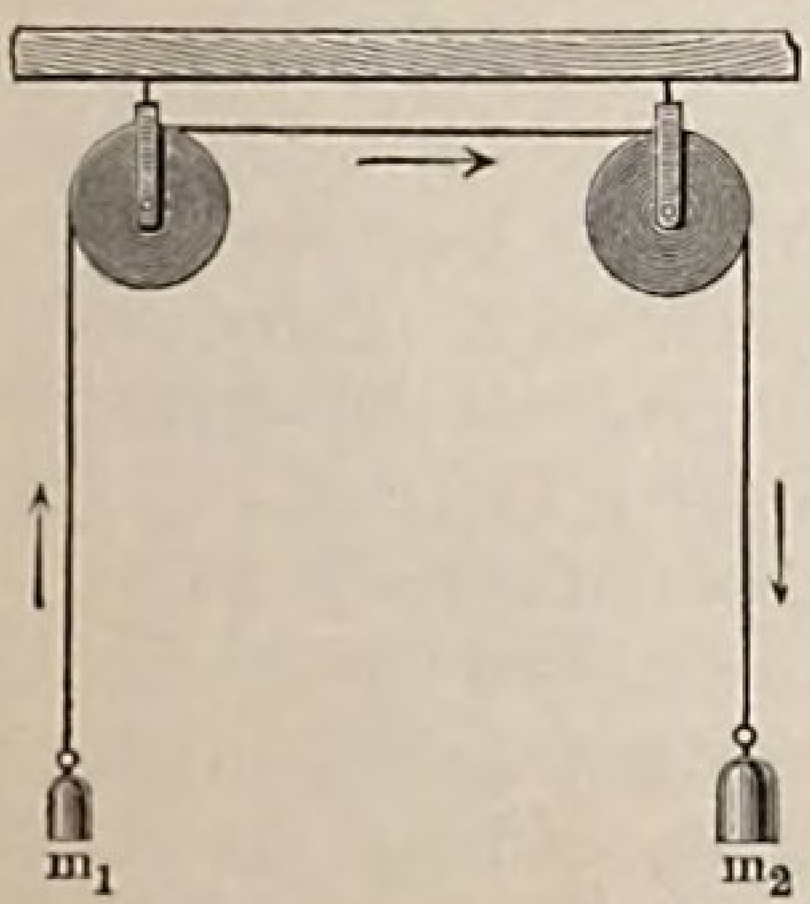
*) Das Gewicht der Spiralfeder wird hier vernachlässigt.

geht dieser Ausdruck in $m g$ über, für den Fall $\gamma = g$, d. h. für den freien Fall, wird er $= 0$. Würden wir $\gamma > g$ werden lassen, so würde der Druck $= m(g - \gamma)$ negativ, d. h. aus dem Druck wird ein Zug, der die Körper trennt oder zu trennen strebt, wenn sie zusammenhängen.

Geben wir endlich dem unteren Körper eine Beschleunigung nach aufwärts, d. h. nehmen wir γ negativ, so wird der gegenseitige Druck $= m(g + \gamma)$, also grösser als während der Ruhe.

Fassen wir dies zusammen, so können wir sagen: der Druck, den ein Körper in Folge der Schwere auf seine Unterlage ausübt und seinerseits von der letzteren erfährt, ist keine unter allen Umständen constante Grösse, sondern abhängig von dem Werthe der Beschleunigung, mit welcher der Körper sammt der Unterlage sich der Erde nähert oder von ihr entfernt. Der Druck ist nämlich nicht bloss proportional der Masse des Körpers, sondern auch dem Unterschied zwischen der Beschleunigung des freien Falles und der Beschleunigung der wirklich stattfindenden Bewegung. Dasselbe gilt natürlich auch für den Zug von Körpern, welche vertical über einander zusammenhängen.

Fig. 218.



Denken wir uns jetzt einen Faden horizontal über zwei Rollen gelegt und an dem einen Ende mit der Masse m_1, an dem anderen mit der Masse m_2 belastet (Fig. 218).

Ist die Accelleration der Schwere $= g$, so sind die Kräfte, mit welchen die Massen m_1 und m_2 den Faden nach der einen und nach der anderen Seite ziehen, gegeben durch

$$m_2 g \quad \text{und} \quad m_1 g.$$

Es sei nun $m_2 > m_1$, mithin überwiegt die Kraft auf Seite der Masse m_2 um den Betrag

$$(m_2 - m_1)\, g.$$

Mit dieser Kraft wird also auch eine Bewegung der Massen m_1 und m_2 in der Richtung der Pfeile eingeleitet werden. Die dabei eintretende Beschleunigung γ finden wir aus der Gleichung:

$$(m_1 + m_2)\, \gamma = (m_2 - m_1)\, g$$

$$\gamma = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g.$$

Untersuchen wir jetzt, mit welcher Kraft der Faden an den beiden Enden gespannt wird, während die Beschleunigung γ dauert.

Die Masse m_1 wird von der Schwere mit der Accelleration g nach abwärts gezogen, gleichzeitig wirkt die oben berechnete resultirende

Beschleunigung γ nach aufwärts, folglich ist die Fadenspannung auf der linken Seite $= m_1 (g + \gamma)$. Auf der rechten Seite findet man für dieselbe auf ähnliche Weise den Werth $m_2 (g - \gamma)$.

Diese beiden Fadenspannungen müssen nun offenbar einander gleich sein gemäss dem Princip der Wechselwirkung. Dabei darf man aber nicht die Kräfte, welche den Faden spannen, verwechseln mit der Kraft, die den Faden sammt den Massen in Bewegung setzt.

In der That erhält man für die beiden Fadenspannungen, wenn man für γ seinen Werth untersetzt, ein und denselben Werth, nämlich:

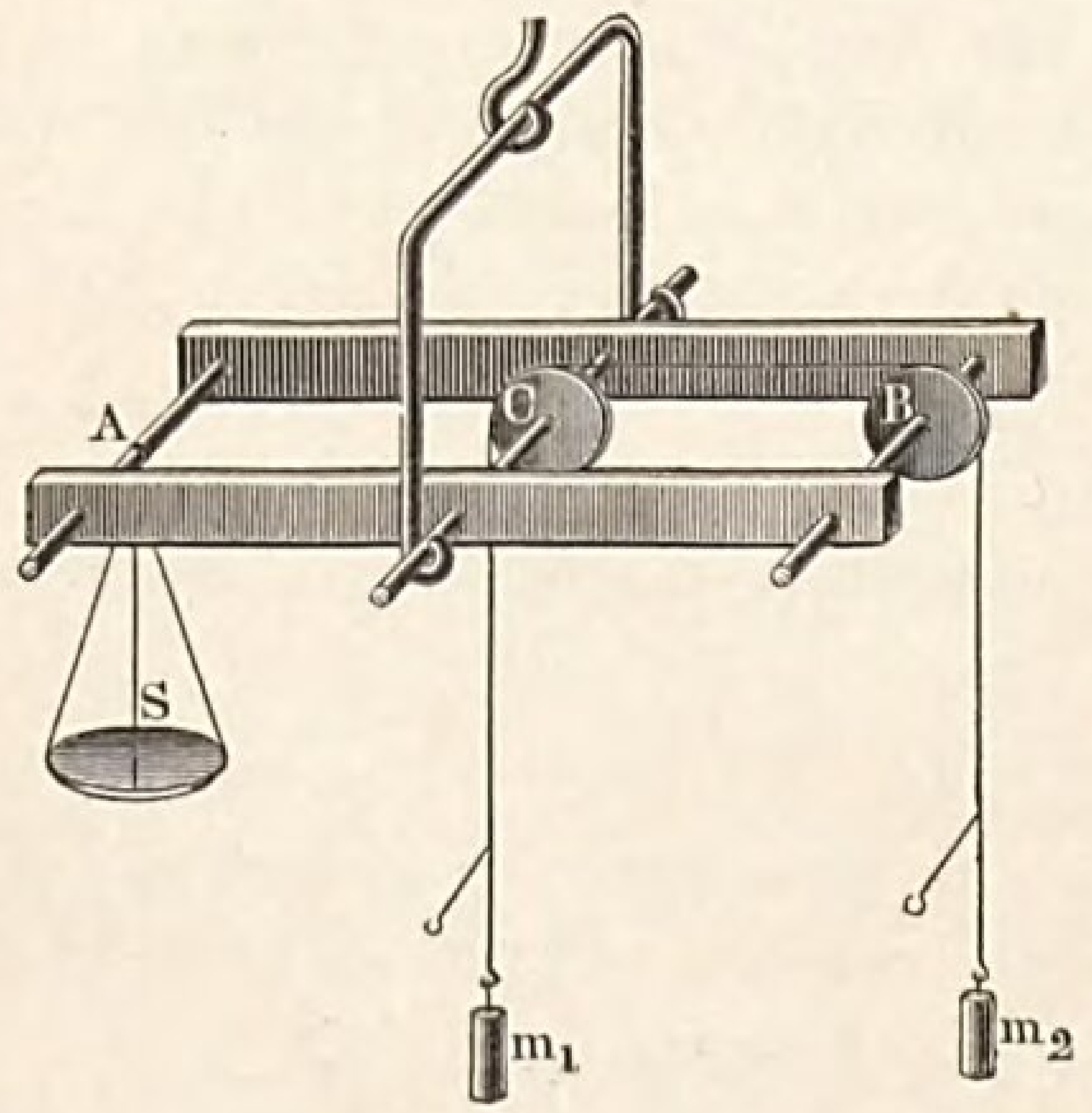
$$\frac{2\,g\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$$

Mit dieser selben Kraft werden die Achsen der beiden Rollen senkrecht nach abwärts gedrückt, während die Bewegung vor sich geht*).

Würde man dagegen die Bewegung hindern, indem man den Faden zwischen den Rollen festhält, so wären die beiden Fadenspannungen, also auch die Verticaldrucke auf die Rollenachsen nicht gleich gross, sondern hätten die Werthe $m_1 g$ und $m_2 g$.

Um das hier Vorgetragene experimentell zu bestätigen, eignet sich vortrefflich der unter dem Namen Poggendorff'sche Wage (oder Poggendorff'sche Fallmaschine) bekannte beistehend schematisch abgebildete Apparat, Fig. 219.

Fig. 219.



Der Wagebalken besteht aus zwei parallelen Stäben, welche durch drei Querstäbe in der Mitte und an den beiden Enden verbunden sind. Der mittlere Querstab dient zugleich als Mittelachse für den Balken und als Achse für die Rolle *C*. Von den Querstäben an den Enden dient der eine ebenfalls als Achse einer Rolle *B*, der andere, *A*, trägt ein Gehänge mit Schale *S*.

Der über die beiden Rollen gelegte starke Faden kann mit zwei Massen, m_1 und m_2, belastet werden, welche die Form von Gefässen besitzen, um Zulagegewichte aufnehmen zu können. Es ist bequem, wenn das Gehänge mit der Schale links ebenso viel wiegt wie die Rolle *A*, so

*) Die Richtigkeit dieser Behauptung wird später bei Besprechung der fixen Rolle erwiesen werden.

dass sich also der Balken horizontal einstellt, wenn die Massen m_1, m_2 nicht angehängt sind. Man kann nun folgende Versuche anstellen *).

Erster Versuch. Es werden an die Fadenenden zwei gleiche Massen m_1 angehängt. Der Faden bleibt dann in Ruhe, aber der Balken sinkt bei B; um ihn horizontal zu erhalten, muss man bei A ebenfalls eine Masse $= m_1$ zulegen.

Zweiter Versuch. An das Fadenende bei C wird eine Masse m_1, an das Fadenende bei B eine grössere Masse $m_2 = m_1 + q$ angehängt. Um die letztere zu compensiren, wird auf die Schale S eine gleich grosse Masse aufgelegt. Dann wird zuerst eine am Faden rechts befindliche Schleife an das Zapfenende von B eingehängt, damit die Masse m_2 noch nicht sinken kann. Es muss dann der Wagebalken horizontal stehen bleiben. Hängt man aber jetzt die Schleife aus (oder brennt sie ab), so beginnt m_2 zu sinken und sofort steigt der Balken bei B in die Höhe. Er wird nämlich bei B, wie oben berechnet wurde, nur mit der Kraft $\frac{2\,g\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$ nach abwärts gezogen, während das Ende A mit der Kraft $g\,m_2$ angezogen wird. Die Differenz dieser Kräfte ist:

$$g\,m_2 - \frac{2\,g\,(m_1\,m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{g\,m_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Folglich muss an den Faden bei B noch eine Masse

$$= \frac{m_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + q)\,q}{2\,m_1 + q}$$

hinzugegeben werden, damit während der Bewegung der Massen der Wagebalken im Gleichgewicht bleibe.

Dritter Versuch. An das Fadenende bei B kommt die Masse m_1, an das Ende bei C die grössere Masse $m_2 = m_1 + q$. Die Schale S erhält eine Masse $= m_1$. Es wird zunächst das Sinken von m_2 durch Einhängen der Fadenschleife verhindert. Der Balken stellt sich dann horizontal. Sowie aber die Masse m_2 freigelassen wird, so sinkt der Balken bei B. Um dieses zu verhindern, muss man bei A eine Masse zulegen, welche sich folgendermaassen berechnen lässt.

Die Fadenspannung bei B ist wiederum wie früher $= \frac{2\,g\,(m_1\,m_2)}{m_1 + m_2}$, die bei A dagegen ist $= m_1\,g$. Es muss daher bei A eine Kraft hinzugefügt werden gleich der Differenz:

*) Die ersten drei dieser Versuche sind von W. Barentin quantitativ angestellt und in Poggendorff's Jubelband, S. 213, näher beschrieben. Es wurde dabei zur Compensation der Reibung und der Trägheit der Rollenmasse noch ein weiteres Zulegegewicht beigefügt. Wegen der richtigen Deutung dieser Versuche vergleiche man Dr. A. Amthor's kritische Darstellung in den Sitzungsberichten der naturw. Ges. Isis in Dresden 1879, Seite 32.

$$\frac{2g(m_1 m_2)}{m_1 + m_2} - m_1 g = g\frac{m_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

die zuzulegende Masse beträgt demnach:

$$\frac{m_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 q}{2m_1 + q}$$

Vierter Versuch*). Man legt den Faden nur über die Rolle B allein und hängt an seine beiden Enden die Massen m_1 und $m_2 = m_1 + q$. Man verhindert zuerst das Sinken von m_2, indem man eine Fadenschleife einhängt. Die Schale S wird mit einer Masse $= m_1 + m_2$ belastet, worauf der Wagebalken sich horizontal stellt. Lässt man nun die Masse m_2 frei, so sinkt sie, während m_1 steigt. Dies hat denselben Effect, als wenn die Masse $m_2 - m_1 = q$ allein sinken würde. Die Beschleunigung γ, mit der dies geschieht, ist $= \frac{q}{2m_1 + q}g$. Indem die Masse q mit der Beschleunigung γ sinkt, verliert sie an Zugkraft die Grösse:

$$\gamma q = \frac{q^2 g}{2m_1 + q}$$

was einem Verlust an Masse $= \frac{q_2}{2m_1 + q}$ gleichkommt.

Man muss also auch der Schale S eine Masse $= \frac{q_2}{2m_1 + q}$ entnehmen, damit während der Bewegung der Balken horizontal bleibt.

Poggendorff hat bei Veröffentlichung dieses sehr instructiven Apparates das demselben zu Grunde liegende Princip folgendermaassen ausgesprochen: Das Gewicht eines Körpers ändert sich, wenn er sich vertical nach aufwärts oder abwärts bewegt und zwar wird der Körper im ersten Falle schwerer, im letzten Falle leichter.

Allein in dieser Form ist der Satz nicht bloss ungenau, sondern geradezu unrichtig.

Es ist klar, dass hier „Gewicht" nicht als Masse verstanden ist. Definiren wir aber Gewicht als Kraft, mit der der Körper von der Erde angezogen wird, so würde obiger Satz dem Unabhängigkeitsprincip (§. 33) widersprechen, welches verlangt, dass die Einwirkung einer Kraft auf einen Körper unabhängig sei von dem Bewegungszustande, der vorher in ihm vorhanden ist. Unter Gewicht muss hier Druck auf die Unterlage oder Fadenspannung verstanden werden. Aber auch dann ist der Satz noch unrichtig, da er als Bedingung für die „Gewichtsänderung" einfach nur Bewegung in verticaler Richtung ausspricht. Es müsste also auch dann diese „Gewichtsänderung" eintreten, wenn man den Körper mit constanter Geschwindigkeit, ohne Beschleunigung

*) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Seite 192. Daselbst ist auch eine vollkommener ausgeführte Poggendorff'sche Wage abgebildet.

bewegen würde. Dies ist aber nicht der Fall; nur eine Beschleunigung kann diese Wirkung hervorbringen.

Um dies einzusehen, fassen wir noch einmal die in Fig. 217 dargestellten, durch eine Spiralfeder verbundenen Körper ins Auge. Dieselben seien ursprünglich in Ruhe, daher die Spirale mit der Kraft mg zusammengedrückt. Wir versetzen nun den Körper A in eine Bewegung vertical nach abwärts mit constanter Geschwindigkeit v. Offenbar ist es unmöglich, diese Geschwindigkeit sofort zu erreichen, wenn wir auch eine noch so grosse Kraft dazu aufwenden. Die Geschwindigkeit muss vielmehr alle Werthe zwischen Null und v erst durchlaufen, d. h. der Körper A wird zuerst in beschleunigte Bewegung und dann erst in gleichförmige Bewegung versetzt. Während der beschleunigten Bewegung gilt nun das, was wir oben gezeigt. Je nachdem die Beschleunigung gleich, kleiner oder grösser als g ist, wird während dieser ersten Zeit die Spiralfeder entspannt, oder zusammengedrückt, oder aus einander gezogen.

Nach Eintritt der constanten Geschwindigkeit ändert sich der Sachverhalt. Der Körper A hindert von da an wiederum den Körper B am freien Fall, d. h. an Zunahme von Geschwindigkeit, es muss daher wiederum die Feder zusammengedrückt werden, wie während der Ruhe. In Wirklichkeit wird die Feder dabei in schwingende Bewegung um die frühere Ruhelage gelangen.

Denken wir uns jetzt die beiden Körper ohne Spiralfeder direct im Zusammenhange, so werden sie denselben Druck (beziehungsweise Zug) direct auf einander ausüben, den sie vorhin durch die Spiralfeder ausübten. Sobald die Geschwindigkeit constant geworden, drücken oder ziehen sie sich, wie während der Ruhe. Dasselbe gilt bei gleichförmiger Geschwindigkeit vertical nach aufwärts.

Kraftantrieb, Bewegungsgrösse, Arbeit und lebendige Kraft. Indem wir bei der Darstellung der Bewegungserscheinungen zunächst nur die Raum- und Zeitbeziehungen ins Auge fassten, gelangten wir zu den vier Begriffen: Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, für welche wir die Gleichungen: 55

$$v = \varphi t, \quad s = \frac{\varphi t^2}{2}$$

feststellten. Aus der letzteren folgt $\varphi s = \frac{\varphi^2 t^2}{2} = \frac{v^2}{2}$.

Wir können also die Beziehungen dieser vier Grössen ausdrücken durch das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} v &= \varphi t \\ \varphi s &= \frac{v^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

Nachher führten wir den Begriff der Masse ein. Multipliciren wir die Gleichungen I. beiderseits mit m, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} mv &= m\varphi t \\ m\varphi s &= \frac{mv^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Das Product $m\varphi$ haben wir sodann mit dem Namen Kraft belegt. Führen wir zur Abkürzung hierfür den Buchstaben p ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} mv &= pt \\ ps &= \frac{mv^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{III.}$$

Die in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Grössen haben, theils schon vor längerer, theils in neuerer Zeit eigene Benennungen erhalten und zwar nennt man:

mv die Bewegungsgrösse (Bewegungsquantität) *),
pt den Kraftantrieb (Impuls, Zeiteffect der Kraft) **),
ps die Arbeitsgrösse (Wegeffect der Kraft) ***),
$\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft †).

Die Gleichungen III. lauten also in Worten:

1. Die Bewegungsgrösse hat denselben Werth wie der Kraftantrieb.

2. Die Arbeitsgrösse hat denselben Werth wie die lebendige Kraft.

Wir haben nun die physikalische Bedeutung dieser Sätze zu erklären.

Es handelt sich darum, ein richtiges Maass für die Wirkung einer Kraft aufzustellen. Nun tritt aber eine Wirkung durch eine Kraft nur ein, wenn sie eine gewisse Zeit hindurch und einen gewissen Weg entlang ausgeübt wurde und es ist von vornherein klar, dass die Grösse ihrer Wirkung ausser von der Grösse der Kraft selbst auch noch von der Zeitdauer derselben, beziehungsweise von der Länge des Weges, abhängig sein müsse. Von vornherein sind daher beide Fragen gleichberechtigt; näm-

*) Diese Benennung stammt von Cartesius.

**) Die Bezeichnung Kraftantrieb wurde erst 1847 von Belanger vorgeschlagen.

***) Der Ausdruck Arbeit wurde zuerst von Coriolis gebraucht, von Poncelet wurde dessen Gebrauch befestigt.

†) Diese Bezeichnung wurde ursprünglich von Leibnitz 1695 für die Grösse mv^2 eingeführt, dann von Coriolis auf $\frac{mv^2}{2}$ übertragen. Nach Belanger wird mv^2 als lebendige Kraft, $\frac{mv^2}{2}$ als lebendige Potenz bezeichnet.

lich die Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft in gegebener Zeit? und die andere Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft nach Zurücklegung eines gegebenen Weges ihres Angriffspunktes? Das erste Mal fragen wir nach dem Zeiteffect, das zweite Mal nach dem Wegeffect der Kraft.

In beiden Fällen äussert sich die Wirkung der Kraft darin, dass eine Masse eine gewisse Geschwindigkeit aufnimmt. Aus der Grösse dieser Masse und der von ihr aufgenommenen Geschwindigkeit muss also die Wirkung der Kraft berechnet werden. Es ergiebt sich aber nun, dass diese Berechnung in den beiden Fällen nach ganz verschiedener Weise erfolgen muss, wenn ihr Resultat ein richtiges Maass für die zu messende Kraftwirkung liefern soll. Offenbar soll die Berechnung der Wirkung aus Masse und Geschwindigkeit ein Resultat ergeben, welches unter allen Umständen proportional ist der Grösse der Ursache, denn sonst erhielten wir ja kein brauchbares Maass.

Die erste der Gleichungen unter III. zeigt nun, dass der Zeiteffect der Kraft (der Antrieb der Kraft p in der Zeit t) gemessen wird durch das Product aus der Grösse der Masse m und der aufgenommenen Geschwindigkeit v, d. i. durch die Bewegungsgrösse.

Die zweite der obigen Gleichungen zeigt, dass der Wegeffect der Kraft (die Arbeit) gemessen wird durch das Product aus der Grösse der Masse m mit dem halben Quadrate der aufgenommenen Geschwindigkeit v.

Beide Arten zu messen sind, wie gesagt, gleich richtig und gleich berechtigt. Der lange Streit, der seinerzeit zwischen Cartesius und Leibnitz über das richtige Maass der Kraftwirkung geführt wurde *), wobei Cartesius die erstere, Leibnitz die letztere Methode verfocht, beruhte daher, wie später D'Alembert **) gezeigt hat, auf einem Missverständnisse.

Die Gleichung

$$pt = mv$$

sagt also zunächst aus, dass die Wirkung einer Kraft p in gegebener Zeit t desto grösser ist, je stärker die Kraft p ist und je länger die Zeit t dauert; sie sagt ferner, dass die Wirkung der Kraft um so grösser sein müsse, je grösser die Masse m ist, welche in Bewegung gesetzt werden soll und je grösser die Geschwindigkeit ist, welche sie dabei aufnehmen soll.

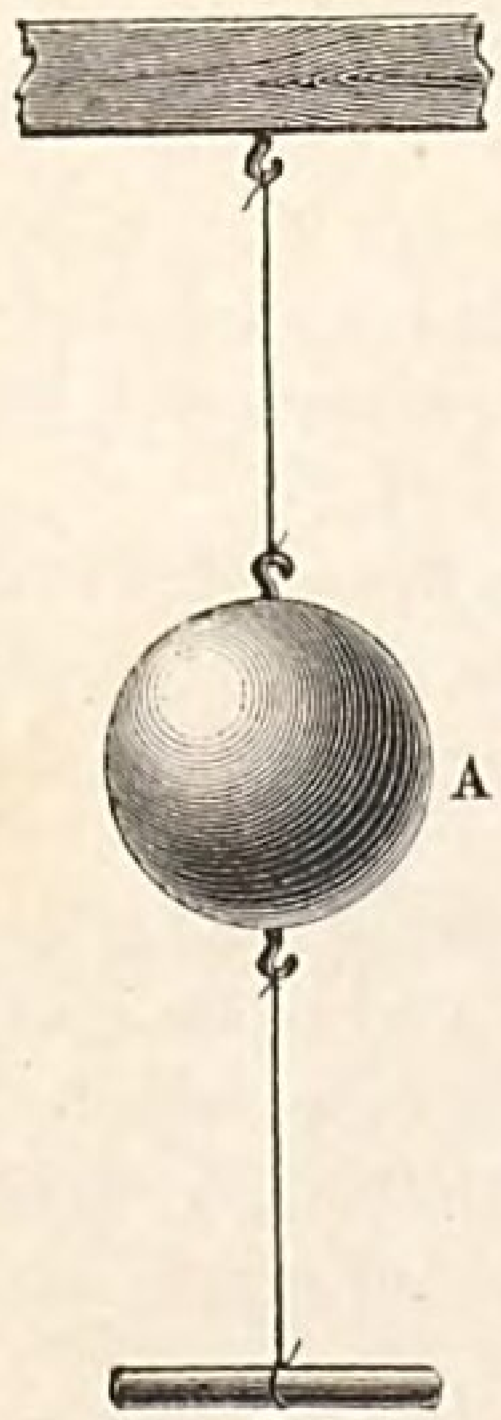
Um irgend eine Masse m in Bewegung mit der Geschwindigkeit v zu versetzen, reicht also eine beliebig kleine Kraft p aus, wenn wir sie nur hinlänglich lange Zeit t hindurch wirken lassen. Soll jedoch die Geschwindigkeit in kurzer Zeit erreicht werden, so muss die Kraft entsprechend grösser sein. Hierher gehört folgender Versuch. An eine Masse, z. B. gleich einem Kilogramm, binden wir einen Faden, der eben

*) Derselbe wurde von 1686 an vorzugsweise in den „*Acta eruditorum*“ geführt.
**) Traité de dynamique 1743.

hinreicht, etwas mehr als 1 kg zu tragen, ohne zu reissen. Ziehen wir nun an diesem Faden das Kilogramm t anfangs sehr langsam, allmälig immer schneller in die Höhe, so können wir demselben nach und nach eine beliebig grosse Geschwindigkeit ertheilen, ohne dass der Faden abreisst. Ziehen wir aber den Faden rasch an, so reisst derselbe sofort ab, weil die Kraft, welche nöthig wäre, um das Kilogramm so schnell in Bewegung zu setzen, grösser ist, als der Faden verträgt.

Durch dasselbe Princip erklärt sich auch der folgende Versuch: Eine 200 bis 300 g schwere Metallkugel A, Fig. 220, hängt an einem Zwirnsfaden, während ein zweiter ganz gleicher Faden von der Kugel herabhängt. Zieht man nun langsam an dem Querstäbchen B, so bricht der obere Faden, während der untere bricht, wenn man das Querstäbchen durch einen raschen, kräftigen Ruck herabreisst.

Fig. 220.



Den Flügel einer geöffneten Thür kann man durch den schwachen Druck eines Fingers leicht um seine Angeln drehen, weil man Zeit genug aufwenden kann, den nöthigen Kraftantrieb allmälig zu sammeln. Schiesst man dagegen eine Pistolenkugel gegen den Thürflügel ab, so wird er durchlöchert, ohne sich merklich zu bewegen, weil der Widerstand, den die Cohäsion des Holzes der Durchbohrung entgegensetzt, immer noch schwächer ist als die Kraft, welche nöthig wäre, in so kurzer Zeit einen Kraftantrieb zu liefern, um die Masse des Flügels mit so grosser Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen. Auf ähnliche Versuche kommen wir bei der Reibung zu sprechen.

Da wir von keinem Körper sagen können, welchen absoluten Werth von Geschwindigkeit er besitzt, da ja Geschwindigkeit nur eine relative Grösse ist (§. 8), welche je nach dem Bezugskörper einen verschiedenen Werth haben kann, so können wir auch von keiner Masse sagen, wie gross der absolute Werth ihrer Bewegungsquantität ist. Auf der Erdoberfläche nehmen wir gewöhnlich an, dass eine Masse keine Bewegungsquantität habe, wenn sie in Bezug auf die Erdoberfläche in relativer Ruhe ist. Wir lassen also die Bewegungsquantität unberücksichtigt, welche der Masse schon in Folge ihrer Rotation um die Erdachse und der Bewegung um die Sonne zukommt. Ferner machen wir darauf aufmerksam, dass, da die Masse immer nur eine positive Grösse ist, dagegen v positiv oder negativ genommen werden kann, auch die Bewegungsquantität sowohl positiv als negativ sein kann. Demgemäss sollte also die Gleichung $pt = mv$ besser so ausgedrückt werden: die Veränderung der Bewegungsgrösse eines Körpers ist numerisch gleich dem Antrieb der Kraft,

durch welchen sie hervorgebracht wird und stimmt in der Richtung mit jener der Kraft überein.

Bevor wir daran gehen, die physikalische Bedeutung der zweiten Gleichung

$$p s = \frac{m v^2}{2}$$

zu erklären, müssen wir die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft näher aus einander setzen, weil von dem richtigen Erfassen der Bedeutung dieser überaus wichtigen Begriffe das Verständniss eines grossen Theils der Physik abhängt.

Begriff der Arbeit und Maass derselben. Man sagt, eine Kraft leiste eine Arbeit, wenn durch diese Kraft ihr Angriffspunkt in 56
ihrer Richtung unter Ueberwindung einer Gegenkraft oder überhaupt eines Widerstandes längs eines Weges verschoben wird. Zu einer Arbeit gehören also immer zwei Dinge, eine Kraft und eine dadurch bewirkte Bewegung; wo eines von beiden fehlt, ist keine Arbeitsleistung vorhanden.

So z. B. übt ein auf den Tisch gestelltes Kilogrammgewicht zwar einen Druck, also eine Kraft aus; da aber keine Bewegung erfolgt, so ist dabei keine Arbeit. Ein Pferd, das an einen Wagen gespannt ist, welchen es nicht in Bewegung zu setzen vermag, leistet trotz allen Kraftaufwandes keine Arbeit. Andererseits leistet ein Mann, der eine Säge in freier Luft hin und her bewegt, keine Arbeit, da dabei kein Widerstand, keine Gegenkraft überwunden wird *). Sobald aber die Säge in den Holzblock eingreift, beginnt der Widerstand und damit die Arbeitsleistung.

Arbeiten oder Arbeit leisten bedeutet also zunächst den Act oder den Vorgang der Bewegung unter Ueberwindung einer Gegenkraft. Das, was daraus entsteht, die eingetretene Veränderung in der Lage oder im Bewegungszustande der Massen, also das Resultat des Arbeitens wird meistens Arbeit genannt, doch werden wir noch einen anderen Ausdruck dafür kennen lernen. Die Arbeitsgrösse wird bestimmt durch das Product aus der Länge des bei der Arbeitsleistung zurückgelegten Weges mit der Grösse der Kraft. Wird der Angriffspunkt der Kraft nicht in ihrer Richtung, sondern in einer anderen Richtung verschoben, so kommt nur die in die Richtung der Bewegung fallende Componente der Kraft in Betracht.

Als Einheit der Arbeitsgrösse gilt die Ueberwindung einer Kraft von der Stärke Eins längs des Weges Eins. Im irdischen (praktischen) Maasssysteme ist Krafteinheit bekanntlich jene Kraft, mit welcher 1 kg nach abwärts gezogen wird. Als Längeneinheit gilt das Meter. Folglich ist eine Arbeitseinheit im irdischen Maasssystem entsprechend der

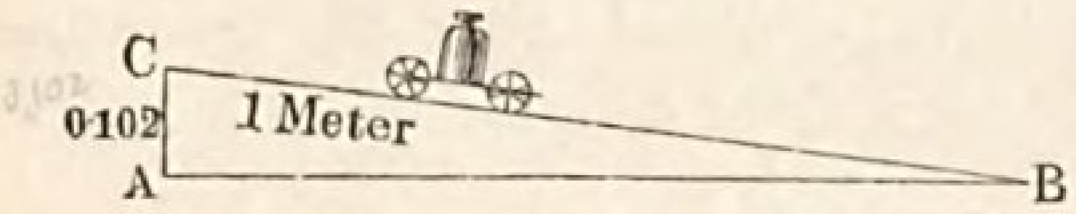
*) Dabei wird von der Masse der Säge zunächst abgesehen.

Hebung eines Kilogramms um die Höhe eines Meters. Diese Arbeitseinheit heisst Kilogrammmeter oder Meterkilogramm.

Im absoluten Maasssystem gilt als Krafteinheit für grössere Kräfte diejenige Kraft, welche einer Masse = 1 kg per Secunde die Beschleunigung 1 m ertheilt. Die Ueberwindung dieser Kraft längs eines Meters ist demnach die absolute Einheit der Arbeit*). In diesem Maasse gemessen wäre die Hebung eines Kilogramms auf 1 m Höhe eine Arbeit = 9,8 (vorausgesetzt, dass 9,8 m die Accelleration der Schwere an dem betreffenden Orte ist).

Um uns auch von dieser Arbeitseinheit nach absolutem Maasse eine klare Vorstellung zu verschaffen, denken wir uns eine schiefe Ebene, Fig. 221, deren Hypothenuse die Länge = 1 m, deren verticale Kathete die Höhe von $\frac{1}{9,8}$ m = 10,2 cm besitzt. Setzen wir auf diese schiefe Ebene eine ohne Reibung bewegliche Masse = 1 kg, so erfährt dieselbe (nach §. 36) in der Richtung CB eine Kraft, welche gleich $\frac{1}{9,8}$ der Kraft ist, mit welcher das Kilogramm von der Erde angezogen wird. Da die letztere Kraft aber in absolutem Maasse = 9,8 ist, so ist sie längs der schiefen Ebene $= \frac{9,8}{9,8} = 1$. Um also das Kilogramm vom Fusse der schiefen Ebene in B auf die Höhe C zu bewegen, ist in absolutem Maasse die Arbeit = 1 erforderlich. Genau dieselbe Arbeit ist aber auch erforderlich, um das Kilogramm vom Fusspunkte A auf die Höhe bis C zu heben. Denn die zu überwindende Kraft ist = 9,8, der Weg $= \frac{1}{9,8}$, das Product Kraft × Weg ist also $= 9,8 \times \frac{1}{9,8} = 1$ wie vorhin.

Fig. 221.



Zum horizontalen Transport des Kilogramms von B nach A ist kein Arbeitsaufwand erforderlich, da die Richtung BA auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, also die Projection der Kraft auf die Bewegungsrichtung = 0 ist. Es folgt somit, dass der Transport von B über A nach C genau ebenso viel Arbeitsaufwand erfordert, wie der Transport über die schiefe Ebene BC nach C.

Statt der aus dem Meter und dem Kilogramm abgeleiteten für physikalische Messungen unbequem grossen Kraft- und Arbeitseinheiten sind, wie schon im §. 26 mitgetheilt wurde, von den Physikern die Einheiten des Centimeter-Gramm-Secunden-Systems (C. G. S.) adoptirt worden.

*) Hierfür wird der Name „Watt" gebraucht. Man heisst aber Watt (per Secunde) auch die Kraft, welche diese Arbeit per Secunde leistet. 1 Watt ist also $= \frac{\text{Meterkilogramm}}{9,8} = \frac{\text{Dampfpferd}}{9,8 \times 75} = \frac{\text{Dampfpferd}}{735}$.

Die aus diesem System abgeleitete Krafteinheit, welche einem Gramm per Secunde 1 cm Geschwindigkeit ertheilt, wurde **Dyne** genannt. Die demselben System angehörige Arbeitseinheit, welche der Ueberwindung einer Dyne längs 1 cm gleichkommt, heisst **Erg** *).

Beispielsweise wird also an einem Orte, wo die Accelleration der Erde 980 cm beträgt:

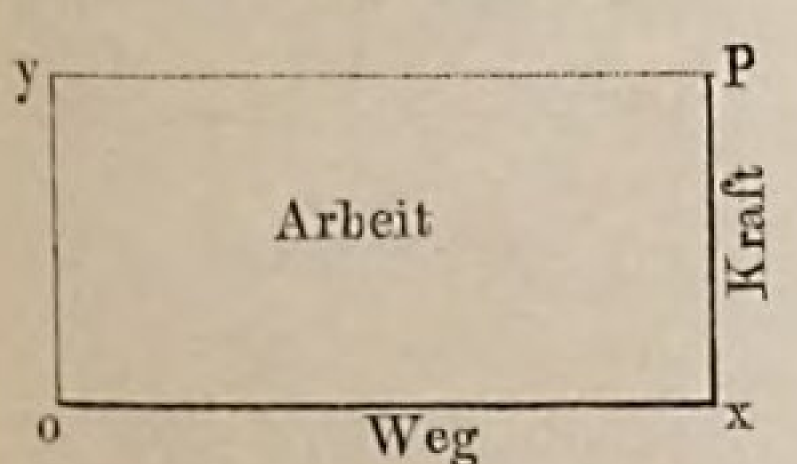
1 g von der Erde angezogen mit der Kraft von	980 Dynen
Zur Hebung von 1 g auf 1 cm Höhe erfordert eine Arbeit =	980 Ergs
Auf der in Fig. 221 dargestellten schiefen Ebene wird 1 kg längs CB durch die Schwerkraftscomponente gezogen mit einer Kraft = . . .	1000×100 Dynen $= 10^5$ Dynen
Zur Hinaufbewegung des Kilogramms von B bis C wird demnach erfordert ein Arbeitsaufwand = ...	$1000 \times 100 \times 100$ Ergs $= 10^7$ Ergs **)
1 kg wird senkrecht zur Erde gezogen mit der Kraft von .	$1000 \times 980 = 980000$ Dynen
1 Kilogramm-Meter (praktische Arbeitseinheit) ist also gleich	$1000 \times 980 \times 100$ $= 10^5 \times 980$ ~~Dynen~~ Ergs.

Bezeichnen wir die in Centimetern gemessene Accelleration der Schwere mit g^c, so ist allgemein die von einer Masse m Gramm senkrecht ausgeübte Zugkraft $= m g^c$ Dynen und die zur Hebung dieser Masse m auf die Höhe h Centimeter erforderte Arbeitsleistung

$$= h m g^c \text{ Ergs.}$$

So lange wir mit einer **constanten Kraft** zu thun haben, ist die Arbeitsgrösse einfach proportional der Kraft und ebenso proportional dem Wege, also durch das Product der beiden Grössen der letzteren gegeben.

Fig. 222.



Wie jedes Product, so können wir deshalb auch eine Arbeitsgrösse durch den Flächeninhalt eines Rechteckes darstellen, wie Fig. 222 andeutet.

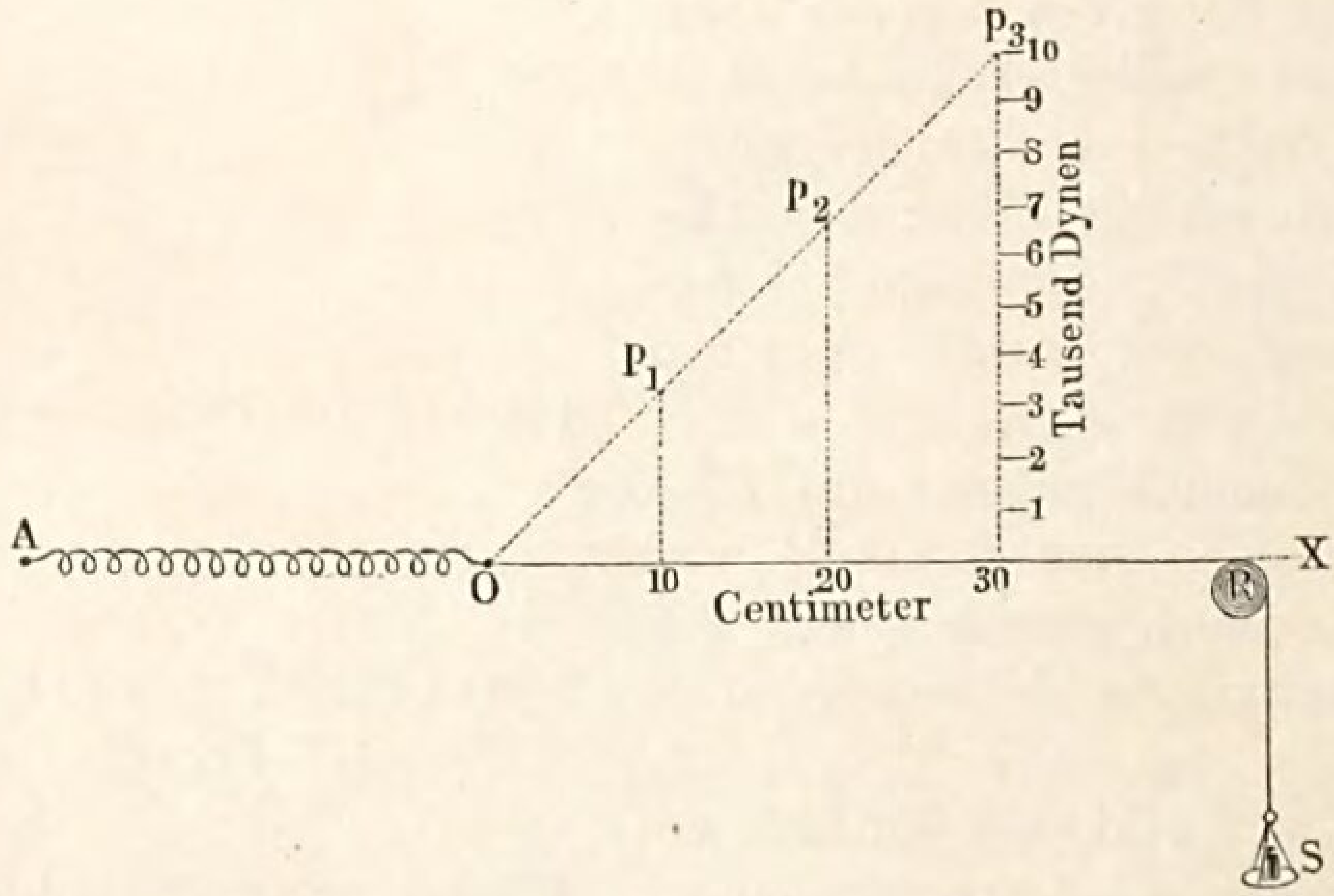
Ist die **Kraft nicht constant**, so erhalten wir die Arbeitsgrösse dennoch nach einem analogen Verfahren durch den Flächeninhalt einer Figur, bei welcher an Stelle der Parallelen yp eine andere Curve tritt.

*) Abgekürzt von Ergon (ἔργον) die Arbeit.

**) Es ist also $1 \text{ Erg} = \frac{\text{Watt}}{10 \text{ Millionen}} = \frac{\text{Kilogrammmeter}}{98 \text{ Millionen}} = \frac{\text{Dampfpferd}}{7350 \text{ Millionen}}$.

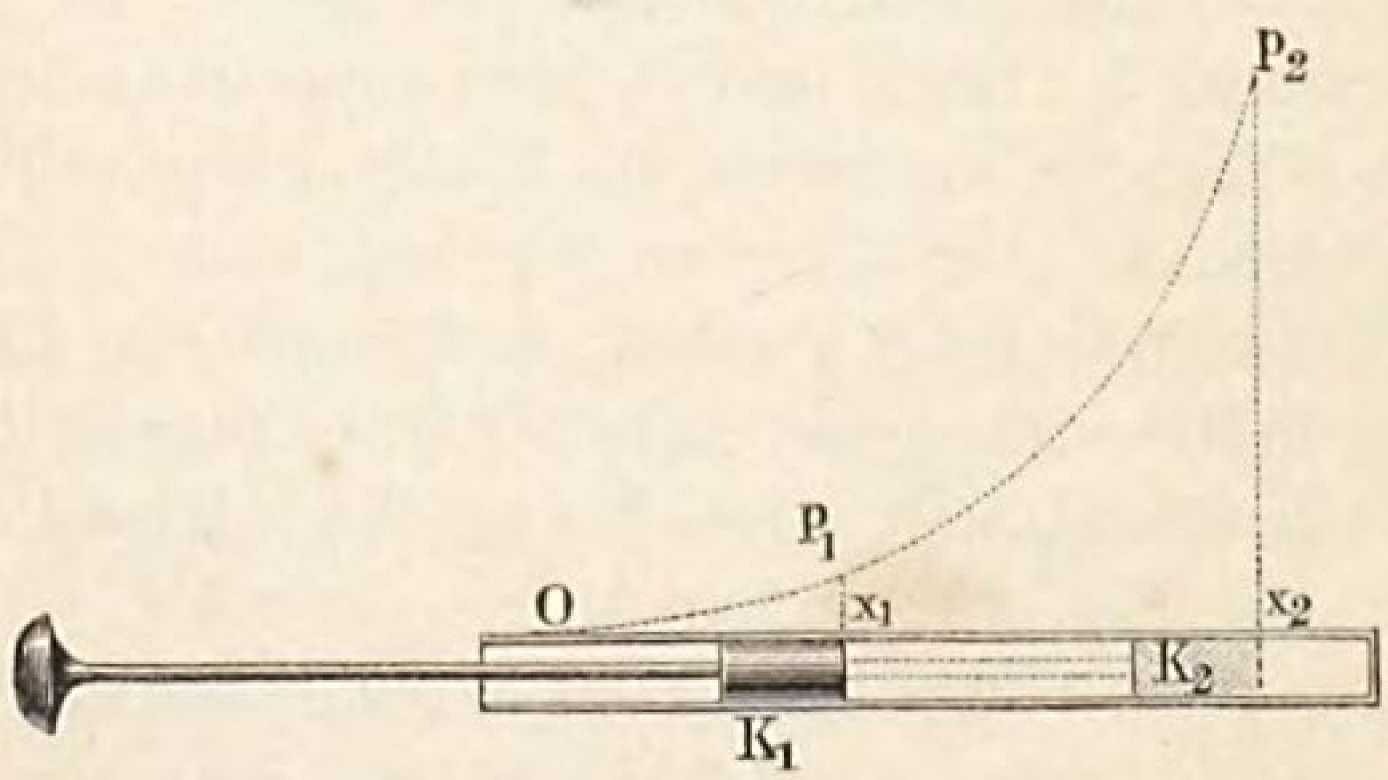
Nehmen wir z. B. folgenden Fall: die Spiralfeder AO, Fig. 223, sei bei A befestigt und reiche ungespannt bis O. Daselbst sei ein Faden angeknüpft, der bei R über eine Rolle läuft und bei S eine Schale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Bei einer Belastung gleich 10,204 g werde die Spiralfeder um 30 cm verlängert. 10,204 g entsprechen einer Kraft $=$ 10,204 $\times$ 980 Dynen $=$ 10000 Dynen. Wir tragen daher im

Fig. 223.



Punkte 30 der Abscissenachse nach einem beliebigen Maasse die Höhe 10000 als Ordinate auf. Ebenso verfahren wir bei einer Reihe anderer geringerer Belastungen. Ist die Spannkraft der Feder, was meistens annähernd der Fall ist, proportional ihrer Verlängerung, so bilden die Spitzen aller Ordinaten p_1, p_2, p_3 eine Gerade, welche vom Punkte O ausgeht, weil dort die Kraft noch $= 0$ ist. Die zum Spannen des Fadens bis 30 erforderliche Arbeit wird dann offenbar erhalten durch den Flächeninhalt des Dreiecks. Derselbe ist in unserem Falle $= \dfrac{30 \times 10000}{2}$ $=$ 15 000 Ergs. Wäre die Kraft der Feder nicht proportional der Verlängerung derselben, so würde an Stelle der Geraden Op_3 eine krumme Linie treten; die Arbeit würde aber wiederum durch den Flächeninhalt unter der Curve gegeben sein. Um auch für diesen Fall ein Beispiel heranzuziehen, denken wir uns in Fig. 224 eine einerseits geschlossene Röhre, in welcher mittelst des Kolbens K

Fig. 224.



Luft comprimirt wird. Nehmen wir nun die Kolbenwege als Abscissenwerthe und tragen wir für die erreichten Stellungen derselben z. B. x_1 und x_2 die Widerstände, welchen der Kolben dabei begegnet, als Ordinaten $x_1 p_1, x_2 p_2$ etc. auf, so erhalten wir eine Curve $O\, p_1\, p_2$, deren Gestalt je nach den Umständen verschieden gestaltet ist, wie wir in der Wärmelehre erfahren werden. Jedenfalls ist aber die Arbeit, welche wir aufwenden müssen, um den Kolben aus der Stellung K_1 in die Stellung K_2 zu bringen, dargestellt durch den Flächenraum der Figur $x_1\, p_1\, p_2\, x_2\, x_1$ und kann demnach durch ein geeignetes planimetrisches Verfahren ausgemittelt werden. Denkt man sich diesen Flächeninhalt wirklich bestimmt und dividirt man denselben durch den Werth der Länge $x_1\, x_2$, so erhält man die Höhe eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalte. Diese Höhe, die mittlere Ordinatenhöhe der Curve $p_1\, p_2$, stellt die mittlere Kraft vor. Man kann daher auch sagen, man erhält die Grösse einer durch eine veränderliche Kraft geleisteten Arbeit, indem man die Grösse des Weges mit dem mittleren Betrage der Kraft multiplicirt.

Endlich müssen wir noch wegen des algebraischen Zeichens der Arbeitsgrösse eine Bemerkung beifügen. Da wir die Richtung einer Kraft so wie die durch dieselbe hervorgebrachten Verschiebungen mit demselben algebraischen Zeichen belegen, so kann die von einer Kraft geleistete Arbeit nur als positive Grösse erscheinen. Wenn aber die Gegenkraft stärker wird, so dass der Angriffspunkt der ursprünglich arbeitenden Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der letzteren verschoben wird, dann ist die Arbeit in Bezug auf diese letztere eine negative Grösse. Es ist dann die Gegenkraft jene, welche positive Arbeit leistet. Wenn wir z. B. die Feder in Fig. 223 mit unserer Muskelkraft ausziehen, so leistet unser Muskel positive Arbeit in Bezug auf die Feder. Wenn aber unser Muskel nachlässt und unser Arm von der Feder zurückgezogen wird, so leistet jetzt die Feder positive Arbeit in Bezug auf unseren Arm. Man sagt dann auch, die früher vom Muskel geleistete Arbeit werde wieder verbraucht, die Arbeit des Muskels sei nun eine negative. Da nie eine Kraft ohne Gegenkraft auftritt, so ist stets Arbeitsleistung mit Arbeitsverbrauch, positive Arbeit mit negativer verknüpft; es ist also stets nur die Uebertragung einer Arbeitsgrösse von einem System zum anderen, nie aber eine Erzeugung allein, welche stattfinden kann. Wir kommen hierauf später zurück. Vorderhand wollen wir festhalten, dass wir die Arbeit einer Kraft positiv bezeichnen, wenn die Bewegung im Sinne dieser Kraft stattfindet.

Lebendige Kraft. Im vorigen Paragraphen haben wir Beispiele 57
von Arbeitsleistungen in Betracht gezogen, deren Resultat darin bestand, dass die Massen des Körpersystems, auf welche die arbeitende Kraft einwirkte, in eine andere relative Lage zu einander gebracht wurden.

Wird z. B. durch eine Kraft eine Masse vertical gehoben, so wird dadurch der gegenseitige Abstand dieser Masse und der Erde vergrössert;

bei Spannung einer elastischen Feder werden die Theile derselben in eine neue erzwungene Lage gebracht; bei Compression der Luft werden die Lufttheile einander genähert.

Nicht immer ist das Resultat einer Kraftwirkung ein derartiges. Häufig besteht dasselbe darin, dass einer Masse eine Geschwindigkeit ertheilt wird, ohne dass dabei eine andere Kraft oder ein anderer Widerstand überwunden wird, als jener, den jede Masse vermöge ihrer Trägheit einer Aenderung ihres Geschwindigkeitszustandes entgegensetzt. Denken wir uns z. B. die Masse m werde auf einer ganz glatten horizontalen Unterlage, auf welcher sie ohne Reibung beweglich ist, durch eine horizontale constante Kraft p in Bewegung gesetzt. Die Masse m erhält dadurch eine Beschleunigung $\varphi = \frac{p}{m}$ und nachdem sie einen Weg s zurückgelegt hat, eine Geschwindigkeit, welche aus der Gleichung

$$\varphi s = \frac{v^2}{2} \quad \text{1)}$$

berechnet werden kann; man findet dieselbe:

$$v = \sqrt{2 \varphi s}$$

Während also die von der constanten Kraft p geleistete Arbeit mit jeder gleichen Zunahme des Weges s um einen gleichen Betrag zunimmt, wächst die Geschwindigkeit nicht in demselben Verhältnisse; es ist vielmehr das Quadrat der Geschwindigkeit, welches proportional mit der geleisteten Arbeit wächst.

Will man also aus der Grösse der Masse m und der Geschwindigkeit v einen Ausdruck bilden, welcher die Wirkung der von der Kraft geleisteten Arbeit in richtiger Weise berechnen lässt, so muss dieser Ausdruck die Geschwindigkeit in der zweiten Potenz enthalten.

Multiplicirt man die Gleichung 1) beiderseits mit m, so kommt

$$m \varphi s = \frac{m v^2}{2}$$

oder, da $m \varphi = p$ ist:

$$p s = \frac{m v^2}{2}$$

Letztere Grösse wird nun, wie oben mitgetheilt wurde, mit dem nicht glücklich gewählten Namen: „Lebendige Kraft“ bezeichnet. Diese Gleichung sagt daher aus, dass die aufgewendete Arbeit numerisch gleich sei der entstandenen lebendigen Kraft.

Was ist also lebendige Kraft?

Lebendige Kraft ist ein Begriff, durch welchen der Bewegungszustand einer Masse derartig definirt wird, dass er der Grösse nach übereinstimmt mit der Arbeit, welche eine Kraft leisten musste, um diese Masse in diesen Bewegungszustand zu versetzen.

Wir wollen als Beispiel der Anwendung dieses Satzes von der

Gleichheit der lebendigen Kraft und der Arbeit die Bewegung einer Flintenkugel in Rechnung ziehen.

Eine Flintenkugel von 20 g Masse werde aus einem Flintenlaufe von 60 cm Länge durch eine Pulverladung herausgeschossen, welche vom Momente der Entzündung bis zum Momente, wo die Kugel den Lauf verlässt, auf die letztere einen mittleren Druck gleich dem Gewichte von 153 kg ausübe. Mit welcher Geschwindigkeit wird die Kugel den Lauf verlassen, wenn die Reibung im Laufe vernachlässigt wird?

Wir verwandeln zuerst den Druck von 153 kg = 153 000 g in absolute Krafteinheiten, indem wir letztere Zahl mit 980 multipliciren. Wir erhalten $p = 153\,000 \times 980 = 149\,940\,000$ Dynen. Diese multiplicirt mit dem Wege $s = 60$ cm geben eine Arbeitsleistung der Pulvergase $= 60 \times 149\,940\,000 = 8\,996\,400\,000$ Ergs.

Diese Arbeit muss nun gleich sein der lebendigen Kraft $\frac{m v^2}{2}$, worin $m = 20$. Man hat daher:

$$v^2 = \frac{2 \times 8\,996\,400\,000}{20} = 899\,640\,000$$

$$v = 29\,993 \text{ cm} = 299{,}94 \text{ m}.$$

Sowie die Arbeit einer Kraft verwendet werden kann, um in einer Masse lebendige Kraft aufzuspeichern, so kann auch umgekehrt eine mit lebendiger Kraft versehene Masse wiederum eine Arbeit leisten, wobei ebenso viel von der vorhandenen lebendigen Kraft verschwindet, als Arbeit geleistet wird.

So könnte beispielsweise die oben betrachtete Flintenkugel mit rund 300 m Geschwindigkeit verschiedenartige Arbeiten leisten, indem sie verschiedenartige Kräfte überwindet. Als einfachsten Fall fassen wir den folgenden ins Auge. Wir denken uns die Flinte senkrecht gestellt, so dass die Kugel vertical in die Höhe steigen muss. Sie leistet dabei die Arbeit der Ueberwindung der Anziehungskraft der Erde längs der ganzen Steighöhe. Die letztere beträgt, wie bekannt (§. 38), $\frac{v^2}{2g}$, wenn v die Anfangsgeschwindigkeit ist, also in unserem Falle $\frac{899\,640\,000}{2 \times 980}$. Die Anziehungskraft ist die von 20 g, also gleich 20×980 Dynen. Das Product beider giebt die Arbeit, nämlich $\frac{899\,640\,000 \times 20 \times 980}{2 \times 980}$ $= 8\,996\,400\,000$ Ergs, wie wir früher hatten. Sowie also die Kugel den höchsten Punkt erreicht hat, ist ihre lebendige Kraft wiederum $= 0$ geworden und die gleich grosse Arbeit wieder von ihr geleistet, welche früher für sie zur Erzeugung ihrer lebendigen Kraft von den Pulvergasen geleistet worden war.

Allein sofort beginnt eine neue Umwandlung. Die Kugel und die Erde bilden zusammen ein Körpersystem, welches fähig ist, Arbeit zu

leisten, sobald beide auf einen Abstand von einander entfernt worden sind, so dass sie der gegenseitigen Anziehung Folge leisten können. Diese Arbeitsfähigkeit wurde eben durch die Arbeit gewonnen, welche aus der lebendigen Kraft entstand. Indem also jetzt die Kugel durch die Schwerkraft nach abwärts in Bewegung gesetzt wird, sammelt sich in ihr wiederum lebendige Kraft an. Sehen wir vom Luftwiderstande ab, so erlangt bekanntlich der fallende Körper bis zu seiner Ankunft am Ausgangspunkte die gleiche Geschwindigkeit, also auch die gleiche lebendige Kraft wieder, die er hatte, als er emporzusteigen begann. Dafür hat das Körpersystem, Erde — Kugel, die Fähigkeit verloren, Arbeit zu leisten.

Die Verfolgung dieses Gegenstandes vorbehaltend, wollen wir noch bezüglich des algebraischen Zeichens der lebendigen Kraft Einiges bemerken.

Da das Quadrat einer Grösse immer positiv ausfällt, so muss auch das Quadrat der Geschwindigkeit immer positiv sein, wenn auch die Richtung der Bewegung sich umkehrt; da ferner die Masse immer nur positiv sein kann, so muss eine aufgenommene lebendige Kraft $\frac{m v^2}{2}$ stets eine positive Grösse sein, ebenso wie die geleistete Arbeit, aus der sie hervorgegangen und der sie numerisch gleich sein muss.

Sobald ein Körper auf Kosten seiner lebendigen Kraft selbst Arbeit leistet, d. h. eine Arbeitsgrösse auf ein anderes System überträgt, kann man allerdings dem Sprachgebrauch der Algebra gemäss sagen, er habe negative lebendige Kraft aufgenommen, was aber nichts Anderes bedeutet, als dass er positive lebendige Kraft abgegeben habe.

Ferner machen wir darauf aufmerksam, dass bezüglich der lebendigen Kraft wie bezüglich der Bewegungsquantität nie davon die Rede sein kann, ihren absoluten Werth zu bestimmen.

Die Kugel z. B., von der eben die Rede war, besitzt ja schon, bevor der Schuss losgeht, eine Geschwindigkeit in Folge Achsendrehung der Erde und Bewegung um die Sonne. Die davon stammende lebendige Kraft lassen wir aber für gewöhnlich unbeachtet. In Wahrheit können wir also immer nur von einer Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kraft, nie aber von ihrem absoluten Werthe sprechen.

Steigt die Geschwindigkeit einer Masse m von v auf v_1, so ist der Zuwachs an lebendiger Kraft $= \frac{m}{2} (v_1{}^2 - v^2)$.

Sowie ein Körper A gleichzeitig in Bezug auf einen Körper B in Ruhe und gleichzeitig in Bezug auf einen anderen Körper C in Bewegung sein kann, so kann ein Körper A auch in Bezug auf einen Körper B ohne lebendige Kraft sein und gleichzeitig in Bezug auf einen Körper C eine solche besitzen.

Stellen wir uns eine grössere Eisscholle vor, welche mit der Geschwindigkeit von 10 m per Secunde einen Fluss hinabtreibt. Auf der

Scholle liege eine Kugel. Dann haben sowohl Scholle als Kugel lebendige Kraft in Bezug auf die Erdoberfläche.

Wenn nun aber ein Mann auf der Scholle die Kugel antreibt, so dass sie mit 10 m Geschwindigkeit flussaufwärts rollt, so hat dieselbe keine lebendige Kraft mehr in Bezug auf die Erdoberfläche, wohl aber solche in Bezug auf die Scholle. Da man überhaupt von zwei Körpern A und B, die sich relativ nähern oder entfernen, nie behaupten kann, der eine stehe still und der andere bewege sich, so kann man auch nie behaupten, der eine sei ohne lebendige Kraft, der andere besitze sie. Sie besitzen sie eben beide zusammen. Dies hindert uns aber nicht, für gewöhnlich die lebendige Kraft in demjenigen Körper vorhanden zu betrachten, den wir conventionell als den bewegten ansehen.

Begriff der Energie. Die in den vorangegangenen Paragra- 58
phen besprochenen Beispiele von Arbeitsleistungen lassen uns erkennen, dass die dazu nöthige Kraft stets aus einem Körper oder Körpersysteme stammt, welches entweder durch die Lage und Vertheilung seiner Massen oder durch die in ihm aufgespeicherte lebendige Kraft die Fähigkeit besitzt, Arbeit zu leisten.

Die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wird Energie genannt*).

Energie besitzt also eine gehobene Last, welche mit der Erde zusammen als Körpersystem anzusehen ist (aufgezogene Gewichtsuhr, Wassergefälle); Energie besitzt eine gespannte Feder (aufgezogene Taschenuhr, gespannte Armbrust); Energie besitzt ferner ein comprimirtes Gas, ein gespannter Dampf; ebenso ist Energie aufgespeichert in explosiven Stoffen (im Schiesspulver, Dynamit, Knallgas).

Energie besitzt jede bewegte Masse (fliessendes Wasser, Wind, abgeschossene Kugel, geschwungener Hammer, rotirendes Schwungrad); Energie muss ferner aufgespeichert sein in dem Muskelapparat der Menschen und der Thiere, da sie sonst nicht Kraft entwickeln und Arbeit leisten könnten.

Alle diese Energie besitzenden Körpersysteme, von denen hier nur wenige als Beispiele aufgezählt wurden, verlieren jedoch an Arbeitsfähigkeit, sobald sie Arbeit leisten. Ihr Energieinhalt vermindert sich um einen Betrag, den wir messen durch die Anzahl Arbeitseinheiten, welche geleistet wurden. So z. B. sinkt das Gewicht der Uhr, indem die Räder bewegt werden, die gespannte Feder erschlafft, indem sie den Pfeil fortschleudert, der Dampf verliert seine Spannung, indem er den Kolben treibt, die chemische Energie des Schiesspulvers ist verbraucht, wenn es seine Wirkung gethan hat, das Wasser verliert an Gefälle oder an Geschwindigkeit, indem es das Rad treibt, die abgeschossene Kugel ermattet, indem sie in einen Körper eindringt, das Schwungrad kommt zur Ruhe, indem es Arbeit leistet, wenn ihm nicht neue Energie zugeführt wird, ja

*) Aus dem griechischen Worte ἐνέργεια Thatkraft; der Ausdruck wurde von Rankine und Thomson eingeführt.

selbst der Muskelapparat der Menschen und Thiere ermüdet und wird erschöpft, wenn ihm nicht durch die Nahrungsmittel und den eingeathmeten Sauerstoff die ausgegebene Energie ersetzt wird.

Gleichzeitig mit der Verminderung der Energie des einen Körpersystems wird die Arbeitsfähigkeit jenes anderen Körpersystems, auf welches die arbeitende Kraft einwirkt, um denselben Betrag erhöht. Man kann demnach geradezu sagen: Arbeit leisten heisst Energie übertragen. Die Energie kann also durch eine Reihe von auf einander folgenden Arbeitsleistungen von einem materiellen System auf ein zweites, drittes etc. übergehen, wobei sie die mannigfaltigsten Formen annehmen kann. Sie kann dabei natürlich auch getheilt, so zu sagen zersplittert, und die Theile können unter Umständen wieder gesammelt werden.

Fassen wir nochmals das im vorigen Paragraphen benutzte Beispiel der senkrecht abgeschossenen Kugel ins Auge. Das Schiesspulver enthält Energie in Folge der Lage seiner chemischen Bestandtheile.

Durch die chemische Umsetzung derselben bei der Entzündung geht ein Theil seiner Energie auf die entwickelten Gase und von diesen auf die Kugel über; dieselbe enthält dann Energie in Form von lebendiger Kraft. Indem die Kugel steigt, giebt sie die Energie der lebendigen Kraft wieder ab und es entsteht dafür Energie, welche dem Körpersysteme Erde — Kugel in Folge ihrer getrennten Lage innewohnt. Auch diese wird bei Aufhebung dieser Lage wieder in die Form lebendiger Kraft zurückverwandelt, um dann beim Auffallen der Kugel noch complicirtere Formen anzunehmen.

Wir heben also nochmals hervor, dass zu einer Arbeitsleistung immer zwei materielle Systeme gehören, wovon eines Energie abgiebt, die das andere aufnimmt. Man sagt dann, von dem ersten System werde Arbeit geleistet an dem zweiten oder für das zweite.

Damit also die Quantität der Energie eines Systems sich ändere, ist stets nothwendig, dass dasselbe nach aussen arbeitend wirke, oder von aussen eine Einwirkung erfahre.

Vorgänge im Inneren eines Systems ohne äussere Einwirkung können den Energieinhalt desselben nicht ändern. Es ist dies ebenso wenig möglich, wie es unmöglich ist, sich selbst dadurch aus dem Wasser zu ziehen, dass man mit den Händen am eigenen Körper emporzieht. Man muss nach einem Aussengegenstande greifen und auf diesen Zugkraft ausüben, um den eigenen Körper zu heben. Ebenso kann man, auf einem Schlitten sitzend, auf horizontaler Eisfläche sich*) nicht von selbst fortbewegen, sondern man muss entweder von einem Aussenstehenden gezogen werden oder sich gegen das Eis stemmen. Die Hebung des menschlichen Körpers im ersten Falle, die Erlangung einer Geschwindigkeit für Mensch und Schlitten im zweiten Falle, wären mit einer Zunahme des Energieinhalts verknüpft.

*) Genauer gesagt: den gemeinsamen Schwerpunkt von Körper und Schlitten.

Die Unmöglichkeit der Aenderung des Energieinhalts eines Systems durch innere Kräfte geht schon aus der folgenden Ueberlegung hervor. Wenn ein System auf ein anderes arbeitend einwirkt, so giebt es an das andere Energie ab. Das erste verliert, das zweite gewinnt ebenso viel Energie. Denkt man sich nun aber beide Systeme zusammen als eines, so ändert sich sein Energieinhalt nicht, wenn auch die Vertheilung derselben sich ändert.

Es ist dies ein Grundsatz, welcher gewöhnlich als das „Princip der Erhaltung der Energie" *) bezeichnet wird, und welchem wegen seiner ausserordentlich ausgedehnten Tragweite wohl kaum ein anderes physikalisches Princip an Wichtigkeit gleichkommen dürfte.

Dasselbe lässt sich folgendermaassen formuliren:

„Die Gesammtenergie jedes materiellen Systems ist eine Grösse, welche durch Wirkungen zwischen den Theilen des Systems weder vermehrt noch vermindert werden, wohl aber in andere Formen umgewandelt werden kann."

Daraus folgt, dass, wenn man alle im Universum vorhandenen materiellen Systeme in eines zusammengefasst denkt, wobei also von einer äusseren Einwirkung nicht mehr die Rede sein kann, weil alle Kraftursachen bereits dem Inneren des Systems angehören, die Gesammtenergie eine constante Grösse bleiben muss. Diese Folgerung ist auch in der That von R. Clausius mit den Worten „die Energie des Weltalls ist constant" ausgesprochen worden. So überaus wahrscheinlich dieser Satz ist, so wollen wir doch nicht vergessen, dass das Princip der Erhaltung der Energie nur ein Erfahrungssatz ist und daher zunächst nur innerhalb des Rahmens als bewiesen zu betrachten ist, in welchem wir unsere Erfahrungen sammeln konnten.

Bei einer Musterung der Energievorräthe, die wir in Körpersystemen finden, erkennen wir bald, dass die Energie in zwei Hauptformen vorkommt, auf welche wir schon im Eingange dieses Paragraphen hingedeutet haben.

Die Arbeitsfähigkeit eines Systems folgt entweder aus der Lage seiner Theile, wie z. B. bei der gespannten Feder, dem comprimirten Gase, der gehobenen Last, dem Schiesspulver; oder sie folgt aus der Bewegung, beziehungsweise der lebendigen Kraft, wie z. B. bei der geschossenen Kugel, dem treibenden Wasser oder Winde etc. Man unterscheidet demnach zwischen Energie der Lage und Energie der Bewegung. Mit Rücksicht auf die gespannte Lage der ersteren Körper-

*) Dieses Princip ist für beschränkte Gebiete von Naturerscheinungen schon von Newton und D. Bernouilli ausgesprochen worden. Die Möglichkeit seiner allgemeinsten Gültigkeit hat zuerst der deutsche Arzt Jul. Rob. Mayer in Heilbronn 1842 in einer Abhandlung in Liebig's Annalen XLII dargelegt; eine epochemachende Darstellung wurde von H. Helmholtz in seiner Schrift: „Ueber die Erhaltung der Kraft", Berlin 1847, geliefert.

systeme gebraucht man hierfür auch die Ausdrücke Spannkraft einerseits und lebendige Kraft andererseits.

Es ist aber zweckmässiger, das Wort Kraft zu vermeiden; am meisten empfehlen sich die Ausdrücke potentielle Energie und kinetische Energie, welche sich schon allgemein eingebürgert haben.

Unter potentieller Energie eines Körpersystems versteht man also die Arbeitsfähigkeit, welche dasselbe in Folge der Lage oder der Beschaffenheit seiner Theile besitzt.

Unter kinetischer Energie eines Körpersystems versteht man die Arbeitsfähigkeit, welche demselben in Folge der lebendigen Kraft, also in Folge seiner Geschwindigkeit im Ganzen und in seinen Theilen zukommt.

Während es verhältnissmässig leicht ist, die Zunahme oder Abnahme der kinetischen Energie eines Körpersystems aus den Massen und deren Geschwindigkeitsänderungen zu berechnen, ist dies bei der potentiellen Energie bisher nicht immer möglich; doch kann sie dann meist durch Experimente ermittelt werden. Der absolute Werth des Energieinhalts eines Körpersystems ist nie angebbar, auch sind wir nie im Stande, einem Körper allen Energieinhalt zu entziehen.

Als Maasseinheit für die Energie kann die Arbeitseinheit, also das Erg angewendet werden; ein anderes Maass werden wir in der Wärmelehre kennen lernen.

59 **Die Maschinen.** Begriff und Zweck der Maschinen. Wenn wir zu irgend einem speciellen Zwecke eine Arbeit aufwenden wollen, so genügt es nicht, dass uns von einer Energiequelle, z. B. einem Wasser- oder Dampfmotor oder durch Muskelkraft, das dazu nöthige Quantum der Energie zur Verfügung gestellt werde, sondern es muss auch dafür gesorgt werden, dass diese Energie in einer dem Zwecke der Arbeit angemessenen Form zur Verwendung komme. Es ist dazu oft nöthig, die verfügbare Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit oder umgekehrt zu vergrössern, ihre Angriffspunkte, ihre Richtung oder überhaupt die Bahn der Bewegung abzuändern. Wir bewerkstelligen dies mittelst besonderer Apparate, welche Maschinen genannt werden.

Es ist schon oft versucht worden, eine einwurfsfreie Definition der Maschine zu formuliren *); vom physikalischen Standpunkte aus möchten wir etwa folgende Fassung in Vorschlag bringen:

Maschine ist eine Vorrichtung, welche dazu dient, ein gegebenes Energiequantum zu übertragen und dasselbe hierbei in Bezug auf Richtung und Bahn, Form und Zusammensetzung

*) Reuleaux hat in seiner Maschinenlehre eine grosse Anzahl solcher Definitionen gesammelt und schliesslich die folgende beibehalten: Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, dass mittelst ihrer mechanische Naturkräfte genöthigt werden können, unter bestimmten Bewegungen zu wirken.

derart abzuändern, wie es der zu leistenden Arbeit entspricht.

Diese Definition betrifft die Maschine im weitesten Sinne; sie passt daher beispielsweise auch auf die Dampfmaschine, Eismaschine, Elektrisirmaschine, dynamo-elektrische Maschine, sowie auf die mechanischen Maschinen.

Wir beschränken uns hier auf eine engere Gruppe von Maschinen, bei welchen die übertragene Energie eine mechanische Arbeitsgrösse ist, schliessen also jene aus, bei welchen die Energie in einer der wesentlich abweichenden Formen, wie Wärme, Elektricität, Affinität etc. übertragen wird *).

Wir wollen ferner zunächst nur solche Maschinen ins Auge fassen, bei welchen nur an einem Angriffspunkte Energie aufgenommen und an einem Angriffspunkte wiederum abgegeben, dieselbe also nicht getheilt oder zersplittert wird. Insofern dies in Wirklichkeit nie ganz der Fall ist, da bei allen wirklich ausgeführten Maschinen stets Theile der aufgenommenen Energie durch Reibung oder andere Umstände zersplittert werden, müssen wir die hier betrachteten Maschinen als ideale auffassen. Wir werden dies auch insofern thun, als wir die bei den Maschinen vorkommenden starren Körper als vollkommen starr, hingegen die biegsamen Körper (Seile, Schnüre, Riemen) als vollkommen biegsam ansehen werden, was in Wirklichkeit auch nie der Fall sein kann. Unsere Resultate werden dadurch nicht unbrauchbar, da wir dann leicht von den vollkommenen Maschinen auf die wirklichen schliessen können.

Eintheilung der Maschinen. Die Maschinen, welche zur Uebertragung mechanischer Energie dienen, haben nicht alle die gleiche Aufgabe zu leisten. Ihre einfachste Aufgabe besteht wohl darin, die Richtung der arbeitenden Kraft abzuändern, ohne dass an der Zusammensetzung des Productes Kraft $\times$ Weg etwas geändert wird. Apparate, die dies leisten, könnten wir als Richtung ändernde Maschinen in eine erste Gruppe zusammenfassen.

In eine zweite Gruppe würden dann alle jene Maschinen einzureihen sein, welche bei der Uebertragung der Energie die Zusammensetzung des Productes Kraft $\times$ Weg in der Weise verändern, dass entweder die Kraft auf Kosten des Weges oder der Weg auf Kosten der Kraft vergrössert wird, wobei jedoch das Uebersetzungsverhältniss während des Fortgangs der Uebertragung ein constantes bleibt.

Unter Uebersetzungsverhältniss versteht man das Verhältniss zwischen der Grösse der Kraft (des Weges) nach der Uebertragung zu jener

*) Für diese engere Gruppe von Maschinen scheint uns die von Laboulaye gegebene Definition am besten zu entsprechen: Maschine heisst jedes Körpersystem, welches dazu bestimmt ist, die Arbeit der Kräfte zu übertragen und in Folge dessen sowohl die Kräfte selbst in Bezug auf ihre Intensität abzuändern, als die hervorgerufene Bewegung hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit und Richtung mit Rücksicht auf das zu erreichende Ziel umzugestalten.

vor der Uebertragung. Die zweite Gruppe hätte also zu umfassen die Maschinen mit constantem Uebersetzungsverhältniss.

Eine dritte Gruppe von Maschinen ändert ebenfalls die Kraft auf Kosten des Weges, jedoch in der Weise, dass während des Fortgangs der Uebertragung das Uebersetzungsverhältniss sich verändert. Eine solche Maschine ist daher im Stande, eine constante Kraft in eine veränderliche oder umgekehrt zu verwandeln, wobei natürlich die Wege, also auch die Geschwindigkeiten entsprechend verändert werden. Das wären also Maschinen mit veränderlicher Uebersetzung.

Die eben vorgeschlagene Eintheilung hätte vom theoretischen Standpunkte wohl den Vorzug vor der herkömmlichen, welche sich auf die äussere Form der Maschinen stützt; sie leidet aber an dem praktischen Uebelstande, dass sie Maschinen von verwandter Form trennt und solche von ganz abweichender Form zusammenstellt.

Wir wollen daher zunächst, ohne Vollständigkeit anzustreben, nur die wichtigeren einfachen Maschinen nach drei hervorragenden Typen gruppiren. Diese Typen sind:

I. Die Seilmaschine (Rolle, Wellrad etc.).

II. Die Hebelmaschine.

III. Die Gleitmaschine (schiefe Ebene, Keil, Schraube etc.).

Es wird sich zeigen, dass nach jedem dieser Typen Maschinen construirt werden können, welche die oben in drei Stufen unterschiedenen Aufgaben zu leisten vermögen, nämlich entweder erstens nur die Richtung einer Kraft zu ändern, oder zweitens Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) im constanten Verhältnisse abzuändern, oder drittens zu bewirken, dass während der Arbeitsübertragung die Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) in beliebig veränderlicher Weise abgeändert werde.

Jener Punkt an der Maschine, an welchem die arbeitende Kraft angreift, soll kurz der „Angriffspunkt der Kraft“ genannt werden; hingegen jener Punkt, wo die zu überwindende Kraft angreift, soll als „Angriffspunkt der Last“ bezeichnet werden. Diese Bezeichnung, welche darauf beruht, dass man sich die überwundene Kraft als Anziehungskraft der Erde auf eine Masse vorstellt, darf jedoch nicht einseitig ausgelegt werden. Es versteht sich vielmehr, dass auch irgend eine andere Kraft überwunden werden kann und dass überhaupt, soweit nicht die Reibung hinderlich ist, die beiden Angriffspunkte ihre Rolle vertauschen können.

60 **Die Seilmaschine als Rolle; Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Die Seilmaschine hat das Eigenthümliche, dass bei ihr ausser starren Körpern auch ein biegsamer in Anwendung kommt: das Seil (Schnur, Riemen).

Die einfachste Seilmaschine ist die Rolle.

Die Rolle ist eine runde, am Rande mit einer ringförmigen Rinne versehene Scheibe, welche um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, auf ihrer Ebene rechtwinklig stehende Achse drehbar ist; diese Achse wird gewöhnlich durch eine Schere getragen, deren Arme zu beiden Seiten der Rolle bis etwas über ihre Mitte reichen, wie man dies Fig. 226 sieht.

Man unterscheidet feste und bewegliche Rollen. Feste Rollen sind solche, deren Achse unbeweglich ist wie die Achse der Rolle *A*, Fig. 226, so dass keine Verrückung derselben, sondern nur eine Drehung um dieselbe möglich ist, während bei den beweglichen Rollen wie bei *B*, Fig 226, auch eine Ortsveränderung der Achse möglich ist.

Wenn um einen Theil des Umfangs einer festen Rolle eine Schnur oder ein Seil gelegt ist, und an beiden Enden desselben Kräfte wirken, so findet nur dann Gleichgewicht statt, wenn die Kraft, welche das Seil auf der einen Seite spannt, der auf der anderen Seite wirkenden Kraft gleich ist. Es lässt sich dies leicht von vornherein einsehen, wenn man bedenkt, dass die beiden Kräfte unter sonst ganz gleichen Umständen die Rolle nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Uebrigens lässt sich das Gleichgewicht der Kräfte an der Rolle auch vom Parallelo-

Fig. 225.

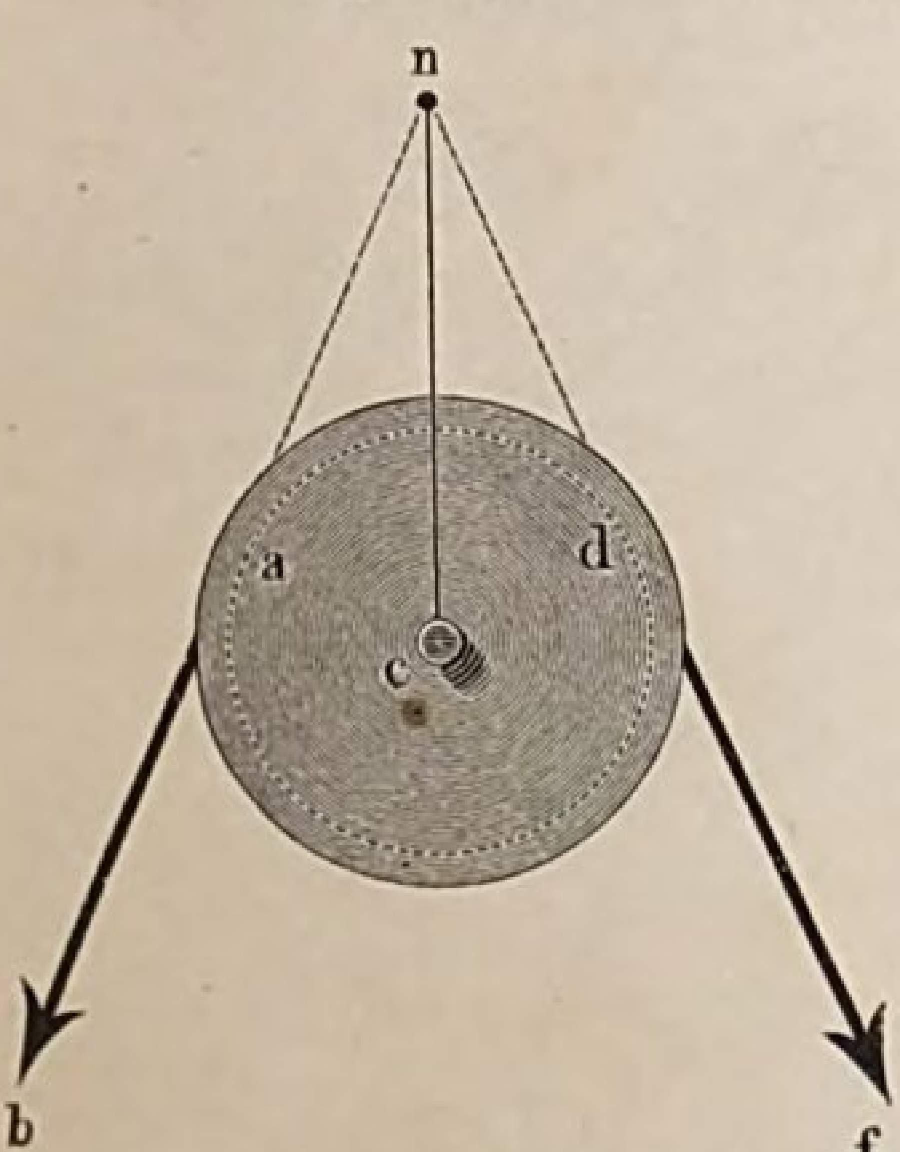
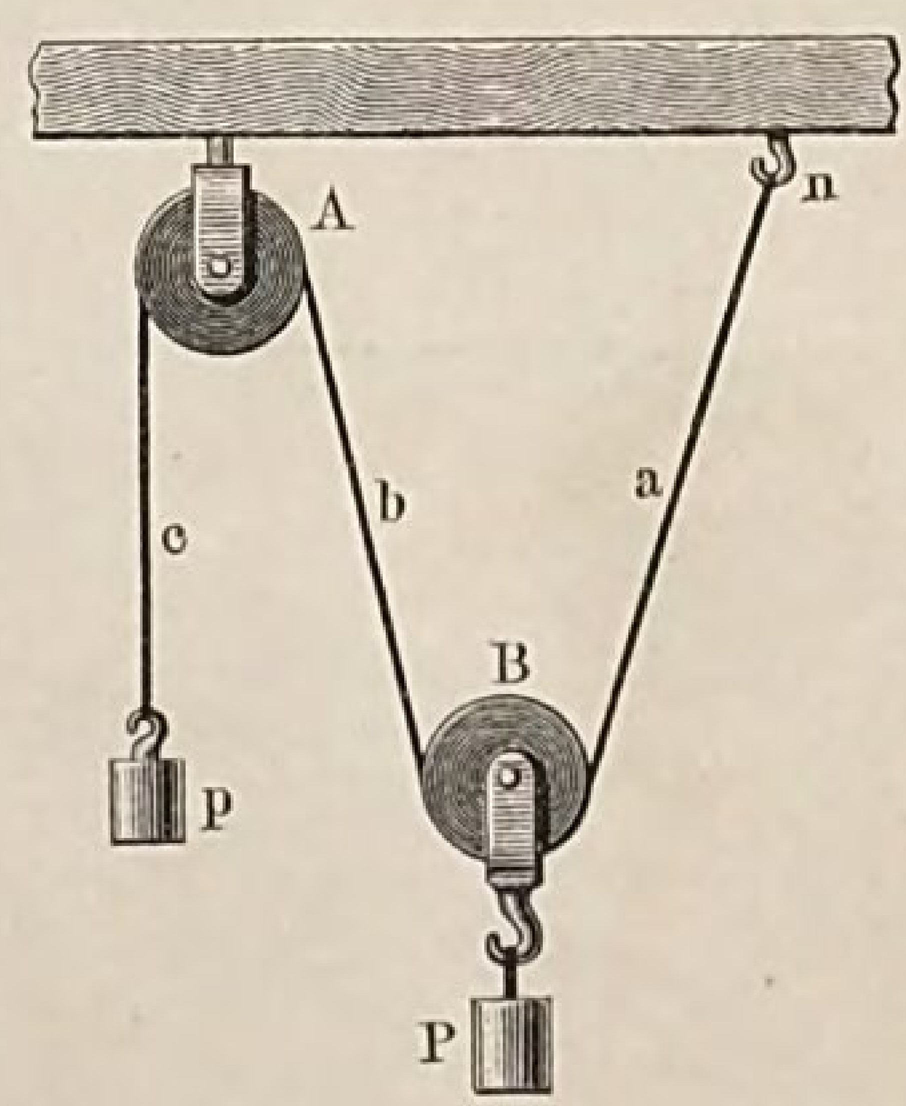


Fig. 226.



gramm der Kräfte ableiten, und von diesem Gesichtspunkte aus wollen wir die Rolle hier näher betrachten. Fig. 225 stellt eine um ihren festen Mittelpunkt c drehbare Rolle dar; das um dieselbe geschlungene Seil sei durch Kräfte gespannt, welche nach den Richtungen ab und df wirken. Denken wir uns die Linien df und ab bis zu ihrem Durchschnittspunkte n verlängert, so ist klar, dass, wenn n ein mit der Rolle fest verbundener Punkt wäre, man, ohne in der Wirkung etwas zu ändern, die Angriffspunkte der beiden Kräfte von a und d nach n verlegen könnte, und so hätte man dann zwei in einem Punkte n angreifende Kräfte, die nur dann im Gleichgewicht sein können, wenn ihrer Resultirenden das Gleichgewicht gehalten wird. Wenn die beiden in n angreifenden, nach den

Richtungen nb und nf wirkenden Kräfte gleich sind, so wird ihre Resultirende den Winkel bnf halbiren, die Richtung dieser Resultirenden geht alsdann durch den festen Mittelpunkt c, und mithin findet Gleichgewicht statt. Wäre eine der beiden Kräfte grösser als die andere, so würde die Resultirende nicht mehr durch diesen festen Punkt gehen, es könnte also auch kein Gleichgewicht mehr stattfinden.

Der Druck, den die Achse der Rolle auszuhalten hat, ist offenbar der Resultirenden der beiden Kräfte gleich, und wenn die Richtungen der beiden Kräfte parallel sind, so ist der Druck auf die Achse gleich der Summe der beiden Kräfte (wozu noch das Gewicht der Rolle selbst zu rechnen ist).

In dem Falle, der in Fig. 227 dargestellt ist, wo zwei gleiche Kräfte von der Grösse p, die eine an dem verticalen, die andere an dem horizontalen Schnurende wirken, ist der Druck auf die Achse unter 45^0 gerichtet, und der Grösse nach $= \frac{p}{sin\,45}$. Sucht man nun den Werth der verticalen Componente dieses Druckes, so erhält man dafür $\frac{p\,.\,cos\,45}{sin\,45} = p$. Die Kraft, mit welcher demnach unter diesen Umständen die Achse der

Fig. 227.

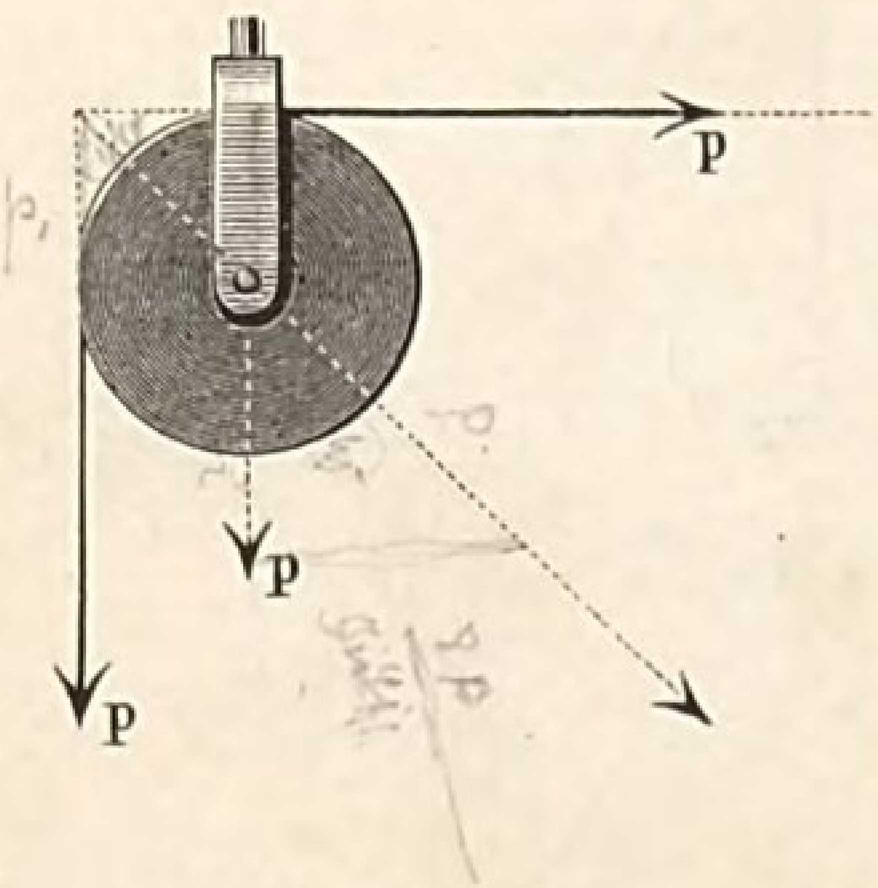
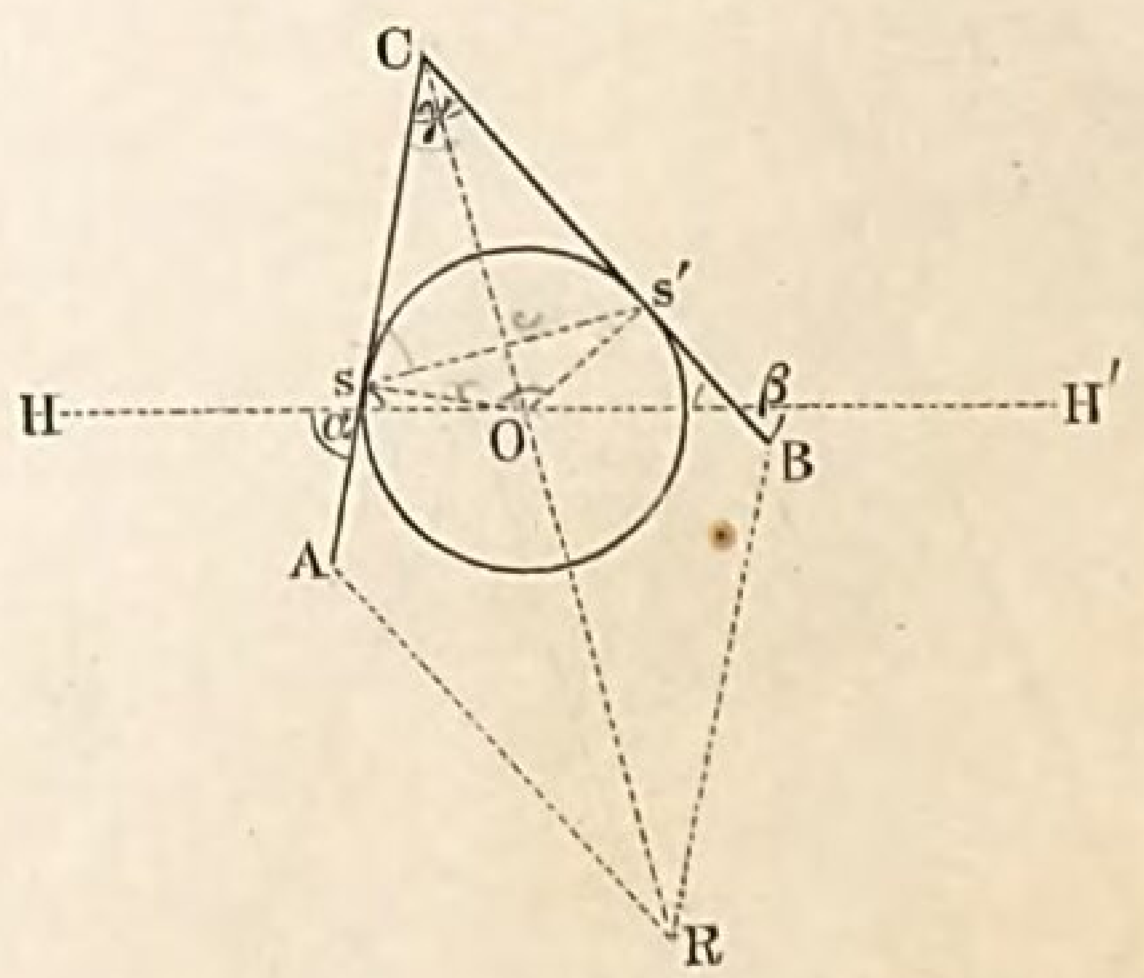


Fig. 228.



Rolle vertical nach abwärts gedrückt wird, ist gleich gross wie die Kraft, welche am Schnurende zieht. Dies dient zur Ergänzung der Erklärung der Poggendorff'schen Wage im §. 54.

Fig. 228 stellt den allgemeinen Fall vor. Die beiden gleichen Kräfte CA und CB bilden mit der Horizontalen HH' die Winkel α und β und schliessen selbst den Winkel γ ein. Die durch die Rollenachse gehende Resultirende ist CR. Zieht man die Senkrechten auf die Kraftrichtungen OS und OS', so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CAR und SOS':

$$CR : CA = SS' : SO$$

Bezeichnen wir die Kraft $CA = CB$ mit P, die Resultirende CR mit R, die Sehne SS' mit c, den Rollenhalbmesser OS mit r, so folgt:

$$R : P = c : r \quad \dots \dots \quad 1)$$

$$R = P\frac{c}{r} = 2P\cos\frac{\gamma}{2} = 2P\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \dots \quad 2)$$

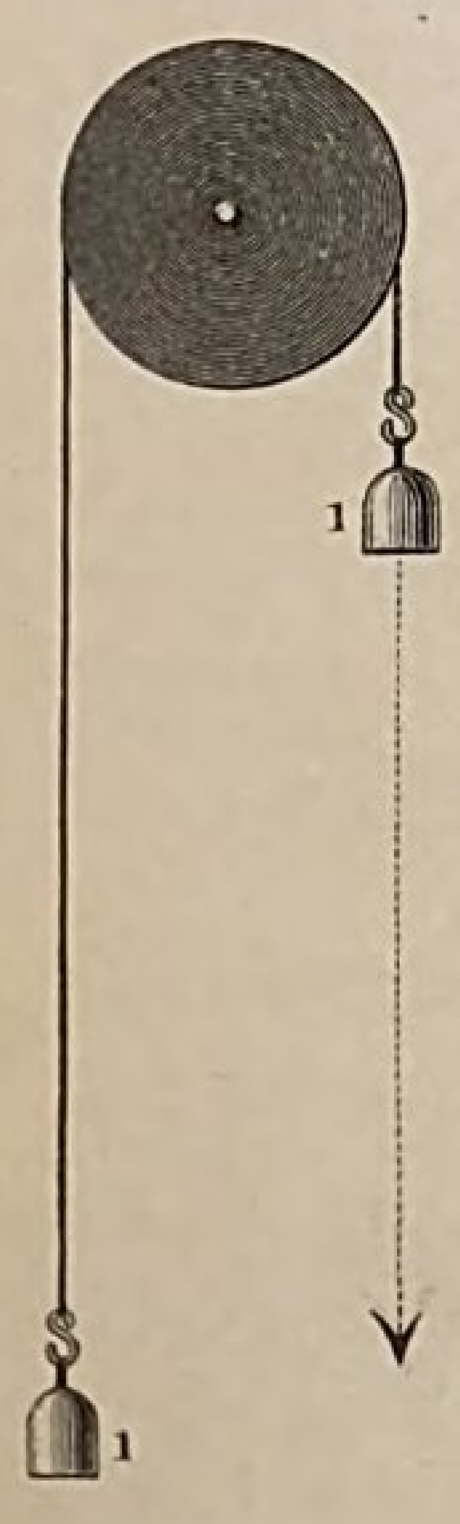
Die Beziehung 1) lautet in Worten: Der Druck auf die Rollenachse verhält sich zur Spannung des Seils, wie die Sehne des vom Seil umspannten Bogens zum Radius der Rolle.

Will man noch die Verticalcomponente dieses Druckes suchen, so ergiebt eine einfache Rechnung für dieselbe den Werth:

$$2 \cdot P\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

So lange die Kräfte an der Rolle im Gleichgewichte sind, leisten sie keine Arbeit. Eine Uebertragung von Energie findet erst dann statt, wenn die eine Kraft (die Last) von der anderen „überwunden" wird. Man pflegt zu sagen, dass dies dann eintrete, wenn diese andere Kraft um ein unendlich Kleines grösser sei als die Last. Es ist dies aber keine ganz glückliche Ausdrucksweise, denn sie kann leicht missverstanden werden und ist dann im Widerspruch mit dem Princip der Wechselwirkung (§. 31), welches Gleichheit der Kraft und Gegenkraft fordert. Auch würde daraus folgen, dass bei der Uebertragung der Energie durch eine Maschine ein, wenn auch beliebig kleiner Theil der Energie vernichtet werde. Um in diesem Punkte volle Klarheit zu gewinnen, denken wir uns (Fig. 229) eine fixe Rolle ohne alle Reibung und ohne eigene Masse, deren Schnur beiderseits mit einer Masse von 1 kg belastet ist. Die beiden Kilogrammgewichte seien im senkrechten Abstande = 1 m befindlich; es herrscht also zunächst Gleichgewicht und Ruhe.

Fig. 229.



Das um 1 m höher befindliche Kilogramm enthält in Folge dieser seiner Lage einen Ueberschuss von potentieller Energie gegenüber dem tiefer befindlichen Kilogramm der Gegenseite. Bringen wir das höhere Kilogramm zum Sinken, so steigt das andere um gleich viel in die Höhe. Das erstere giebt also potentielle Energie ab, das zweite nimmt sie auf; das sinkende Kilogramm leistet Arbeit für das steigende. Ist das erste Kilogramm um 1 m gesunken und folglich das zweite um ebenso viel gestiegen, so ist ein Energiequantum durch die fixe Rolle übertragen, welches im praktischen Maasse = 1 mkg, im absoluten (C.-G.-S.) Maasse 98 Millionen Ergs beträgt, da die Kraft von 980 000 Dynen längs 100 cm überwunden wurde.

Was müssen wir aber thun, damit das höhere Kilogramm zum Sinken komme und somit die Uebertragung der Energie von Statten gehe? Wir haben dazu zwei Mittel. Das eine besteht darin, dass wir dem höheren Kilogramm ein Uebergewichtchen, z. B. gleich 1 g beilegen. Wir addiren dadurch eine Kraft = 980 Dynen, durch welche die Gesammtmasse von nun 2001 g eine Beschleunigung gleich $\frac{1}{2001} \times 980 =$ 0,4897 cm erhält.

Die beiden Kilogramme sammt dem Gramm-Uebergewicht kommen also in gleichförmig beschleunigte Bewegung, die Uebertragung der Energie findet statt. Sobald der Weg 100 cm zurückgelegt ist, hat das sinkende Kilogramm 98 Millionen Ergs potentieller Energie abgegeben, das steigende ebenso viel aufgenommen. Aber ausserdem hat auch das sinkende Grammstück $100 \times 980 = 98\,000$ Ergs potentieller Energie abgegeben. Wo ist dieses Energiequantum hingerathen? Es ist in kinetische Energie verwandelt worden; denn sämmtliche Massen besitzen am Ende des Weges von 100 cm eine Geschwindigkeit $= \sqrt{2 \times 100 \times 0{,}4897} = \sqrt{97{,}94} = 9{,}9$ cm*), also eine lebendige Kraft $= \frac{2001 \times 97{,}94}{2} = 98\,000$ Ergs, wovon nicht ganz die Hälfte (nämlich $\frac{1000 \times 97{,}94}{2} = 48\,970$ Ergs) ebenfalls durch die Rolle auf die andere Seite übertragen wurde.

Ist allgemein die an die Schnüre beiderseits angehängte Masse $= M$, die Masse des Uebergewichtes $= m$, der zurückgelegte Weg $= s$, die Accelleration der Schwere $= g$, so wird eine potentielle Energie $M g s$ als solche durch die Rolle auf die andere Seite übertragen, ausserdem eine potentielle Energie $= m g s$ in kinetische Energie verwandelt, wovon der Bruchtheil $\frac{M m g s}{2 M + m}$ ebenfalls auf die andere Seite übertragen, der Rest $\frac{(M + m)\, m g s}{2 M + m}$ in der sinkenden Masse aufgespeichert wird**).

Es ist also der Sachverhalt derartig, dass die ideale Maschine zwar ein beliebiges Quantum potentieller Energie ohne Verlust übertragen kann, dass aber, damit die Uebertragung zu Stande komme, noch ein allerdings beliebig grosses oder kleines Quantum potentieller Energie in kinetische Energie umgewandelt werden muss.

*) Berechnet nach der Formel $v = \sqrt{2 s \varphi}$.

**) Besitzt die Rolle selbst Masse, wie es in Wirklichkeit immer der Fall ist, so wird ein Theil der kinetischen Energie in ihr aufgehäuft; ausserdem wird immer ein Theil der Energie durch die Reibung in Wärme verwandelt. Wir kommen auf diese Umstände später zurück.

Ein anderes Mittel, die Uebertragung der potentiellen Energie einzuleiten, ist das folgende, bei welchem die Bewegung nicht mit gleichförmig beschleunigter, sondern mit gleichförmiger Geschwindigkeit stattfindet, welche letztere beliebig verkleinert, aber nicht $= 0$ gemacht werden kann. Wir geben der höher befindlichen Masse M einen verticalen Stoss nach abwärts, d. h. wir lassen ganz kurze Zeit eine Kraft darauf einwirken, welche beiden Massen eine gewisse Geschwindigkeit $= v$ ertheilt. Dazu ist Energie erforderlich, welche durch das Product $\frac{2Mv^2}{2} = Mv^2$ gemessen wird. Sobald nun die Massen den Weg s zurückgelegt haben, ist potentielle Energie von der Grösse Mgs auf die andere Seite übertragen. Ausserdem besitzen beide Massen zusammen noch die auf sie übertragene kinetische Energie, welche bei der Uebertragung nicht verbraucht wurde, welche wir aber zu leihen genöthigt waren, um die Uebertragung zu Stande zu bringen. Wir können uns vorstellen, dass wir den Stoss durch eine gespannte Feder ausübten, welche gegen die höhere Masse vertical nach abwärts losschnellte. Würden wir dann diese Feder der steigenden Masse auf der anderen Seite der Rolle entgegenhalten, so würde beim Anprall am Ende des Weges die kinetische Energie beider Massen dazu verwendet, die Feder wieder zu spannen. Halten wir diese in der gespannten Lage fest, so haben wir die geliehene kinetische Energie wieder als potentielle zurückerstattet. Die Uebertragung der potentiellen Energie der Masse M hat also im Ganzen ohne Verlust stattgefunden*).

Wir können nun beurtheilen, ob es passend ist, zu sagen, die arbeitende Kraft müsse um ein unendlich Kleines grösser sein als die überwundene Kraft. Versteht man dabei unter Kraft die Spannung der Schnur, so wissen wir aus §. 54, dass dieselbe nach beiden Seiten genau gleich gross ist, mag die Schnur in Ruhe oder in Bewegung sein. Versteht man unter obigem Ausspruche, dass die sinkende Masse auf der einen Seite grösser sein müsse, als die gehobene auf der anderen, so hat obige Erwägung ergeben, dass der Unterschied dieser Massen nicht unendlich klein zu sein brauche, sondern jeden beliebigen endlichen Werth haben kann.

Die fixe Rolle ist eine Maschine, welche nur die Richtung der arbeitenden Kraft ändert, im Uebrigen an der geleisteten Arbeit keine Veränderung vornimmt, also weder Kraft auf Kosten des Weges, noch umgekehrt steigert. Mit einer einzigen fixen Rolle kann die Richtung der Kraft nur in einer Ebene (der Ebene der Rolle) verändert werden. Mit zwei fixen Rollen hinter einander, deren Achsen auf einander senkrecht stehen, kann die Richtung im Raume beliebig geändert werden.

*) Dabei wird stillschweigend angenommen, dass der Stoss ein vollkommen elastischer sei, da sonst ein Theil der Energie der Feder in Wärme verwandelt wird.

Die bewegliche Rolle, deren Anordnung (in Verbindung mit einer fixen) aus Fig. 226 (S. 261) zu ersehen ist, kann gewissermaassen durch Umkehrung der Anordnung der fixen Rolle entstanden gedacht werden. Bezüglich des Verhältnisses zwischen der Kraft, mit welcher die Achse der Rolle angezogen wird, gelten genau dieselben Ausdrücke, welche oben unter 1) und 2) mitgetheilt wurden.

Die Richtung dieser Resultirenden ist natürlich bei einer frei hängenden beweglichen Rolle immer vertical.

Bringt man also an der Schere einer beweglichen Rolle vom Radius r eine Kraft $= R$ an, und haben die Schnüre eine solche Lage, dass sie die Rolle auf einem Bogen umspannen, dessen Sehne $= c$ ist, wobei die Schnurrichtungen den Winkel γ einschliessen, so wird jede der beiden Schnüre mit einer Kraft P gespannt, welche gegeben ist durch die Ausdrücke:

$$P = \frac{r}{c} R = \frac{R}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$$

Sind die Schnüre parallel, also die Sehne gleich dem Durchmesser oder der Winkel $\gamma = 0$, so folgt

$$P = \tfrac{1}{2} R.$$

Jede der Schnüre wird also mit der halben Kraft gespannt. Befestigt man das eine Schnurende und hebt das andere um eine Strecke s in die Höhe, so leistet man an diesem Ende eine Arbeit $= Ps$. Eine gleich grosse Arbeit wird von der Maschine an der Schere der beweglichen Rolle geleistet, denn es wird die doppelt so grosse Kraft R längs eines Weges, der halb so gross ist als s, überwunden. Die bewegliche Rolle gehört also zu jenen Maschinen, welche die übertragene Energie in ihrer Zusammensetzung abändern, indem sie die Kraft auf Kosten des Weges vergrössert oder umgekehrt.

So lange man nur mit der beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren zu thun hat, bleibt das Uebersetzungsverhältniss constant. Bei der beweglichen Rolle mit divergirenden Schnüren ändert sich, wenn nicht durch besondere Vorkehrungen dafür gesorgt wird, dass die Schnüre zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben, fortwährend der eingeschlossene Winkel und damit das Uebersetzungsverhältniss. Wir haben also dann eine Maschine mit veränderlicher Uebersetzung. Dies wäre z. B. bei der Anordnung in Fig. 226 der Fall. Ziehen wir an dem über die fixe Rolle A gehenden Schnurende mit constanter Kraft P nach abwärts, so wird dadurch die Achse der beweglichen Rolle B nicht mit constanter Kraft nach aufwärts gehoben, sondern mit der veränderlichen Kraft $R = P \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2}$. Je weiter die Bewegung fortschreitet, desto grösser wird der Winkel zwischen den Schnüren a und b, desto kleiner sein Cosinus, desto kleiner also auch die an der Schere der beweglichen

Rolle ausgeübte Kraft. Da gleichen Wegstrecken des Angriffspunktes am Schnurende auch gleiche Quantitäten übertragener Energie entsprechen, so müssen die gleichzeitigen Wegstrecken am Angriffspunkte der Last (an der Schere) im reciproken Verhältniss zur Kraft sich verändern. Gleichen Wegen am Schnurende entsprechen daher fortwährend zunehmende Erhebungen der beweglichen Rolle.

Denkt man sich die Bewegung des Schnurendes mit constanter Geschwindigkeit vor sich gehen, so ist die Geschwindigkeit an der Achse der beweglichen Rolle eine veränderliche. Fasst man während der Bewegung für einen Zeitmoment die momentanen Geschwindigkeiten der beiden Angriffspunkte ins Auge, so haben dieselben zu einander ein Verhältniss, welches gleich ist dem reciproken Verhältniss der momentan wirksamen Kräfte.

Man pflegt die der Construction der Maschine gemäss möglichen gleichzeitigen momentanen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte derselben mit dem Ausdrucke virtuelle Geschwindigkeiten zu bezeichnen. Bei Maschinen mit constanter Uebersetzung braucht man nur zwei beliebig grosse zusammengehörige Verschiebungen der Angriffspunkte zu vergleichen, um daraus das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten zu erhalten. Bei Maschinen mit veränderlicher Uebersetzung hat man die Grenze aufzusuchen, welcher sich das Verhältniss der Verschiebungen nähert, wenn man dieselben immer kleiner werden lässt. Natürlich gilt dieses Verhältniss dann nur für eine bestimmte Stellung der Maschinentheile.

Die Producte aus den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte mit den in ihrer Richtung wirksamen Kräften heisst man auch die virtuellen Momente. Nimmt man ihr Zeichen positiv, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der virtuellen Geschwindigkeit übereinstimmt, im anderen Fall dagegen negativ, so kann man die Gleichgewichtsbedingung jeder Maschine ausdrücken durch den Satz:

An der Maschine herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Momente gleich Null ist.

Man erkennt leicht, dass diese virtuellen Momente nichts Anderes sind als die von der Maschine aufgenommenen und von ihr wieder abgegebenen Arbeitsgrössen. Rechnet man die aufgenommene Arbeit positiv, die abgegebene negativ, so ist ihre algebraische Summe gleich Null.

Die Seilmaschine als Flaschenzug und als Wellrad; Räderwerke, Schneckenrad. Eine Combination von fixen und beweglichen Rollen wird im Allgemeinen ein Flaschenzug genannt. 61

Die gebräuchlichste Form derselben (der gemeine Flaschenzug) ist in Fig. 230 schematisch dargestellt. Die Figuren 231 und 232 zeigen perspectivische Abbildungen der gebräuchlichen Formen. Die letzteren unterscheiden sich unter einander nur dadurch, dass die zusammen fest

Fig. 231.

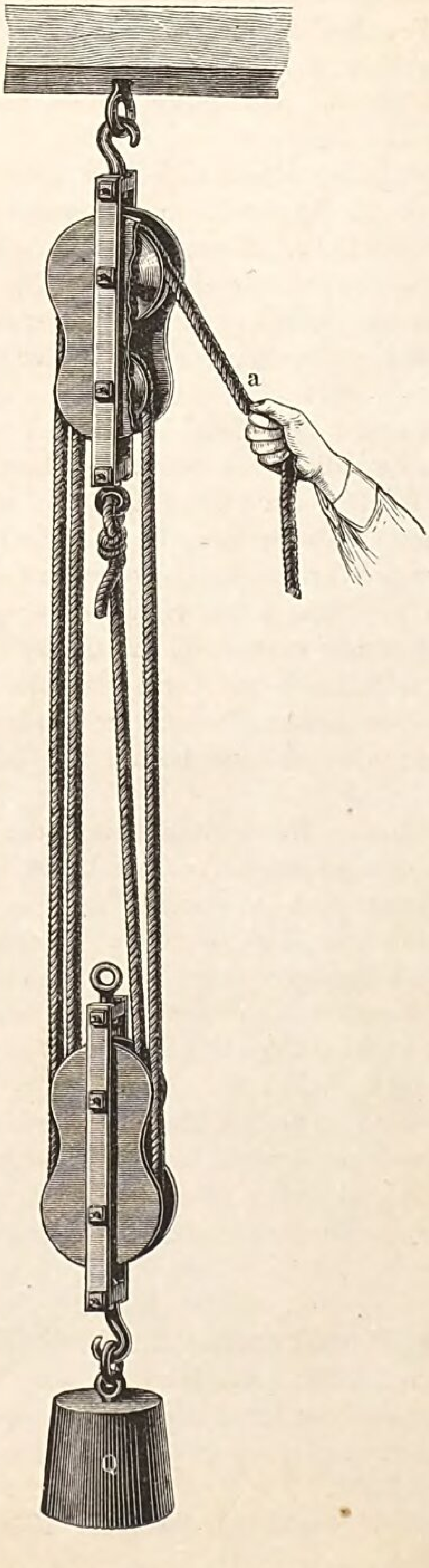
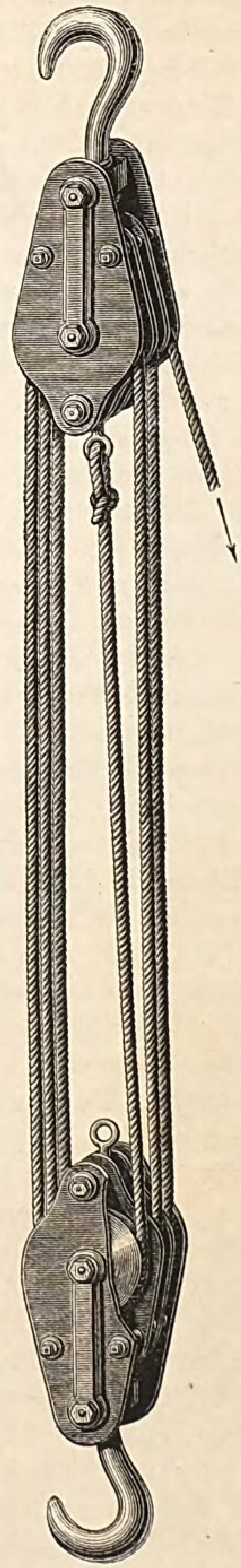


Fig. 232.



verbundenen Rollen bei Fig. 231 über einander und deshalb in ungleicher Grösse, bei Fig. 232 hinter einander und in gleicher Grösse angebracht sind. Das System der mit einander in ein und demselben Gehäuse angebrachten Rollen heisst eine Flasche. Der Flaschenzug besteht also aus zwei Flaschen und dem verbindenden Seil, dessen Wicklungsart aus den Figuren zu ersehen ist.

Fig. 230.

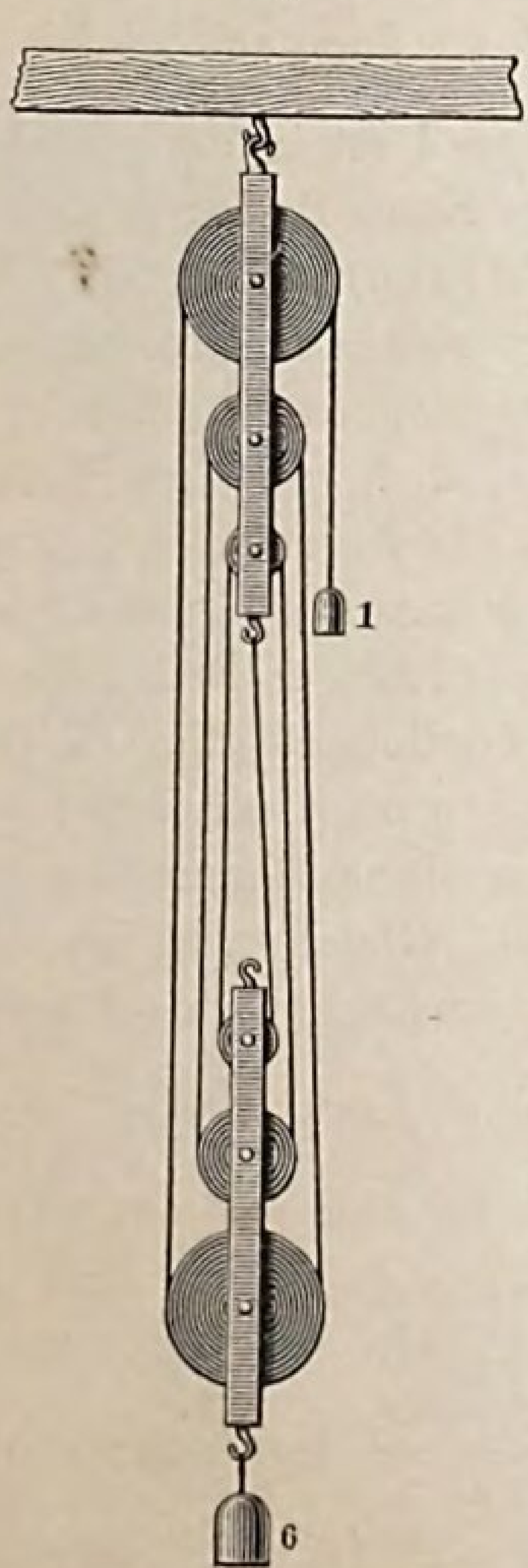
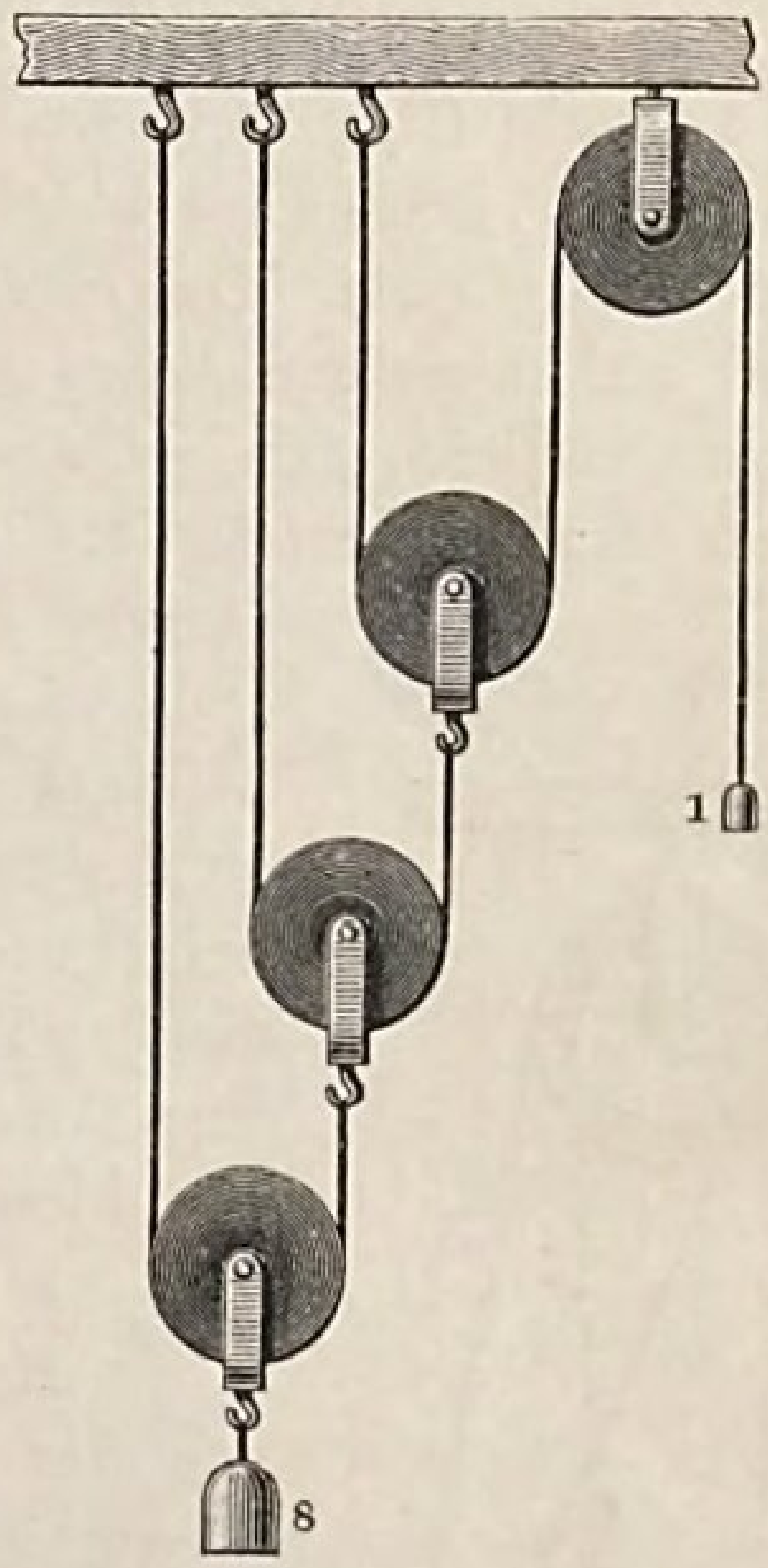


Fig. 233.



Zieht man an dem freien Seilende, bis eine Verschiebung des dortigen Angriffspunkts um eine Strecke s stattgefunden hat, so vertheilt sich die Länge derselben in gleicher Weise auf alle übrigen Seilstränge. Sind deren zwischen beiden Flaschen in der Zahl n vorhanden, so beträgt demnach die Verkürzung jedes Stranges $\frac{s}{n}$ und dieses ist auch die zugehörige Verschiebung der unteren Flasche, deren Gehäuse den Angriffspunkt der Last trägt. Somit ist das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten $= 1 : n$, mithin das Verhältniss der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $= n : 1$.

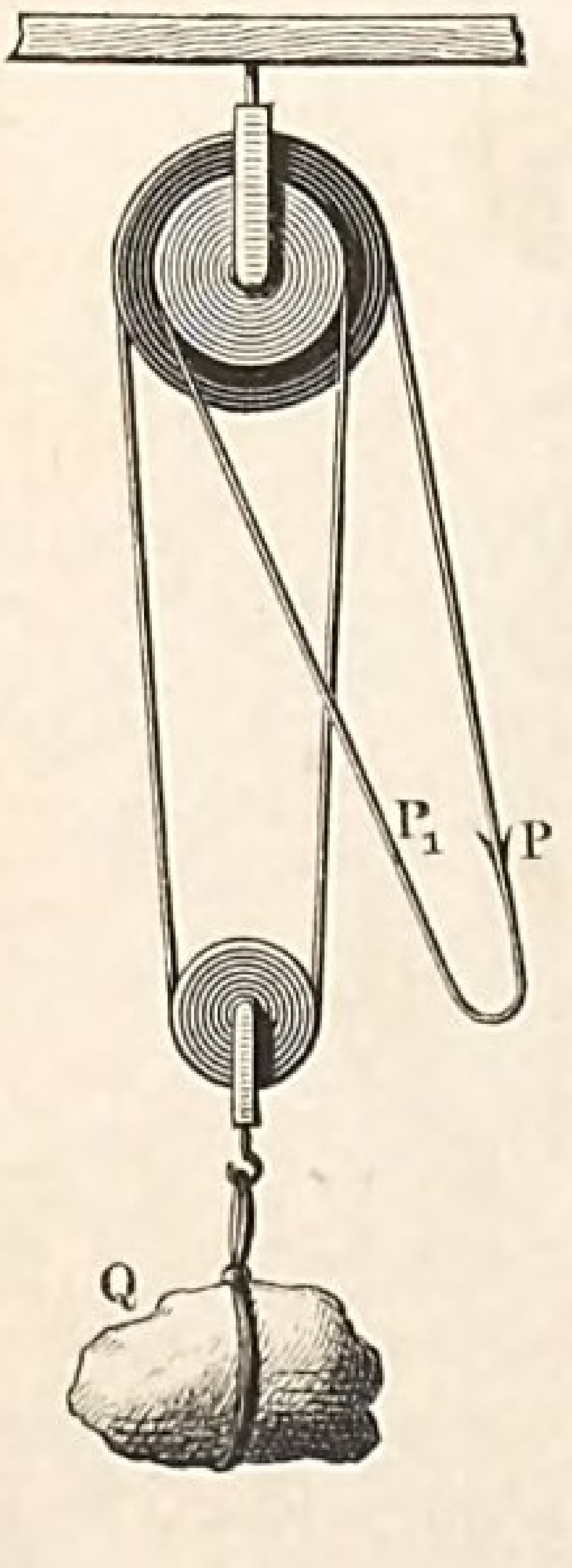
Potenzflaschenzug wird die in Fig. 233 schematisch abgebildete Combination einer fixen Rolle mit einer beliebigen Anzahl von beweglichen Rollen genannt. Wird das freie Seilende um die Strecke s ange-

zogen, so wird die erste (oberste) bewegliche Rolle um $\frac{s}{2}$ gehoben, die zweite um $\frac{s}{4}$, die dritte um $\frac{s}{8}$ u. s. f.

Sind n bewegliche Rollen vorhanden, so wird die letzte Rolle um $\frac{s}{2^n}$ gehoben. Das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen den Angriffspunkten der Kraft und der Last ist demnach gleich $1 : \frac{1}{2^n}$, folglich herrscht Gleichgewicht, wenn Kraft zu Last in dem Verhältniss $1 : 2^n$ stehen*). Dadurch erklärt sich auch der Name Potenzflaschenzug.

Der Differentialflaschenzug von Weston, Fig. 234, besteht aus zwei auf derselben Achse sitzenden mit einander drehbaren fixen Rollen von ungleich grossen, aber wenig verschiedenen Radien R und r und einer beweglichen Rolle. Ein endloses, d. h. an den Enden vereinigtes Seil ist, wie die Figur zeigt, um diese Rollen herumgelegt. Der Angriffspunkt der Kraft befindet sich an der Stelle P des Seils; die Last Q an der Schere der beweglichen Rolle. Zieht man bei P um eine Strecke s nach abwärts, so wird die fixe Doppelrolle um einen Bogen von der gleichen Länge s gedreht. Gleichzeitig ist die von der kleineren Rolle zurückgelegte Bogenlänge $= s\,\frac{r}{R}$, um dieselbe Länge wird das Seil von der kleineren Rolle abgewickelt. Die Gesammtlänge der zwischen der festen und der beweglichen Rolle befindlichen Seilstücke wird also um $s - s\,\frac{r}{R} = s\,\frac{R - r}{R}$ verkürzt; von dieser Verkürzung trifft es auf jeden Seilstrang die Hälfte, folglich beträgt die Hebung $s\,\frac{R - r}{2R}$. Das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeit ist also $1 : \frac{R - r}{2R}$, folglich das Verhältniss der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $1 : \frac{2R}{R - r}$. Die Uebersetzung ist offenbar desto grösser, je weniger die beiden Radien von einander differiren.

Fig. 234.

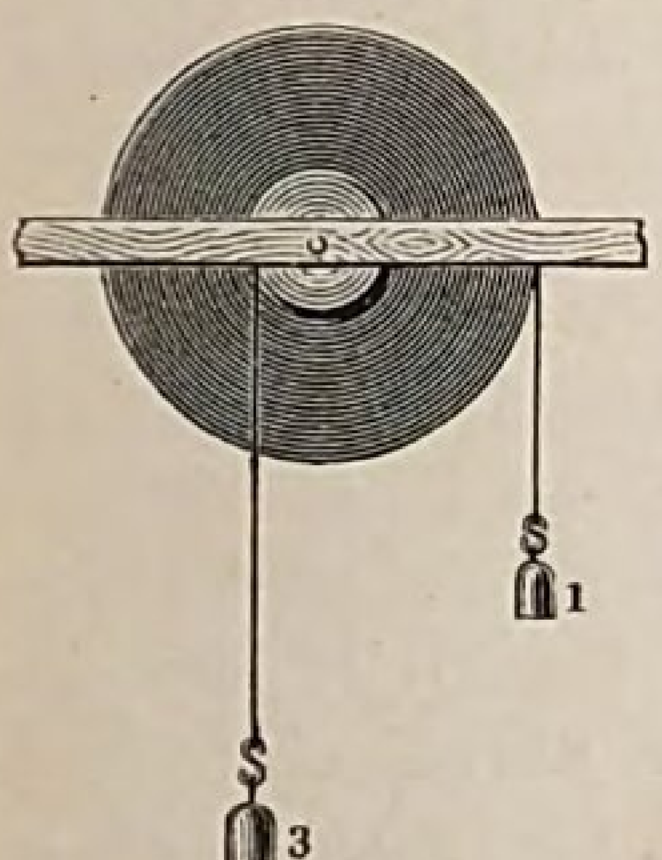


Damit der Strang P_1, welcher lose hängt, nicht zu einem Gleiten Anlass gebe, ist das Seil durch eine Kette ersetzt, deren Glieder in warzenförmige Vorsprünge der Rollen eingreifen.

*) Dabei wird vom Gewicht der Rollen selbst abgesehen.

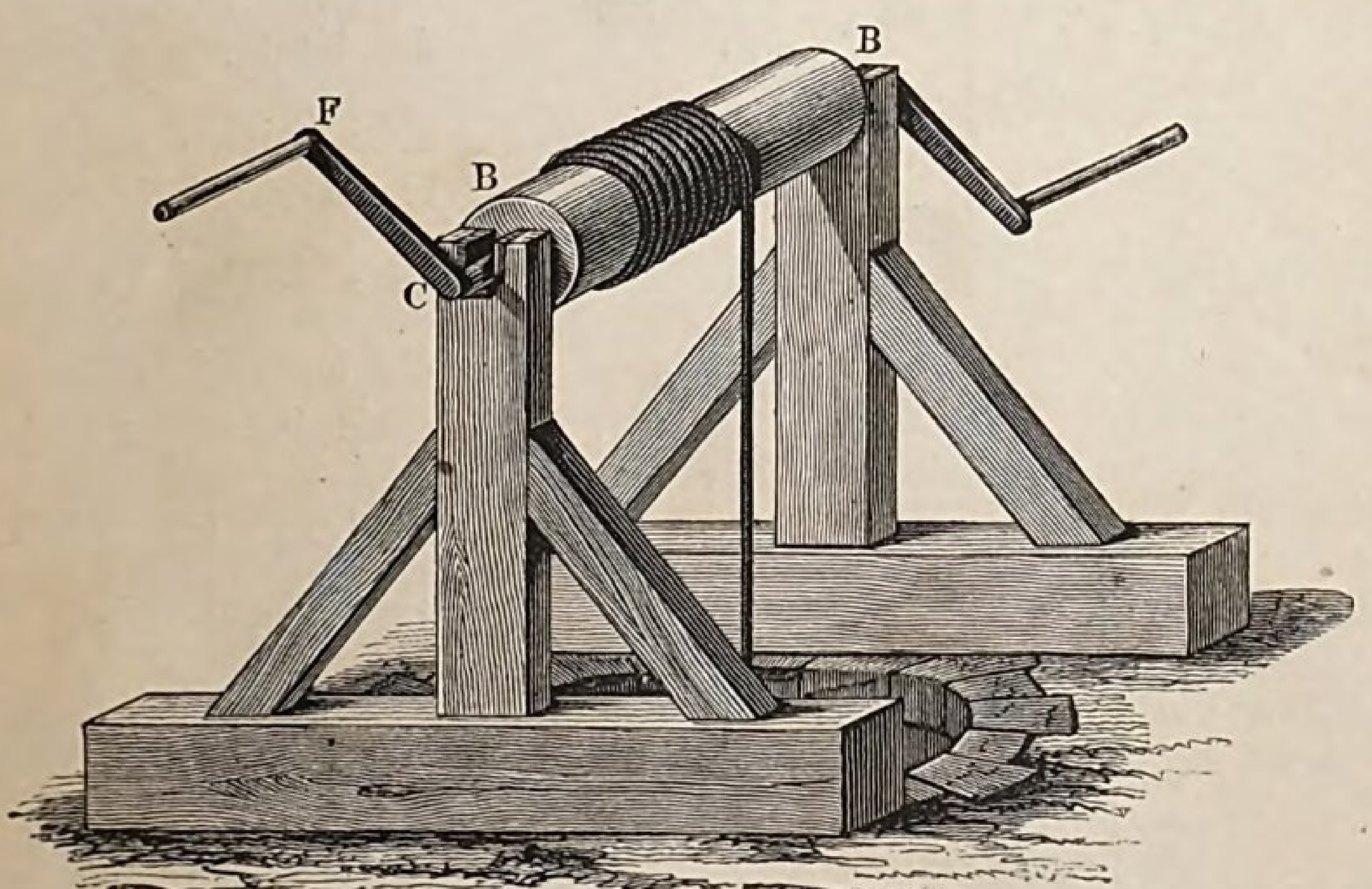
Bei sämmtlichen drei Flaschenzügen haben wir es mit Maschinen zu thun, welche die übertragene Arbeitsgrösse in ihrer Zusammensetzung zu Gunsten der Kraft auf Kosten des Weges (oder umgekehrt) verändern, wobei jedoch das Uebersetzungsverhältniss während der Uebertragung constant bleibt. Bei den ersten beiden Flaschenzügen ist man dabei an eine beschränkte Zahl vorgeschriebener Uebersetzungsverhältnisse gebunden, bei dem letzten kann die Maschine innerhalb gewisser praktischer Grenzen jedem Verhältnisse angepasst werden.

Fig. 235.



Die nächst verwandte Maschine ist das Wellrad (Haspel, Winde, Göpel). Dasselbe besteht im Wesentlichen aus zwei mit einander fest verbundenen Rollen verschiedenen Halbmessers R und r, um deren jede ein Seil geschlungen wird, dessen eines Ende am Umfang befestigt ist, dessen anderes Ende als Angriffspunkt dient, Fig. 235. Die kleinere Rolle hat jedoch meistens die Form einer cylindrischen Welle, um welche das Seil in mehreren parallelen Windungen aufgewickelt wird. An Stelle der grösseren Rolle tritt häufig ein Speichenrad, an dessen Umfang direct ohne Seil die Kraft angreift, oder es sind von diesem selbst nur die Speichen allein noch vorhanden, deren Enden abwechselnd als Angriffspunkte fungiren, oder endlich es ist nur

Fig. 236.



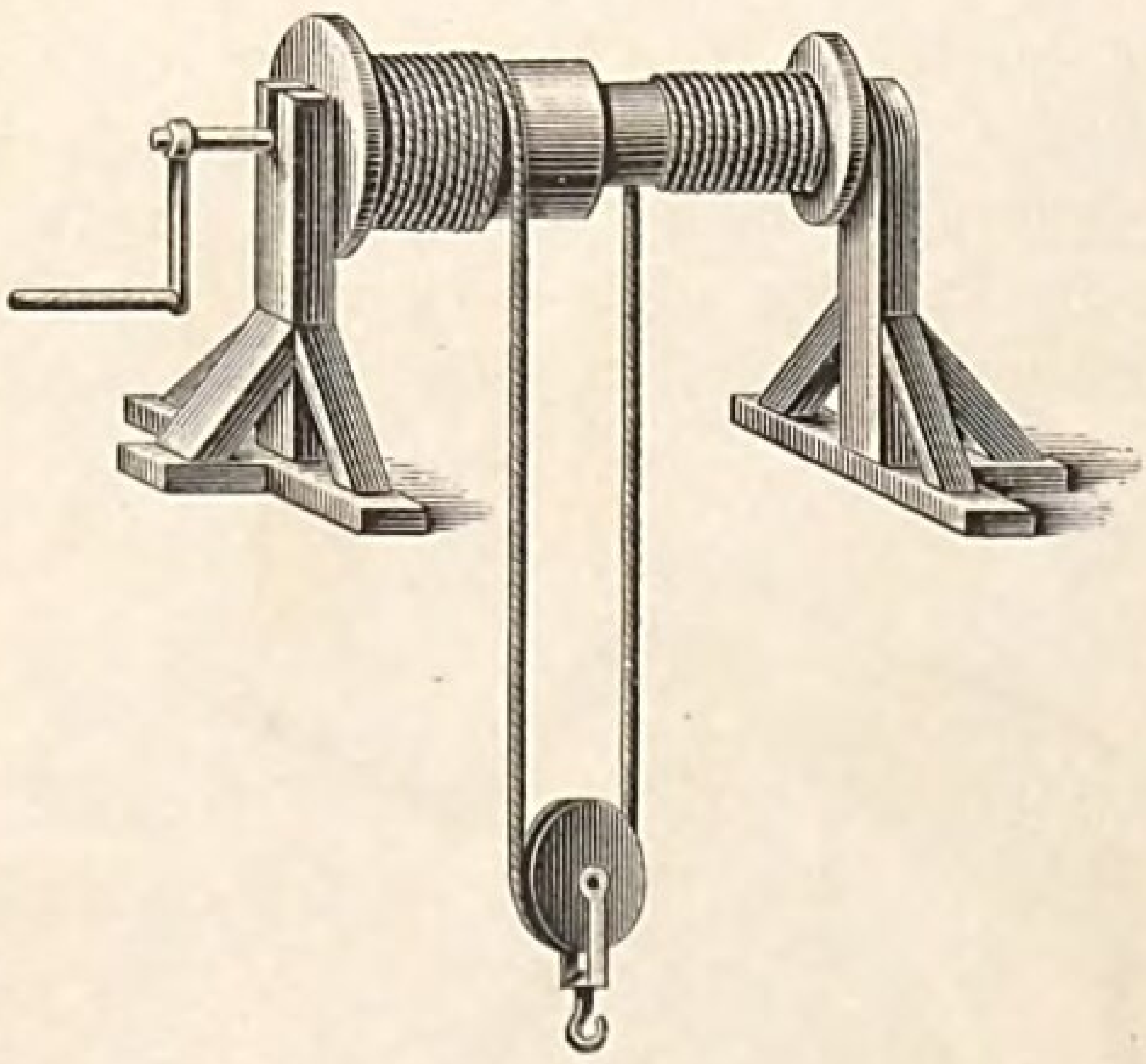
mehr eine Speiche übrig geblieben, welche mit einem der Welle parallelen Fortsatze versehen ist, an welchem der Angriff der Kraft stattfindet. Dieser Bestandtheil heisst dann eine Kurbel, Fig. 236; die ganze Maschine heisst Haspel oder Winde; wenn die Achse vertical steht, auch Göpel.

Offenbar verhalten sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie die zugehörigen Radien, daher die Kräfte beim Gleichgewicht sich verkehrt den Radien verhalten müssen.

Um also eine grosse Uebersetzung zu erhalten, sollte man den Radius der Welle recht klein, die Kurbel recht lang machen. Allein dies hat seine praktischen Grenzen, da die Welle sonst zu schwach würde und die Kurbellänge den Dimensionen des Arbeiters anzupassen ist. Um bedeutendere Uebersetzungen zu erzielen, verwendet man daher eine der folgenden Maschinen:

Das Differentialwellrad, Fig. 237, besitzt zwei Wellen von verschiedenen Halbmessern r_1 und r_2, deren eine die Fortsetzung der anderen auf gleicher Achse bildet. Das Seil ist, wie aus der Figur ersichtlich, auf beide Wellen aufgewickelt, so zwar, dass es sich gleichzeitig von der einen Welle ab- und auf die andere aufwickelt. Das dazwischen befindliche Seilstück trägt eine bewegliche Rolle, deren Schere als Angriffspunkt der Last dient. Die Kraft greift am Ende einer Kurbel vom Radius R an.

Fig. 237.



Beschreibt das Ende der Kurbel einen Bogen von der Länge s, und zwar in dem Sinne, dass das Seil auf der grösseren Welle vom Radius r_1 aufgewickelt wird, so beträgt die aufgewickelte Länge des letzteren $s \frac{r_1}{R}$; gleichzeitig wickelt sich von der kleineren Welle ein Stück $= s \frac{r_2}{R}$ ab. Das ganze, die bewegliche Rolle tragende Stück des Seils wird daher um den Betrag $s \frac{r_1}{R} - s \frac{r_2}{R} = \frac{s}{R}(r_1 - r_2)$ verkürzt, davon trifft es auf jeden Strang die Hälfte, also beträgt die Hebung $\frac{s}{R} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}$.

Das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher gleich

$$1 : \frac{r_1 - r_2}{2R},$$

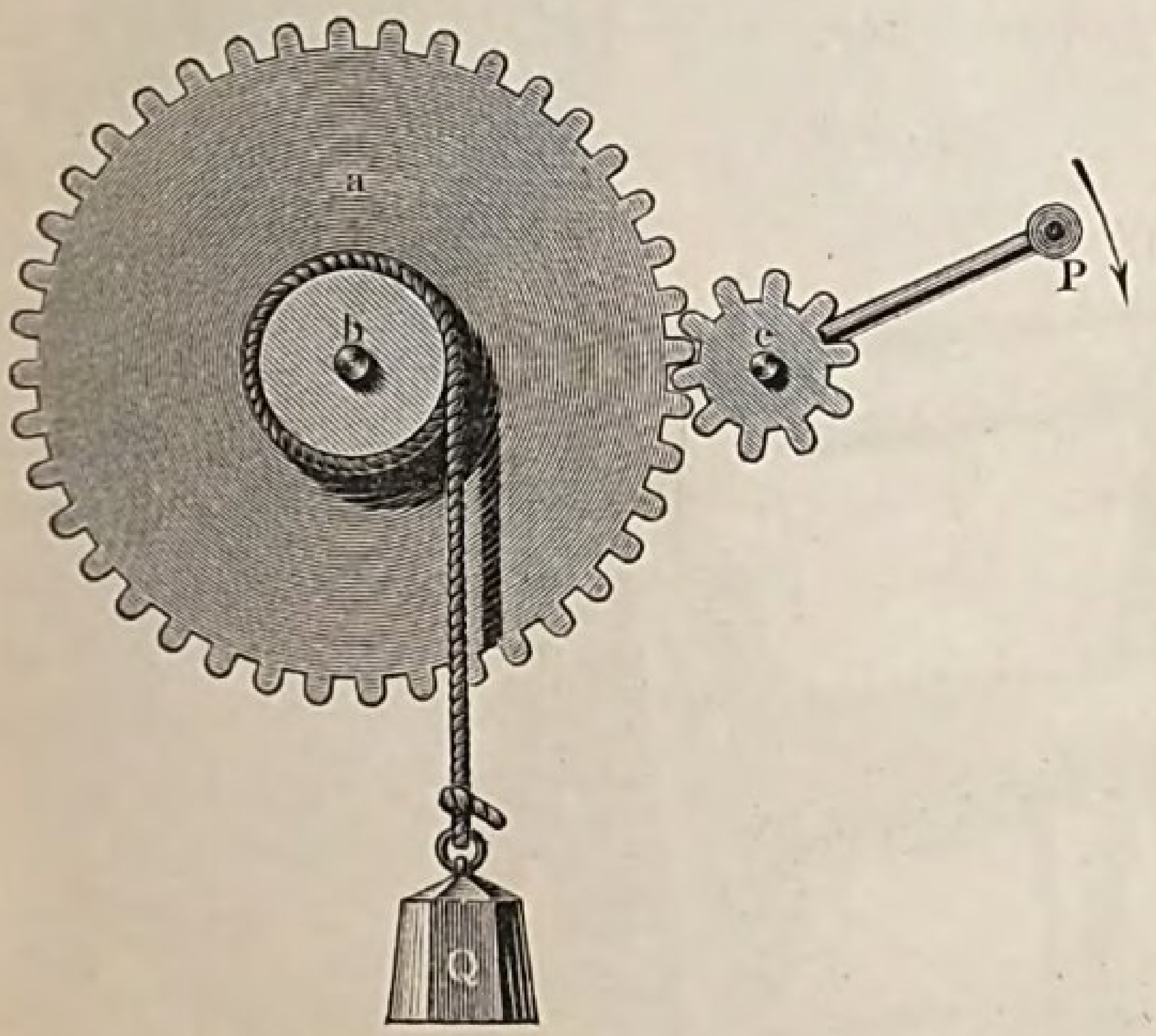
mithin das Uebersetzungsverhältniss der Kräfte gleich

$$1 : \frac{2R}{r_1 - r_2}.$$

Dasselbe ist also desto grösser, je kleiner die Differenz der Radien der Wellen ist.

Räderwerke. Dieselben enthalten zwar oft keinen biegsamen Bestandtheil, schliessen sich aber doch dem Wellrade am nächsten an. Sie sind nämlich als Maschinen aufzufassen, welche aus in einander eingreifenden Wellrädern zusammengesetzt sind. Die einzelnen Wellräder bestehen aus dem Zahnrad mit grösserem Radius und aus der gezahnten Welle, welche Trieb oder Getriebe genannt wird; die Zähne des Zahnrades des einen Wellrades greifen in die Zähne der Welle (des Triebes) des nächsten Wellrades ein. Ein einfaches Beispiel einer solchen zusammengesetzten Maschine ist in den Figuren 238 und 239 abgebildet. Es sei der Radius der Welle $b = r$, der Radius des Zahnrades $a = R$, der Radius der Welle (des Triebes) $c = r'$, der Radius (die Länge) der Kurbel cP, welche die Rolle dieses Wellrades ersetzt, $= R'$. Einem Wege $= 1$ des Angriffspunktes P der arbeitenden Kraft entspricht ein Weg des Umfanges des Triebes $c = \frac{r'}{R'}$, dies ist zugleich der Weg des Umfanges des Zahnrades a, diesem entspricht daher ein Weg $\frac{r\,r'}{R\,R'}$ des Umfanges der Welle b, welches zugleich der Weg des Angriffspunktes der Last ist. Das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher gleich

Fig. 238.



$$1 : \frac{r\,r'}{R\,R'} = R\,R' : r\,r',$$

das Verhältniss der Kraft zur Last ist daher gleich

$$r\,r' : R\,R'.$$

Anstatt der Radien r' und R können auch die Umfänge, also auch die Zahl der Zähne, die ja dem Umfang proportional sein muss, eingeführt werden.

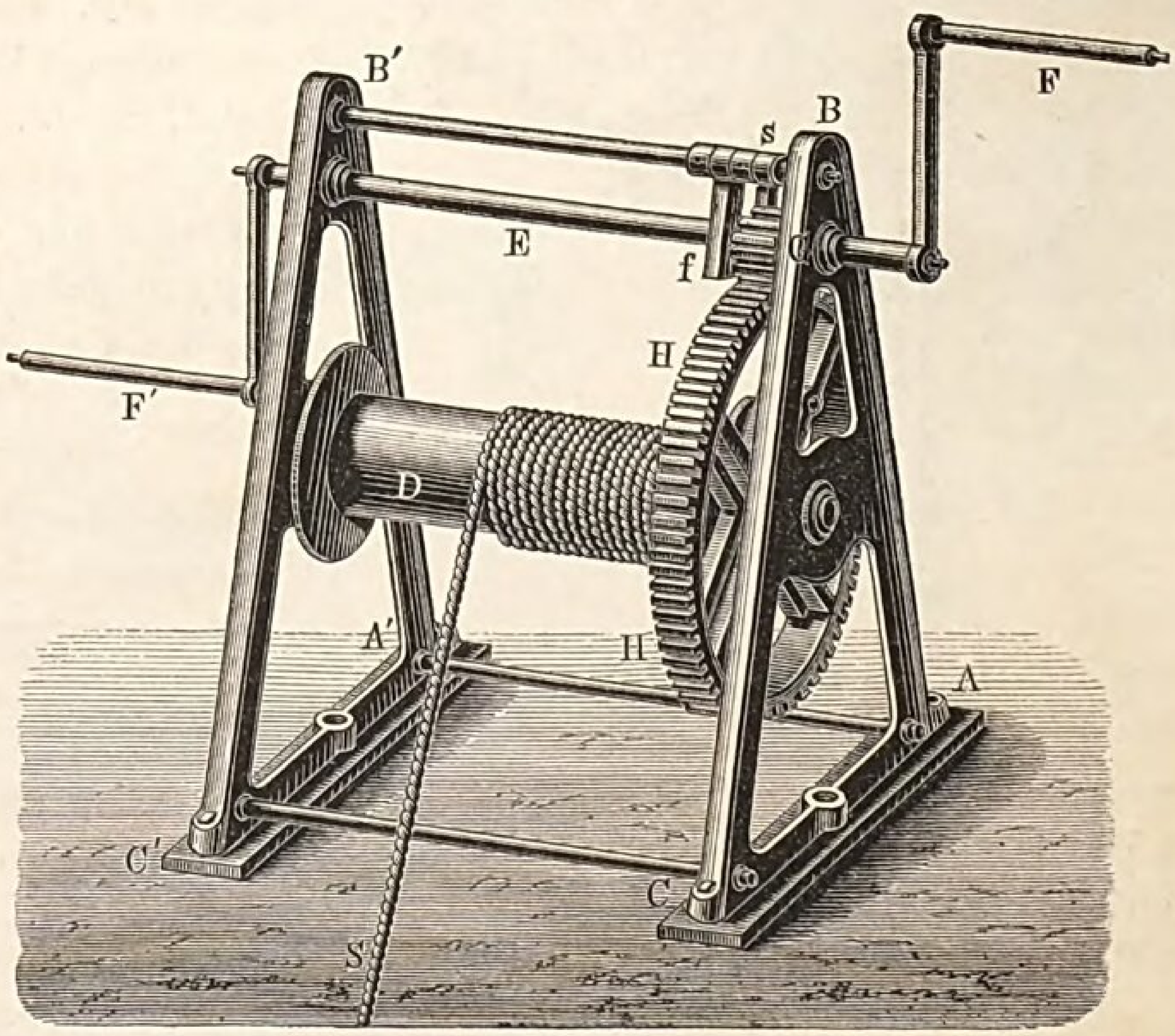
An der Vorrichtung Fig. 239 (a. f. S.) sei z. B. der Radius der Kurbel, an welcher der Arbeiter angreift, also $R' = 0{,}5$ m, der Radius der Welle D aber, an welcher die Last hängt, also $r = 0{,}12$ m; ferner habe der auf der Kurbelachse sitzende Trieb 12, das Rad H aber 72 Zähne, so haben wir:

$$P = \frac{0{,}12}{72} \cdot \frac{12}{0{,}5}\, Q = 0{,}04\, Q.$$

Bei diesem Räderwerke muss die Kurbelachse sechs Umdrehungen machen, um eine Umdrehung der Welle *D* zu bewirken.

Sind noch mehrere Zahnräder nach einander in dieser Weise verbunden, wie das z. B. bei Uhrwerken der Fall ist, so gilt stets die Regel, dass sich die Kraft verhält zur Last wie das Product der Radien der Getriebe zum Producte der Radien der Zahnräder. Da die Anzahl der Zähne am Umfang auch dem Radius proportional sein muss, so kann man auch sagen: die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product der Anzahl der Zähne an den Getrieben zum Product der Anzahl der Zähne an den Rädern. Da dem Kräfteverhältniss das Geschwindigkeitsverhältniss und diesem wieder das Verhältniss der Umlaufzeiten reciprok ist, so gilt die obige Regel auch für die Umlaufzeiten der ersten und der letzten Welle des ganzen Räderwerkes.

Fig. 239.



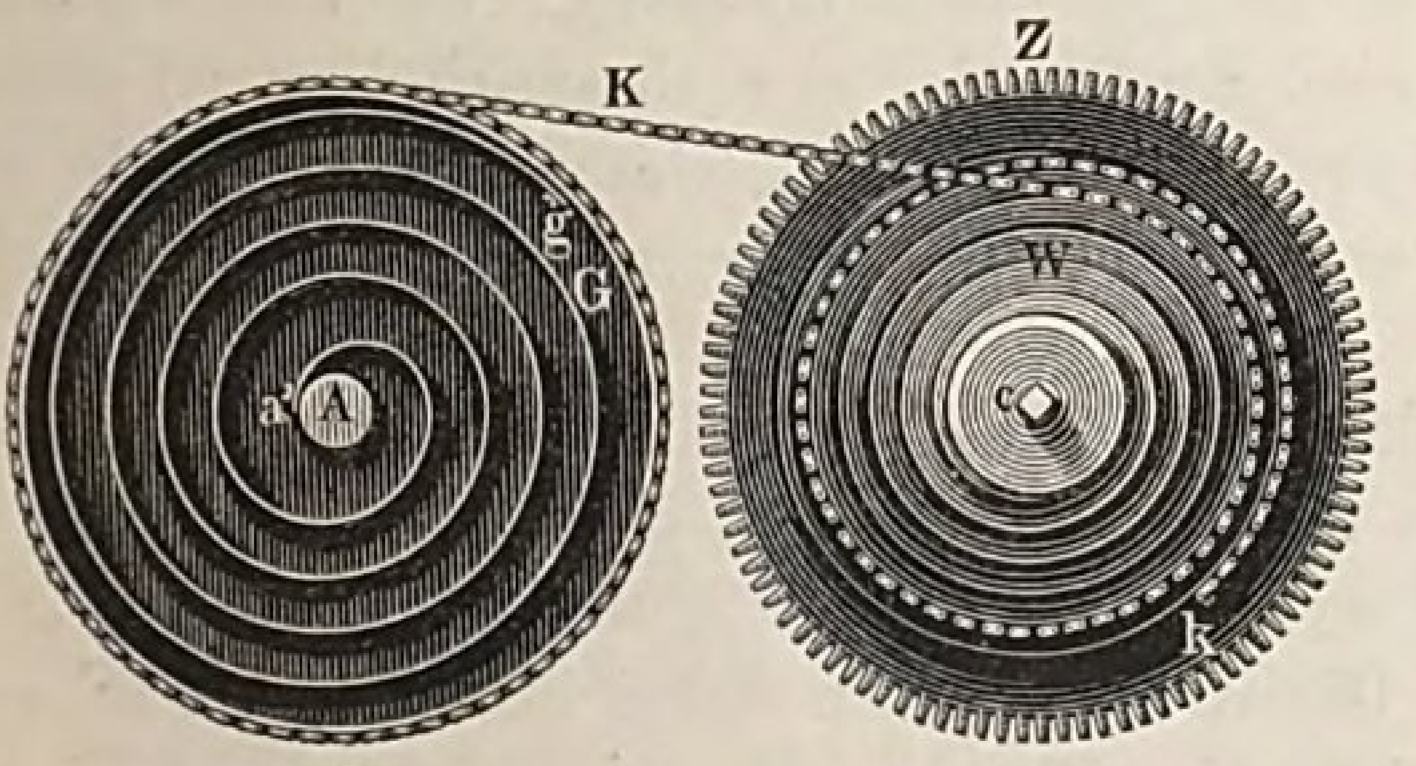
Das Wellrad und sämmtliche aus Wellrädern zusammengesetzten Maschinen übertragen eine Arbeitsgrösse unter Abänderung der Zusammensetzung des Products aus Weg und Kraft. Meistens handelt es sich um Vermehrung der Kraft auf Kosten des Weges, doch kommt auch oft, wie bei Mühlen, Uhrwerken etc. die Vermehrung des Weges (der Geschwindigkeit) auf Kosten der Kraft zur Ausführung. Stets bleibt aber bei diesen Maschinen das Uebersetzungsverhältniss constant.

Das Schneckenrad. Beim Wellrade und den aus Wellrädern zusammengesetzten Maschinen ist das Uebersetzungsverhältniss deshalb ein constantes, weil es vom Grössenverhältniss der Radien abhängt, welches selbst constant ist. Wollte man demnach ein Wellrad mit verän-

derlicher Uebersetzung construiren, so müsste man einen der Radien veränderlich machen. Diese Idee ist bei folgendem Apparate zur Ausführung gebracht (Fig. 240.)

Z stellt ein gezahntes Wellrad vor, dessen Welle nicht cylindrisch, sondern nach Form eines Schneckenhauses ausgeführt ist. Die bei *k* befestigte Kette *K* wird daher beim Drehen des Rades nach rechts auf einer Welle mit immer kleiner werdendem Radius aufgewickelt. Das andere Ende der Kette ist am Umfang einer cylindrischen Trommel *G* befestigt und in parallelen Windungen auf derselben aufgewickelt. Die Trommel selbst ist um die feststehende Achse *A* drehbar. Eine in Form einer ebenen Spirale geformte, bandförmige Stahlfeder (Uhrfeder) ist einerseits an der Achse *A* bei *a*, andererseits am inneren Umfange der drehbaren Trommel bei *g* befestigt. Sowie man also das Zahnrad *Z* mit der Schneckenwelle nach rechts dreht, wird die Trommel ebenfalls nach rechts gedreht und die Spiralfeder aufgewickelt. Lässt man wieder los, so veranlasst die Spiralfeder die Trommel zur Drehung nach links, wobei die Kette von der Welle ab- und auf die Trommel aufgewickelt wird. Die Kraft, mit welcher die Spiralfeder die Trommel dreht, ist nicht constant; sie ist am Anfange am grössten, am Ende gleich Null. Wäre das Wellrad ein gewöhnliches, so würde der gezahnte Umfang desselben ebenfalls mit fortwährend abnehmender Kraft in Bewegung gesetzt. Dieser Abnahme wirkt aber hier der Umstand entgegen, dass bei der Drehung des Rades der wirksame Theil der Kette auf eine Welle von immer grösserem Radius zu liegen kommt. Bei richtiger Construction muss es daher möglich sein, zu erreichen, dass beide Aenderungen sich gerade compensiren. Man hat dann den Zweck der Anordnung erreicht, der darin liegt, mittelst der veränderlichen Kraft der Spiralfeder eine constante Kraft auf den Umfang des Zahnrades auszuüben.

Fig. 240.



Diese Anordnung kommt bei vielen Taschenuhren vor. Es ist bei diesen noch die Einrichtung getroffen, dass das Zahnrad *Z* (auch Bodenrad genannt) und die Welle (das Schneckenrad) nicht fest mit einander verbunden sind. Beim Aufziehen der Uhr, wobei das Schneckenrad die Kette aufwickelt, bleibt das Bodenrad stehen, beim Ablaufen der Uhr dagegen nimmt das Schneckenrad das Bodenrad mit Hülfe einer sogenannten Sperrklinke mit. Die Zähne des Bodenrades setzen dann die übrigen Räder der Uhr in Bewegung.

Werfen wir einen Rückblick auf die einzelnen Formen der Seil-

maschine, so finden wir in der fixen Rolle eine Maschine, welche nur die Richtung einer Kraft ändert; die bewegliche Rolle mit parallelen oder zu sich parallel bleibenden Schnüren, die Flaschenzüge und die Wellräder, ändern die Zusammensetzung der übertragenen Arbeit, doch bleibt das Uebersetzungsverhältniss während der Uebertragung constant; die bewegliche Rolle mit nicht parallelen Schnüren und das zuletzt behandelte Schneckenrad endlich ändern während der Uebertragung der Arbeitsgrösse fortwährend ihre Zusammensetzung; sie können daher nicht bloss dazu dienen, eine Kraft (oder eine Geschwindigkeit) zu vermehren, sondern auch eine constante Kraft (Geschwindigkeit) in eine veränderliche oder eine veränderliche in eine constante zu verwandeln.

62 **Die Hebelmaschine.** Dieselbe besteht aus einem um eine feste Achse*) drehbaren starren Körper, dem Hebel, der an zwei Punkten von Kräften angegriffen wird, welche diese Angriffspunkte bei stattfindender Bewegung beibehalten. Die Kräfte wirken dabei in der Regel in einer auf der Achse senkrecht stehenden Ebene; sollte dies nicht der Fall sein, so kann man sich dieselben durch ihre Projectionen auf eine solche Ebene

Fig. 241.

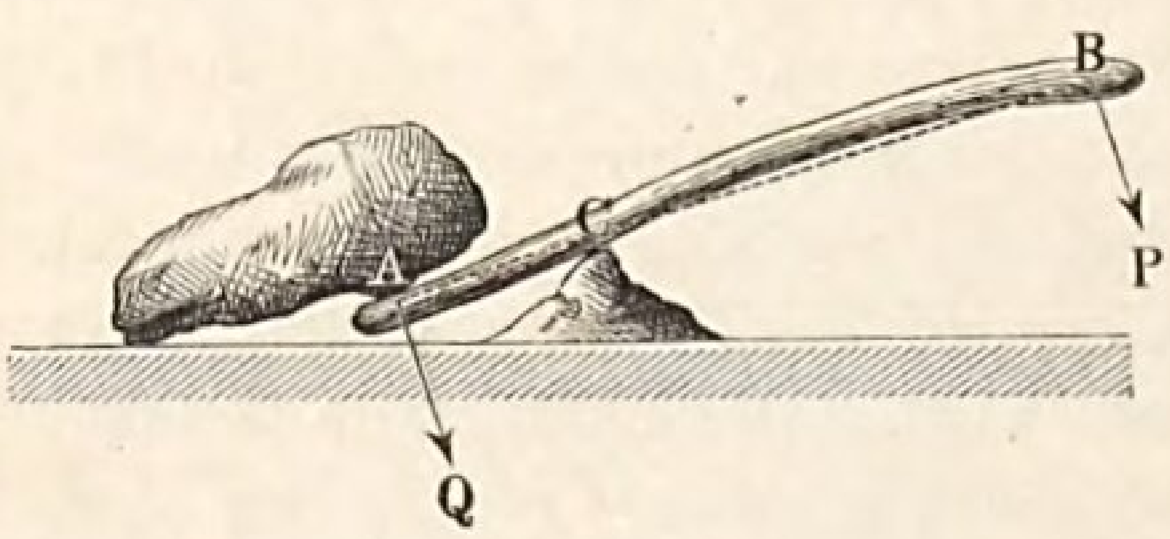
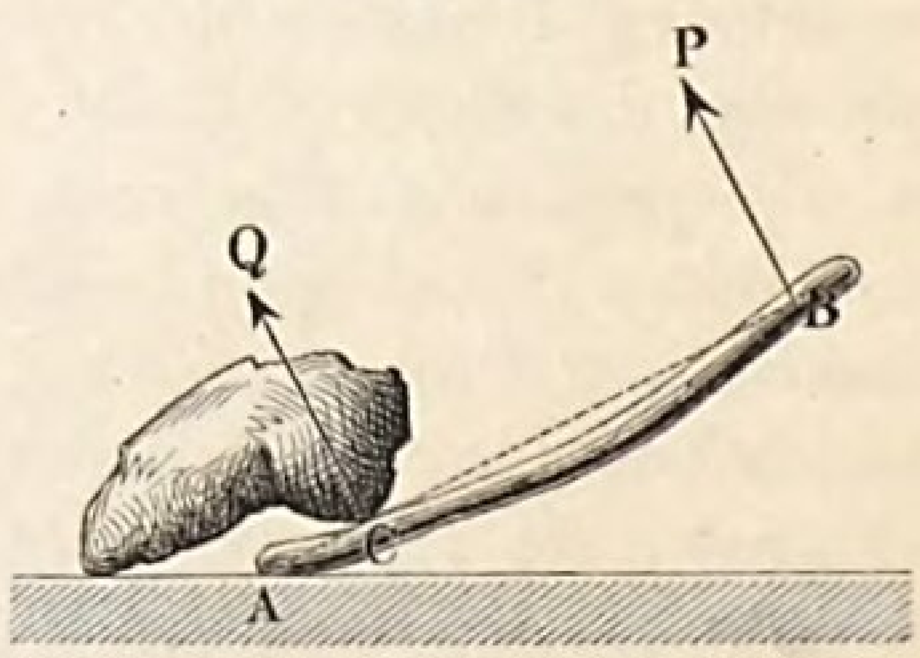


Fig. 242.



ersetzt denken. Je nach der Lage der Angriffspunkte zur Achse haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden.

Liegen beide Angriffspunkte in einer durch die Achse gehenden Geraden, so hat man einen geraden Hebel und zwar einen zweiarmigen, Fig. 241, wenn die beiden Angriffspunkte auf entgegengesetzter Seite, einen einarmigen, Fig. 242, wenn sie auf derselben Seite liegen. Sind die beiden Angriffspunkte nicht in einer Geraden gelegen, so hat man einen Winkelhebel, Fig. 243.

Sind beide Angriffspunkte gleich weit von der Achse entfernt, so ist der Hebel gleicharmig, wie z. B. bei der gewöhnlichen Wage**).

Die Hebelgesetze sind im Wesentlichen bereits durch das im §. 45 Vorgetragene erschöpft. Wir machen hier zunächst darauf aufmerksam, dass der gleicharmige Hebel eine Maschine ist, welche zur Aenderung

*) Auch Hypomochlion genannt.

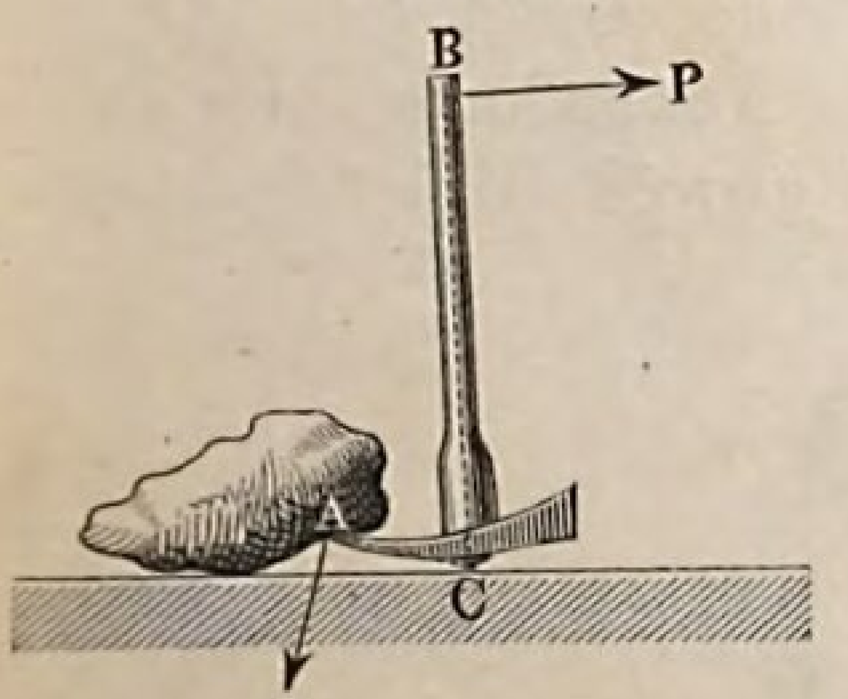
**) Die Wagen gehören nur hinsichtlich ihrer Construction zu den Maschinen; ihrem Zwecke nach zu den Messinstrumenten, da ihre Aufgabe nicht in der Uebertragung von Energie, sondern in der Vergleichung von Druckkräften besteht.

der Richtung einer Kraft dient, ohne dass dabei die Zusammensetzung der übertragenen Arbeitsgrösse abgeändert wird. Beim ungleicharmigen Hebel dagegen verhalten sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie die Längen der Hebelarme; daher die Kräfte sich verkehrt wie die Hebelarme verhalten müssen, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die Kräfte senkrecht auf die Hebelarme gerichtet seien. Im anderen Falle hat man die senkrechte Componente in Rechnung zu bringen.

Da die virtuellen Geschwindigkeiten den Hebelarmlängen proportional sind, so müssen auch die Producte aus den ersteren mit den Kräften (die virtuellen Momente) proportional sein den Producten aus den Hebelarmlängen mit den Kräften (den statischen Momenten oder Drehungsmomenten). Der Hebel ist also im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Momente oder die Summe der Drehungsmomente gleich Null ist. Dabei müssen die Momente mit Rücksicht auf ihr Zeichen addirt werden, indem man jenen, die nach rechts drehen, das entgegengesetzte Zeichen giebt zu denen, welche nach links drehen.

Bezüglich der Uebertragung potentieller Energie durch den Hebel gelten dieselben Erörterungen, wie bei der Rolle. Damit nämlich die Uebertragung zu Stande komme, muss ausser der Quantität potentieller Energie, welche übertragen werden soll, noch ein wenn auch beliebig kleines Quantum von kinetischer Energie aufgewendet werden, von welcher ein Theil in der Masse des Hebels selbst aufgespeichert wird.

Fig. 243.



Der mathematische Hebel ist ein Hebel, den man sich ohne Masse denkt; der physische Hebel hat meist die Form einer Stange, deren Gewicht selbst als Kraft auftritt, für den Fall, dass der Hebel um eine horizontale Achse drehbar ist. Man kann sich dieses Gewicht als eine im Schwerpunkt angreifende Kraft denken.

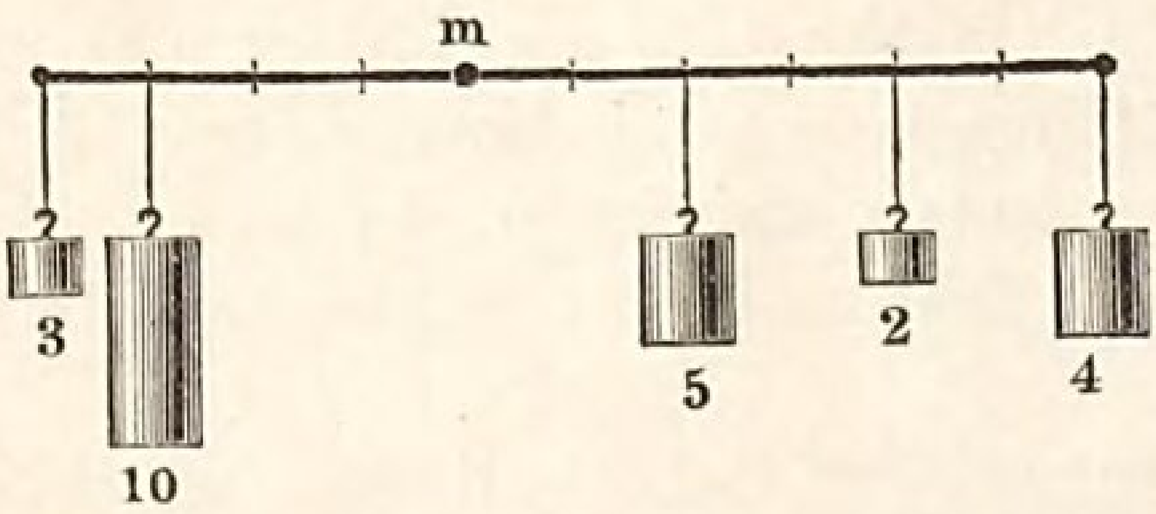
Dagegen wäre es nicht richtig, wenn man zur Berechnung der kinetischen Energie der Hebelmasse die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes zu Grunde legen wollte. Der im Schwerpunkte selbst drehbare Hebel ist nur im Gleichgewichtszustande wie ein mathematischer Hebel zu betrachten. Bei der Bewegung kommt die Vertheilung seiner Masse in Betracht, worauf wir später zurückkommen.

Der fixen Rolle ist der gleicharmige Hebel, dem Wellrade der ungleicharmige Hebel analog. Der Unterschied besteht wesentlich darin, dass bei der Rolle und dem Wellrade die Angriffspunkte stehen bleiben, sobald die Maschine sich bewegt, während beim Hebel die Angriffspunkte mit der Maschine gehen. Soll deshalb beim Hebel nicht während

der Uebertragung von Arbeitsgrössen eine Aenderung des Uebersetzungsverhältnisses eintreten, so muss dafür gesorgt sein, dass die Richtungen der Kräfte zu sich parallel verschoben werden, wie es z. B. der Fall ist, wenn dieselben durch Gewichte ausgeübt werden, oder dass die Richtungen der Kräfte eine gleiche Winkeldrehung erfahren.

Wenn auf jeder Seite des Drehpunktes nicht eine, sondern mehrere Kräfte wirken, so findet Gleichgewicht statt, wenn die Summe der statischen Momente auf der einen gleich ist der Summe der statischen Momente auf der anderen Seite. Es sei z. B. in Fig. 244 *m* der Drehpunkt. Auf der einen Seite wirke an dem Hebelarm 2 die Kraft 5, am Hebelarm 4 die Kraft 2, am Hebelarm 6 die Kraft 4, auf der anderen Seite aber die Kräfte 10 und 3 an den Hebelarmen 3 und 4, so wird zwischen allen diesen Kräften Gleichgewicht stattfinden, denn die Summe der statischen Momente ist auf beiden Seiten gleich, nämlich gleich 42.

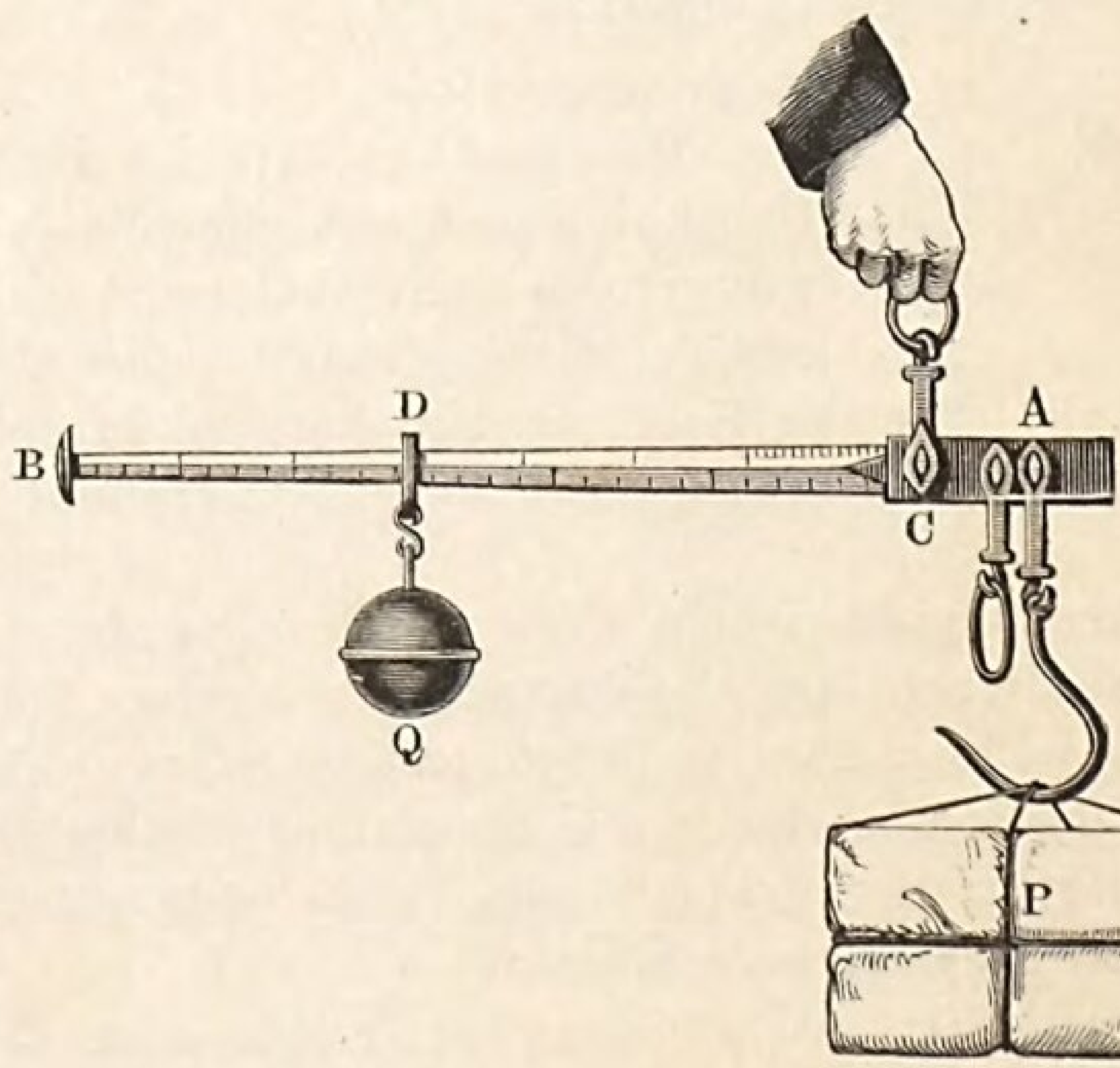
Fig. 244.



Setzen wir einen solchen Hebel in Bewegung, so haben wir eine Maschine, welche Arbeitsgrössen addirt, in Richtung und Zusammensetzung umändert und wiederum in Theile zerlegt.

Im alltäglichen Leben kommen zahlreiche Anwendungen des zweiarmigen Hebels vor; eine solche ist z. B. die gewöhnliche Schnellwage, Fig. 245.

Fig. 245.



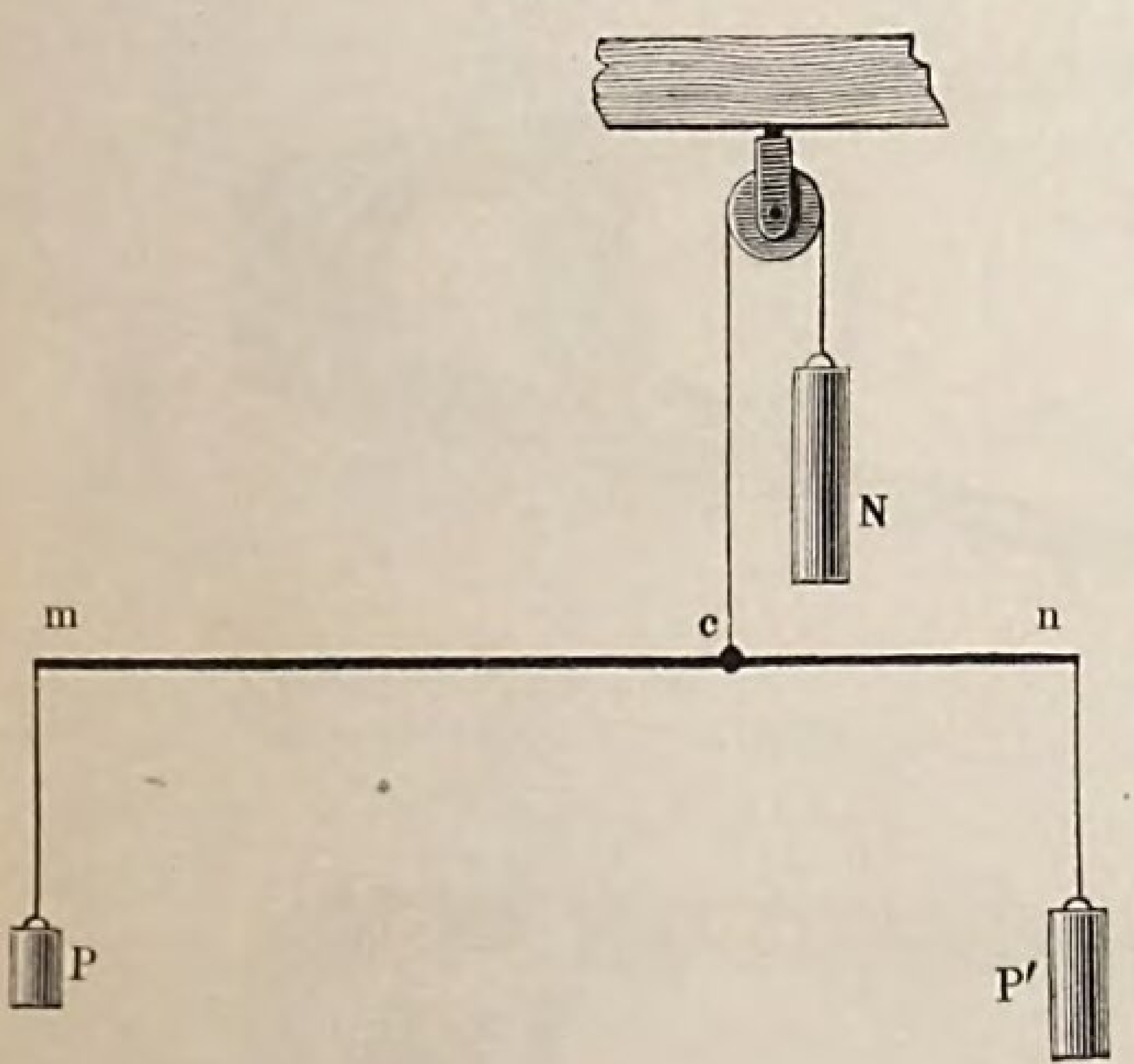
Der zweiarmige Hebel ist bei C drehbar, bei A ist eine Wagschale oder ein Haken angehängt, welcher die Last P trägt, die also an dem Hebelarm AC wirkt; dieser Last nun wird durch ein am

anderen Arm des Hebels angehängtes Laufgewicht Q das Gleichgewicht gehalten. Je grösser die Last wird, desto mehr muss man das Laufgewicht Q vom Drehpunkte C entfernen.

An einem solchen Hebel, wie wir ihn bisher betrachtet haben, hat der feste Drehpunkt einen Druck auszuhalten, welcher der Summe der an beiden Seiten wirkenden Kräfte gleich ist; ein solcher Hebel kann aber auch im Gleichgewicht sein, wenn dieser mittlere Punkt nicht fest ist, sondern wenn in ihm eine Kraft wirkt, welche der Summe der beiden anderen gleich, der Richtung nach aber ihnen entgegengesetzt ist. Die Fig. 246 mag dies erläutern. Nehmen wir an, c sei der feste Drehpunkt eines Hebels mn, an dessen Enden die Kräfte P und P' angreifen und sich einander das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht wird nun nicht gestört, wenn der Punkt c aufhört, fest zu sein, wenn in ihm aber eine Kraft N angebracht wird, welche der Summe von P und P' gleich ist, die aber nach oben wirkt, während die Kräfte P und P' nach unten ziehen.

Ohne das Gleichgewicht zu stören, kann man jeden der drei Punkte m, c und n als fest betrachten; wenn nun einer der beiden äusseren Punkte, etwa n, fest ist, so haben wir einen einarmigen Hebel, d. h. einen solchen, bei welchem die Angriffspunkte der beiden sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte N und P auf derselben Seite des festen Drehpunktes n liegen. Die beiden Kräfte haben in diesem Falle entgegengesetzte Richtung, und der Druck auf den Unterstützungspunkt ist dem Unterschiede der beiden Kräfte P und N gleich. Der Hebelarm der Kraft P ist $l + l'$, wenn man mit l die Länge mc, mit l' die Länge nc bezeichnet; der Hebelarm der Kraft N ist aber l'. Wäre c der feste Drehpunkt gewesen, so hätte man als Bedingung des Gleichgewichts:

Fig. 246.



$$P' : P = l : l'$$

und daraus folgt:

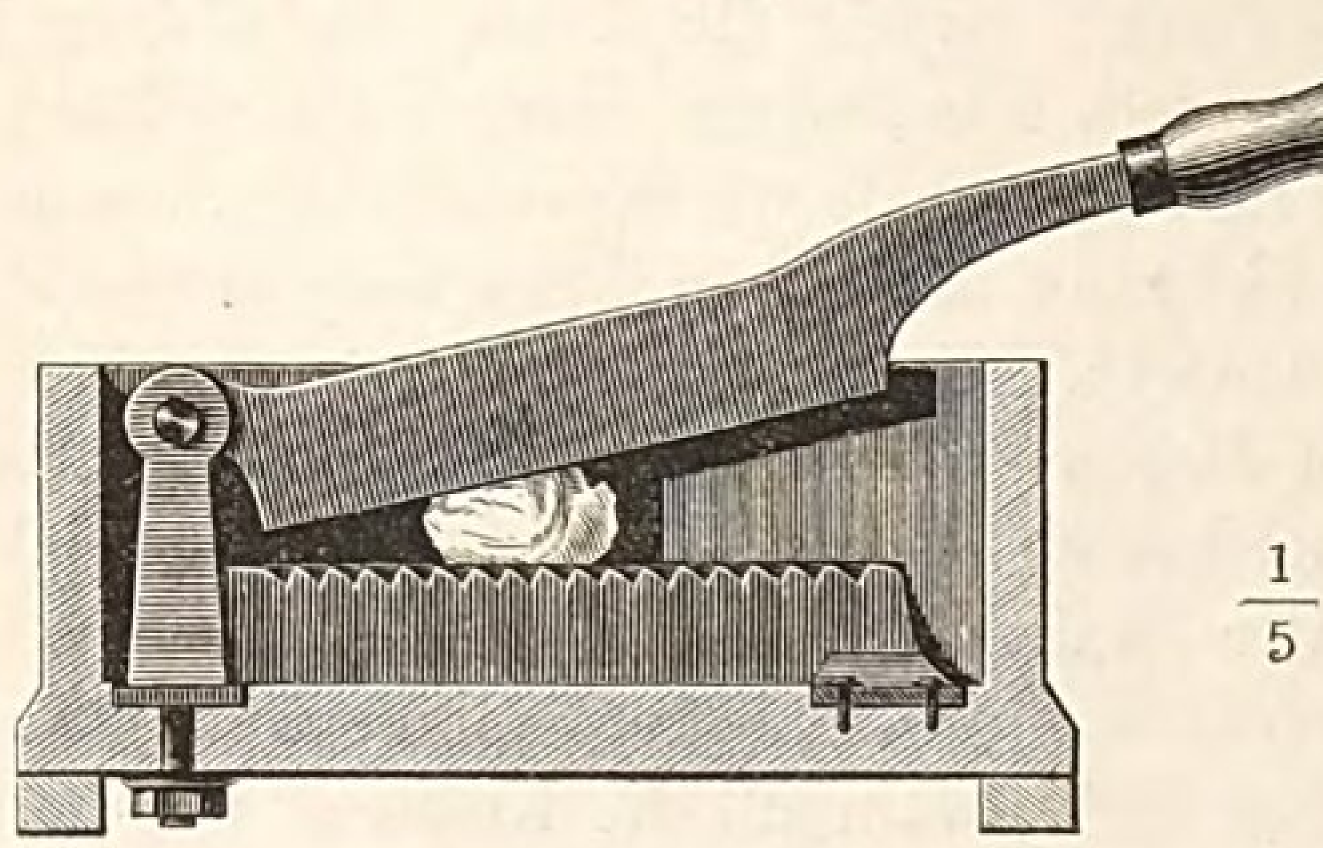
$$P' + P : P = l + l' : l'$$

oder:

$$N : P = l + l' : l'.$$

Wenn also die an dem einarmigen Hebel in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte N und P sich das Gleichgewicht halten sollen, so müssen sie sich ebenfalls umgekehrt verhalten wie ihre Hebelarme.

Fig. 247.



Die Figuren 247 und 248 sind zwei bekannte Formen der Anwendung des einarmigen Hebels, welche wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Fig. 248.

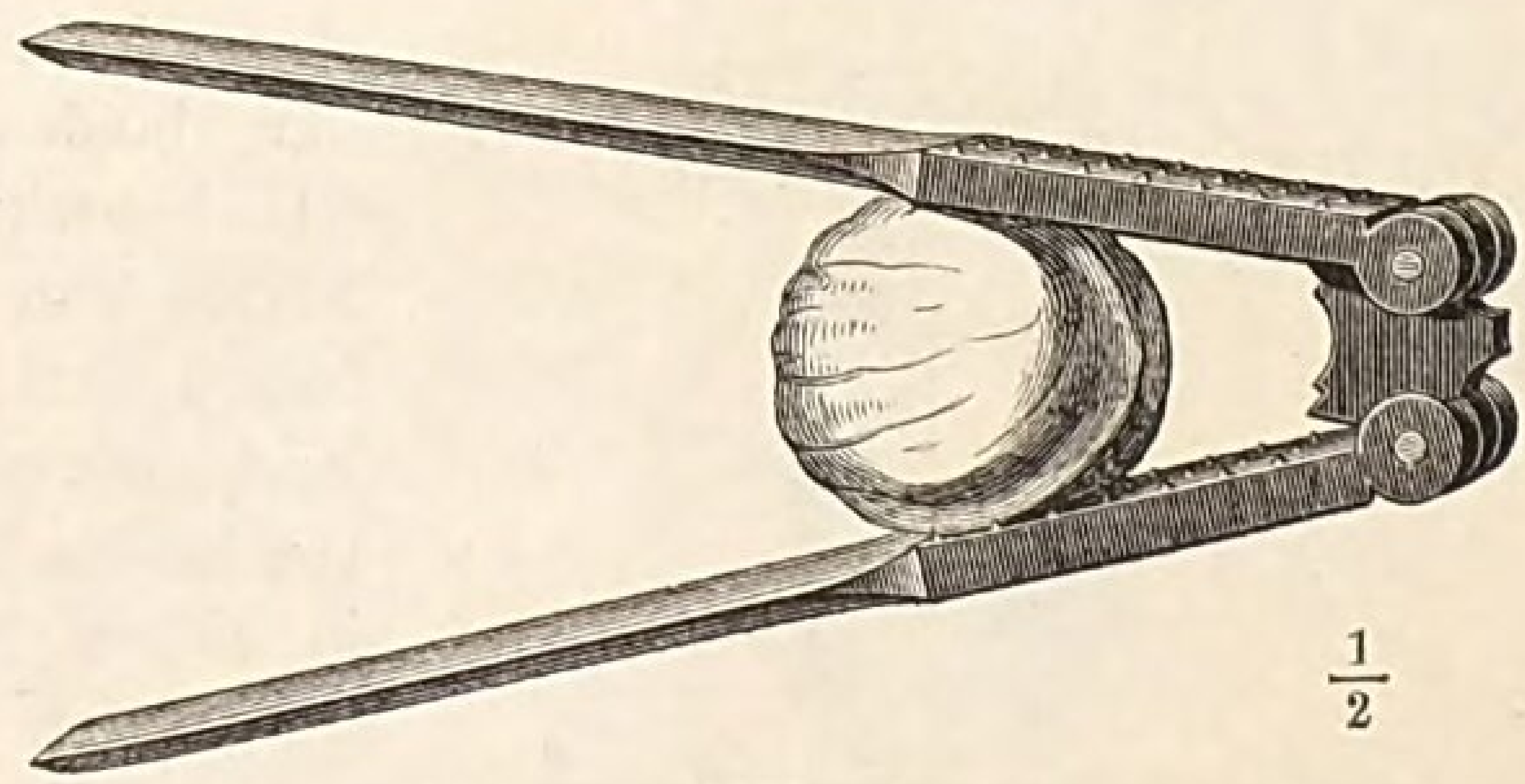
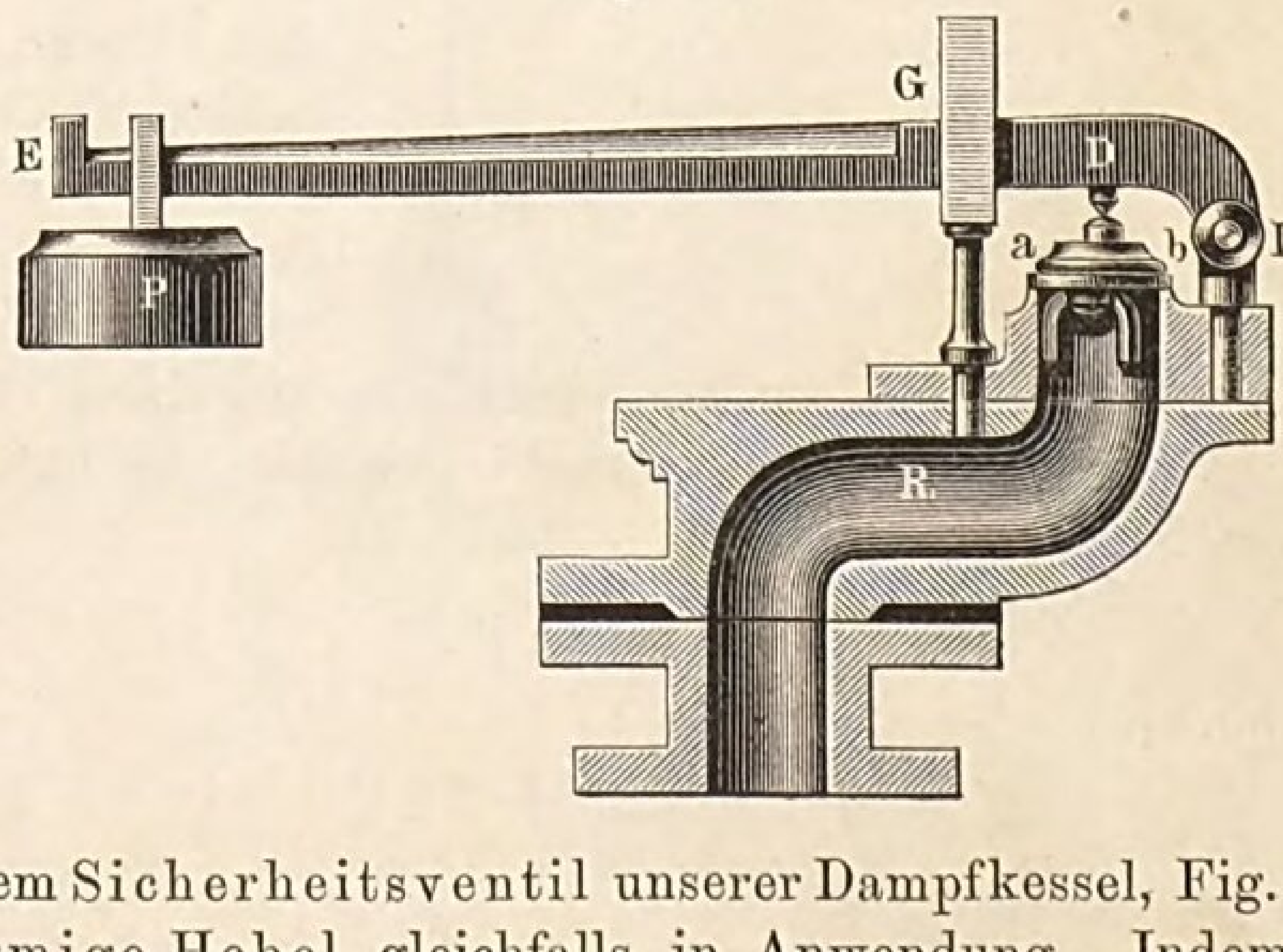


Fig. 249.

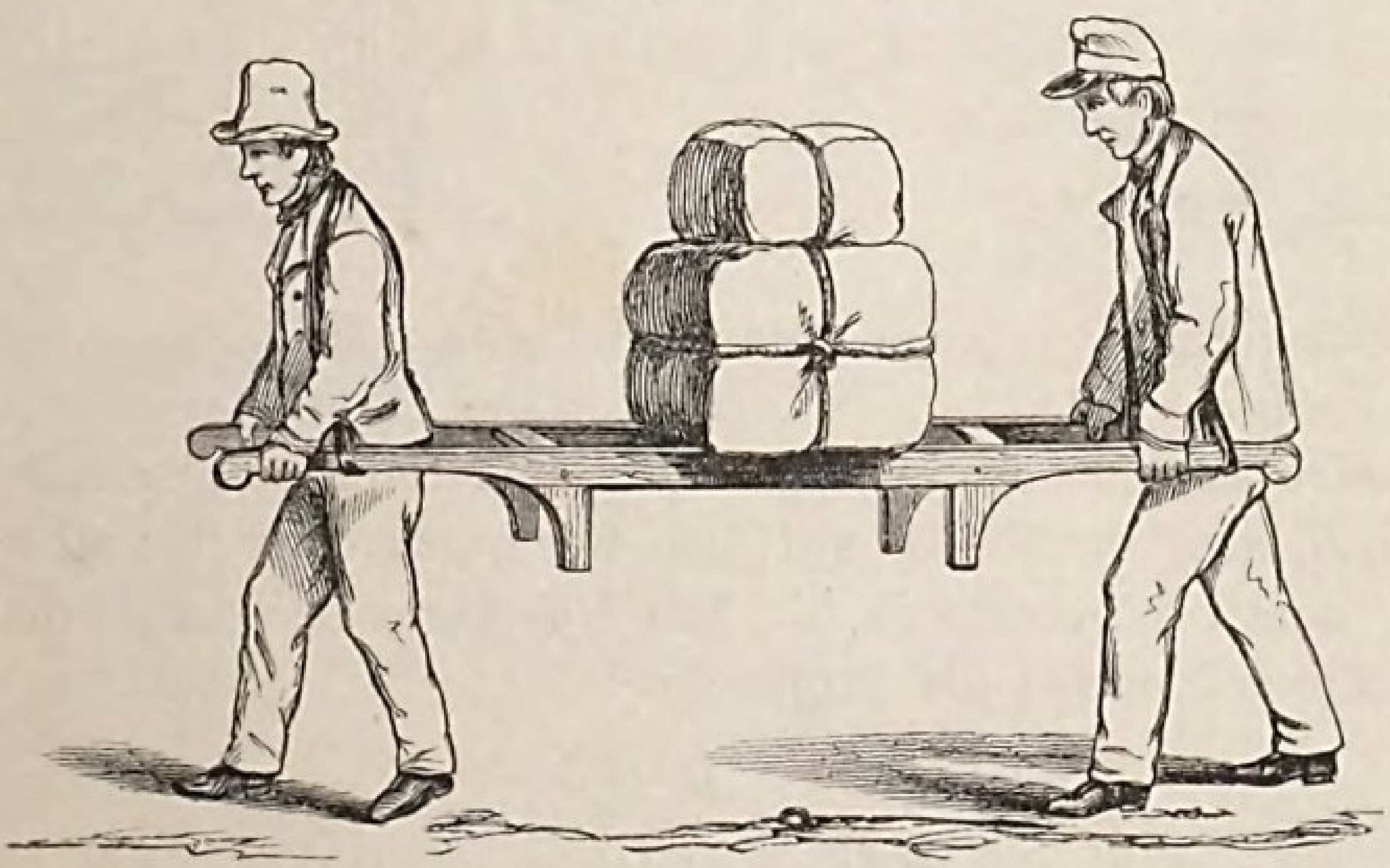


Bei dem Sicherheitsventil unserer Dampfkessel, Fig. 249, kommt der einarmige Hebel gleichfalls in Anwendung. Indem der Dampf

aus dem Dampfkessel in das Rohr R tretend gegen die untere Fläche der Platte ab drückt, strebt er den um das Hypomochlion F drehbaren Hebel zu heben, während derselbe durch das Gewicht P niedergedrückt wird. Bei der Berechnung des Druckes, welcher auf dem Ventil ab lastet, darf das Gewicht des materiellen Hebels FE selbst nicht unberücksichtigt bleiben.

Auch die beiden Endpunkte m und n der Stange mn, Fig. 246, können fest sein, während in c eine Kraft N wirkt; alsdann aber hat der Punkt m einen Druck P, der Punkt n einen Druck P' auszuhalten. Wenn die auf einer Tragbahre liegende Last, Fig. 250, durch zwei Leute getragen werden soll, so vertheilt sie sich auf die beiden Träger; im Falle sie gerade auf der Mitte der Bahre liegt, kommt auf jeden Träger die Hälfte der Last; wird sie aber dem einen näher gerückt, wie Fig. 250 andeutet, so hat dieser einen grösseren Theil zu tragen. Gesetzt, die

Fig. 250.



aufgelegte Last betrage 100 kg, die ganze Bahre sei 2 m lang und der Schwerpunkt der Last liege 80 cm von dem einen, 120 cm von dem anderen Ende, so haben die Schultern des einen Trägers einen Druck von 60 kg, die des anderen einen Druck von 40 kg auszuhalten.

Unter den zusammengesetzten Hebelapparaten haben wir insbesondere zwei interessante Beispiele anzuführen, nämlich die Roberval'sche und die Brückenwage.

Die Roberval'sche Wage, von welcher Fig. 251 (a. f. S.) eine schematische Abbildung giebt, besteht aus zwei parallelen gleicharmigen Hebeln AB und $A'B'$, welche um die Achsen C und C' drehbar sind. Ihre Enden sind durch gleich lange Stäbe zu einem verschiebbaren Parallelogramm verbunden. Diese stets in verticaler Lage verbleibenden Stäbe tragen Querstäbe, welche demgemäss immer horizontal bleiben. Es ist sofort einzusehen, dass die virtuellen Geschwindigkeiten an allen Punkten dieser Querstäbe stets gleich gross bleiben, weshalb denn auch die Kräfte an jeder Stelle dieser Querstäbe mit genau gleicher Wirkung angreifen.

Hängt man also an dieselben Gewichtsstücke an, die sich das Gleichgewicht halten, so bleibt dasselbe ungestört, mag man die Gewichtsstücke auch beliebig hin- und herschieben.

Auf andere Weise wird diese Unabhängigkeit von dem Orte, wo die Last aufgelegt wird, bei der Brückenwage erreicht.

Fig. 252 giebt eine schematische Ansicht dieser viel verbreiteten Wage, welche zugleich als Decimalwage eingerichtet ist, so dass die

Fig. 251.

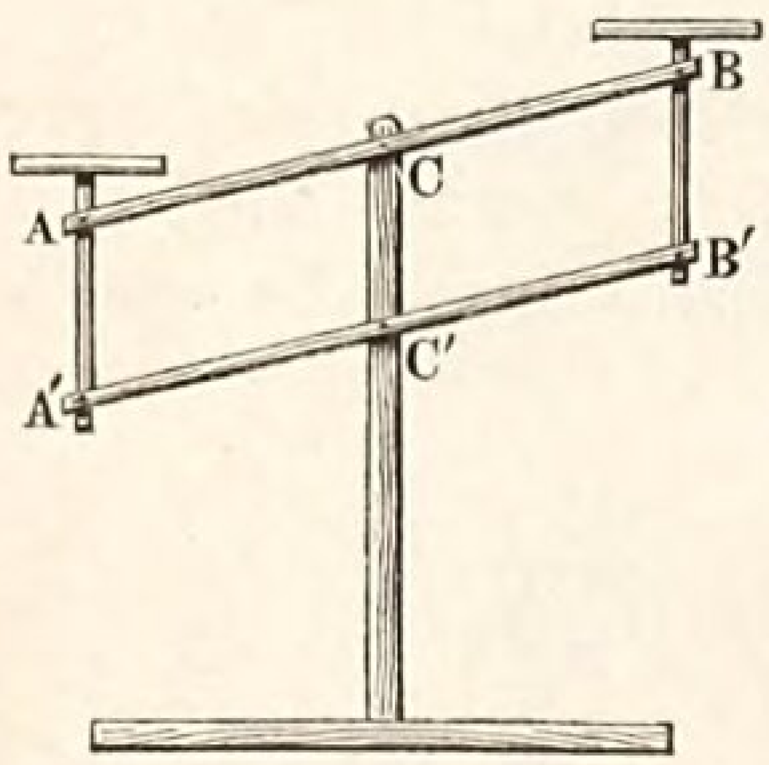
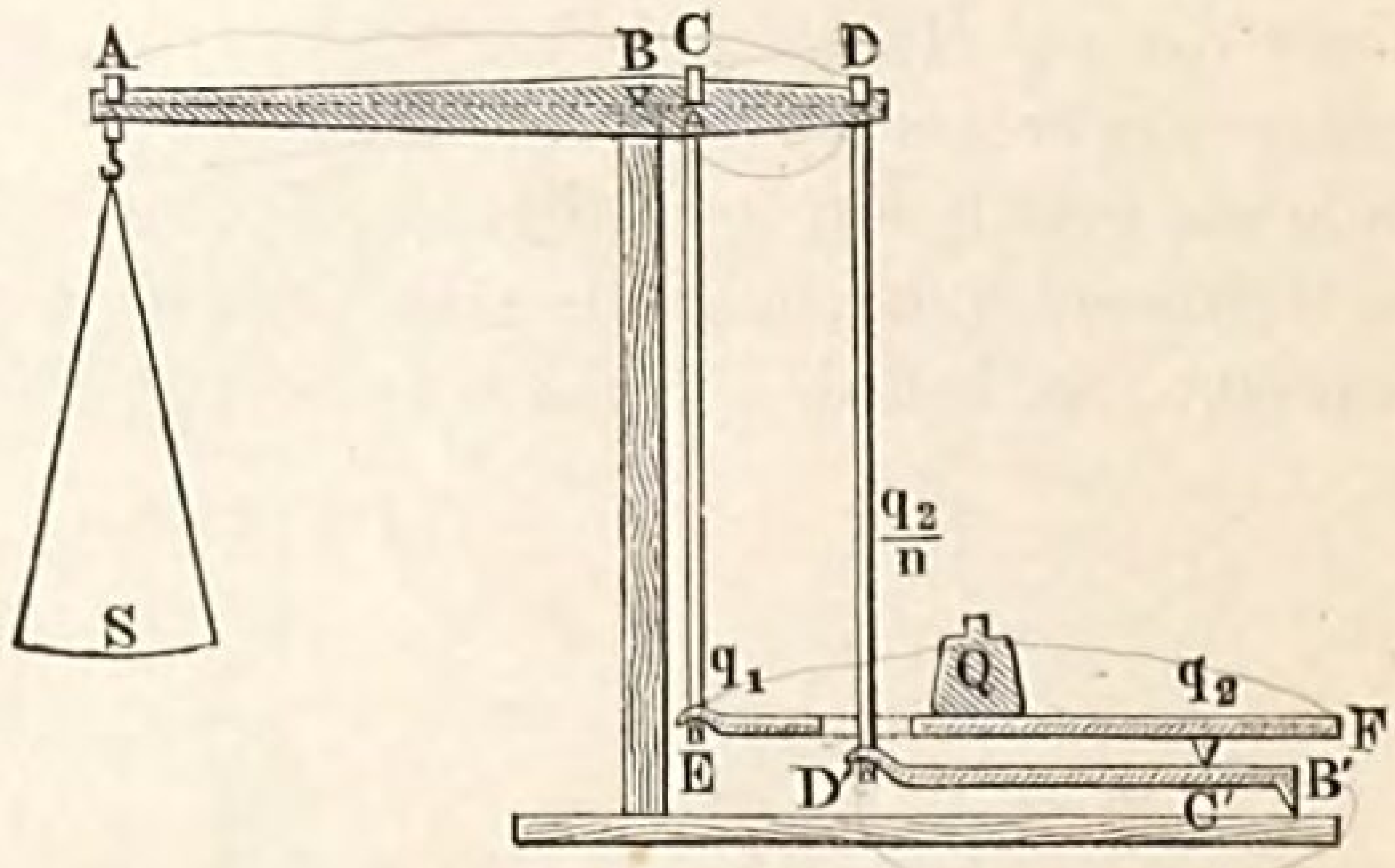


Fig. 252.



Gewichtsstücke nur $1/_{10}$ jener Masse zu besitzen brauchen, welche man mit ihnen wägen will.

Dieselbe besteht aus drei Hebeln: dem Hebel AD mit dem Drehpunkte in B, dem Hebel EF mit dem Drehpunkte in C' und dem Hebel $D'B'$ mit dem Drehpunkte in B'. Der Hebelarm AB ist 10 mal so lang als BC, ausserdem gilt die Proportion:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{B'D'}{B'C'} = n.$$

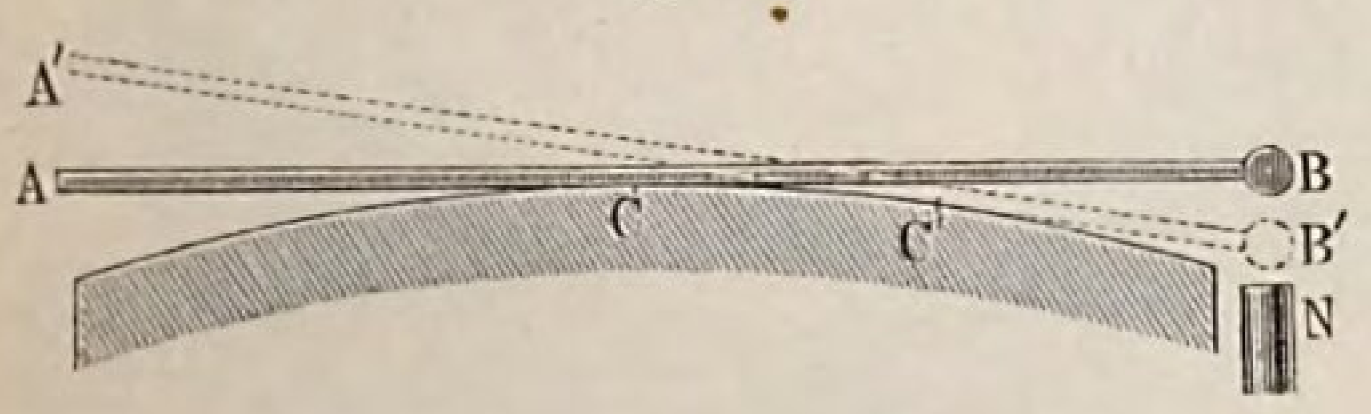
Unter diesen Bedingungen lässt sich zunächst zeigen, dass die auf die „Brücke“ EF irgendwo aufgesetzte Masse Q ebenso wirkt, als wäre sie direct im Punkte C angehängt.

Die Last Q vertheilt sich jedenfalls in zwei Theile. Der eine Theil q_1 zieht direct bei C, der andere Theil q_2 drückt auf C', was in Bezug auf den Punkt D' dieselbe Wirkung haben muss, als wäre daselbst eine Masse $\frac{q_2}{n}$ angebracht; denn der Abstand $B'D'$ ist n mal so gross als $B'C'$. Die in D' angebrachte Last $\frac{q_2}{n}$ wirkt aber wiederum in D so, als wäre statt dessen in C eine Last q_2 angebracht. Mithin finden sich in C die Wirkungen der beiden Theile q_1 und q_2 zusammen, als ob daselbst ihre Summe Q direct angebracht wäre. Dieser Last Q in C wird dann auf der Schale durch ein Gewichtsstück von der Masse $\frac{Q}{10}$ das Gleichgewicht gehalten.

Auch hier lässt sich zeigen, dass alle Punkte der Brücke EF um gleiche Höhen sinken und steigen. Sinkt nämlich C um 1 mm, so sinkt D um n Millimeter, folglich sinkt auch E um 1 mm und D' um n Millimeter, aus letzterem folgt, dass C' nur um 1 mm sinkt. Die Brücke bleibt sich also parallel und die virtuellen Geschwindigkeiten aller mit ihr verbundenen Punkte sind gleich gross, woraus folgt, dass gleiche Kräfte (Lasten) an allen diesen Punkten durch ein und dieselbe Gegenkraft in S im Gleichgewicht gehalten werden.

Hebel mit veränderlicher Uebersetzung. Die bisher betrachteten Beispiele von Hebeln, denen noch eine Anzahl anderer beigefügt werden könnte, waren sämmtlich derartige, dass das Uebersetzungsverhältniss während der Arbeitsleistung constant blieb. Es giebt aber auch Hebelvorrichtungen mit veränderlicher Uebersetzung. Man erhält solche z. B. einfach durch eine Anordnung, wie sie in Fig. 253 angedeutet ist. Der gerade Hebel AB ist auf einer Unterlage mit convexem Querschnitt befindlich. Der Unterstützungspunkt ist in C ungefähr in der Mitte, also das Uebersetzungsverhältniss bezüglich der an den Enden angreifenden Kräfte = 1. Sowie aber der Hebel bewegt wird, z. B. nach $A'B'$, so rückt der Unterstützungspunkt nach C', nahe an das eine Ende und dadurch wird der Hebel ein ungleicharmiger. Stellen wir uns vor, in N befinde sich ein Magnetpol, welcher einen am Ende B befindlichen Anker (mit kreisförmigem Querschnitte) anzieht. Die Kraft, mit der dies geschieht, wächst in viel rascherem Verhältniss als die Distanz abnimmt. Soll nun aber trotzdem am Ende A eine wenigstens annähernd constante Kraft ausgeübt werden, so kann dies durch die in Rede stehende Vorrichtung erreicht werden, da die anziehende Kraft des Magnets bei der Uebertragung auf das andere Hebelende um so mehr geschwächt wird, jemehr sie selbst durch Annäherung des Ankers an den Pol gewachsen ist. In der That wird von diesem Principe bei dem bekannten Kohlenlichtregulator von Foucault Anwendung gemacht.

Fig. 253.



Die schiefe Ebene oder die Gleitmaschine. Die hauptsächlichsten Formen der schiefen Ebene oder der Gleitmaschine sind: der Keil, die Rampe, das Excentrik, die Schraube. Keil und Rampe unterscheiden sich dadurch, dass der erstere bewegt wird, während die letztere in Ruhe bleibt. Excentrik und Schraube entstehen durch Aufwickelung der schiefen Ebene um eine Achse. Wir wenden uns zuerst zu jenen Formen, die sich unter dem Namen Keil zusammenfassen lassen. 63

Die schiefe Ebene als Keil erscheint in ihrer einfachsten Form als ein prismatischer Körper mit zwei ebenen Gleitflächen, welche sich unter einem meist spitzen Winkel schneiden. In der Fig. 254 erscheint derselbe im Verticalschnitte ABC senkrecht auf die von den Gleitflächen AB und AC gebildete Kante A. Eine constante Kraft P, welche beispielsweise durch ein Gewicht, welches an das Ende der über die fixe Rolle gelegten Schnur gehängt ist, hervorgebracht wird, zieht die schiefe Ebene in der Richtung Ax. Hierdurch soll der Angriffspunkt einer vertical nach abwärts wirkenden Kraft Q, welche wir uns im Schwerpunkt einer Masse m angebracht denken, in verticaler Richtung nach aufwärts verschoben werden.

Durch eine in horizontaler Richtung angewendete Kraft soll also eine Arbeit in verticaler Richtung geleistet werden.

Fig. 254.

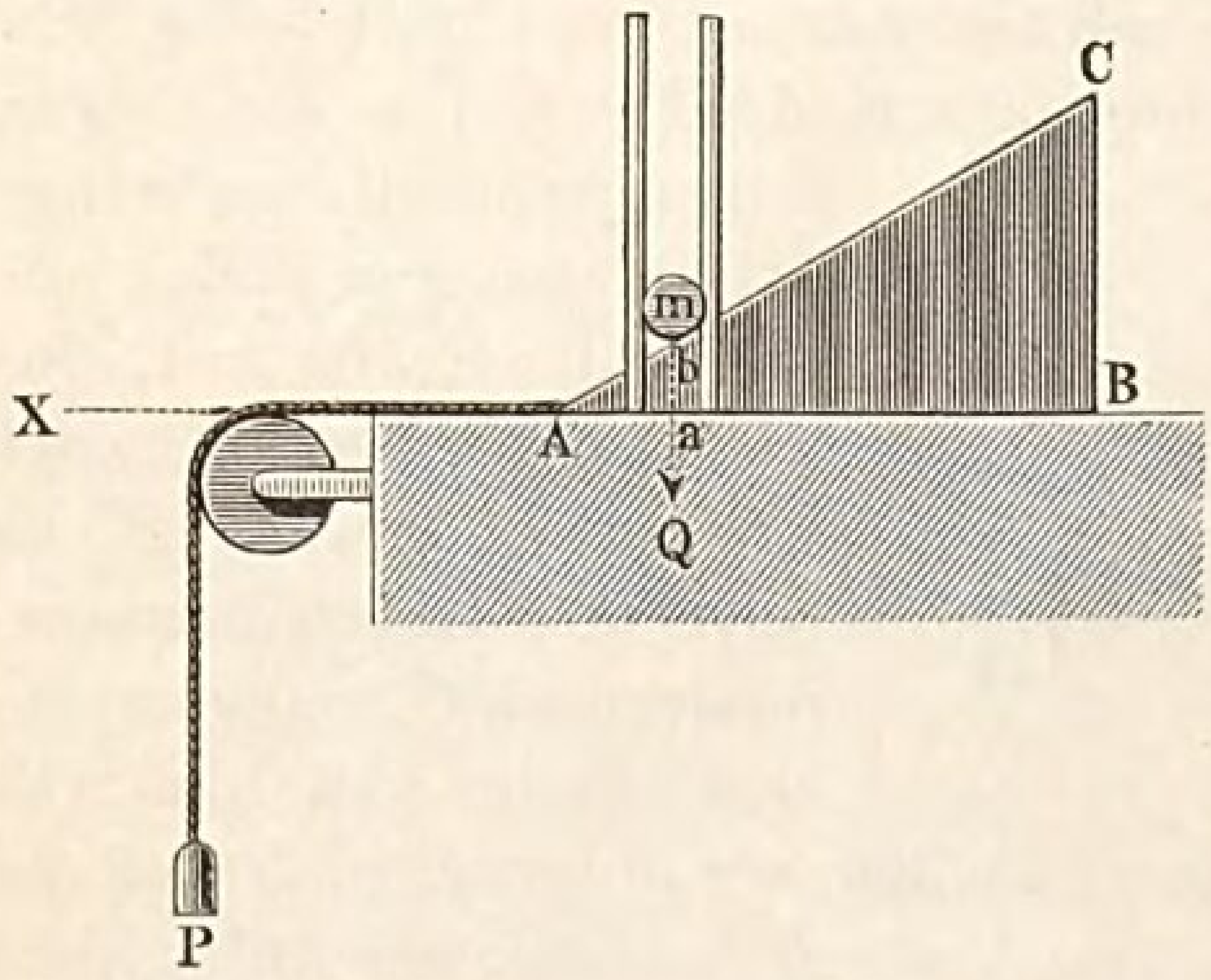
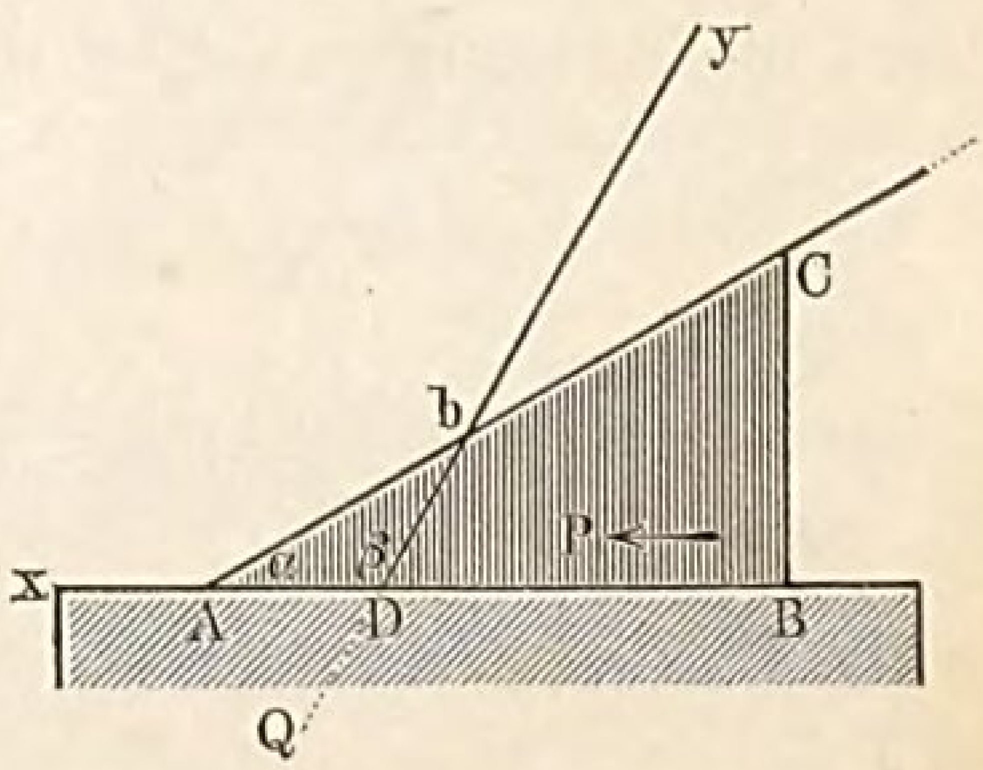


Fig. 255.



Für die erstere Richtung dient die horizontale Gleitfläche und die Unterlage derselben als Führung, für die verticale Richtung können wir uns eine Führung durch zwei parallele Leisten, zwischen denen die Masse m auf und ab verschiebbar ist, gegeben denken. Wir stellen uns vor, dass die Bewegung ohne alle Reibung vor sich gehe. Um das Verhältniss der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden, denken wir uns die schiefe Ebene um eine Strecke aA gegen X verschoben; hierdurch wird die Last m um die Höhe ab gehoben. Das gesuchte Verhältniss zwischen der Verschiebung des Angriffspunktes der arbeitenden Kraft und jener des Angriffspunktes der überwundenen Kraft ist also gleich dem Verhältniss zwischen der Basis der schiefen Ebene und der Höhe derselben. Bezeichnen wir die Basis mit B, die Höhe mit H, so gilt demnach für das Kraftverhältniss die Beziehung:

$$P : Q = H : B$$

oder

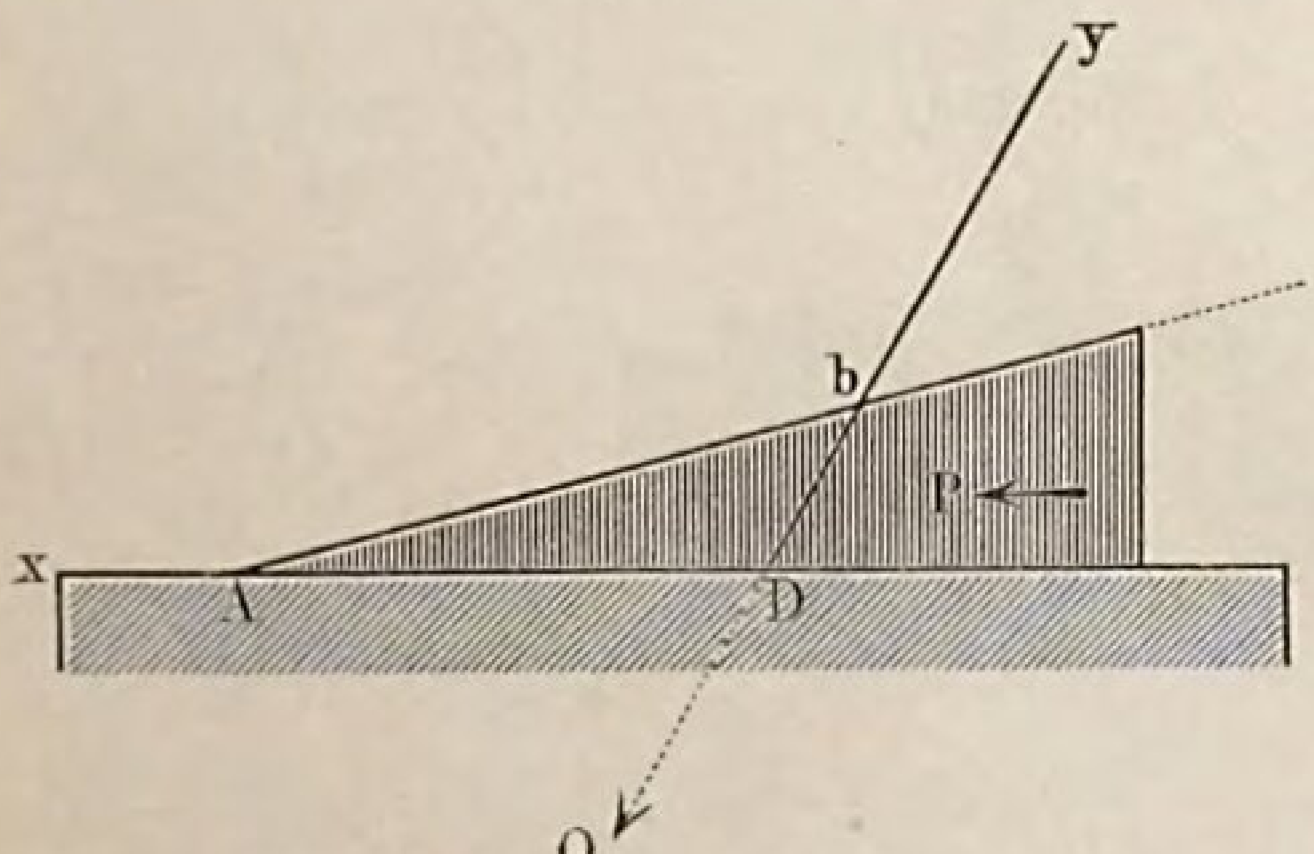
$$\frac{P}{Q} = tang\, \alpha$$

wenn α der von den Gleitflächen eingeschlossene Winkel ist.

Soll demnach in diesem Falle die schiefe Ebene nur die Richtung und nicht auch die Grösse der Kraft (und des Weges) verändern, so müsste $H = B$, also $\alpha = 45^0$ gemacht werden.

Für den Fall, dass die neue Kraftrichtung einen von 90^0 verschiedenen Winkel mit der Richtung der arbeitenden Kraft bildet, muss auch die schiefe Ebene einen anderen Winkel haben, wenn das Uebersetzungsverhältniss gleich Eins sein soll. Es sei z. B. yD, Fig. 255, die Richtung der zu überwindenden Kraft, welche mit der Richtung der arbeitenden Kraft Dx den Winkel β einschliesse. Tragen wir von D aus zwei beliebig gleiche Strecken DA und Db nach x und nach y hin auf und verbinden die Punkte A und b, so ist bAD der Winkel der gesuchten schiefen Ebene, denn einer Verschiebung derselben gegen x entspricht eine gleich grosse Verschiebung der Last gegen y. Der Winkel α dieser schiefen Ebene ist gleich $90 - \frac{\beta}{2}\cdot$ Jede andere schiefe Ebene ändert nicht bloss die Richtung, sondern auch die Zusammensetzung der übertragenen Arbeitsgrösse, wobei das Uebersetzungsverhältniss durch das Verhältniss der Dreiecksseiten $\frac{DA}{Db}$ gegeben ist. Soll also z. B. eine Kraft, welche in der Richtung Dx (Fig. 256) gegeben ist, nach der Richtung Dy in dreifacher Stärke wirken, so tragen wir eine beliebige Strecke Db und eine Strecke $DA = 3\,Db$ auf; DAb ist dann der Winkel der gewünschten schiefen Ebene.

Fig. 256.



Die äussere Anordnung zur Führung der Kräfte kann eine sehr verschiedene sein.

So z. B. kann die Last m statt durch verticale Leisten dadurch in verticaler Richtung geführt sein, dass sie mittelst einer horizontalen Schnur gehalten wird (Fig. 257, a. f. S.), oder dadurch, dass sie auf einem zweiten prismatischen Stücke aufruht, dessen horizontale Bewegung gehindert ist (Fig. 258).

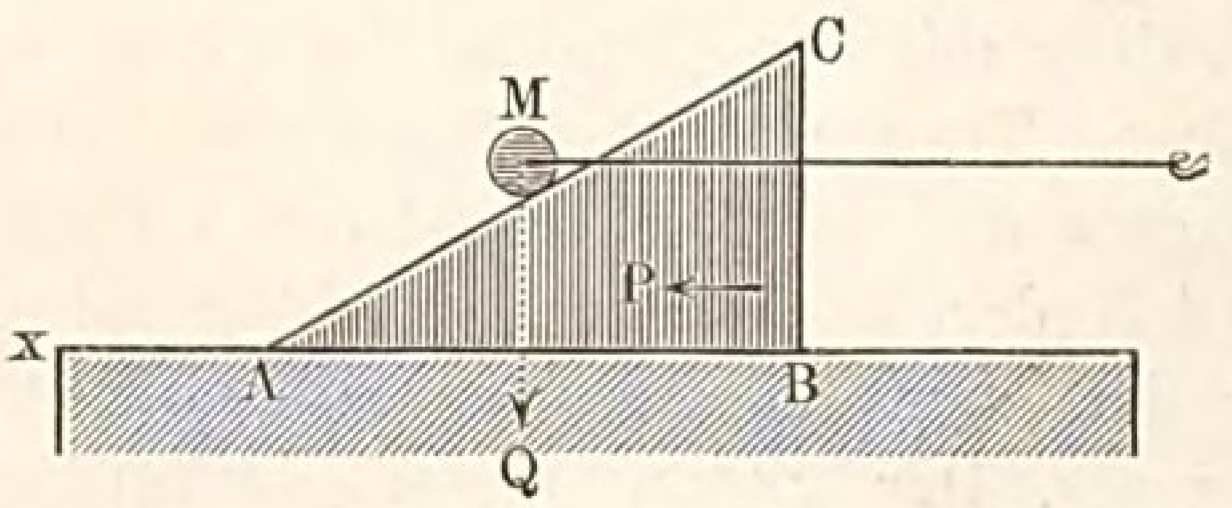
Denkt man sich die letztere Anordnung in Bezug auf xx' symmetrisch verdoppelt, wie Fig. 259 in aufgerichteter Lage zeigt, so hat man den symmetrischen Keil, bei welchem die Richtung der arbeitenden Kraft den Kantenwinkel des Keils halbirt. Wirkt dabei die zu überwindende Kraft Q senkrecht gegen die Mittellinie AB, so sind die zusammengehörigen Wege der Angriffspunkt der Kräfte P und Q im Ver-

hältniss von $bA : cc' = BA : CC'$, also die Kräfte selbst im Verhältniss

$$P : Q = CC' : BA$$

stehend. CC' wird der Rücken des Keils, BA seine Länge, $CA = C'A$ seine Seite genannt. Es verhält sich also in diesem Falle Kraft zur Last, wie der Rücken des Keils zur Länge desselben.

Fig. 257.



Ist aber die Gegenkraft Q beiderseits senkrecht auf die Seite des Keils gerichtet (Fig. 260), so sind offenbar die gleichzeitigen Wege der Angriffspunkte von P und Q in dem Verhältniss:

$$nA : 2mn = CA : CC'$$

also die Kräfte im Verhältniss:

$$P : Q = CC' : CA$$

Fig. 258.

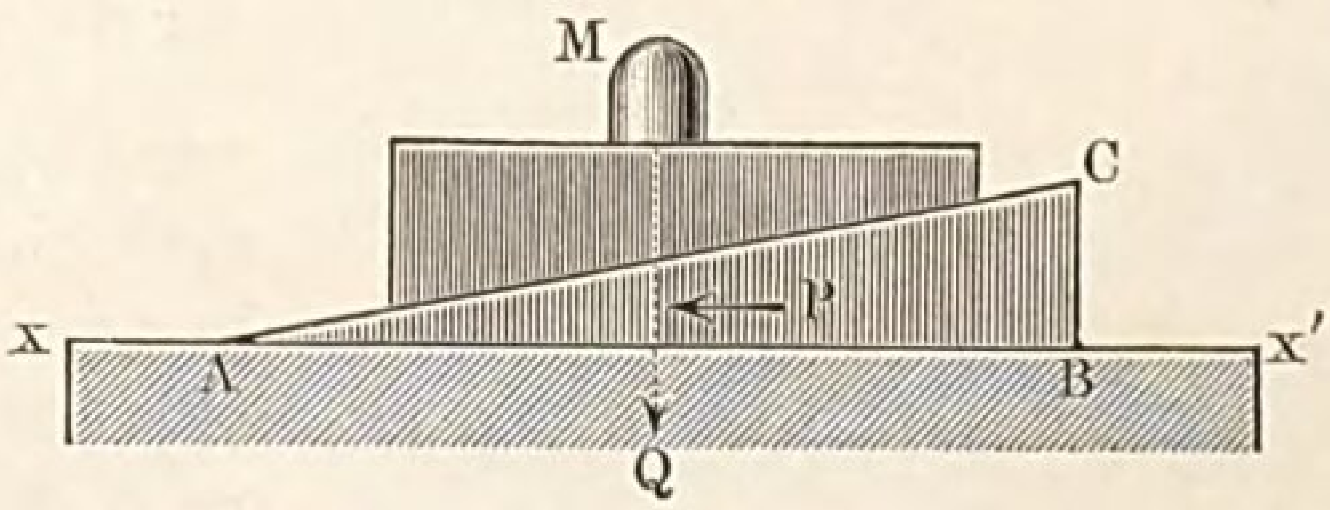


Fig. 259.

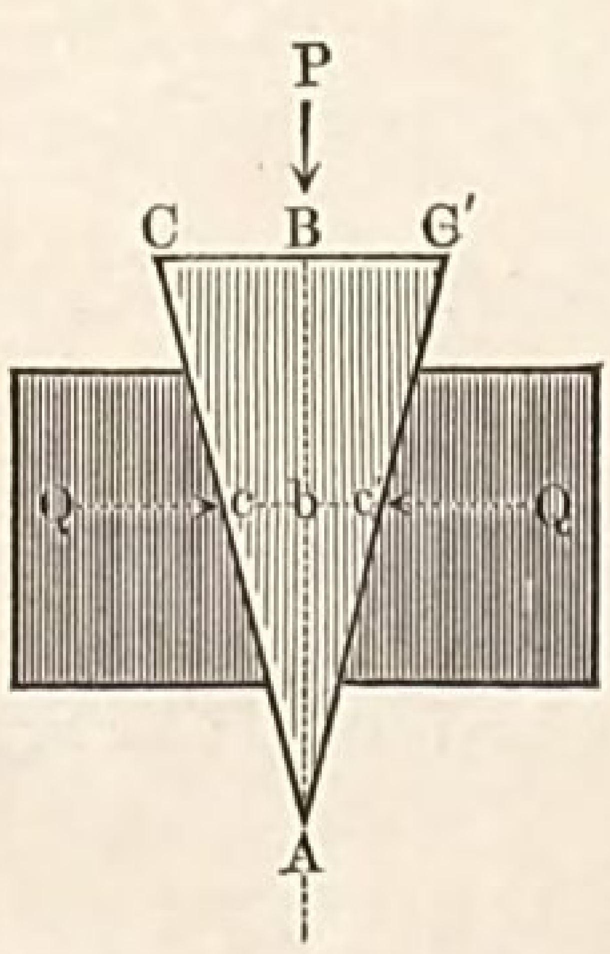
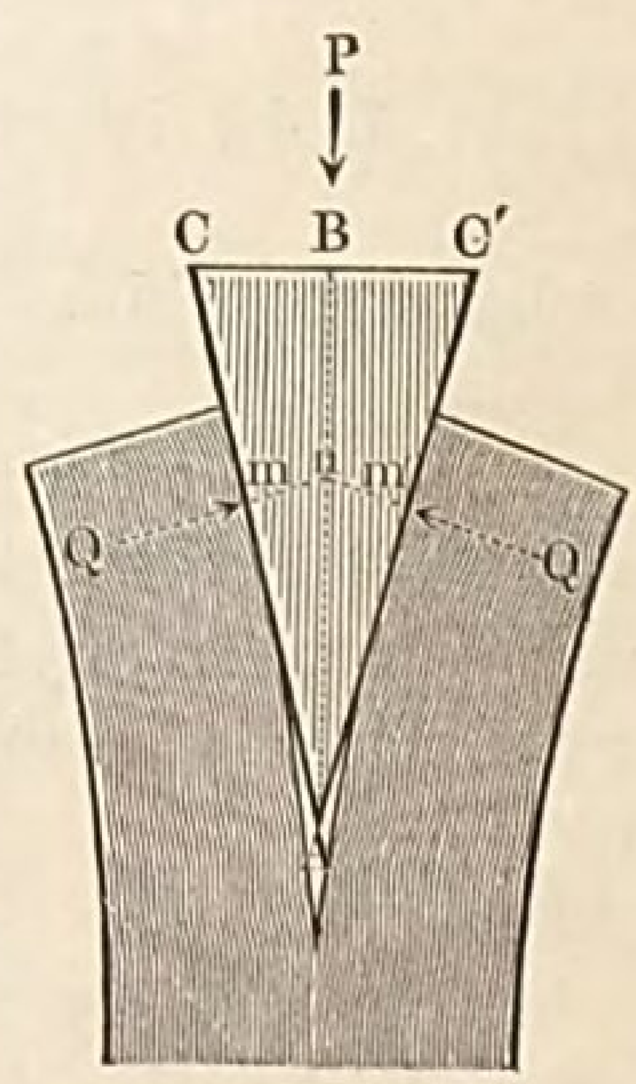


Fig. 260.



stehend, d. h. es verhält sich Kraft zur Last, wie der Rücken des Keils zur Seite desselben.

Der in Fig. 261 abgebildete Apparat dient zum Nachweis des ersten dieser Sätze, so weit dies wegen der verhältnissmässig grossen Reibung möglich ist.

Fig. 261.

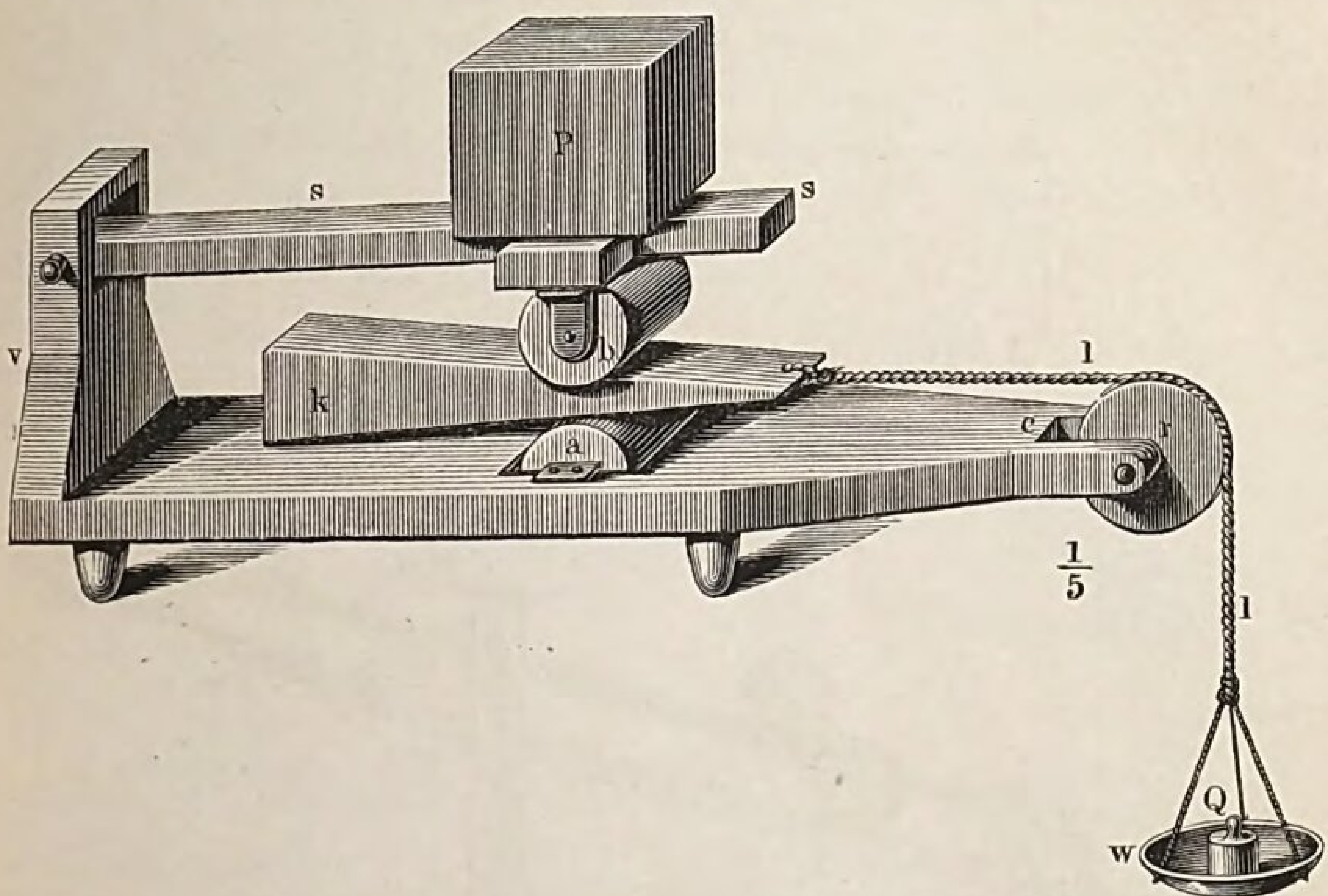


Fig. 262.

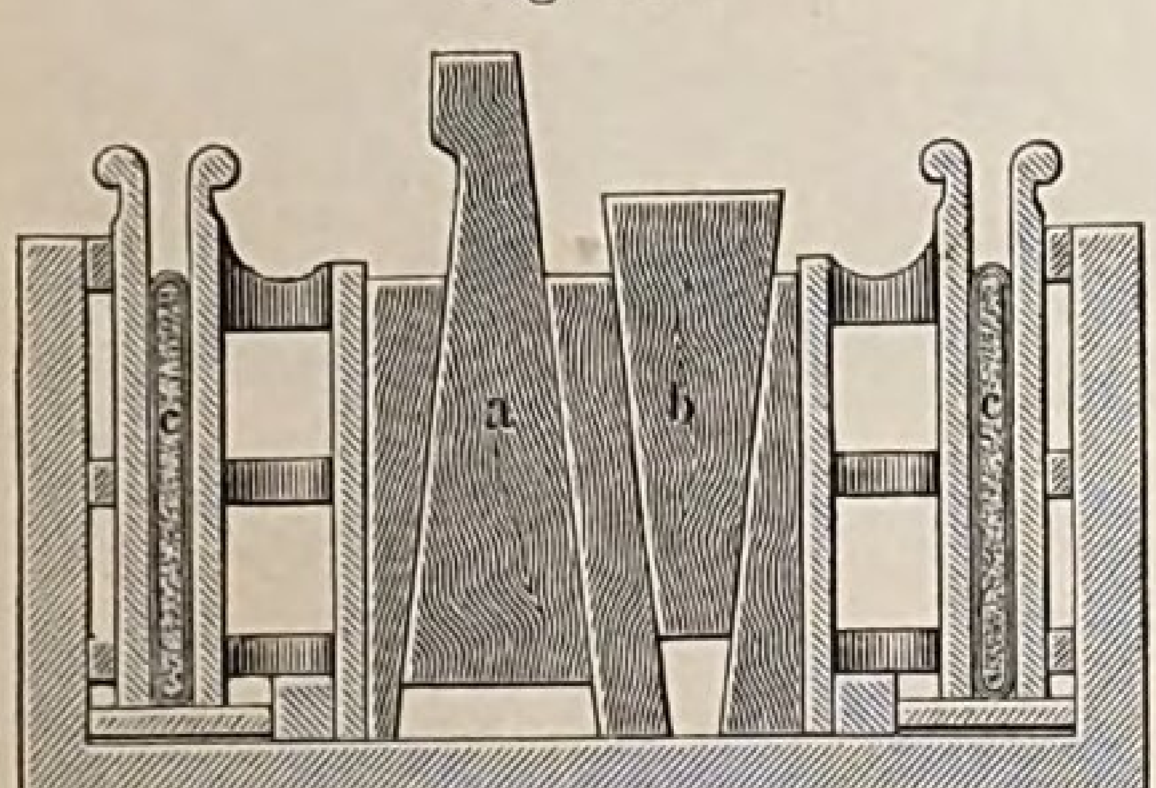


Fig. 262 zeigt eine sogenannte Keilpresse im Durchschnitte; c, c ist der zu pressende Körper, b ist der Keil, durch dessen Hineinschlagen der Druck ausgeübt wird. Das Stück a erleichtert das Auseinandernehmen, indem man es hineinschlägt.

Andere Beispiele des Keils sind viele Instrumente, wie Messer, Beil, Hobel, Stemmeisen, Gewölbsteine, Nadel etc. Die Schere ist eine Combination von Hebel und Keil.

Die schiefe Ebene als Rampe. (Schiefe Ebene im engeren Sinne.) Es sei eine Masse m vom Niveau AA', Fig. 263 (a. f. S.), auf das um h höhere Niveau BB' zu heben.

Ist g die Accelleration der Schwere, so ist eine Kraft $= mg$ erforderlich, um diese Hebung in verticaler Richtung zu bewerkstelligen. Wenn nun aber eine solche Kraft nicht zur Verfügung steht, sondern nur eine kleinere Kraft $= \frac{mg}{n}$, so kann man die Hebung auf einer schie-

fen Ebene bewerkstelligen, deren schiefe Länge $l = nh$ ist. Nimmt man eine Länge $= nh$ in den Zirkel (in der Figur ist $n = 3$) und beschreibt man von a aus den Bogen, der BB' in c schneidet, so ist ab die gewünschte schiefe Ebene, denn wie bereits §. 36 gezeigt wurde, ist die

Fig. 263.

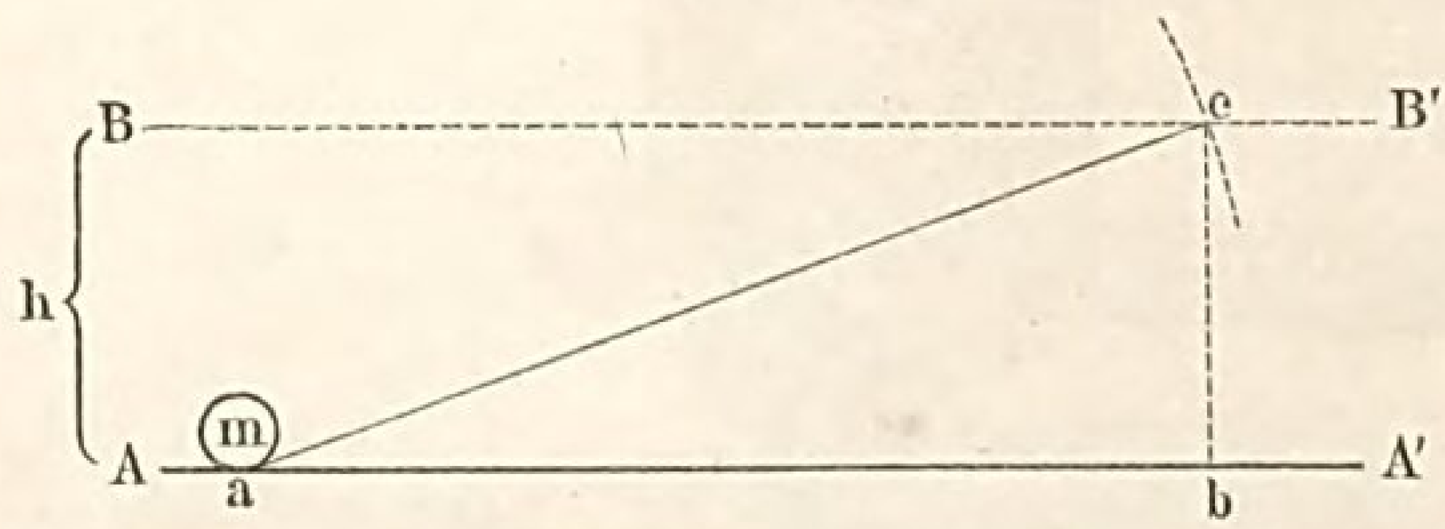
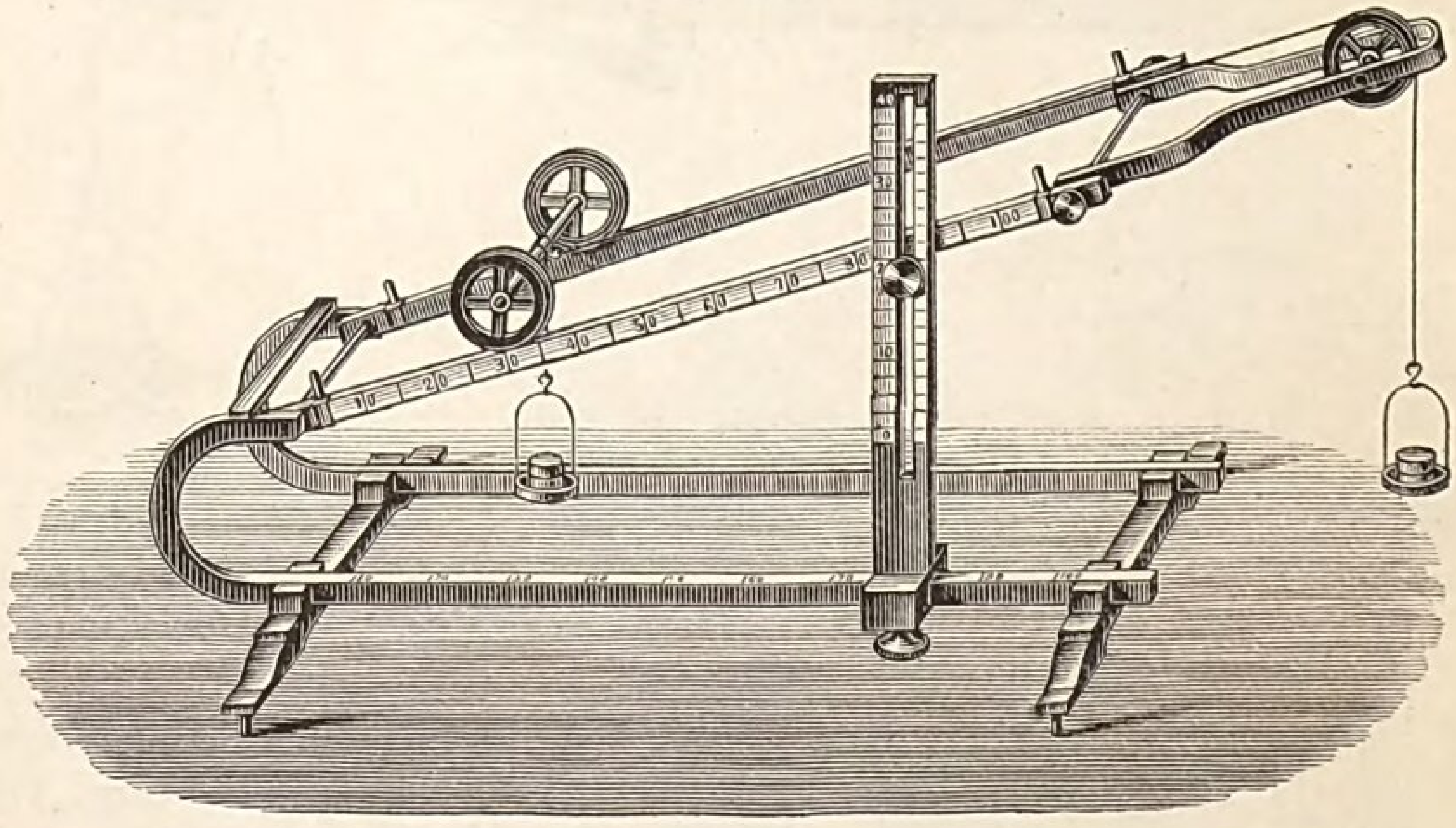


Fig. 264.



längs ab wirksame Componente der Anziehungskraft der Erde auf die Masse m gleich:

$$\frac{mgh}{l} = \frac{mg}{n}.$$

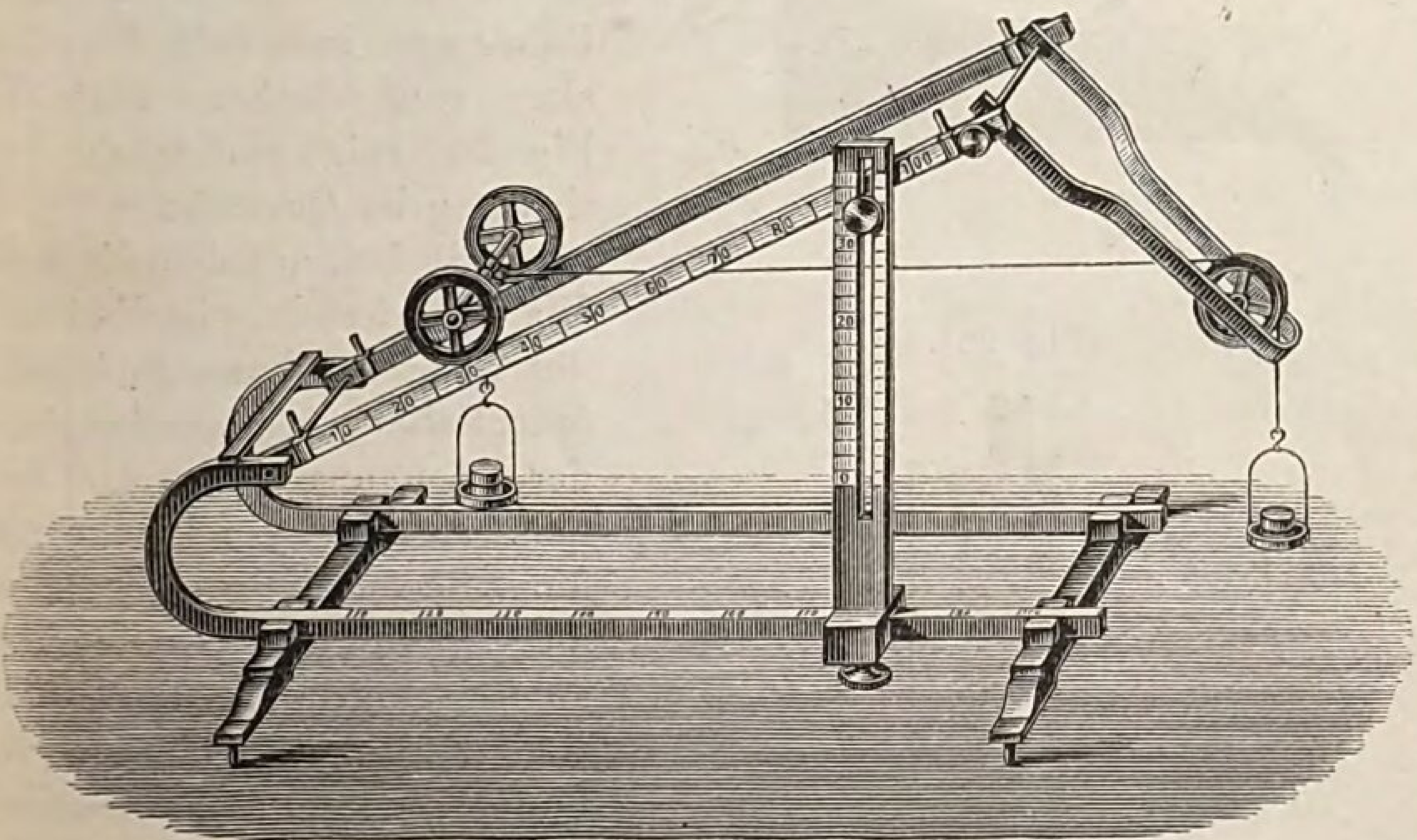
Die schiefe Ebene erleichtert also die zu leistende Arbeit, indem sie die Zusammensetzung derselben ändert, nämlich die Kraft vermindert und den Weg vermehrt, wobei jedoch das Product beider, die Grösse der zu leistenden Arbeit gleich gross bleibt.

Ausser der Hebung um die Höhe h erfolgt hierbei auch noch eine horizontale Verschiebung um die Strecke ab. Da jedoch Bewegung senkrecht auf die Richtung einer Kraft keine Arbeitsleistung erfordert (immer vorausgesetzt, dass keine Reibung zu überwinden ist), so können wir diese horizontale Verschiebung vor oder nach dem Anstiege über die schiefe Ebene ohne weiteren Aufwand von Energie bewerkstelligen. Wir könnten auch die schiefe Ebene in zwei Hälften umgekehrter Nei-

gung zerlegen, wie es thatsächlich bei unseren Haustreppen häufig verwirklicht ist.

Die schiefe Ebene kommt manchesmal auch noch in der Weise zur Anwendung, das die arbeitende Kraft nicht parallel der Länge, sondern parallel der Basis wirkt. Man hat dann den in Fig. 257 bereits dargestellten Fall, nur mit dem Unterschiede, dass dort die schiefe Ebene sich gegen die zu hebende Masse bewegt, während hier die schiefe Ebene ruht und die Masse gegen sie bewegt wird. Wie dort, verhält sich

Fig. 265.



daher auch hier die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

Zur Demonstration der beiden Anwendungen der schiefen Ebenen eignet sich der in Fig. 264 und Fig. 265 dargestellte Apparat *), welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Das Uebersetzungsverhältniss der schiefen Ebene ist ein constantes, weil eben der Neigungswinkel ein constanter ist. Ersetzt man die ebene Gleitfläche derselben durch eine solche mit veränderlicher Neigung, so dass also ihre Projection auf die Zeichnungsebene statt einer Geraden eine Curve erscheinen lässt, so erhält man eine Gleitmaschine mit veränderlicher Uebersetzung, Fig. 266.

Eine damit nahe verwandte Maschine erhält man, wenn man sich eine solche Curve statt auf einer geradlinigen Basis auf der Mantelfläche

*) Derselbe ist nach Angabe des Professors Bertram vom Mechaniker E. Ernecke in Berlin ausgeführt. Eine sehr zweckmässige Form, welche auch den Normaldruck auf die schiefe Ebene zu messen gestattet, ist von Professor Weinhold in seinen „Physikalischen Demonstrationen" S. 70 beschrieben und abgebildet.

eines Cylinders aufgewickelt denkt. Indem dann der Cylinder um seine Achse gedreht wird, schiebt sich die Gleitfläche mit wechselnder Höhe unter der zu hebenden Last vorbei. Eine solche Vorrichtung ist das Excentrik *).

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine der Vorrichtungen beschreiben, welche an Wagen angebracht werden, um die Arretirung des Balkens und der Schalen zu bewerkstelligen. Wie wir in §. 52 mitgetheilt haben, enthält die Wagsäule eine cylindrische Röhre und innerhalb derselben ein cylindrisches Stäbchen. Fig. 267 zeigt eine solche Vorrichtung im Querschnitt **). *B* ist der Boden, auf dem die hohle Wagsäule *b* steht, *r* ist die Röhre, durch deren Hebung die Schalen (oder Gehänge) freigesetzt, durch deren Senkung sie arretirt werden. *s* ist der cylindrische Stab, durch dessen Hebung der Balken arretirt, durch dessen Senkung er freigemacht wird. *l* und *h* sind zwei mit einander verbundene excentrische Scheiben, welche sich mittelst eines auf dem viereckigen Zapfen aufzusteckenden Schlüssels drehen lassen. Auf dem Umfange der Scheibe *h* sitzt die Röhre *r* auf und wird durch die Spiralfeder *f* an die erstere angedrückt. Auf dem Umfange der Scheibe *l* sitzt das am unteren Ende der Stange *s* befindliche Rädchen *i* auf. Wenn der Wagebalken frei spielt, ist die Doppelscheibe so gedreht, dass die Röhre *r* bei dem Punkte *o*, das Rädchen *i* bei dem Punkte *q* aufsitzt. Dreht man in der Richtung des Pfeils, so bleibt zunächst die Röhre unverrückt stehen, weil *o m*

Fig. 266.

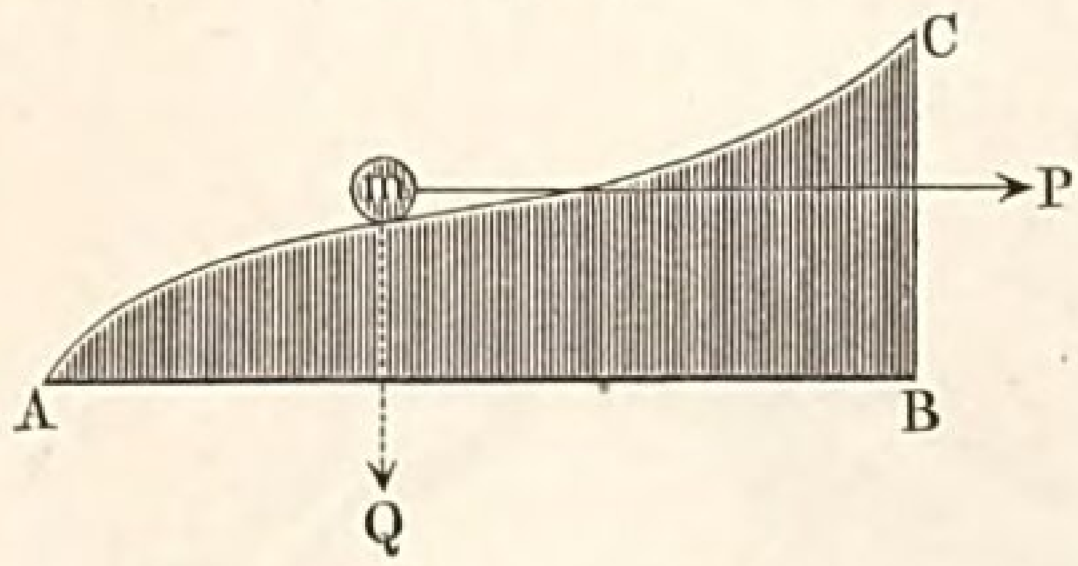
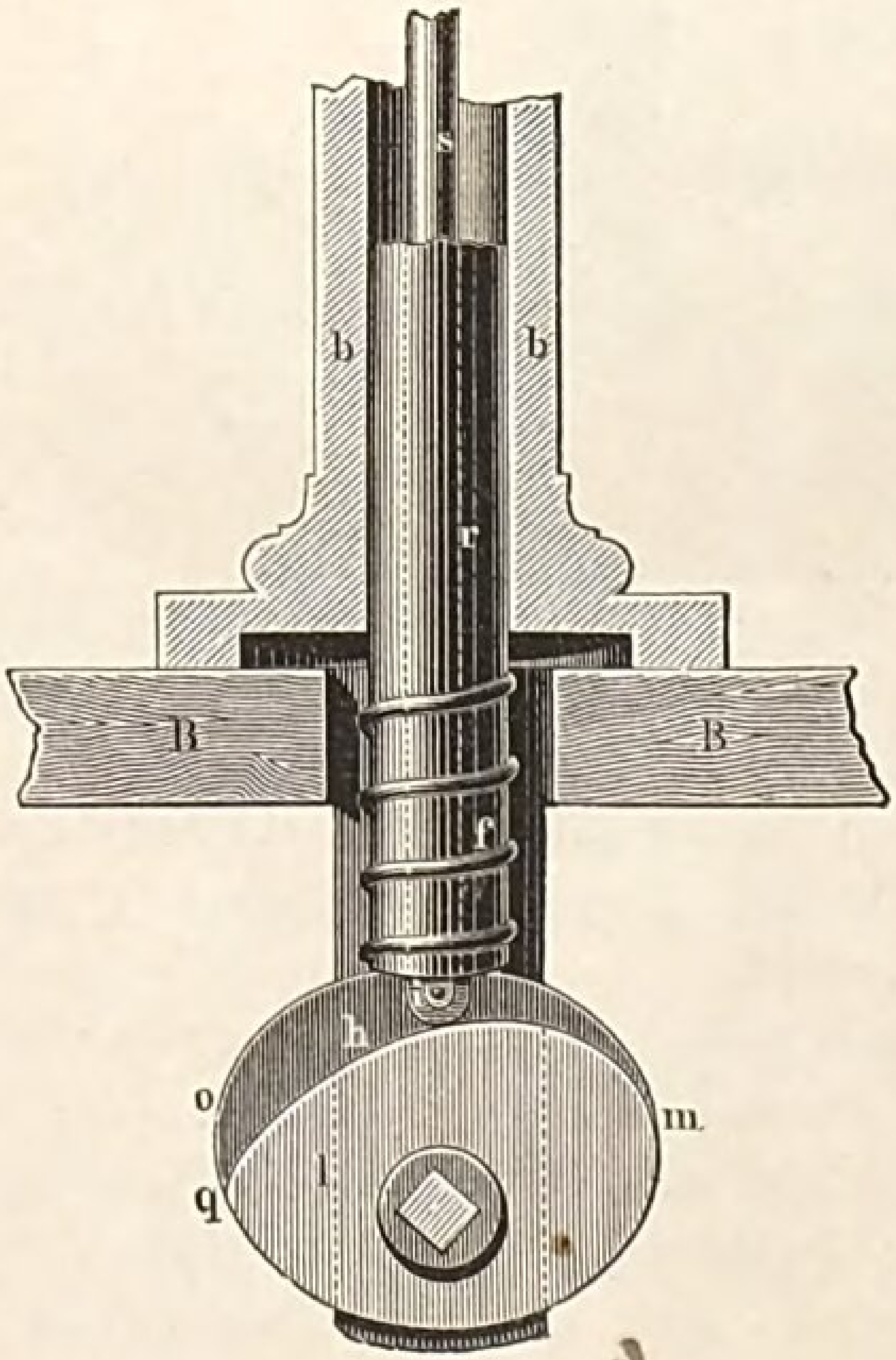


Fig. 267.



*) Strenge genommen sollte man darunter nur solche Vorrichtungen verstehen, deren Gleitfläche nach einem um die Drehachse excentrisch gelegenen Kreis, beziehungsweise Kreissegment geformt ist; doch gebraucht man diesen Namen auch bei anders geformten Gleitflächen.

**) Die Zeichnung bezieht sich auf eine Wage von Kraft in Wien.

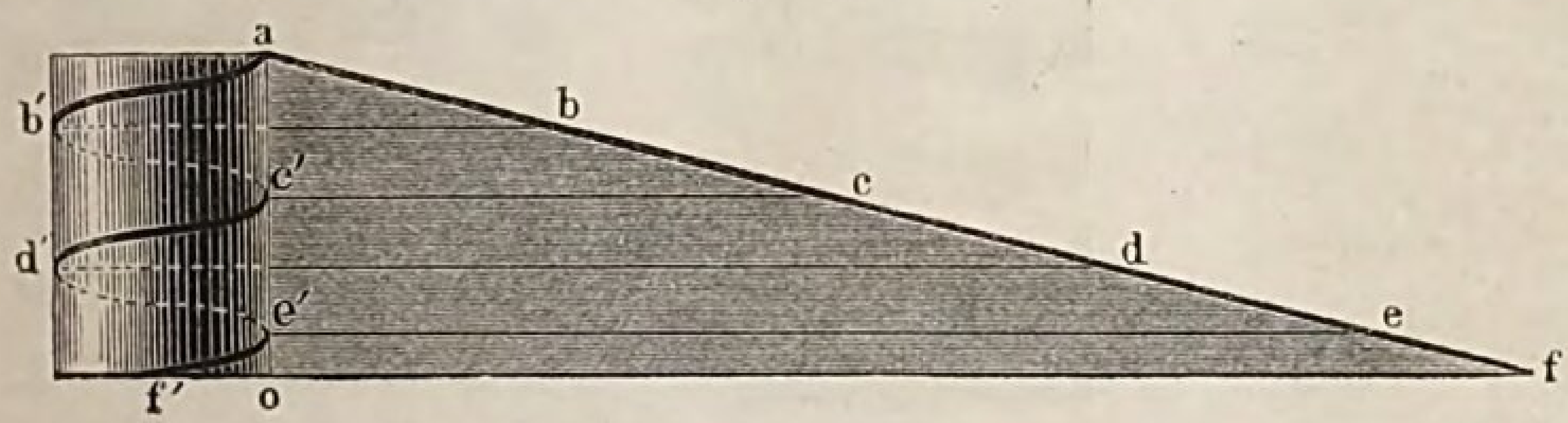
ein concentrischer Bogen ist, während das Rädchen *i* von *q* bis *m* aufwärts gehoben, der Balken unterstützt, also arretirt wird. Dreht man noch weiter nach links, so werden von da an Röhre und Stab gesenkt, so dass hierdurch die Schalen (oder die Gehänge) auf ihre Unterstützungen herabgelassen werden. Bei der Rückbewegung werden also zuerst Röhre und Stab gehoben, hierdurch die Schalen (oder Gehänge) frei, dann beim Weiterzurückdrehen bleibt die Röhre stehen, während der Stab sinkt und hierdurch den Balken frei giebt.

Eine ähnliche Anwendung eines spiralförmig geformten Excentriks findet man bei manchen Copirmaschinen.

Wie man sieht, haben derlei Vorrichtungen eine principielle Verwandtschaft mit dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Schneckenrade. Der Unterschied besteht in der Verbindungsweise, welche bei letzterem durch eine Kette (Seil), hier unmittelbar durch die Gleitfläche hergestellt ist.

Die schiefe Ebene als Schraube. Während die vorangehend beschriebene Maschine als eine schiefe Ebene aufgefasst werden kann, welche mit ihrer Basis auf die Mantelfläche eines auf ihr senkrecht

Fig. 268.



stehenden Cylinders aufgewickelt ist, erhalten wir die Schraube, indem wir eine schiefe Ebene auf einem zu ihr parallelen, auf ihrer Basis senkrecht stehenden Cylinder aufwickeln.

Es sei *aof*, Fig. 268, ein rechtwinkliges Stück Papier, dessen verticale Kathete an einem Cylinder befestigt ist. Wird nun das Papier um den Cylinder herumgewickelt, so bildet die Hypotenuse *af* auf dem Cylinder eine Schraubenlinie, deren Lauf man in der Figur leicht verfolgen kann.

Ist cc' gleich dem Umfange des Cylinders, so wird beim Umwickeln c nach c', also vertical unter a kommen. Der Punkt b kommt nach b', d nach d' etc. Die auf die hintere Seite des Cylinders fallenden Stücke der Schraubenlinie sind punktirt. Die Höhe von a bis c', von b' bis d' etc. ist die Höhe eines Schraubenganges.

Denken wir uns längs der Schraubenlinie um den Cylinder ein Dreieck fortgeführt, welches die Höhe eines Schraubenganges hat, so entsteht ein sogenanntes scharfes Schraubengewinde, wie ein solches in Fig. 269 (a. f. S.) dargestellt ist; denkt man sich aber ein Viereck, dessen Höhe gewöhnlich halb so gross ist als die Höhe eines Schraubenganges, auf

dieselbe Weise um den Cylinder geführt, so entsteht ein flaches Schraubengewinde; ein solches ist in Fig. 270 dargestellt.

Wir haben eben nur solche Schraubengewinde betrachtet, welche um einen soliden Cylinder herumgelegt sind; Schrauben, welche auf diese Weise gebildet sind, werden Schraubenspindeln genannt; werden aber die Gewinde auf dieselbe Weise im Innern eines hohlen Cylinders herumgeführt, so entsteht eine Schraubenmutter.

Eine Schraubenspindel ist für sich allein zur Hervorbringung mechanischer Effecte, wie zum Heben einer Last, zur Ausübung eines starken Druckes etc. nicht zu gebrauchen; sie muss mit einer Schraubenmutter so verbunden sein, dass die Erhabenheiten der einen genau in die Vertiefungen der anderen passen. Fig. 271 stellt eine Schraubenmutter dar, welche zu der Schraubenspindel Fig. 270 passt.

Die Schraubenwinde, Fig. 272, ist ganz besonders geeignet, um die Anwendung der Schraube zu erläutern. In der Mitte des durch vier eiserne Säulchen getragenen massiven Messingstückes mn ist die

Fig. 269.

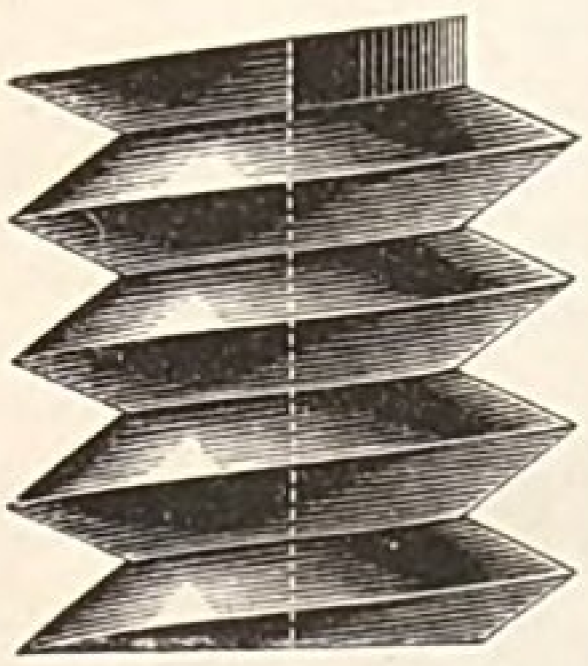


Fig. 270.

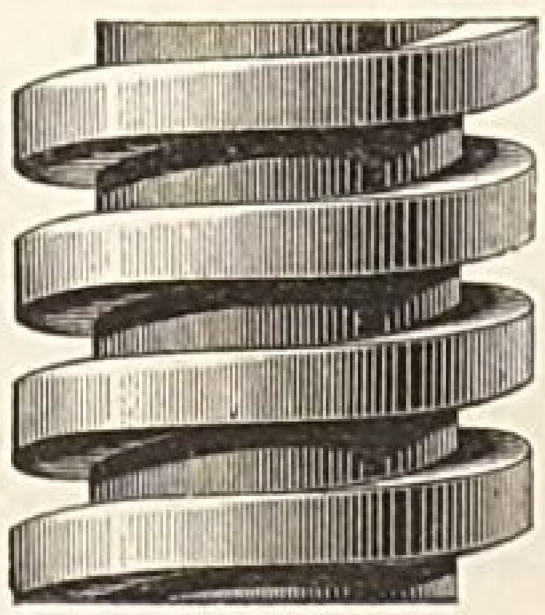


Fig. 271.

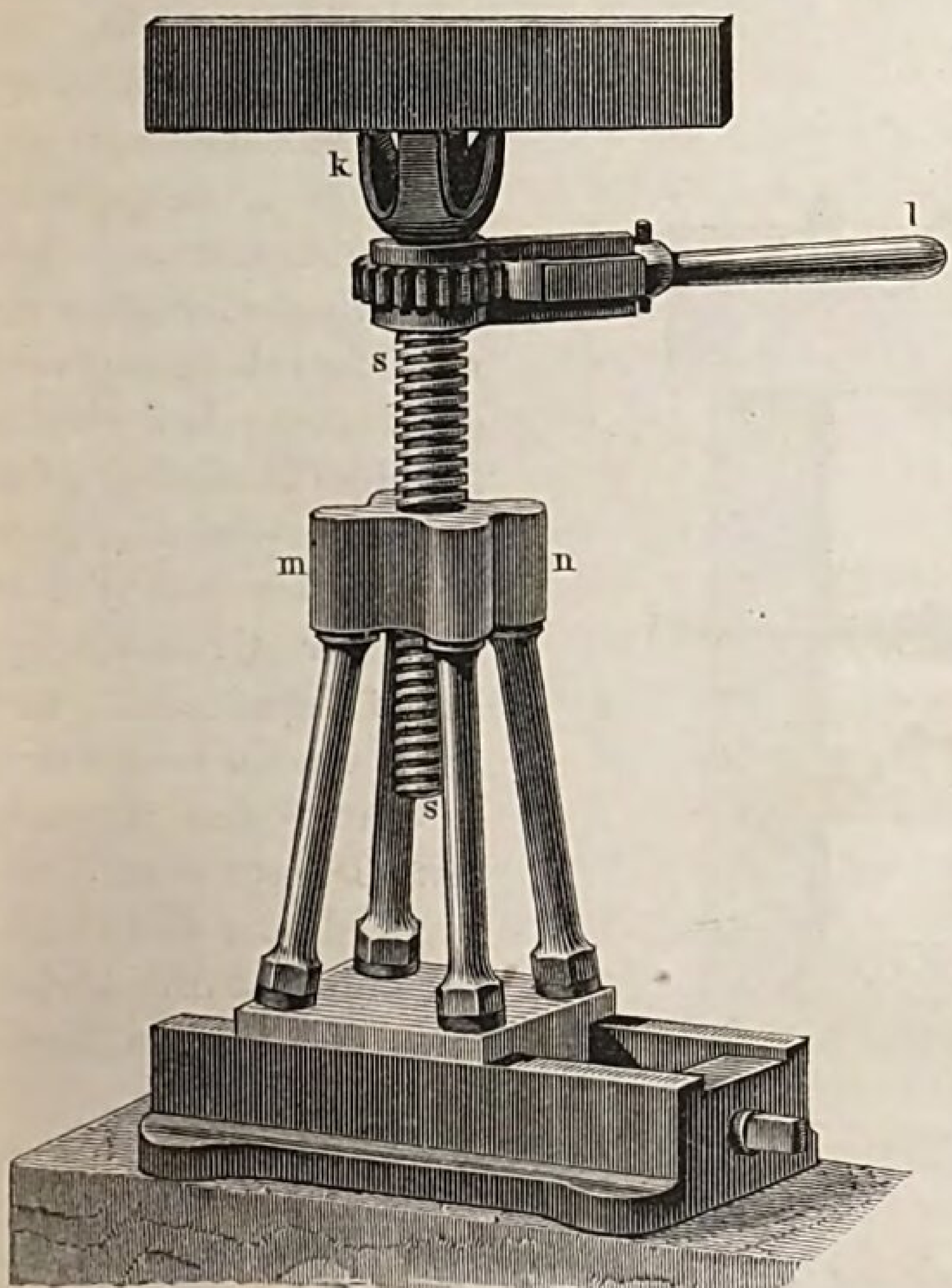


Schraubenmutter eingeschnitten, in welche die eiserne Schraubenspindel ss passt. Sobald nun diese Schraubenspindel umgedreht wird, so wird sie bei jeder Umdrehung um die Höhe eines Schraubenganges auf- oder niedergehen, indem die Windungen der Schraubenspindel auf den Windungen der Schraubenmutter wie auf einer schiefen Ebene auf- und niedergleiten.

Wenn nun auf den Kopf k, mit welchem die Schraubenspindel oben endigt, irgend eine Last aufgelegt wird, so muss diese Last dadurch gehoben werden, dass die Schraubenspindel in der entsprechenden Richtung umgedreht wird, und es ist klar, dass hier dieselben Principien zur Anwendung kommen, als ob die Last auf einer schiefen Ebene hinaufgezogen werden sollte, welche ebenso stark gegen die Horizontale geneigt ist wie die Windungen der Schraube; es wird sich also die (am Umfange der Schraubenspindel angebrachte) Kraft für den Fall des Gleichgewichts an der Schraube zur Last verhalten, wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange der Spindel, da man bei der geringen Steigung solcher Schrauben die Länge eines Schraubenganges ohne merklichen Fehler dem Schraubenumfang gleichsetzen kann.

Nehmen wir an, die Höhe eines Schraubenganges an der Winde, Fig. 272, sei $^1/_{10}$ vom Umfange der Spindel *ss*, so könnte man (abgesehen von der Reibung) mit einer am Umfange dieser Spindel angebrachten Kraft von 1 kg eine auf der Schraube liegende Last von 10 kg heben. Um aber mit der Schraube einen grösseren Effect zu erreichen, wird die Kraft nicht direct am Umfange der Spindel, sondern am Ende eines Hebelarmes *l*, Fig. 272, angebracht. Nehmen wir an, die Länge dieses Hebelarmes sei 10 mal so gross als der Radius der Spindel, so bestände also zwischen der am Ende des Hebels *l* angreifenden Kraft und der auf *k* liegenden Last das Verhältniss von 1 zu 100.

Fig. 272.



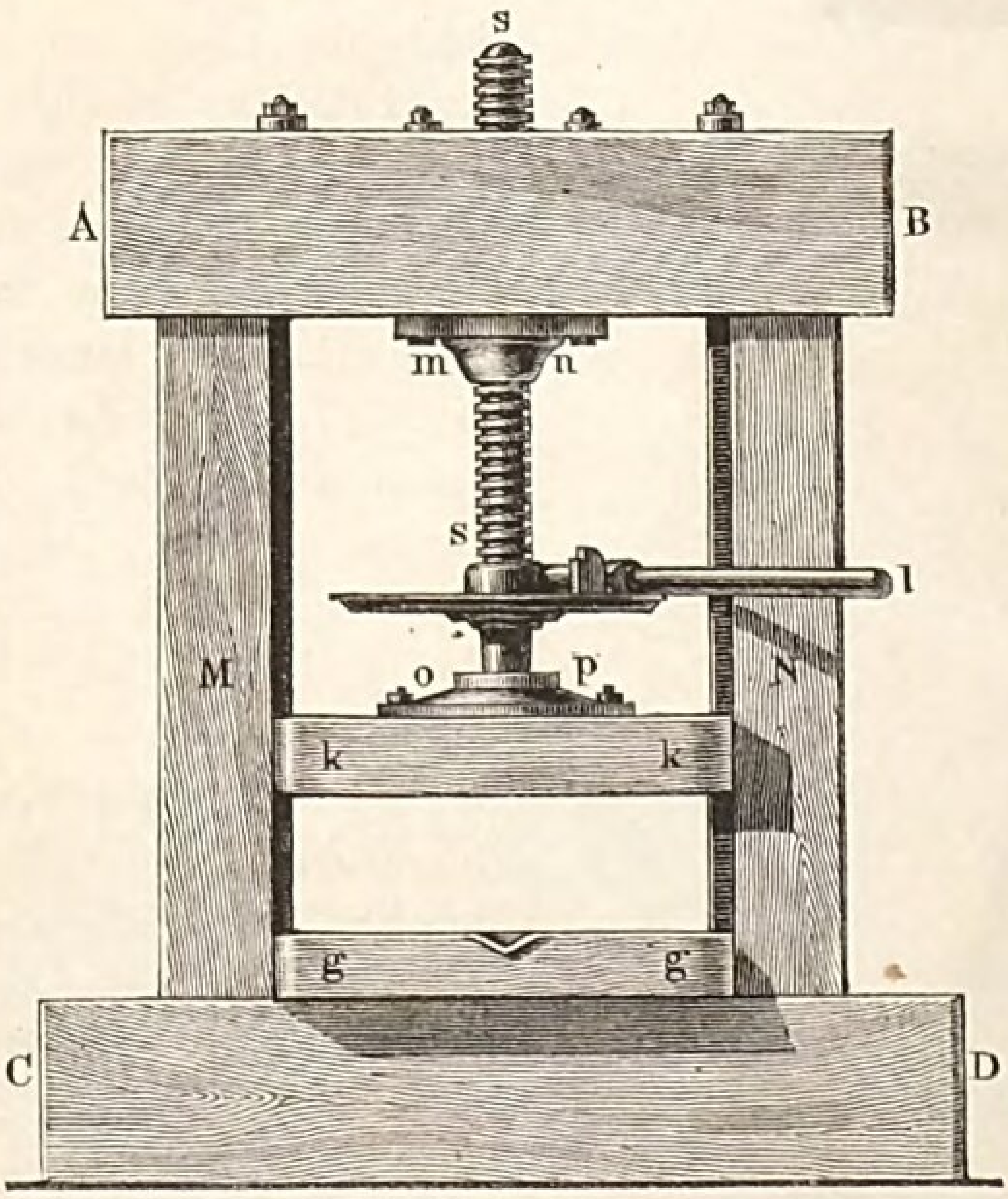
So gut, wie man mit Hülfe einer Schraube eine Last zu heben im Stande ist, kann man sie auch anwenden, um einen grossen Druck auszuüben, und darauf gründet sich ihre Anwendung in der Schraubenpresse, Fig. 273 (a. f. S.). Die Schraubenspindel *SS* passt in die metallene Schraubenmutter *mn*, welche in dem starken horizontalen Balken *AB* befestigt ist. *AB* ist mit *CD* durch zwei starke verticale Balken *M* und *N* verbunden. Die Drehung der Schraube wird mittelst des Hebels *l* bewerkstelligt. — Der auf- und niedergehenden Bewegung der Schraube *SS* folgt die Pressplatte *kk*, ohne jedoch an der Drehung der Spindel Theil zu nehmen. Das untere Ende der Schraubenspindel steckt nämlich mittelst eines Kugelgelenkes Fig. 274 in der auf der Pressplatte befestigten Metallplatte *op*, so dass sich also die Spindel ohne die Pressplatte drehen kann, welch letztere durch die Seitenpfosten *M* und *N* an einer Drehung gehindert wird. Der zu pressende Körper wird zwischen die Pressplatte *kk* und die Bodenplatte *gg* gelegt.

Wenn es gilt, mit Hülfe einer Schraubenwinde eine Last zu heben oder mit Hülfe einer Schraubenpresse einen starken Druck auszuüben, so kann man jedoch nie den nach den oben angedeuteten Principien be-

rechneten theoretischen Effect erreichen, weil ein grosser Theil der Kraft zur Ueberwindung der hier nicht unbedeutenden Reibungswiderstände erforderlich ist.

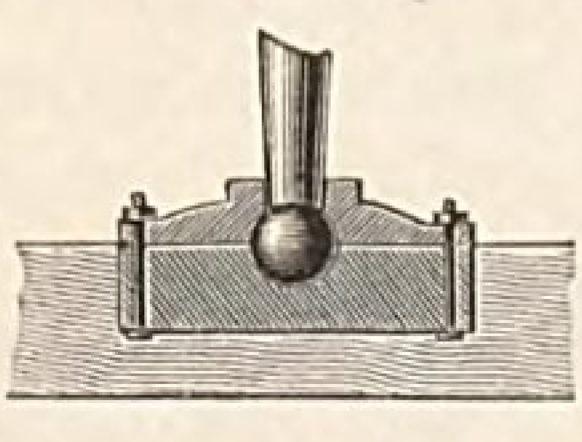
Auch zu anderen Zwecken, als zur Hebung einer Last oder zur Ausübung eines grossen Druckes wird die Schraube angewandt. Eine Schraube, welche in ihrer Längenrichtung nicht verschiebbar ist, wird eine bewegliche Schraubenmutter bei jeder Umdrehung um einen Schraubengang voranschieben; bei gleichförmiger Umdrehung der Schraube wird also auch die Mutter mit gleichmässiger Geschwindigkeit fortgeschoben, und zwar um so langsamer, je feiner das Gewinde ist. Darauf beruht unter Anderem das gleichförmige Fortschieben des Supports an Drehbänken.

Fig. 273.



Da bei einigermaassen feinen Schraubengängen selbst einer ganzen Umdrehung des Schraubenkopfes nur ein sehr geringes Fortschieben entspricht, so benutzt man bei Messinstrumenten eine feine Schraube zur genaueren Einstellung. Soll das Fortschieben mit besonderer Langsamkeit geschehen, so benutzt man die Differentialschraube (ein Cylinder mit zwei Schraubengewinden von wenig verschiedener Schraubenhöhe in entsprechenden Schraubenmuttern). Wir haben eine solche bei der Beschreibung des Kathetometers erwähnt. Ihre Wirksamkeit ist ganz analog der Differentialwelle.

Fig. 274.



Die Anwendung der Mikrometerschraube zum Messen und Theilen wurde im §. 17 besprochen.

Während bei der Seilmaschine und dem Hebel meist eine Umkehrung der Maschine in der Weise, dass man den Angriffspunkt der Kraft mit jenem der Last vertauscht, keiner Schwierigkeit begegnet, ist eine solche umgekehrte Anwendung bei der schiefen Ebene, insbesondere der Schraube wegen der grossen Reibung in der Regel nicht möglich. Es ist dies nur dann ausführbar, wenn der Winkel der schiefen Ebene (die

Neigung der Schraubenwindung) ziemlich gross ist. Beispiele dieser Art wären das Herausschnellen eines schlüpfrigen Apfelkerns zwischen den zusammengepressten Fingern, dann der Schraubendrillbohrer und dergleichen.

Die constructiven Elemente der Maschinen; Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. 64 Die in den vorausgegangenen Paragraphen gegebene Darstellung der einfachen Maschinen ist durchaus keine erschöpfende und nur so weit durchgeführt, um das physikalische Princip der Maschinen klar zu stellen.

Wenn man die Maschinen nicht vom physikalischen, sondern vom technisch-constructiven Standpunkte aus untersucht, so gelangt man zur Einsicht, dass jede Maschine aus gewissen Elementen bestehe, welche stets paarweise vorkommen *).

Ein paar Beispiele werden dies sofort erkennen lassen.

Die Hebelmaschine besteht nicht bloss aus der Hebelstange HH, Fig. 276 (a. f. S.), sondern es gehört als wesentlicher Theil auch jener unterstützende Körper A dazu, um den sich die Stange drehen kann. Beide zusammen bilden ein Elementenpaar.

Ebenso bildet die schiefe Ebene mit dem darauf gleitenden Körper, die Schraube mit der Schraubenmutter je ein Elementenpaar. Die fixe Rolle dagegen enthält schon zwei Elementenpaare, das erste Paar wird durch die feste Achse einerseits und durch den sie umschliessenden Hohlcylinder andererseits gebildet. Das zweite Elementenpaar der Rolle besteht aus der Rinne am Umfange einerseits und dem Seil andererseits. Das zweite Element des ersten Paares (der Hohlcylinder) und das erste Element des zweiten Paares (die Rinne) sind mit einander durch die Scheibe der Rolle zu einem festen Stücke verbunden.

Eine derartige Verkettung von noch mehreren Elementenpaaren wird von Reuleaux eine kinematische Kette genannt.

Die Elemente eines Elementenpaares haben sich gegenseitig als Führung zu dienen, indem sie sich vollständig oder unvollständig umhüllen. Hält man eines dieser Elemente fest, so wird dadurch das andere zugehörige Element veranlasst, seine Bewegungen auf bestimmter vorgeschriebener Bahn auszuführen.

Diese Führung kann entweder eine solche sein, bei welcher das eine Element das andere zwingt, nur diese und keine andere Bewegung zu machen, wie z. B. die Schraubenmutter und die Schraubenspindel, ein Hebel von beistehend gezeichneter Construction, dessen Achse rings umschlossen ist, Fig. 275; oder die Führung ist an sich keine vollständig zwingende und es wird die Beihülfe einer Kraft erfordert, welche dafür sorgt, dass die nicht beabsichtigten Bewegungen nicht eintreten. So z. B. ist der in Fig. 276 abgebildete Hebel nicht gezwungen, sich um

*) Reuleaux, Kinematik.

die Schneide zu drehen, da er sich ja auch von der Unterlage weg bewegen könnte. Nur die Kraft, welche ihn gegen das Achsenlager andrückt, sorgt dafür, dass er nur die gewünschte Bewegung einhält.

Die Elementenpaare werden demnach in zwangsläufig verbundene oder selbständige und in kraftschlüssig verbundene oder unselbständige eingetheilt. Fig. 275 stellt ein ersteres, Fig. 276 ein letzteres dar.

Das kraftschlüssige Elementenpaar ist in gewisser Hinsicht weniger vollkommen als das zwangsläufige, und es geht das Bestreben des Maschinenconstructeurs im Allgemeinen dahin, kraftschlüssige Verbindungen zu vermeiden und durch zwangsläufige zu ersetzen.

Fig. 275.

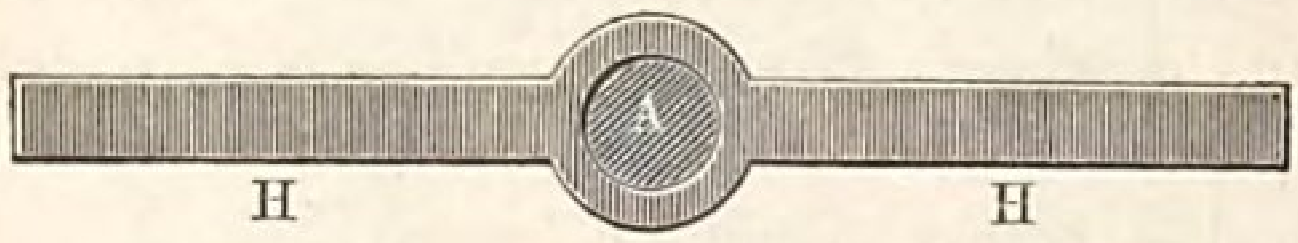
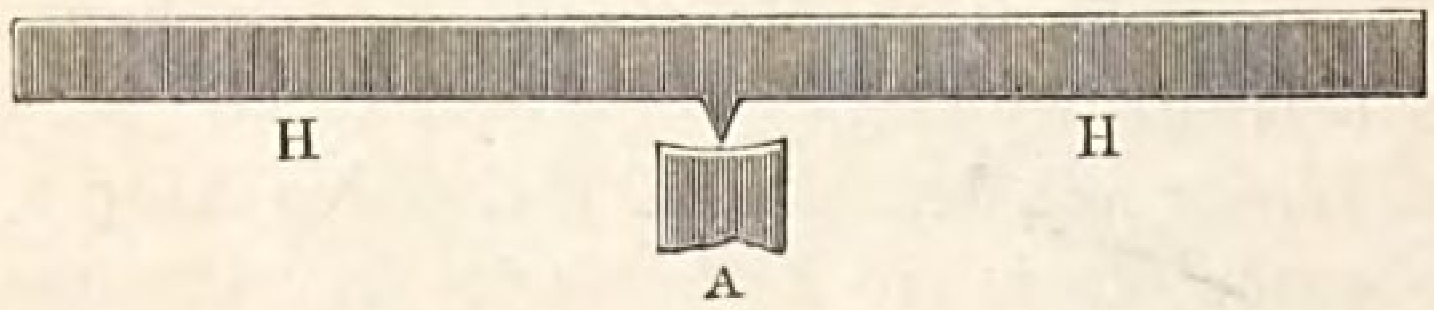


Fig. 276.



Dass dies aber nicht unbedingt in allen Fällen gilt, zeigt z. B. die Construction der Wege, wo die kraftschlüssige Verbindung, Fig. 275, wegen ihrer geringeren Reibung der zwangsläufigen, Fig. 276, überlegen ist.

Es ist einleuchtend, dass man auf dem technisch-constructivischen Standpunkte, indem man von den Elementenpaaren ausgeht, zu einer ganz anderen Classification der Maschinen gelangt als jene ist, zu der wir oben vom physikalischen Standpunkte aus gelangt sind. So rechnet z. B. Reuleaux die fixe Rolle nicht zu den einfachen Maschinen, da sie bereits zwei Elementenpaare enthält. Bezüglich dieses Gegenstandes müssen wir auf das oben citirte Buch von Reuleaux verweisen.

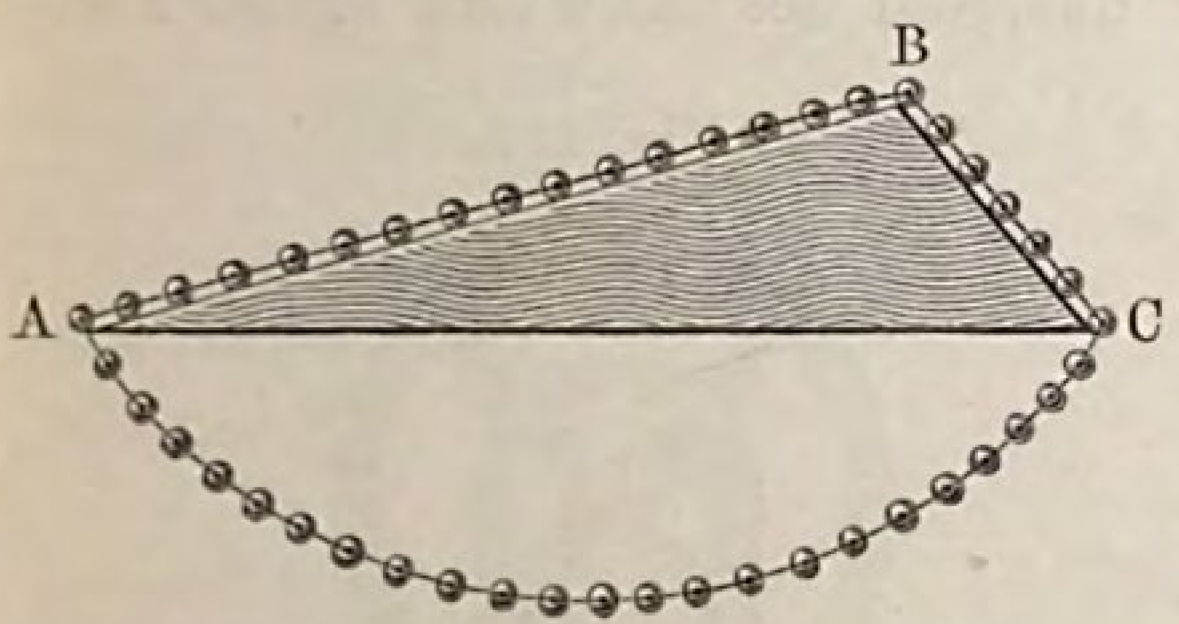
Wir wollen hier zum Schlusse der Lehre von den Maschinen noch eine andere Frage beantworten, welche unzählige Erfinder beschäftigt hat; es ist die Frage, ob es möglich ist, eine Maschine zu construiren, welche sich nicht blos selbst im Gange zu erhalten, sondern auch noch einen Ueberschuss von Arbeitskraft nach aussen abzugeben vermag. Eine solche Maschine wurde mit dem Namen Perpetuum mobile belegt; dass dieselbe unmöglich ist, dürfte nach den vorausgegangenen Erörterungen leicht einzusehen sein.

Gäbe es eine Maschine ohne alle Reibung, so könnte dieselbe doch nie mehr Arbeit abgeben, als sie aufgenommen hat. Sie könnte sich also nur selbst im Gange erhalten. Da es aber nicht möglich ist, die Reibung ganz zu vermeiden, so ist auch das nicht möglich, und muss somit jede Maschine, da sie zur Ueberwindung der Reibung Arbeit abgeben muss, einmal zur Ruhe kommen. Dass diese Einsicht so oft gefehlt hat, ist um so mehr zu verwundern, als der Begründer der Statik, Stevin (1548 bis 1620), über diesen Punkt nicht allein vollständig

richtig gedacht, sondern sogar die Unmöglichkeit, das Perpetuum mobile als etwas Selbstverständliches der Ermittelung des Gesetzes des Gleichgewichtes an der schiefen Ebene zu Grunde gelegt hat.

Er denkt sich ein dreiseitiges Prisma ABC, Fig. 277, über welches eine leicht bewegliche Kette ohne Ende*), wie die Figur zeigt, gelegt ist. Wäre diese Kette nicht im Gleichgewichte, so müsste sie in Bewegung gerathen; da sie dadurch immer in derselben Anordnung bleiben würde, so müsste die Ursache zur Bewegung immer fortdauern.

Fig. 277.



Da es aber undenkbar sei, dass die Kette sich fort und fort in derselben Richtung in Bewegung erhalte, so müsste sie im Gleichgewichte sein. Da nun der untere frei hängende Theil, der aus zwei symmetrischen Hälften besteht, für sich im Gleichgewichte sein muss, so muss es auch der obere aufliegende Theil für sich sein. Dieser Theil besteht aus den zwei Stücken AB und BC, deren Massen sich verhalten wie die Längen der schiefen Ebenen, auf denen sie ruhen. Sollen diese Stücke trotz ihrer ungleichen Massen dennoch gegen einander im Gleichgewichte stehen, so müssen sich die Zugkräfte gleicher Massen längs der schiefen Ebenen umgekehrt verhalten, wie die Längen der letzteren. Dies muss auch dann noch gelten, wenn die schiefe Ebene BC allmälig immer steiler und endlich senkrecht gerichtet wird. Es verhält sich dann die Zugkraft einer Masse längs einer schiefen Ebene zur Zugkraft der frei hängenden Masse wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge. Stevin gelangte so zu denselben Sätzen, die wir in §. 37 und 64 mitgetheilt haben.

Nicht immer liegen die Verhältnisse so einfach und unmittelbar erkennbar vor Augen; aber auch bei complicirten Maschinen bedarf es nur der consequenten Anwendung der an den einfachen Maschinen erkannten Principien, um einzusehen, dass ein Perpetuum mobile unmöglich sei.

Das Trägheitsmoment. Wenn eine beschleunigende Kraft, an einem bestimmten Hebelarm angreifend, eine Umdrehung um eine feste Achse zu bewirken strebt, so wird jede träge Masse, welche mit dieser Achse fest verbunden an der Umdrehung Antheil nimmt, einen der Beschleunigung entgegenwirkenden Widerstand bilden, und es hängt die Umdrehungsgeschwindigkeit ab von dem Verhältniss der beschleunigenden Kraft zur Grösse des Trägheitswiderstandes. 65

*) Stevin dachte sich eine Reihe in gleichen Abständen verbundener Kugeln.

Die Grösse des Widerstandes, welchen eine träge Masse einer Beschleunigung der Umdrehung entgegensetzt, hängt aber nicht allein von der Grösse dieser Masse, sondern auch von ihrer Entfernung von der Umdrehungsachse ab, wie dies durch die folgende Betrachtung anschaulich gemacht werden soll.

An einer horizontalen, möglichst leicht umdrehbaren Achse sei eine Rolle von gleicher Einrichtung wie das Rad der Atwood'schen Fall-

Fig. 278.

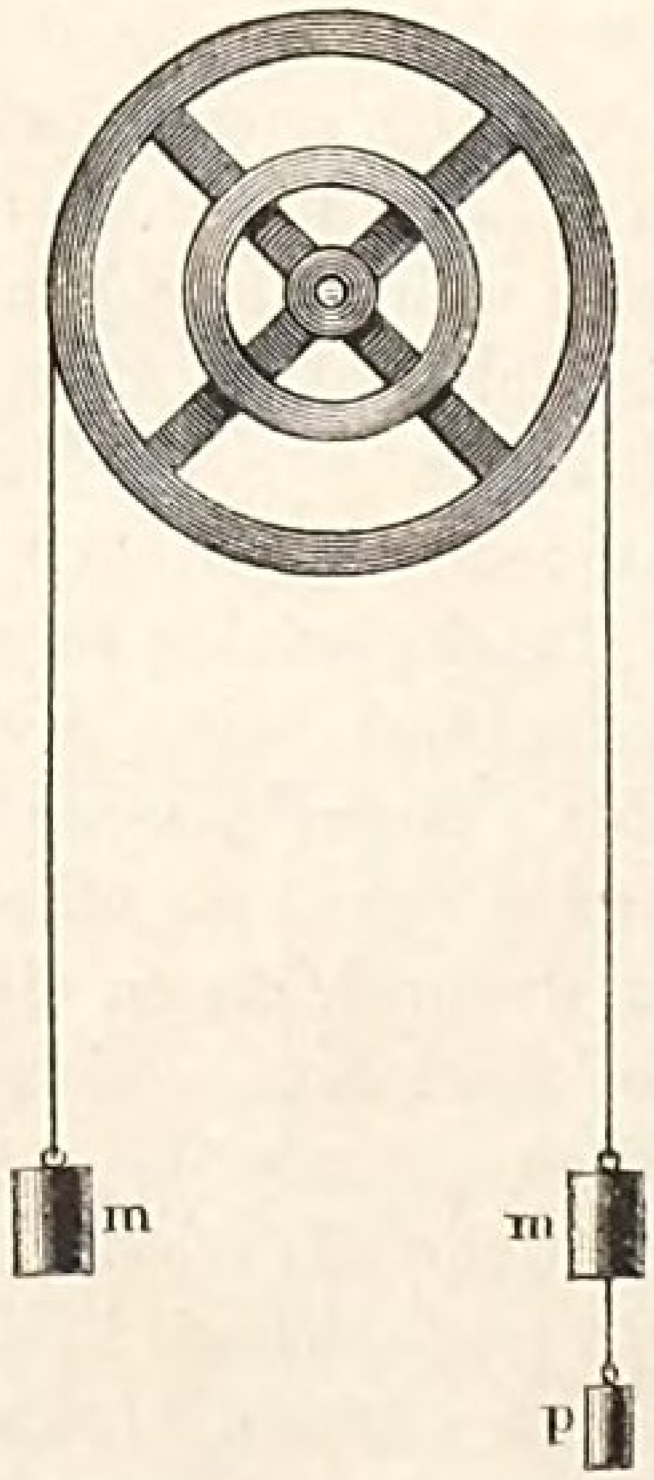
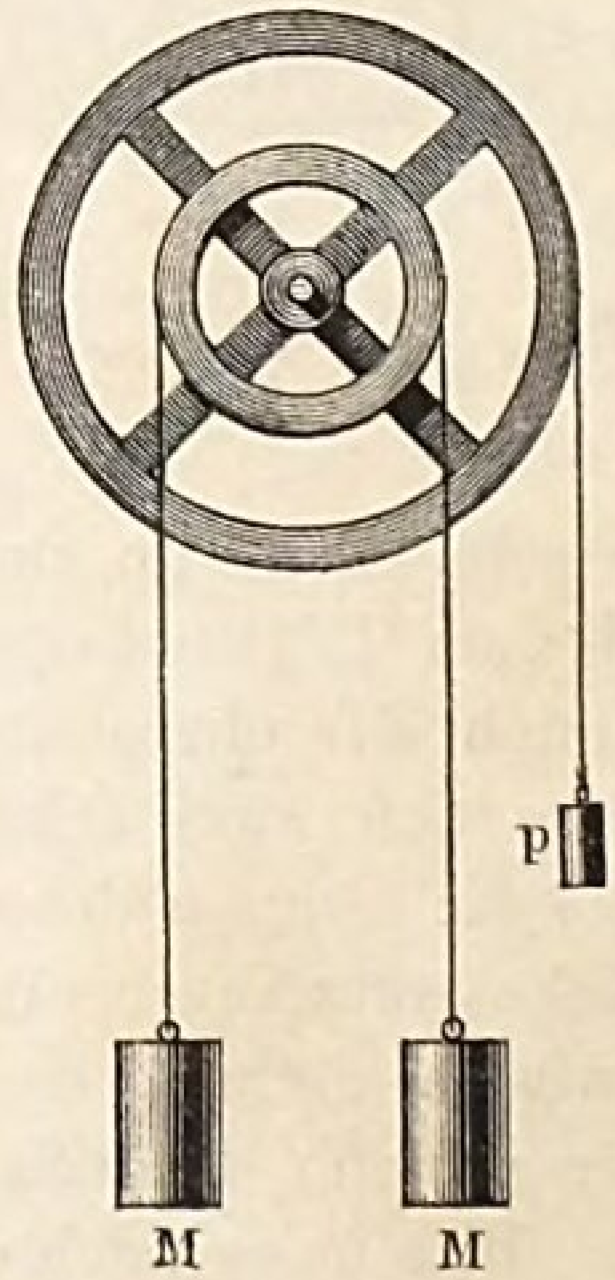


Fig. 279.



maschine befestigt, welche mit zwei Rinnen versehen ist, deren grössere einen doppelt so grossen Durchmesser hat wie die kleinere.

Einmal sei nun über die grössere Rinne eine Schnur geschlungen, und an jedes Ende derselben eine Masse m, Fig. 278, in einem anderen Falle aber sei an jedem Ende einer über die kleinere Rinne geschlungenen Schnur die Masse M angehängt, Fig. 279.

Wird in beiden Fällen dasselbe Uebergewicht p an dem Umfang der grösseren Rinne angebracht, so wird die ganze Vorrichtung in eine mit beschleunigter Geschwindigkeit vor sich gehende Umdrehung versetzt und es fragt sich nun, in welchem Verhältniss muss M zu m stehen, wenn in beiden Fällen die in einer bestimmten Zeit t erlangte Umdrehungsgeschwindigkeit der Rolle, oder was dasselbe ist, wenn der in beiden Fällen vom Uebergewicht p in der Zeit t durchlaufene Weg derselbe sein soll. Es wird dies offenbar stattfinden, wenn die durch p in dem einen Fall, Fig. 278, in der Zeit t der Masse $2m$ mitgetheilte lebendige Kraft gleich ist der lebendigen Kraft, welche im anderen Fall, Fig. 279, das Uebergewicht p der Masse $2M$ in der gleichen Zeit mittheilt.

Wenn p in beiden Fällen in der Zeit t gleiche Wege durchläuft, so ist die Geschwindigkeit, welche jede der Massen M dabei erlangt, gleich $\frac{1}{2}v$, wenn wir mit v die Geschwindigkeit bezeichnen, welche jede der Massen m in einer gleichen Zeit erleidet. Die lebendige Kraft, welche dabei $2M$ erlangt, ist

$$L = M\frac{v^2}{4}$$

die lebendige Kraft, welche die Massen $2m$ erlangt haben, ist

$$l = mv^2$$

soll aber $l = L$ sein, so ergiebt sich:

$$M = 4m$$

Einer beschleunigenden Kraft, welche eine Umdrehung um eine feste Achse zu bewirken strebt, setzt also eine in der Entfernung 1 von der

Fig. 280.

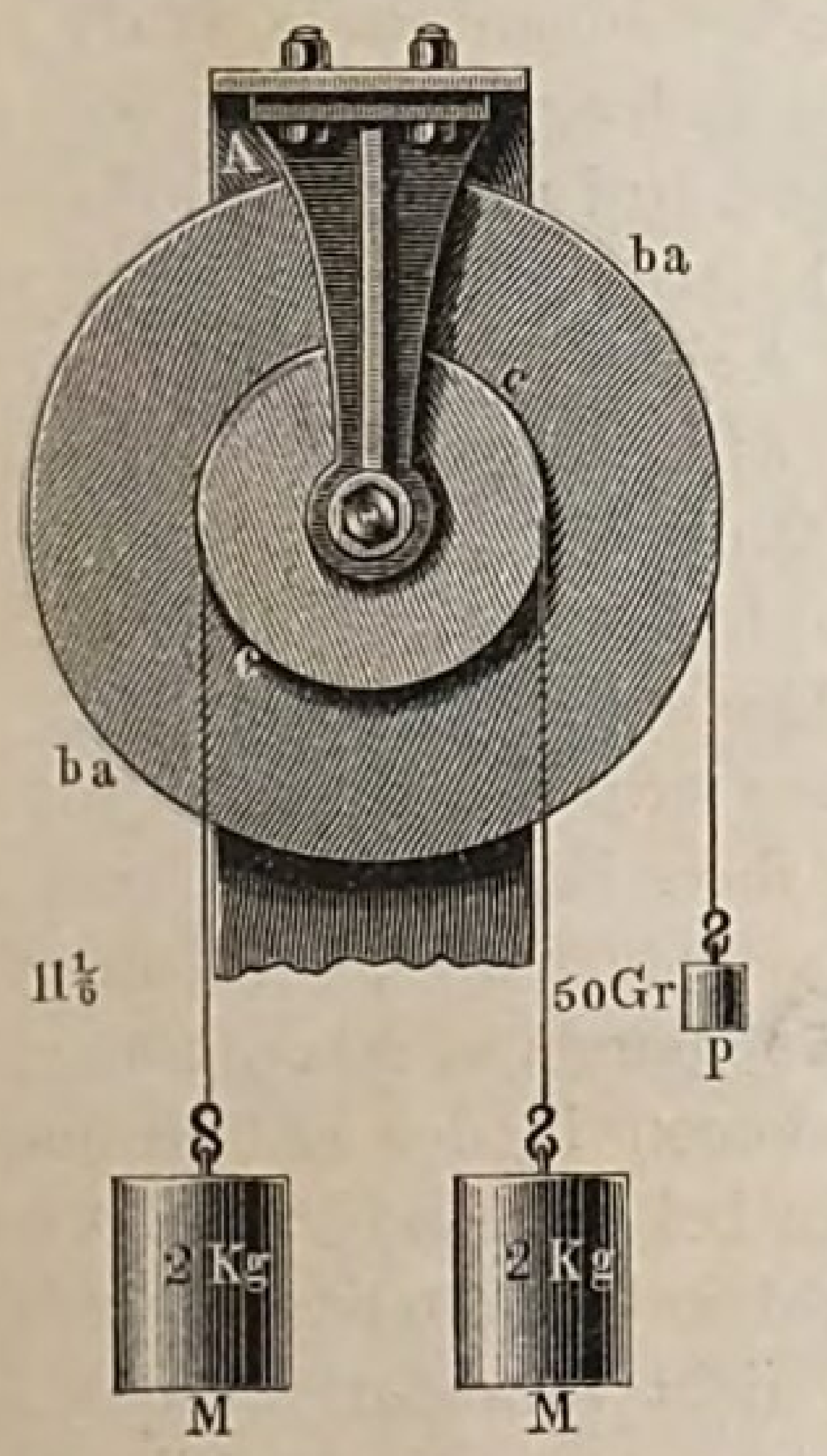
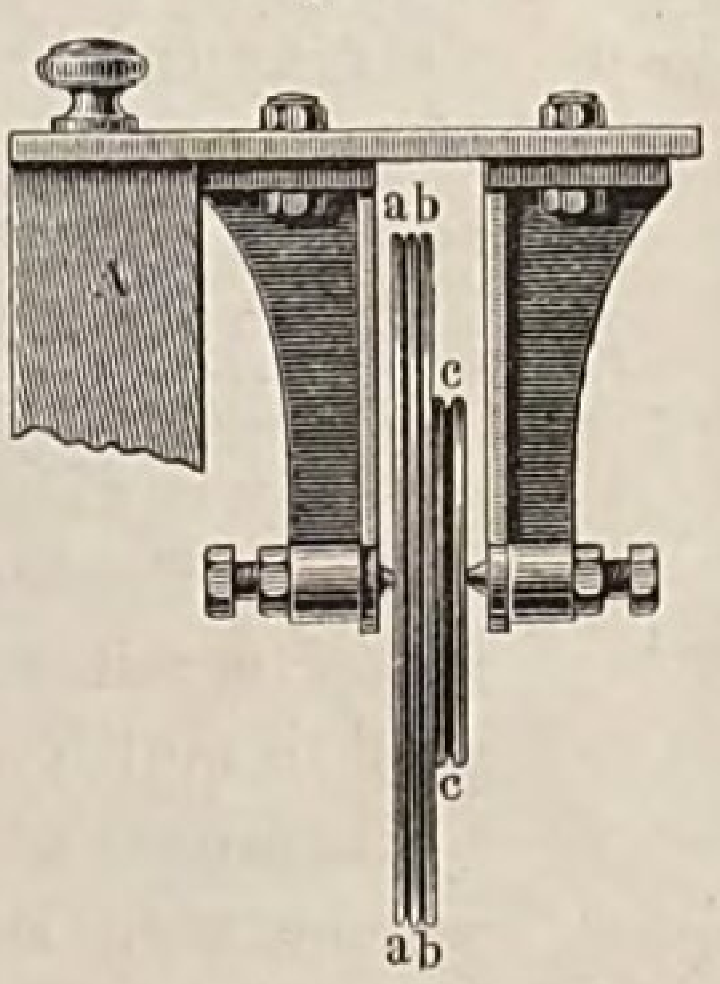


Fig. 281.



Achse befindliche träge Masse $4m$ denselben Trägheitswiderstand entgegen, wie eine in der Entfernung 2 von der Achse befindliche träge Masse m.

Den durch Fig. 278 und Fig. 279 schematisch angedeuteten Apparat hat Kurz in der durch Fig. 280 und Fig. 281 erläuterten Weise ausgeführt. Eine hölzerne Rolle hat drei Rinnen aa und bb, deren jede 90 mm, und cc, welche 45 mm Halbmesser hat. In der Rinne a ist eine Schnur befestigt, welche ein Uebergewicht von 50 g trägt, während eine über b geschlungene Schnur zwei Gewichte von je $\frac{1}{2}$ kg oder eine über c geschlungene Schnur zwei Gewichte von je 2 kg trägt. Die Rolle läuft zwischen Stahlspitzen, deren gusseiserne Träger mittelst einer eisernen

Platte auf dem Gipfel einer hölzernen Säule (etwa der Säule einer Atwood'-schen Fallmaschine) aufgeschraubt sind.

Das Uebergewicht p von 50 g durchläuft den Fallraum von 185 cm in 6 Halbsecunden, wenn über die Rinne b eine Schnur geschlungen ist, welche auf jeder Seite $^1/_2$ kg trägt, während das Uebergewicht p den gleichen Weg in 7 Halbsecunden zurücklegt, wenn über die Rinne c eine Schnur geschlungen ist, welche auf jeder Seite ein Gewicht von 2 kg trägt. — Dass im letzteren Falle die Fallzeit um eine Halbsecunde länger ist, rührt nur daher, dass im letzteren Falle die Reibung an den Spitzen grösser ist. Die Differenz würde verschwinden, wenn die Achse der Rolle auf Frictionsrollen liefe.

Fig. 282.



$\frac{1}{15}$

In gleicher Weise fortschliessend ergiebt sich, dass in 3, 4 ... n mal grösserer Entfernung von der Umdrehungsachse eine 9-, 16 mal ... n^2 mal geringere Masse angebracht werden muss, wenn der Trägheitswiderstand gegen eine die Umdrehung bewirkende beschleunigende Kraft unverändert bleiben soll, oder mit anderen Worten: Wenn bei unveränderter Stärke und bei unverändertem Angriffspunkte der beschleunigenden Kraft träge Massen um eine feste Achse umgedreht werden sollen, so müssen sich die trägen Massen umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Umdrehungsachse, wenn die Winkelgeschwindigkeit stets dieselbe bleiben soll.

Das Product, welches man erhält, wenn man die träge Masse m mit dem Quadrate ihrer Entfernung r vom Drehpunkte multiplicirt, also das Product mr^2, wird das Trägheitsmoment der Masse m genannt; es ist die träge Masse, welche man statt der gegebenen in der Entfernung eins vom Drehpunkte anbringen müsste, wenn bei ungeänderter Grösse und bei ungeändertem Angriffspunkte der beschleunigenden Kraft durch diese Vertauschung die Winkelgeschwindigkeit nicht verändert werden soll.

Das eben entwickelte Gesetz gilt, es mag nun die beschleunigende Kraft eine fortdauernde Umdrehung oder eine hin- und hergehende Bewegung hervorbringen, wie wir sie bei einem Pendel beobachten; eine Pendelvorrichtung ist aber besonders bequem, um die Richtigkeit unseres Gesetzes durch den Versuch zu prüfen.

Die Fig. 282 stellt einen geraden eingetheilten Stab vor, welcher in der Mitte mit einer Schneide a versehen ist, wie die, welche den Drehpunkt eines Wagebalkens bildet. Wenn man nun 1 dm weit unter und über dieser Schneide eine etwa 1 kg schwere Bleilinse befestigt und die Schneide auf ihre Unterlage aufsetzt, so ist die Stange mit ihren Linsen im Zustande des indifferenten Gleichgewichts, denn der Schwerpunkt des Systems fällt mit seinem Drehpunkte zusammen; sobald man aber am

unteren Ende des Stabes ein kleines Uebergewicht anbringt, so ist nun das Ganze ein Pendel. Die Schwingungen dieses Pendels sind aber ungleich langsamer, als die Schwingungen eines einfachen Pendels von der Länge ab; denn die einzige Kraft, welche das ganze System in Bewegung setzt, ist die Schwere des unteren Bleigewichts; dieses hat aber nicht allein seine eigene Masse in Bewegung zu setzen, wie es bei einem einfachen Pendel der Fall gewesen wäre, sondern es hat auch noch die Massen der Linsen bei c und d zu bewegen.

Nimmt man nun, nachdem man die Schwingungszeit dieses Pendels beobachtet hat, die zwei Linsen bei c und d weg und bringt man 2 dm weit von der Schneide zwei Linsen von $^1/_4$ kg, also viermal leichtere, an, so wird durch diese Vertauschung die Schwingungszeit durchaus nicht geändert; sie bleibt auch unverändert, wenn man 3 dm über und unter dem Drehpunkte $^1/_9$ kg schwere Linsen anbringt, während natürlich die Linse b, welche hier allein als beschleunigende Kraft wirkt, stets an derselben Stelle angebracht bleibt.

Berechnung des Trägheitsmomentes. Um das Trägheits- 66
moment eines Körpers, bezogen auf eine gewisse Drehachse, durch Rechnung zu bestimmen, muss man sich denselben in lauter kleine Theilchen zerlegt denken und für jedes Theilchen das Trägheitsmoment berechnen, indem man die Masse desselben mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Drehachse multiplicirt; die Summe aller einzelnen so berechneten Trägheitsmomente ist das Trägheitsmoment des Körpers. Eine derartige Berechnung lässt sich ohne grosse Schwierigkeiten ausführen, wenn es sich um homogene Körper von einfachen Formen handelt.

Es sei z. B. das Trägheitsmoment eines Stabes AB, Fig. 283, zu berechnen, dessen Länge sehr gross ist im Vergleich zu seinem Quer-

Fig. 283.



schnitt, und dessen Umdrehungsachse an dem einen Ende desselben bei A liegt. Denken wir uns den Stab durch Querschnitte in eine grosse Zahl dünner Blättchen zerlegt, deren jedes die Dicke δ hat, so ist die Masse eines solchen Blättchens:

$$\frac{M}{L}\,\delta,$$

wenn M die Masse und L die Länge des ganzen Stabes bedeuten. — Bezeichnen wir ferner mit a, b, c, d etc. den Abstand des ersten, zweiten, dritten, vierten etc. Blättchens, so ist offenbar das Trägheitsmoment des ganzen Stabes:

$$K = \frac{M}{L}\left\{ a^2\delta + b^2\delta + c^2\delta + d^2\delta + \cdots \right\}$$

Nun aber ist $b = a + \delta$, $c = b + \delta$, $d = c + \delta$ etc., es ist also auch:

$$b^3 = a^3 + 3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2\delta + 3b\delta^2 + \delta^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2\delta + 3c\delta^2 + \delta^3 \text{ etc.}$$

Wir können δ beliebig klein annehmen; nehmen wir es so klein an, dass diejenigen Glieder, welche den Factor δ^2 resp. δ^3 enthalten, als verschwindend klein gegenüber den dritten Potenzen von a, b, c, d etc. angesehen werden dürfen, so ergiebt sich:

$$a^2\delta = \frac{b^3 - a^3}{3}$$
$$b^2\delta = \frac{c^3 - b^3}{3}$$
$$c^2\delta = \frac{d^3 - c^3}{3} \text{ etc.}$$

es ist also:

$$K = \frac{M}{L}\left\{\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{c^3 - b^3}{3} + \frac{d^3 - c^3}{3} + \cdots \frac{y^3 - x^3}{3} + \frac{z^3 - y^3}{3}\right\}$$

wenn mit x, y und z der Abstand der letzten Blättchen bezeichnet wird. Die ganze unter der Klammer stehende Summe reducirt sich aber auf $\frac{z^3 - a^3}{3}$. Da aber $z = L$ ist und a wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden kann, so ergiebt sich:

$$K = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

d. h. in Worten: das Trägheitsmoment eines Stabes, dessen einer Endpunkt die Umdrehungsachse bildet, ist dasselbe, als ob der ganze Stab gewichtlos und an seinem anderen Ende eine Masse vereinigt wäre, welche $^1/_3$ von der Masse des gegebenen Stabes beträgt.

Danach lässt sich nun leicht auch das Trägheitsmoment eines um seinen Mittelpunkt C, Fig. 284, rotirenden oder oscillirenden Stabes AB ableiten; denn wenn m und l die Masse und die Länge von jeder der Hälften AC und BC bezeichnen, so ist das Trägheitsmoment von jeder dieser Hälften $\frac{ml^2}{3}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Stabes $^2/_3\, m l^2$. Bezeichnet man aber mit L die Gesammtlänge, mit M die Gesammtmasse des Stabes, so ist $m = \frac{M}{2}$ und $l = \frac{L}{2}$, und wenn man diese Werthe für l und m substituirt, so ergiebt sich für das gesuchte Trägheitsmoment der Werth:

$$K = \frac{M \,.\, L^2}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Das Trägheitsmoment eines prismatischen rectangulären Stabes,

Fig. 284.

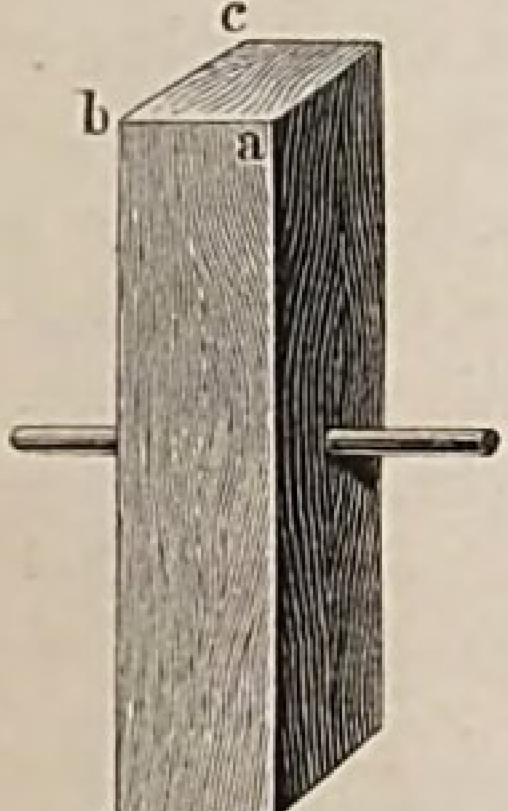


Fig. 285, welcher um eine durch seinen Schwerpunkt gelegte, mit der Kante ab parallele Achse rotirt oder oscillirt, ist:

$$K = \frac{L^2 + B^2}{12} \cdot M \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

wenn L und B die Länge der Kanten bd und bc bezeichnen, welche nicht mit der Umdrehungsachse parallel sind.

Fig. 285.



Die Formel 3) geht in Gleichung 2) über, wenn B sehr klein ist im Vergleich zu L.

Aus Betrachtungen, welche den oben durchgegeführten ähnlich sind, ergiebt sich, dass das Trägheitsmoment einer homogenen kreisförmigen Scheibe, welche um ihren Mittelpunkt rotirt,

$$K = \tfrac{1}{2} M R^2$$

ist, wenn M die Masse und R den Halbmesser der Scheibe bezeichnet.

Das Trägheitsmoment eines Hohlcylinders vom inneren Radius r und dem äusseren Radius R bezogen auf seine Achse ist:

$$K = \frac{M}{2}(r^2 + R^2)$$

bezogen auf eine zur Achse senkrechte Mittellinie (wenn L die Höhe des Cylinders):

$$K = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{r^2 + R^2}{4}\right)$$

Endlich das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius r:

$$K = \frac{2}{5} M r^2$$

Bei Körpern von complicirter Gestalt ist die Berechnung des Trägheitsmomentes ohne Integralrechnung nicht ausführbar und wenn dieselben mehr oder weniger unregelmässig gestaltet sind, ganz unmöglich; in solchen Fällen aber kann man das gesuchte Trägheitsmoment auf experimentellem Wege bestimmen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den fraglichen Körper durch eine beschleunigende Kraft von bekannter Grösse in Rotation zu versetzen und die Geschwindigkeit zu beobachten, welche er in einer gegebenen Zeit erlangt.

Ein erläuterndes Beispiel bietet die Fallmaschine. An einer derartigen Maschine musste ein Uebergewicht r von 4 g angewandt werden,

um zu bewirken, dass der Fallraum der ersten Secunde 4,9 cm, also $^{1}/_{100}$ des beim freien Fall in der ersten Secunde durchlaufenen Raumes betrug, während jede der Massen m und n 100 g wog.

Das Uebergewicht von 4 g hat hier offenbar die Trägheit einer Masse zu überwinden, welche 100 mal so gross ist als seine eigene, also 400 g beträgt; da nun die Massen m, n und r zusammen 204 g betragen, so bleiben für das Trägheitsmoment der Rolle noch 196 g übrig, d. h. eine beschleunigende Kraft, welche die Rolle in Rotation zu setzen strebt, hat ein ebenso grosses Trägheitsmoment zu überwinden, als ob die Rolle gewichtlos und nur an ihrem Umfange eine Masse von 196 g angebracht wäre.

67 **Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes oscillirender Körper.** Mittelst des im vorigen Paragraphen abgeleiteten Ausdruckes für die reducirte Pendellänge ist es nun leicht, entweder aus dem Trägheitsmoment und dem statischen Moment eines oscillirenden Körpers die Schwingungsdauer, oder umgekehrt aus der bekannten Schwingungsdauer und dem statischen Moment das Trägheitsmoment zu ermitteln. Auf letzterer Beziehung beruht die experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten oscillirender Körper.

Setzt man in die Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

statt l die reducirte Länge eines zusammengesetzten Pendels, so erhält man die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{g\,G}} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{g\, \Sigma\, m\, r}} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

worin wie früher $\Sigma\, m\, r^2$ die Summe der Trägheitsmomente, $g\, \Sigma\, m\, r$ die Summe der statischen Momente (nach absolutem Maasse gemessen) vorstellen.

Bringt man nun an dem oscillirenden Körper, der diese Schwingungsdauer besitzt, noch eine Masse vom Trägheitsmoment Q an, ohne an dem Drehungsmoment etwas zu ändern, so wird die dadurch verlängerte Schwingungsdauer gegeben sein durch:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{K + Q}{g\,G}} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

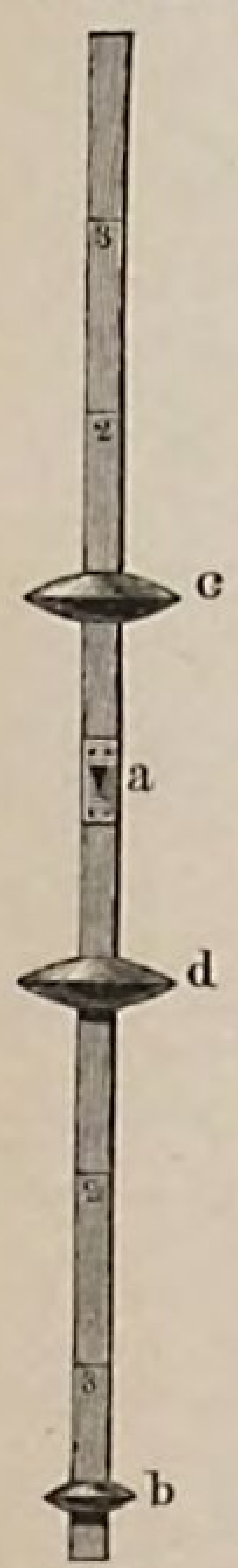
Aus den Gleichungen 1) und 2) ist es aber leicht, sowohl das Trägheitsmoment K, als auch die im Abstande Eins wirksame beschleunigende Kraft $g\,G$ oder auch die Masse G zu berechnen, durch deren Gewicht diese Kraft hervorgebracht wird. Man findet:

$$K = Q \frac{t^2}{t'^2 - t^2} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

$$g\,G = Q\,\frac{\pi^2}{t'^2 - t^2}, \quad G = \frac{\pi^2}{g}\,\frac{Q}{t'^2 - t^2} \quad \ldots \quad 4)$$

Beispiel: Ein Pendel von der in Fig. 286 dargestellten Einrichtung, dessen Gesammtlänge 110 cm betrug, machte ohne die Linsen c und d 68 Schwingungen in der Minute, woraus sich die Schwingungsdauer per Secunde $t = 0{,}882$ berechnet.

Fig. 286.



Nachdem sowohl 20 cm über als auch 20 cm unter der Schneide eine Linse von 220 g angebracht worden war, während die Linse b unverändert an ihrer Stelle blieb, machte das Pendel 48 Schwingungen per Minute, es ist also $t' = 1{,}25''$. Das Trägheitsmoment der beiden Linsen c und d zusammen ist $= 400 \,.\, 2 \,.\, 220 = 176\,000$, das statische Moment derselben gleich Null.

Man erhält demnach durch Substitution dieser Werthe in 3)

$$K = 176\,000\,\frac{(0{,}882)^2}{(1{,}25)^2 - (0{,}882)^2} = 174\,508$$

Die im Abstande 1 cm erforderliche beschleunigende Kraft ist:

$$g\,G = Q \cdot \frac{\pi^2}{t'^2 - t^2} = \frac{176\,000 \cdot (3{,}14159)^2}{(1{,}25)^2 - (0{,}882)^2} = 2\,213\,991 \text{ Dyn.}$$

entsprechend dem Zuge einer Masse von:

$$G = \frac{2\,213\,991}{980{,}9} = 2257 \text{ g}$$

d. h. das Pendel, Fig. 286, schwingt ohne die Linsen c und d gerade ebenso, als ob an einer gewichtlosen Stange 1 cm weit von der Schneide eine Masse von 174 508 g angebracht wäre, auf welche eine beschleunigende Kraft von 2 213 991 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 2257 g) wirkt. Würde man die Masse im Abstande von 1 dm vom Drehpunkte anbringen, so müsste sie 1745,08 g betragen und durch eine Kraft von 221 399,1 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 225,7 g) in Bewegung gesetzt werden.

Dieselbe Methode zur Bestimmung des Trägheitsmomentes lässt sich aber auch noch in Anwendung bringen, wenn ein Körper nicht unter dem Einfluss der Schwerkraft, sondern unter dem Einfluss irgend einer anderen beschleunigenden, aber der Schwerkraft ähnlich wirkenden Kraft oscillirt, welche man jederzeit auch auf das Maass der Schwerkraft zurückführen kann. Ein Beispiel mag dies erläutern.

Ein in einer messingenen Hülse liegender an einem Faden aufgehängter 27 cm langer Magnetstab brauchte 10 Secunden zu einer Schwingung. Um sein Trägheitsmoment zu bestimmen, wurde ein 130 g schwerer Messingring von 6,6 cm mittlerem Radius in der Weise auf-

gelegt, wie Fig. 287 zeigt, und nun betrug die Schwingungsdauer 13 Secunden. Ist der Ring schmal, so kann näherungsweise angenommen werden, dass seine ganze Masse sich im Abstande des mittleren Radius befinde *), sein Trägheitsmoment ist dann gegeben durch:

$$Q = (6{,}6)^2 \cdot 130 = 5662{,}8$$

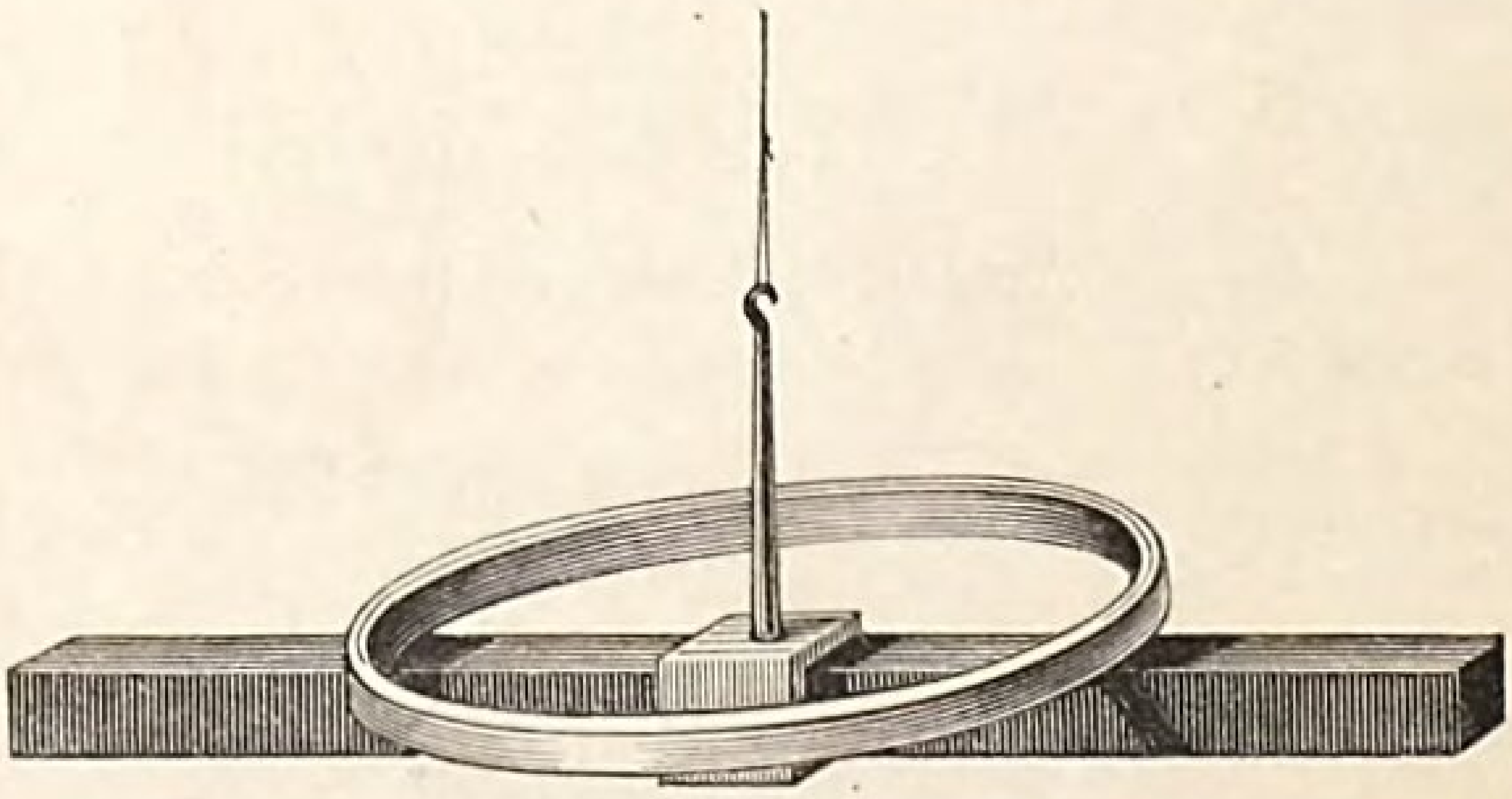
Man findet ferner:

$$K = 5662{,}8 \cdot \frac{10^2}{13^2 - 10^2} = 8207$$

$$g\,G = 5662{,}8 \cdot \frac{(3{,}14\,159)^2}{13^2 - 10^2} = 80{,}502$$

$$G = \frac{80{,}502}{980{,}9} = 0{,}082$$

Fig. 287.



Das Trägheitsmoment des Magnetstabes, auf eine durch seine Mitte gehende Drehungsachse bezogen, ist also gleich dem einer Masse von 8207 g im Abstande von 1 cm von der Achse und die beschleunigende Kraft des Erdmagnetismus wirkt auf den Magnetstab gerade so stark wie eine Kraft von 80,502 Dynen, die im Abstande 1 cm angreift. Diese Kraft wäre gleich dem Zuge einer Masse von 0,082 g.

68 **Rollen über die schiefe Ebene.** Die im §. 36 abgeleiteten Gesetze des Falles über die schiefe Ebene gelten bezüglich der absoluten Werthe der erreichten Geschwindigkeiten und der Beschleunigung nur unter der Annahme, dass der fallende Körper keine Rotationsbewegung annehme, also nur (ohne Reibung) gleite. Wir wollen jetzt annehmen, dass der Körper ohne zu gleiten auf der schiefen Ebene rolle.

Ist der rollende Körper ein Hohlcylinder (Fig. 288) von geringer Wandstärke, so können wir annehmen, dass seine ganze Masse sich im

*) Die genauere Formel lautet nach §. 66: $Q = \frac{m}{2}(r^2 + R^2)$.

Abstande r, gleich dem Radius des Cylinders, von der Achse befinde. Diese Masse erhält dann beim Rollen gleichzeitig eine fortschreitende Geschwindigkeit längs der schiefen Ebene und eine Rotationsgeschwindigkeit um die Achse. Wir wollen die nach Zurücklegung einer Strecke der schiefen Ebene erlangte Endgeschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung mit v, jene der rotirenden Bewegung mit u bezeichnen. Die Fallhöhe sei $= h$. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Masse m des Körpers auf die Höhe h zu heben, ist gegeben durch $m g h$. Die lebendigen Kräfte nach dem Hinabrollen sind $= \frac{m v^2}{2}$ und $\frac{m u^2}{2}$.

Es muss nun die Gleichung gelten:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m u^2}{2} = m g h$$

Offenbar ist aber $u = v$; man braucht sich nur vorzustellen, dass der rollende Körper stehen bleibe und statt dessen die schiefe Ebene

Fig. 288.

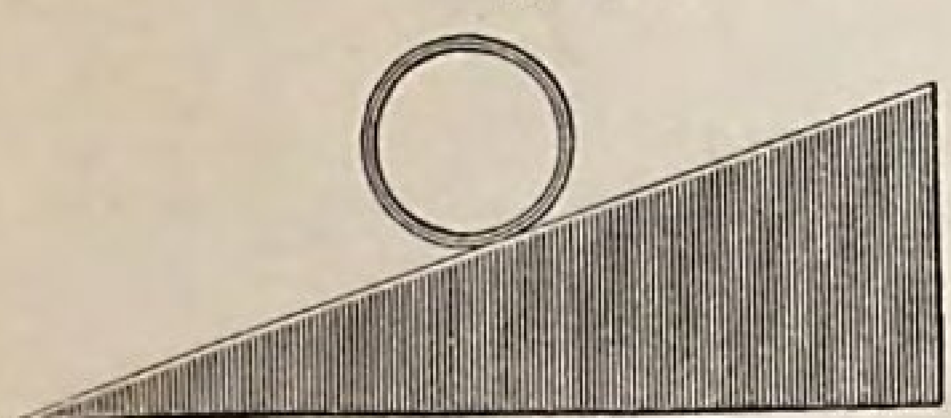
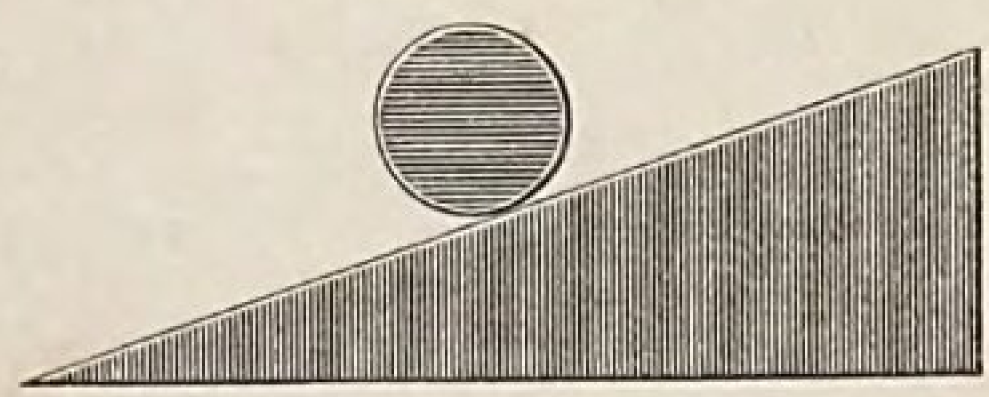


Fig. 289.



unter ihm aufwärts bewegt werde. Hierdurch wird seine rotirende Bewegung ohne die fortschreitende erhalten. Jeder Punkt der Mantelfläche beschreibt dann einen gleich langen Bogen wie die Länge der darunter hinweggehenden Strecke der schiefen Ebene. Es muss also $u = v$ sein und man erhält:

$$v^2 = g h$$
$$v = \sqrt{g h}$$

Da nun beim Falle ohne Rotiren $v = \sqrt{2 g h}$ gefunden wird, so folgt, dass der rollende Hohlcylinder sich mit nur halb so grosser Beschleunigung über die schiefe Ebene bewege, als ein ohne Reibung gleitender Körper. Der absolute Werth der Beschleunigung ist also $\frac{g \sin \alpha}{2}$, wenn α der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist.

Nehmen wir jetzt statt des Hohlcylinders einen Vollcylinder (Fig. 289) von gleichem Radius r. Aus §. 66 wissen wir, dass das Trägheitsmoment eines Cylinders in Bezug auf seine Achse $= \frac{m r^2}{2}$ ist. Das heisst mit anderen Worten, ein Vollcylinder vom Radius r verhält sich einer beschleunigenden Kraft, die ihn zu drehen sucht, gegenüber ebenso, als wäre seine halbe Masse im Abstande r angebracht; er verhält sich also ebenso, wie der früher betrachtete Hohlcylinder, wenn derselbe

die Masse $\frac{m}{2}$ besitzen würde. Die Gleichung für die lebendigen Kräfte lautet demnach:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = mgh$$

woraus:

$$^3/_4\, v^2 = gh$$

$$v = \sqrt{^4/_3\, gh}$$

Die Beschleunigung des über die schiefe Ebene rollenden Vollcylinders verhält sich demnach zu jener beim Falle ohne Rollen wie $^4/_3\, g : 2g$, sie ist also nur $^2/_3$ so gross wie diese. Ihr absoluter Werth ist also $^2/_3\, g \sin\alpha$.

Für eine homogene Vollkugel (Fig. 290) vom Radius r ist das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Durchmesser als Achse gegeben durch:

$$^2/_5\, m r^2$$

Für die Kugel gilt demnach:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{^2/_5\, mv^2}{2} = mgh$$

$$^7/_{10}\, v^2 = gh$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}\, gh}$$

Die Beschleunigung, welche eine über die schiefe Ebene rollende Kugel erhält, ist demnach zu jener Beschleunigung, welche ein ohne Reibung gleitender Körper erhält, im Verhältniss $\frac{10}{7} : 2$ stehend, also nur gleich $^5/_7$ von der letzteren. Der absolute Werth der Beschleunigung ist also $= \frac{5}{7}\, g \sin\alpha$.

Setzen wir demnach die Beschleunigung des ohne Reibung gleitenden Körpers gleich 1, so ergiebt sich folgende Reihe:

Beschleunigung eines gleitenden Körpers			$= 1$
„	einer rollenden Kugel		$= {}^5/_7$
„	eines „	Vollcylinders	$= {}^2/_3$
„	„ „	Hohlcylinders	$= {}^1/_2$.

Wollten wir die Beschleunigung noch weiter verringern, so müssten wir den Versuch so einrichten, dass die Geschwindigkeit der Rotationsbewegung der Masse grösser wird.

Wenn wir z. B. ein schweres Rad, Fig. 291, vom Radius R und der Masse m durch Speichen ohne Masse an die Welle vom Radius r, die wir uns ebenfalls ohne Masse vorstellen, befestigt denken und die Welle über die schiefe Ebene rollen lassen, so dass das Rad sich frei umdrehen kann, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m\left(v \frac{R}{r}\right)^2}{2} = m g h$$

woraus:

$$v = \sqrt{2 g h \cdot \frac{r^2}{R^2 + r^2}}$$

folgt. Man sieht sofort, dass durch Vergrösserung von R gegenüber r die Beschleunigung beliebig weit verkleinert werden kann.

Wollte man in entgegengesetzter Weise einen Körper construiren, der möglichst schnell über eine schiefe Ebene rollt, so müsste man ihm einen grossen Umfang geben, aber möglichst alle Masse in der Achse concentriren. Ein Rad mit sehr leichtem Radkranze und eben solchen

Fig. 290.

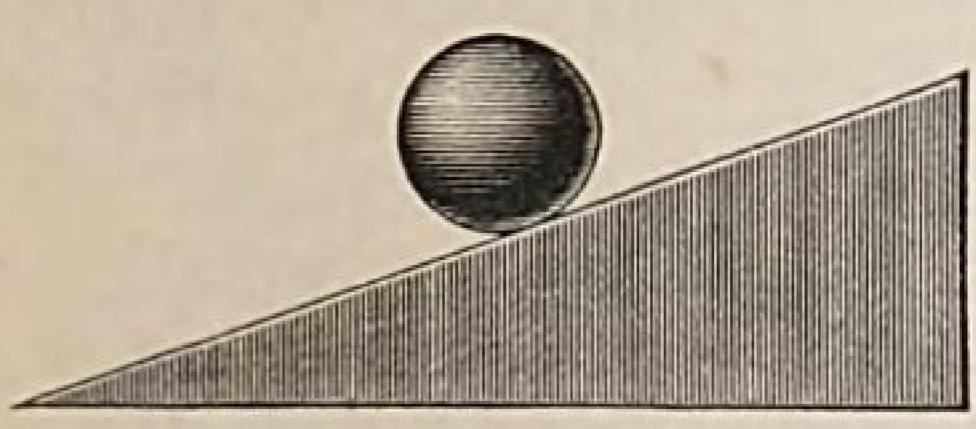
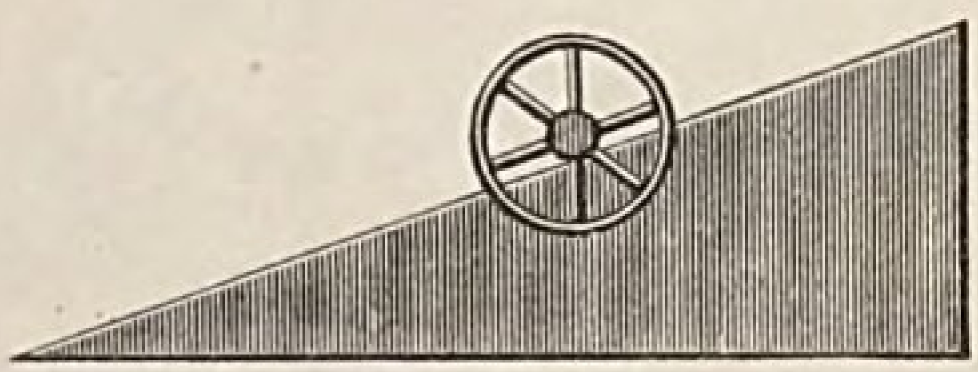


Fig. 291.



Speichen, durch dessen Achse ein dünner Bleicylinder gesteckt ist, würde sich dieser Bedingung nähern.

Ein gleitender Körper, dessen Geschwindigkeit durch die Reibung sehr vermindert würde, wäre durch einen auf möglichst leichte Frictionsrollen gesetzten Körper zu ersetzen.

Es ist sehr leicht, sich durch ein Experiment von der Richtigkeit dieser Resultate über die Reihenfolge der Geschwindigkeiten zu überzeugen. Man braucht nur über eine schiefe Ebene gleichzeitig eine Kugel, einen Cylinder und einen Reif rollen zu lassen. Die erste geht voraus, der letzte bleibt zurück.

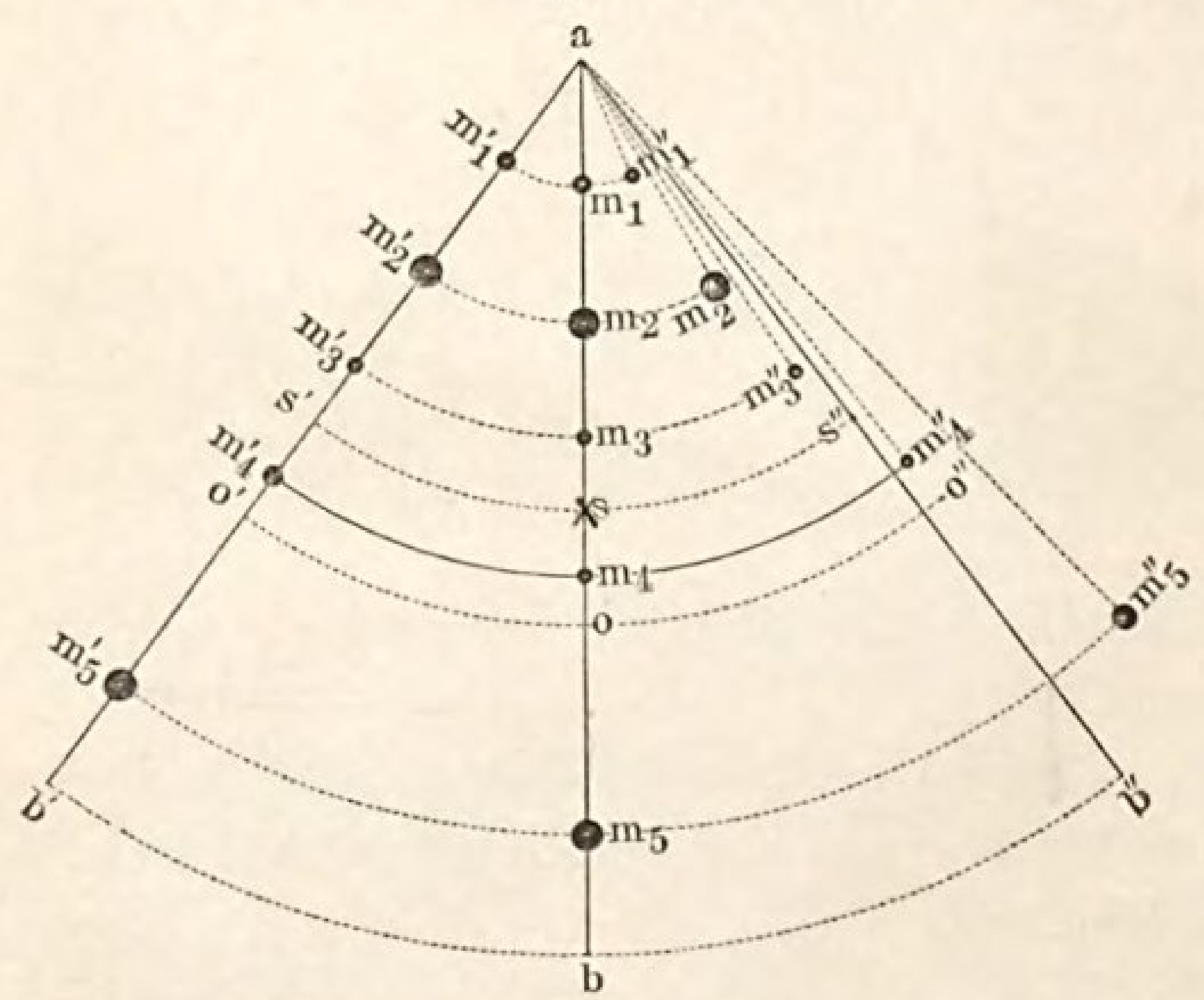
Der Schwingungspunkt. Die im §. 44 entwickelte Formel 69
für die Schwingungsdauer eines Pendels gilt nur für ein einfaches (mathematisches) Pendel. Sie gilt nicht mehr für ein zusammengesetztes (physisches) Pendel, wie sich leicht einsehen lässt, wenn man bedenkt, dass die dem Aufhängepunkte näheren Massen für sich allein eine kürzere Schwingungsdauer haben würden und daher auf die Schwingungen der weiter entfernten beschleunigend einwirken müssen. Umgekehrt wirken die weiter vom Aufhängepunkt entfernten Massen verzögernd auf die näher liegenden. Es muss demnach an jedem zusammengesetzten Pendel möglich sein, einen Punkt zu finden, welcher durch die übrige Masse des Pendels weder beschleunigt noch verzögert wird, d. h., welcher gerade so schnell schwingt, wie wenn er allein vorhanden ein einfaches Pendel bilden würde, dessen Länge gleich dem Abstande dieses Punktes vom Aufhängepunkte wäre.

Diesen Punkt nennt man den Schwingungsmittelpunkt, kürzer Schwingungspunkt oder Centrum oscillationis*). Er fällt durchaus nicht mit dem Schwerpunkte zusammen.

Den Abstand dieses Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte heisst man die reducirte Pendellänge. Es ist dies die Länge eines einfachen (mathematischen) Pendels von gleicher Schwingungsdauer mit dem zusammengesetzten Pendel.

Zur Auffindung der Lage des Schwingungspunktes wollen wir in derselben Weise vorgehen, wie seinerzeit Huyghens, welcher zuerst eine allgemeine Lösung dieses Problems gegeben hat**). Wir denken uns ein zusammengesetztes Pendel, Fig. 292, bestehend aus einer Anzahl verschieden grosser Massen m_1, m_2, m_3 etc., welche in beliebigen Abständen r_1, r_2, r_3 vom Aufhängepunkte a an einer gewichtlosen Stange befestigt sind. Der gemeinsame Schwerpunkt dieser Massen befinde sich in s, der gesuchte Schwingungspunkt in o. Der Abstand des Schwerpunkts von a ist offenbar gegeben durch den Ausdruck:

Fig. 292.



$$as = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

wofür wir, zur Abkürzung die üblichen Summenzeichen setzend, schreiben können:

$$as = \frac{\Sigma mr}{\Sigma m}$$

Nun denken wir uns das Pendel aus der Gleichgewichtslage ab in die Lage ab' versetzt und losgelassen; dasselbe wird (abgesehen von den Widerständen) gleich hoch steigen als es gefallen ist. In der Lage ab'' angekommen, wird daher auch der Schwerpunkt der Massen gleich hoch gestiegen sein, als er früher gefallen ist. Die Falltiefen und Steighöhen, sowie die Geschwindigkeiten beim Durchgang durch die Gleichgewichtslagen sind bei allen Punkten proportional ihren Abständen von a. Be-

*) Die von Mersenne gestellte Aufgabe, diesen Punkt zu finden, wurde zuerst von Descartes in unzureichender Weise, dann von Huyghens allgemein gelöst. E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung S. 162.

**) Wir folgen der Darstellung von E. Mach, in dem citirten Buche S. 162.

zeichnen wir also die Falltiefe und die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande 1 von a mit h und mit v, so sind:

für die Punkte im Abstande	r_1, r_2, r_3
ihre Falltiefen gleich	$r_1 h$, $r_2 h$, $r_3 h$
ihre Geschwindigkeiten gleich	$r_1 v$, $r_2 v$, $r_3 v$

Die Falltiefe (und Steighöhe) des Schwerpunkts ist gleich $h \frac{\Sigma m r}{\Sigma m}$.

Nun stellen wir uns vor, dass im Momente des Durchganges des Pendels durch die Gleichgewichtslage $a b$ der Zusammenhang der Massen m_1, m_2, m_3 unter einander aufgehoben und nur ihre Verbindung mit dem Aufhängepunkte beibehalten werde, so dass also gewissermaassen das zusammengesetzte Pendel im Momente, wo es zu steigen beginnt, in eine Anzahl einfacher Pendel zerlegt, aufgelöst werde. Wie wir uns dies bewerkstelligt denken, ist für die folgende Betrachtung ganz gleichgültig.

Es ist nun sicher, dass die einzelnen Pendel ungleich weit ausschlagen werden, denn da die längeren Pendel eine grössere Geschwindigkeit hatten, als sie selbständig durch den Fall angenommen hätten, so werden sie höher steigen, als sie gesunken sind. Die kürzeren Pendel, welche in ihrem Fall verzögert waren, werden dagegen weniger hoch steigen, als sie gefallen waren. Denken wir uns sämmtliche Massen in ihrer grössten erlangten Höhe festgehalten, so werden dieselben eine Lage haben, wie sie in der Figur durch $m''_1\, m''_2\, m''_3$ angedeutet ist. Welche Lage wird nun der gemeinschaftliche Schwerpunkt s'' der so gelagerten Massen haben? Huyghens hat durch folgende Schlussweise gezeigt, dass dieser Schwerpunkt genau dieselbe Höhe erreicht haben müsse, welche der Schwerpunkt der verbundenen Massen erlangt haben würde, nämlich wiederum eine Höhe gleich seiner Falltiefe. Der Schwerpunkt der aufgelösten Massen kann erstens nicht höher steigen, als der Schwerpunkt der verbundenen Massen gefallen ist, weil es sonst möglich wäre, durch einen solchen Vorgang Massen durch ihr eigenes Gewicht auf beliebige Höhen zu heben. Der Schwerpunkt kann aber auch nicht weniger hoch steigen, weil sonst eine Umkehrung des Processes ein Höhersteigen ermöglichen würde. Wir haben hier offenbar einen Fall, der mit der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile im Zusammmenhange steht.

Somit ist also sicher, dass der Schwerpunkt s'' der gestiegenen Massen sich auf der Geraden $a b''$ befinden würde und dass seine Steighöhe gleich der früher berechneten, nämlich $= h \frac{\Sigma m r}{\Sigma m}$ sein würde.

Die Steighöhen der einzelnen isolirten Massen m_1, m_2, m_3 können wir berechnen aus ihren Anfangsgeschwindigkeiten $r_1 v$, $r_2 v$, $r_3 v$, mit welchen sie den Anstieg beginnen würden. Dieselben berechnen sich zu:

$$\frac{(r_1 v)^2}{2g}, \quad \frac{(r_2 v)^2}{2g}, \quad \frac{(r_3 v)^2}{2g} \cdots$$

Wir erhalten demnach noch einen Ausdruck für die Steighöhe des gemeinschaftlichen Schwerpunkts, indem wir die einzelnen Steighöhen mit ihren Massen multipliciren und die Summe dieser Producte durch die Gesammtmasse dividiren. Dieser zweite Ausdruck für die Steighöhe des Schwerpunkts wird also lauten:

$$\frac{m_1 \frac{(r_1 v)^2}{2g} + m_2 \frac{(r_2 v)^2}{2g} + m_3 \frac{(r_3 v)^2}{2g} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{v^2}{2g} \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}$$

Setzen wir nun die beiden Ausdrücke für die Steighöhe des Schwerpunkts einander gleich, so kommt:

$$h \frac{\Sigma m r}{\Sigma m} = \frac{v^2}{2g} \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}$$

woraus folgt:

$$\frac{2hg}{v^2} = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 1)$$

Nun fassen wir den Schwingungspunkt ins Auge, dessen unbekannter Abstand $oa = x$ gesucht wird. Dieser Schwingungspunkt ist seiner Definition nach jener Punkt des zusammengesetzten Pendels, welcher mit demselben sich ebenso bewegt, wie er sich bewegen würde, wenn er für sich allein ein einfaches Pendel bildete. Als Punkt des zusammengesetztes Pendels hat er eine Falltiefe $= xh$ und am Ende des Falles eine Geschwindigkeit $= xv$. Als frei schwingender Punkt hat er eine Falltiefe und Endgeschwindigkeit, welche nach dem Gesetze des freien Falles von einander abhängen nach der Gleichung:

$$xh = \frac{(xv)^2}{2g}$$

woraus $x = \frac{2gh}{v^2}$ und mit Rücksicht auf 1):

$$x = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 2)$$

als Abstand des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte oder reducirte Pendellänge erhalten wird.

Der Zähler des obigen Ausdruckes für die reducirte Pendellänge ist das Trägheitsmoment der ganzen Pendelmasse in Bezug auf den Aufhängepunkt, der Nenner ist die Summe der Producte jeder einzelnen Masse mit ihrem Abstande vom Aufhängepunkt, wobei die Abstände nach aufwärts negativ zu rechnen sind. Multiplicirt man das Product mr noch mit der Accelleration der Schwere g, so ist mgr das statische Moment und $g \Sigma m r$ die Summe der statischen Momente.

Wir bekommen also in Worten ausgedrückt im absoluten Maasssysteme *) reducirte Pendellänge =

$$\text{Acceleration der Schwere} \times \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

Wir wollen dieses Resultat noch auf einem anderen Wege ableiten, da hierdurch die Einsicht in den Sachverhalt befördert werden dürfte.

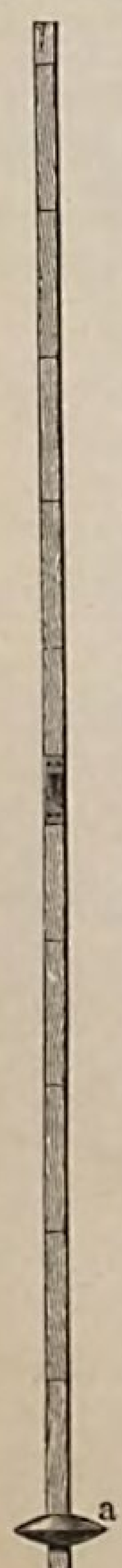


Fig. 293.

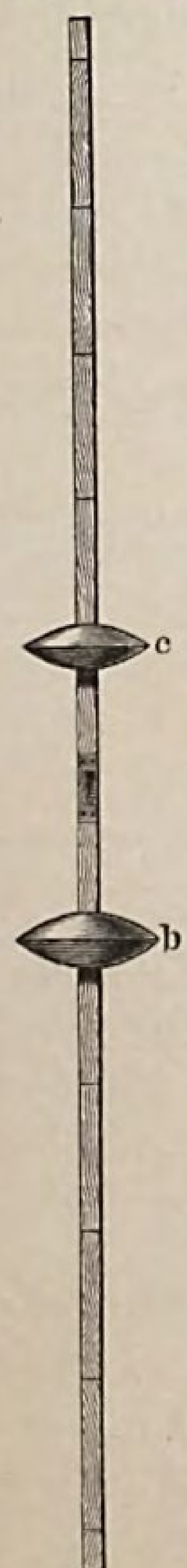


Fig. 294.

An einer hölzernen Stange, Fig. 293, welche um eine in ihrer Mitte angebrachte Schneide oscilliren kann, sei eine m Gramm schwere Linse a (deren Masse wir uns in ihrem Schwerpunkt concentrirt denken wollen) l Decimeter unter der Schneide befestigt, so bildet diese Vorrichtung ein Pendel, dessen Schwingungszeit wir mit t bezeichnen wollen.

Die Schwingungszeit t würde gleich der eines einfachen Pendels von der Länge l sein, wenn die Stange gewichtlos wäre.

Mag nun aber die Stange gewichtlos sein oder nicht, so wird die Schwingungszeit des Pendels unverändert bleiben, wenn man statt der l Decimeter von der Schneide entfernten Linse a 1 dm von der Schneide die träge Masse ml^2 (das Trägheitsmoment der Linse a) anbrächte und auf diese die beschleunigende Kraft mgl der Masse ml (das statische Moment der Linse a) wirken liesse.

Es lässt sich dies im Versuche auf folgende Weise ausführen. Man hat nur 1 dm unter der Schneide eine Linse b, Fig. 294, deren Masse x, und 1 dm über der Schneide eine zweite Linse c anzubringen, deren Masse y durch folgende Bedingungsgleichungen gegeben ist,

$$x + y = ml^2$$
$$x - y = ml,$$

woraus sich

$$x = \frac{m}{2}(l^2 + l)$$

$$y = \frac{m}{2}(l^2 - l)$$

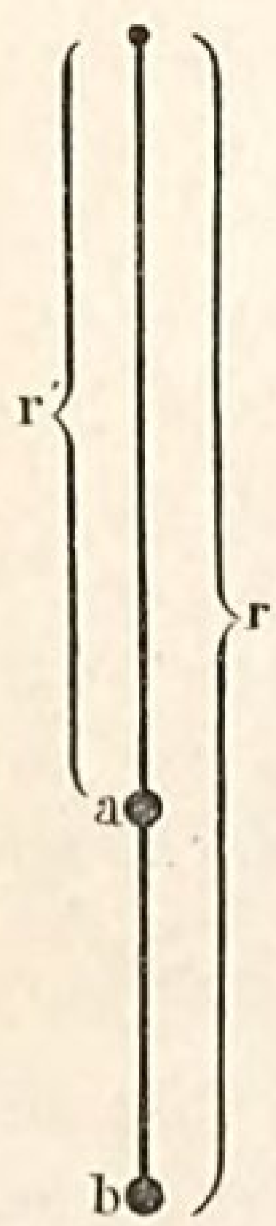
ergiebt.

*) Im praktischen Maasssystem ist mr selbst das statische Moment, da die Kraft, mit der 1 kg zieht, gleich Eins gesetzt wird. Man kann demnach in diesem Maasse setzen: Reducirte Pendellänge = Trägheitsmoment dividirt durch statisches Moment. Der Zahlenwerth der reducirten Pendellänge ist selbstverständlich in beiden Maasssystemen der nämliche, da sich die Grösse g im Zähler und Nenner aufhebt.

Wenn also die Linse a, Fig. 293, 100 g schwer und 5 dm von der Schneide entfernt ist, so wird die Schwingungsgeschwindigkeit dieselbe sein, wie die des Pendels Fig. 294, wenn die 1 dm unter der Schneide befindliche Linse $\frac{100}{2}(25 + 5) = 1500$ g, die 1 dm über der Schneide befindliche Linse c aber $\frac{100}{2}(25 - 5) = 1000$ g schwer wäre, vorausgesetzt, dass die Pendelstange in beiden Fällen dieselbe bliebe.

Umgekehrt lässt sich eine an der besprochenen Pendelstange in der Entfernung 1 von der Schneide befindliche träge Masse K, auf welche die beschleunigende Kraft $G g$ einer Masse G wirkt, ohne Aenderung der Schwingungsdauer durch eine einzige an die Stange angehängte Masse ersetzen, deren Grösse m und deren Abstand l von der Schneide durch folgende Bedingungsgleichungen gegeben ist:

Fig. 295.



$$m l^2 = K$$
$$m l = G,$$

woraus sich ergiebt:

$$l = \frac{K}{G}$$
$$m = \frac{G^2}{K}$$

Hätte man z. B. 1 dm über der Schneide eine Linse von 300 g, 1 dm unter der Schneide eine Linse von 500 g angebracht, so wäre $K = 800$, $G = 200$ und demnach:

$$l = \frac{800}{200} = 4 \text{ und } m = \frac{200 \,.\, 200}{800} = 50.$$

Nehmen wir die Pendelstange in obiger Betrachtung als gewichtlos an, so ist l die Länge eines einfachen Pendels, welches so schnell schwingt wie ein zusammengesetztes, dessen Trägheitsmoment gleich K ist, und welches durch die in dem Abstande 1 vom Drehpunkte angreifende Zugkraft $g\,G$ einer Masse G in Bewegung gesetzt wird.

Nach diesen Betrachtungen können wir nun die Lage des Schwingungspunktes eines aus zwei schweren Punkten zusammengesetzten Pendels berechnen. An einer unbiegsamen, gewichtlosen Linie, Fig. 295 seien bei a und b in den Abständen r' und r vom Drehpunkt die Massen m' und m angehängt, so sind $m'r'^2$ und mr^2 die Trägheitsmomente $g\,m\,r$ und $gm'r'$ aber die statischen Momente derselben. Es ergiebt sich demnach für die Länge eines einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer:

$$l = \frac{m' r'^2 + m r^2}{m' r' + m r}$$

Diese Betrachtung lässt sich auf ein aus 3, 4, 5 etc. aus unendlich vielen materiellen Punkten zusammengesetztes Pendel ausdehnen und man erhält also auf diese Weise dieselbe Formel wie früher, nämlich:

$$l = \frac{K}{G} = \frac{m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + \cdots}{m r + m' r' + m'' r'' + \cdots} = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r}$$

Für eine einfache Stange, welche um einen ihrer Endpunkte oscilliren kann, ist $K = \frac{ML^2}{3}$ (§. 66), während offenbar in diesem Falle $G = \frac{ML}{2}$, wenn M die Masse und L die Länge der Stange bezeichnet. Danach ergiebt sich aber für die Länge l eines einfachen Pendels, welches mit jener Stange gleiche Oscillationszeit hat:

$$l = \frac{ML^2}{3} : \frac{ML}{2} = \frac{2}{3} L.$$

Ein homogener, überall gleich dicker $1^1/_2$ m langer Stab z. B. bildet also, an einem seiner Endpunkte aufgehängt, ein Pendel, welches gleiche Schwingungszeit hat mit einem 1 m langen einfachen Pendel.

Das Reversionspendel. Um die Länge des Secundenpendels 70
mit möglichster Genauigkeit zu finden, brachte zuerst Bohnenberger das Reversionspendel in Vorschlag, welches später auch Kater in England in Anwendung brachte, ohne Bohnenberger's Vorschlag zu kennen.

Das Reversionspendel ist ein Pendel, welches mit zwei einander zugewendeten Schneiden versehen ist, wie man aus Fig. 296 und Fig. 297 (a. f. S.) sehen kann, und welches so justirt ist, dass die Schwingungsdauer unverändert dieselbe bleibt, mag man nun das Pendel um die Schneide *a* oder um die Schneide *b* oscilliren lassen.

Es wird dies bei dem Kater'schen Reversionspendel, Fig. 296, dadurch erreicht, dass man die Laufgewichte *v* und *w* in entsprechender Weise verschiebt; bei dem Reversionspendel, Fig. 297, geschieht es durch Verschiebung der einen oder auch der beiden Linsen.

Hat man es nun dahin gebracht, dass die Schwingungsdauer des Pendels für die eine Schneide genau so gross ist wie für die andere, so ist die Entfernung der beiden Schneiden gleich der Länge eines einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich durch folgende Betrachtung beweisen.

Bezeichnen wir mit K die Summe der Trägheitsmomente aller materiellen Punkte, aus welchen das Reversionspendel, Fig. 296, besteht, mit $g\,G$ die Summe der statischen Momente, so ist nach dem vorigen Paragraphen $\frac{K}{G} = l$ die Länge des einfachen Pendels, welches mit ihm gleiche Schwingungsdauer hat.

Aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen ergiebt sich aber ferner, dass unser materielles Pendel auch äquivalent ist einem idealen Pendel, welches aus einer gewichtlosen starren, um den Punkt a, Fig. 298, oscillirenden Stange besteht, an welcher in dem Abstand 1 unter a die Masse:

Fig. 296.

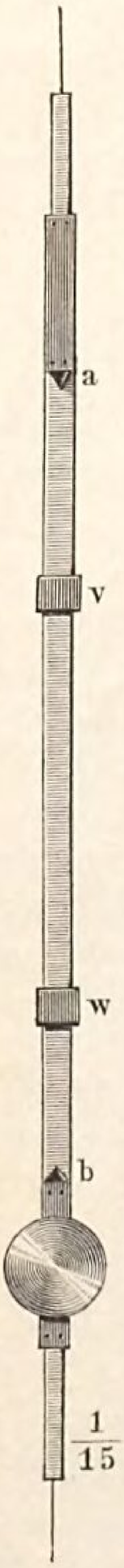


Fig. 297.

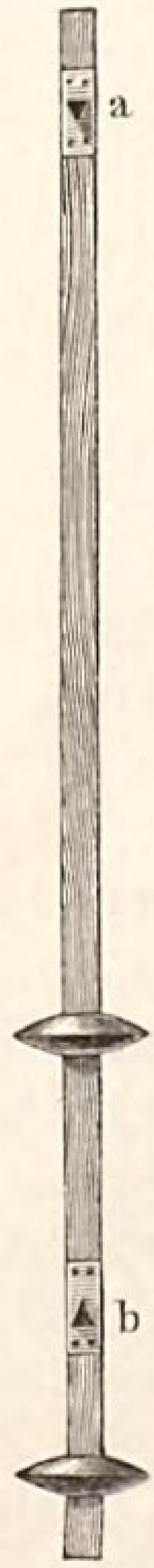


Fig. 298.

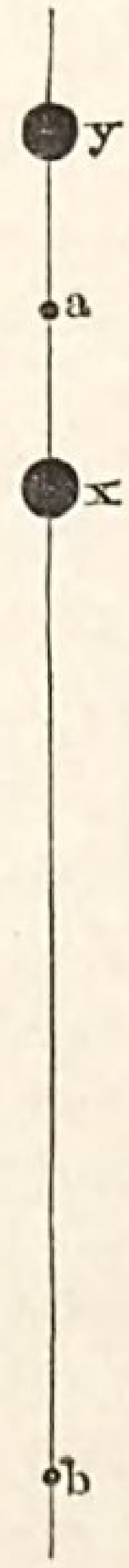


Fig. 299.



$$x = \frac{m}{2}(l^2 + l),$$

in dem Abstand 1 über a aber die Masse:

$$y = \frac{m}{2}(l^2 - l)$$

angebracht ist. Denken wir uns an der gewichtlosen Stange, Fig. 298, den Punkt b so bestimmt, dass $ab = l$, so wäre also b der Schwingungspunkt dieses idealen Pendels, welches sich in jeder Beziehung dem materiellen Pendel, Fig. 296, gleich verhält.

Denken wir uns nun das ideale Pendel, Figur 298, umgekehrt in b aufgehängt, wie Fig. 299 zeigt, so haben wir eine gewichtlose Stange, an welcher die Masse x in der Entfernung $(l - 1)$, die Masse y in der Entfernung $(l + 1)$ vom Aufhängepunkte b angebracht ist; wir haben also für die Trägheitsmomente der Massen x und y in diesem Fig. 299 dargestellten Falle:

$$x(l - 1)^2 \text{ und } y(l + 1)^2;$$

für die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem Fig. 296 dargestellten gleiche Schwingungsdauer hat, ergiebt sich demnach:

$$L = \frac{x(l - 1)^2 + y(l + 1)^2}{x(l - 1) + y(l + 1)}$$

Substituirt man in dieser Gleichung für x und y ihre obigen Werthe, so ergiebt sich nach Ausführung aller Reductionen:

$$L = l.$$

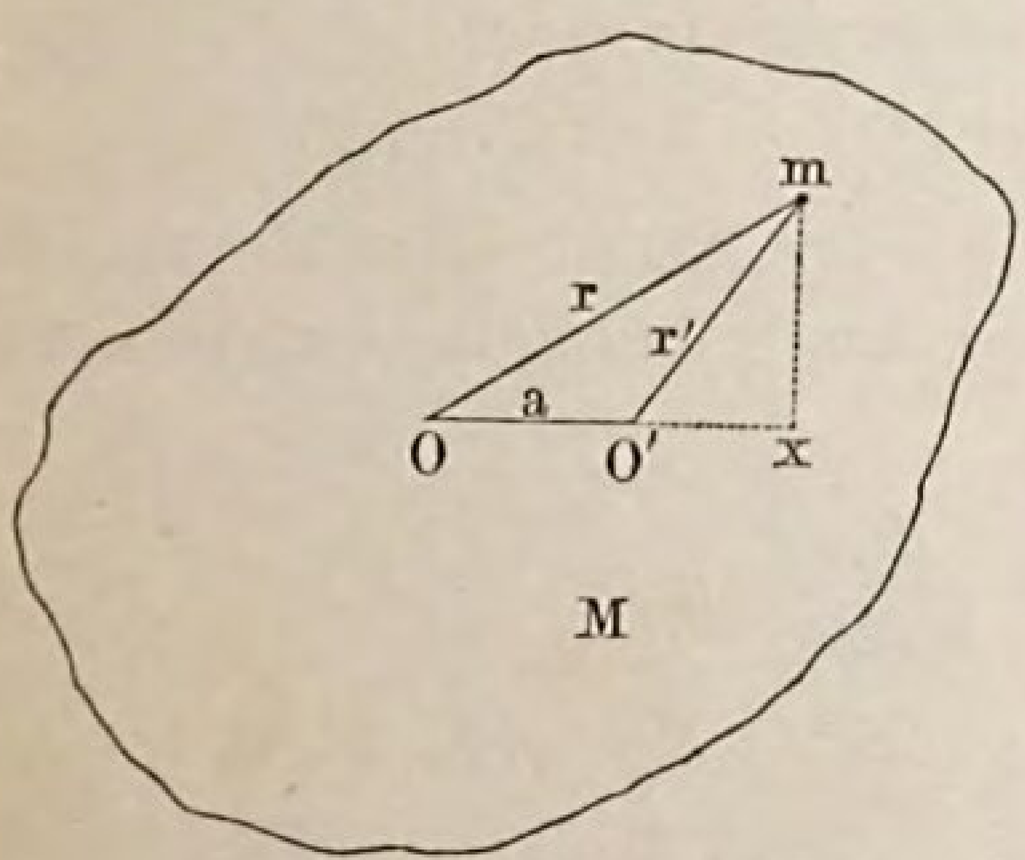
Das ideale Pendel, Fig. 298, oscillirt also gleich schnell, mag nun

der Punkt *a* oder der Punkt *b* als Aufhängepunkt dienen: im ersten Falle ist *b*, im zweiten Falle aber ist *a* der Schwingungspunkt.

Was nun aber von diesem idealen Pendel gilt, gilt auch für das ihm entsprechende materielle Pendel, Fig. 296. Es schwingt gleich schnell, mag es nun in *a* oder in *b* aufgehängt sein, und zwar gerade eben so schnell, wie ein einfaches Pendel von der Länge *ab*.

Beziehungen der Lage der Drehachse zur Lage des Schwingungspunktes und zur Schwingungsdauer eines Pendels. 71 Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass jeder pendelartig aufgehängte Körper ausser dem Punkte A, durch den seine Drehachse geht, noch einen Punkt S, den Schwingungspunkt, besitzt, von der Eigenschaft, dass, wenn man die Drehachse durch diesen Punkt S gehen lässt, nunmehr der frühere Drehpunkt A zum neuen Schwingungspunkt wird und somit auch die Schwingungsdauer unverändert bleibt. Aendert man die Lage des Drehpunktes A, so ändert sich auch die Lage des Schwingungspunktes S nach einem bestimmten Gesetze. Bevor wir dasselbe ableiten*), müssen wir einen wichtigen Hülfssatz kennen lernen.

Fig. 300.



Dieser Hülfssatz lautet: Ist das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Drehungsachse gleich K, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine im Abstande a von der ersten befindliche parallele Drehungsachse gleich:

$$K^1 = K + a^2 M$$

Beweis: Es sei in Fig. 300 M ein Durchschnitt des Körpers durch seinen Schwerpunkt O. Die Drehungsachse, für welche das Trägheitsmoment gleich K ist, gehe senkrecht auf diesen Durchschnitt durch den Schwerpunkt, die neue Drehungsachse sei um den Abstand $O\,O' = a$ in der Richtung gegen x verschoben. Beachten wir irgend einen materiellen Punkt m, dessen Masse $= m$, dessen Coordinaten mit Bezug auf ein durch O gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem $x = o\,x$, $y = m\,x$ seien. Die Entfernung Om sei $= r$, $O'm = r'$. Das Trägheitsmoment k dieses Punktes in Bezug auf die durch O gehende Achse ist:

$$k = m\,r^2$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf die durch O' gehende Achse ist dann:

*) Wir folgen dabei E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung S. 169.

$$k' = m r'^2 = m [(x - a)^2 + y^2]$$
$$= m (x^2 + y^2) - 2 m a x + m a^2$$

da $x^2 + y^2 = r^2$, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Achse durch O' für den Punkt m:

$$k = m r^2 - 2 m a x + m a^2$$

analog findet man für einen zweiten Punkt m_1

$$k_1 = m_1 r_1^2 - 2 m_1 a x_1 + m_1 a^2$$

ebenso für einen dritten Punkt m_2

$$k_2 = m_2 r_2^2 - 2 m_2 a x_2 + m_2 a^2 \text{ u. s. f.}$$

Denkt man sich so die Trägheitsmomente aller materiellen Punkte des Körpers von der Masse $M = m + m_1 + m_2 + \cdots$ gebildet und summirt, so erhält man das Trägheitsmoment für die ganze Masse M:

$$K^1 = K - 2 a \, \Sigma m x + M a^2$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$, d. h. die Summe aller Producte aus den einzelnen Massentheilen mit ihren Abständen vom Schwerpunkt O ist aber gleich Null. Folglich erhält man, wie zu beweisen war:

$$K^1 = K + a^2 M \quad \cdots\cdots\cdots \quad 1)$$

für den um die Achse O' oscillirenden Körper erhält man hieraus die reducirte Pendellänge oder den Abstand des Schwingungspunktes von der Achse:

$$l = \frac{K + a^2 M}{a M} = \frac{K}{a M} + a \quad \cdots\cdots \quad 2)$$

denn die im Schwerpunkte O vereinigt gedachte Masse M wirkt im Abstande a von der neuen Achse O'.

Da nun für ein und denselben Körper K und M unveränderliche Grössen sind, so bleibt l gleich gross, so lange a gleich gross bleibt. Daraus folgt:

Für alle Achsen, welche unter sich parallel in demselben Abstande vom Schwerpunkte liegen, hat derselbe Körper als Pendel dieselbe Schwingungsdauer.

Stellt also die Fig. 301 wiederum den Verticalschnitt durch den Schwerpunkt O eines Körpers vor, so wird derselbe gleich schnell schwingen, ob man ihn um eine Achse durch a oder a' oder a'' oder a''' schwingen lässt, sobald diese Punkte auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte in O liegen. Für die auf einem anderen concentrischen Kreise liegenden Punkte A, A', A'' u. s. f. ist die Schwingungsdauer im Allgemeinen eine andere, aber unter sich gleiche.

Nun beachten wir noch die Lage des Schwingungspunktes. Aus 2) folgt, dass l, d. i. die Distanz des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte, um $\frac{K}{a M}$ grösser ist als a, welches den Abstand des Aufhänge-

punktes vom Schwerpunkte bedeutet. Die Lage der drei Punkte, die wir mit A, O und S bezeichnen wollen, ist also, wie Fig. 302 zeigt, eine solche, dass (während der Ruhelage) zu oberst der Aufhängepunkt A, dann um a tiefer der Schwerpunkt O, dann um $\frac{K}{a\,M}$ tiefer der Schwingungspunkt S liegt.

Denken wir uns jetzt den Körper im Schwingungspunkte S selbst aufgehängt, so ändert sich a in $\frac{K}{aM}$, die reducirte Pendellänge wird dann, indem wir in 2) statt a den Werth $\frac{K}{aM}$ substituiren:

$$l' = \frac{K}{\frac{K}{aM} \cdot M} + \frac{K}{aM} = a + \frac{K}{aM} = l$$

Wir finden auf diese Weise, was wir im §. 70 auf anderem Wege abgeleitet haben, dass ein Pendel dieselbe Schwingungsdauer beibehält,

Fig. 301.

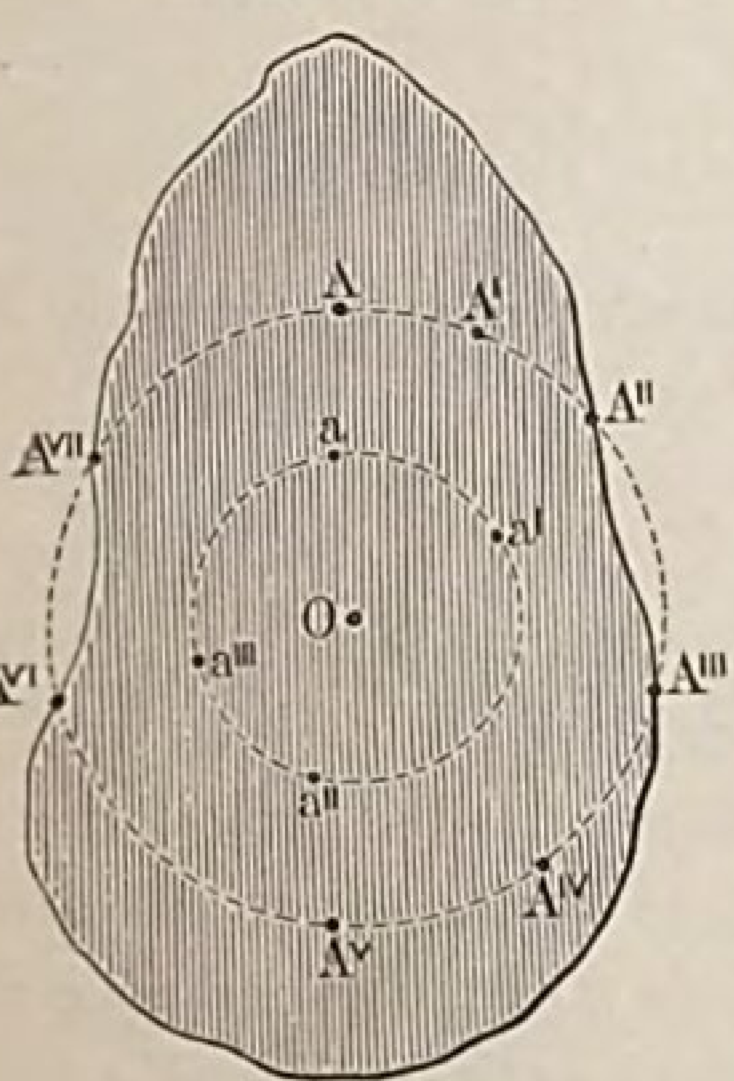
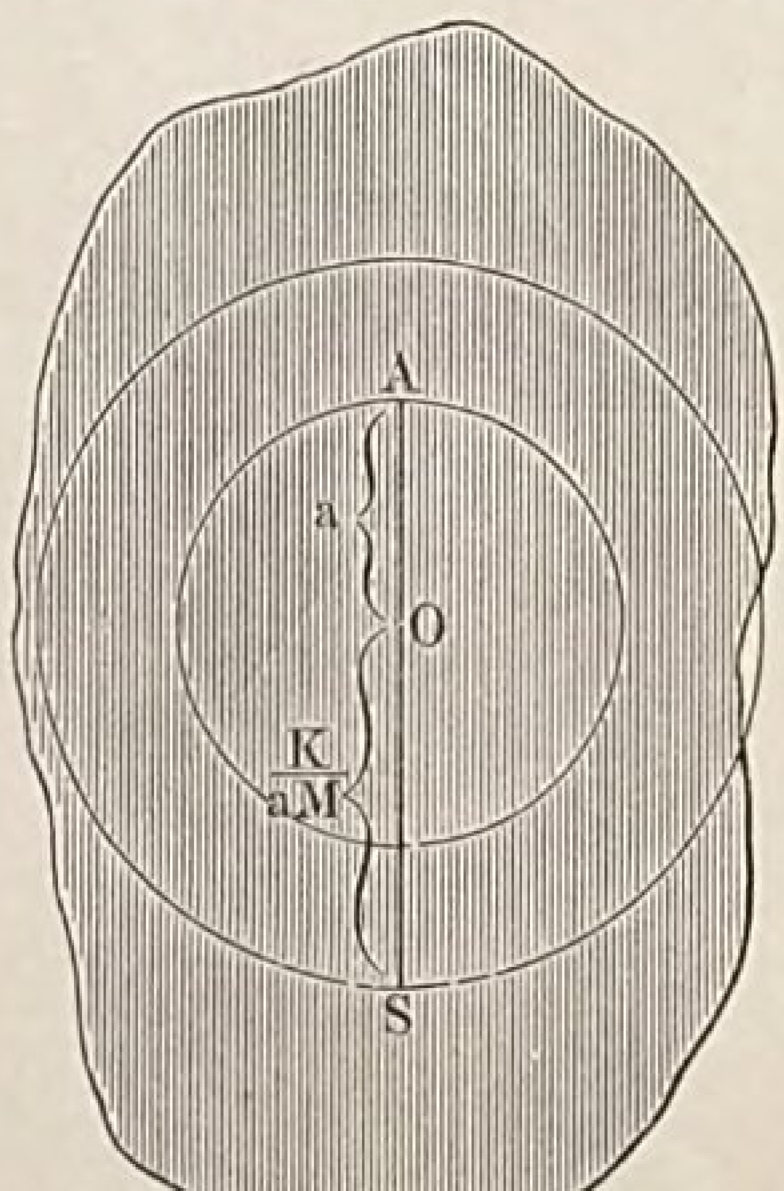


Fig. 302.



wenn es statt im ursprünglichen Drehpunkte im Schwingungspunkte aufgehängt wird. Die Punkte A und S können also einfach mit einander vertauscht werden. Es gilt folglich auch für den Punkt S, was wir oben für A nachgewiesen, dass jeder andere Punkt, der denselben Abstand vom Schwerpunkte O hat wie S, als Aufhängepunkt gewählt werden kann, ohne dass dadurch die Schwingungsdauer verändert wird.

Ziehen wir daher durch A sowohl wie durch S in Fig. 302 vom Mittelpunkte O aus concentrische Kreise, so kann die Drehachse des Pendels durch jeden Punkt der Peripherie dieser beiden Kreise gelegt werden, ohne dass sich die Schwingungsdauer ändert. Wir wollen daher solche Kreise c o n j u g i r t e K r e i s e nennen. Ihre Radien sind a und $\frac{K}{aM}$.

Der Abstand der Drehachse vom Schwerpunkte hat also für eine bestimmte Schwingungsdauer im Allgemeinen zwei Werthe. Dies muss auch aus der Gleichung 2) hervorgehen, wenn man dieselbe nach a auflöst. Man erhält zunächst:

$$a^2 - al + \frac{K}{M} = 0$$

und daraus:

$$a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{K}{M}}$$

a hat also zwei Werthe mit Ausnahme des Falles, dass:

$$\frac{l^2}{4} = \frac{K}{M}$$

oder:

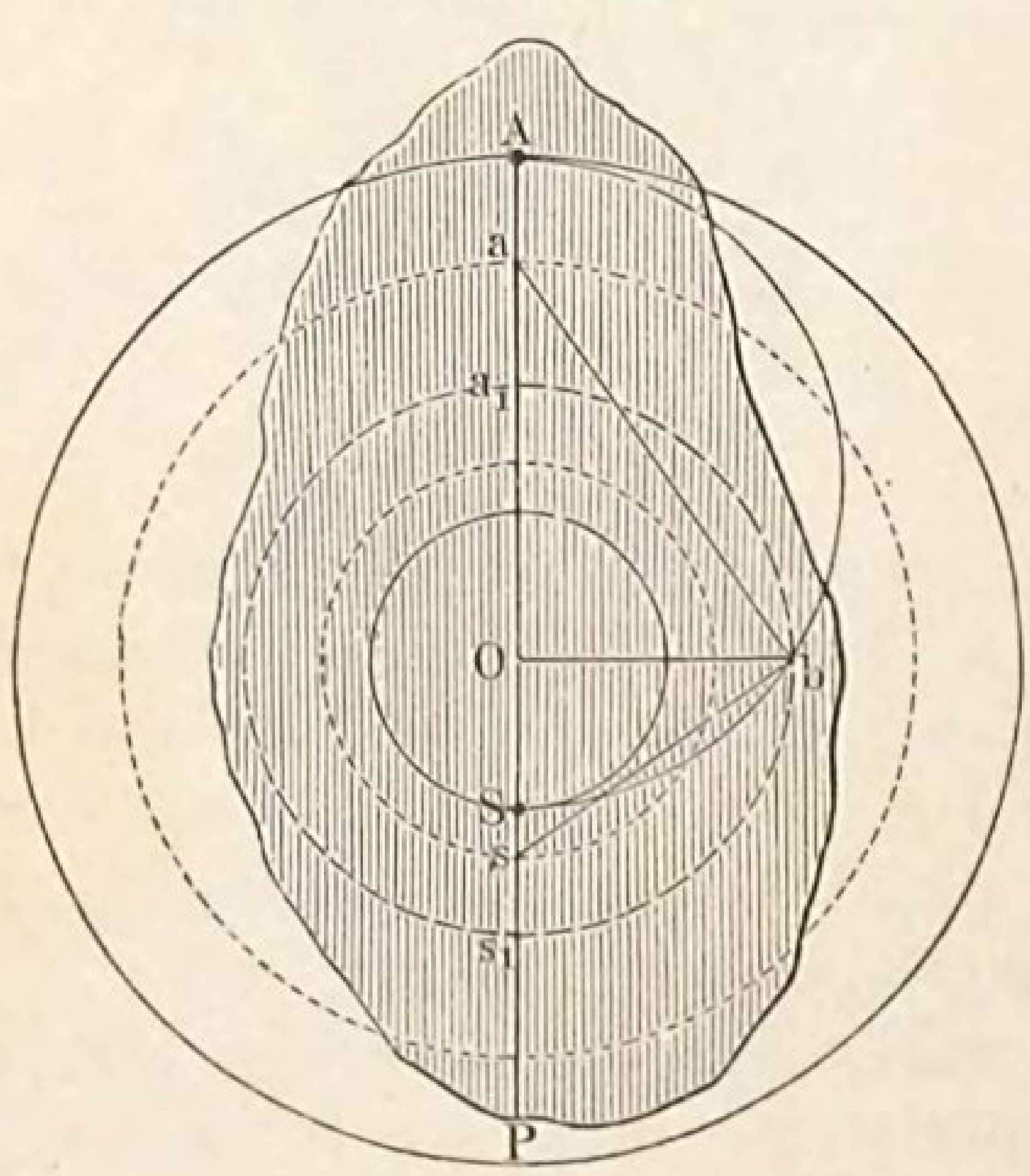
$$l = 2\sqrt{\frac{K}{M}}$$

in welchem Falle dann der einzige Werth von a:

$$a_1 = \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

erhalten wird. Die conjugirten Kreise legen sich in diesem Falle in einen einzigen mit dem Radius $a_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ zusammen.

Fig. 303.



Dieser Werth a_1 ist zugleich derjenige Werth von a in Gleichung 2), für welchen die reducirte Pendellänge, also auch die Schwingungsdauer am kleinsten ausfällt.

Der Radius a_1 ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Radien je zweier conjugirter Kreise, wie man sofort findet, indem man aus dem Product von a mit $\frac{K}{aM}$ die Quadratwurzel auszieht.

Diesen Zusammenhang kann man zur Lösung folgender Aufgaben benutzen.

Erste Aufgabe. An einem Körper (Fig. 303), der im Punkte A stabil aufgehängt ist, sei die Lage des Schwerpunktes O und des Schwingungspunktes S ermittelt worden, man suche jenen Kreis, dessen Peri-

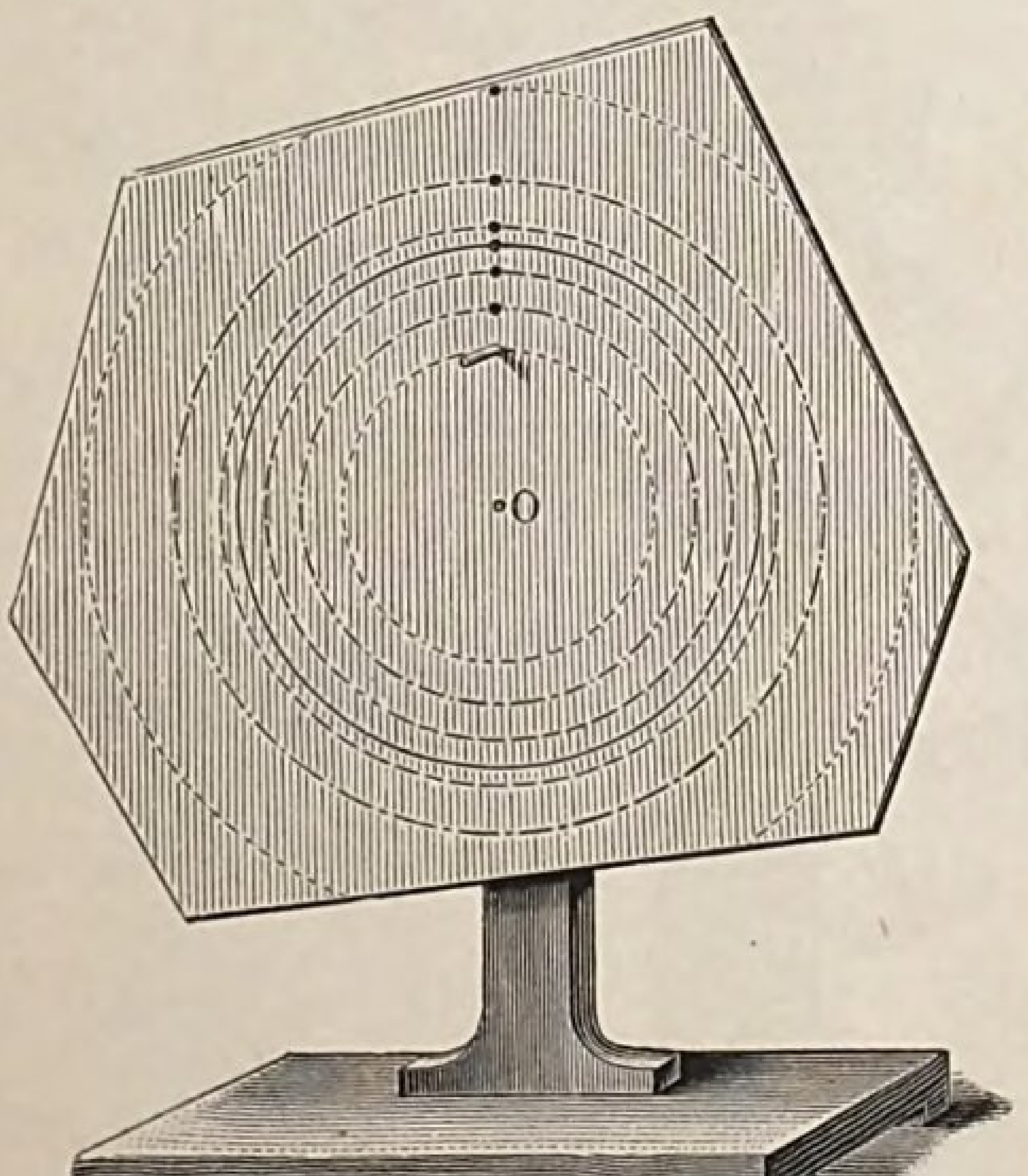
pherie alle jene Punkte enthält, welche als Aufhängepunkte angewendet, den Körper am schnellsten schwingen lassen.

Die beiden conjugirten Radien sind OA und OS. Beschreiben wir über AS als Durchmesser einen Halbkreis und errichten wir in O die Senkrechte Ob, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen OA und OS, also gleich dem Radius Oa_1 des gesuchten Kreises, welcher gestrichelt ausgezogen ist.

Zweite Aufgabe. Für irgend einen von Oa_1 verschiedenen Abstand, z. B. Oa, sei der zugehörige (conjugirte) Abstand der Achse vom Schwerpunkt, dem eine gleiche Schwingungsdauer zukommt, durch Construction zu finden.

Man zieht die Gerade ab und trägt an dieselbe in b einen rechten Winkel auf; der Durchschnitt des zweiten Schenkels mit der Verticallinie s giebt dann den gesuchten Abstand Os.

Fig. 304.



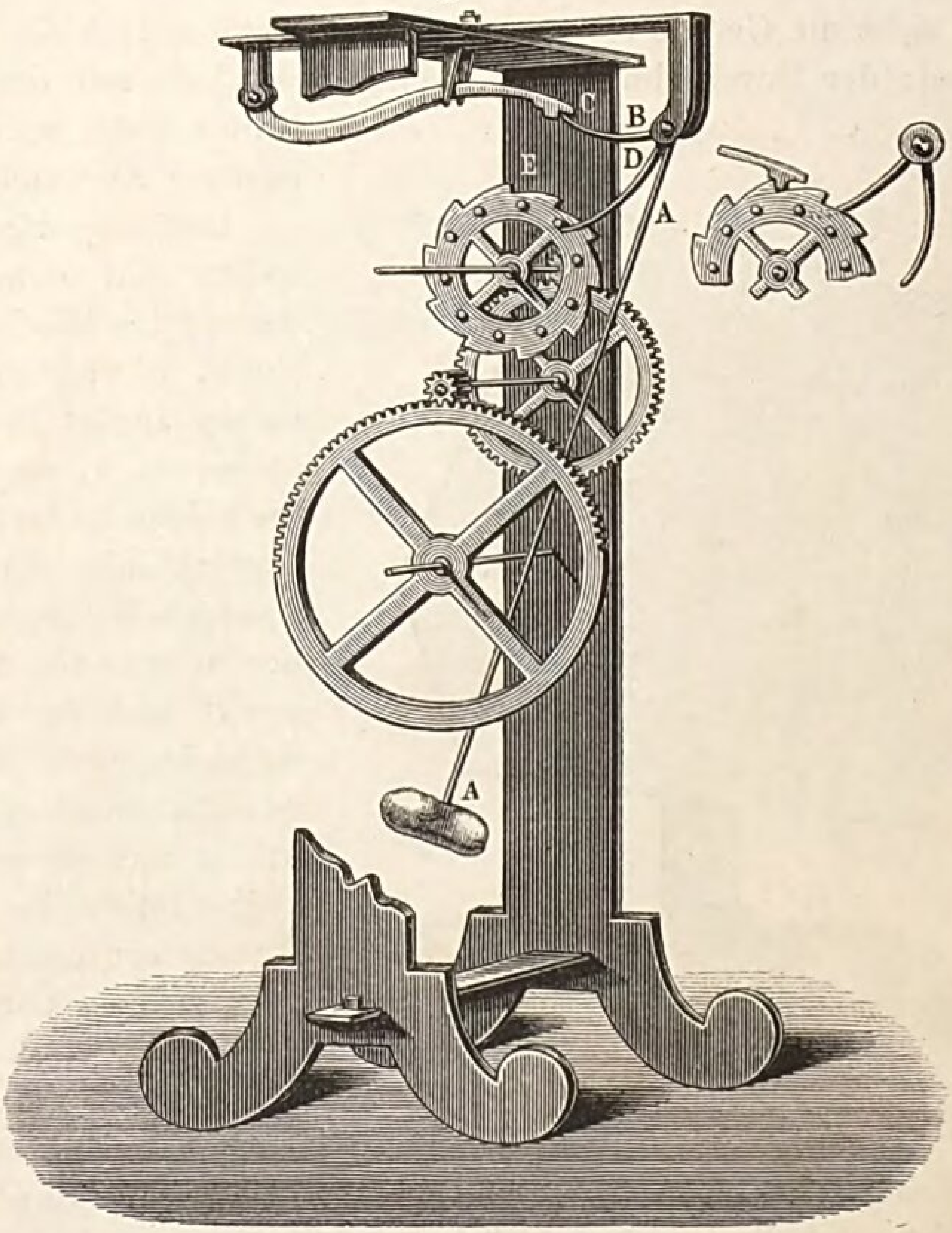
Legt man einen Winkelhaken mit dem Scheitel des rechten Winkels an den Punkt b und dreht denselben in der Zeichnungsebene um b, so schneiden die beiden Katheten auf der Verticallinie AC in zwei Punkten durch, von denen der obere als Aufhängepunkt und der untere als zugehöriger Schwingungspunkt anzusehen ist. Man erhält auf diese einfache Weise sofort eine beliebige Anzahl conjugirter Kreise.

Um das Vorgetragene zu demonstriren, bedient man sich eines einfachen Apparates nach Fig. 304, der wohl ohne weitere Erklärung verständlich ist. Auf dem als Pendel schwingenden Brettchen, welches an verschiedenen Punkten an die horizontale Achse gehängt werden kann, sind um den Schwerpunkt eine Anzahl concentrischer Kreise gezogen, welche der eben beschriebenen Construction entsprechen. Die conjugirten Kreise sind nach übereinstimmender Manier ausgezogen; der ganz ausgezogene Kreis entspricht dem Minimum der Schwingungsdauer. Die sämmtlichen Kreise sind an verschiedenen Stellen mit Löchern versehen, um die Achse durchstecken zu können. Würde man die Drehachse dem Schwerpunkt noch weiter nähern, so fiele der Schwingungspunkt ringsum über den Rand des Brettchens hinaus; zugleich würde sich die Schwingungsdauer noch

mehr verlängern. Hat man den Schwerpunkt selbst erreicht, so ist die Schwingungsdauer unendlich gross geworden, d. h. die Scheibe schwingt gar nicht mehr; sie würde, einmal angetrieben, wenn keine Reibung wäre, mit constanter Geschwindigkeit fortrotiren; zur Ruhe gebracht, würde sie in jeder Lage im indifferenten Gleichgewichte stehen bleiben.

72 **Die Pendeluhr.** Galilei, der Entdecker der Pendelgesetze, hat auch zuerst die sinnreiche Erfindung gemacht, das Pendel zur Regulirung der Uhr zu verwenden. Dies geht aus einer Zeichnung hervor, welche derselbe, als er bereits im hohen Alter und erblindet war, von

Fig. 305.

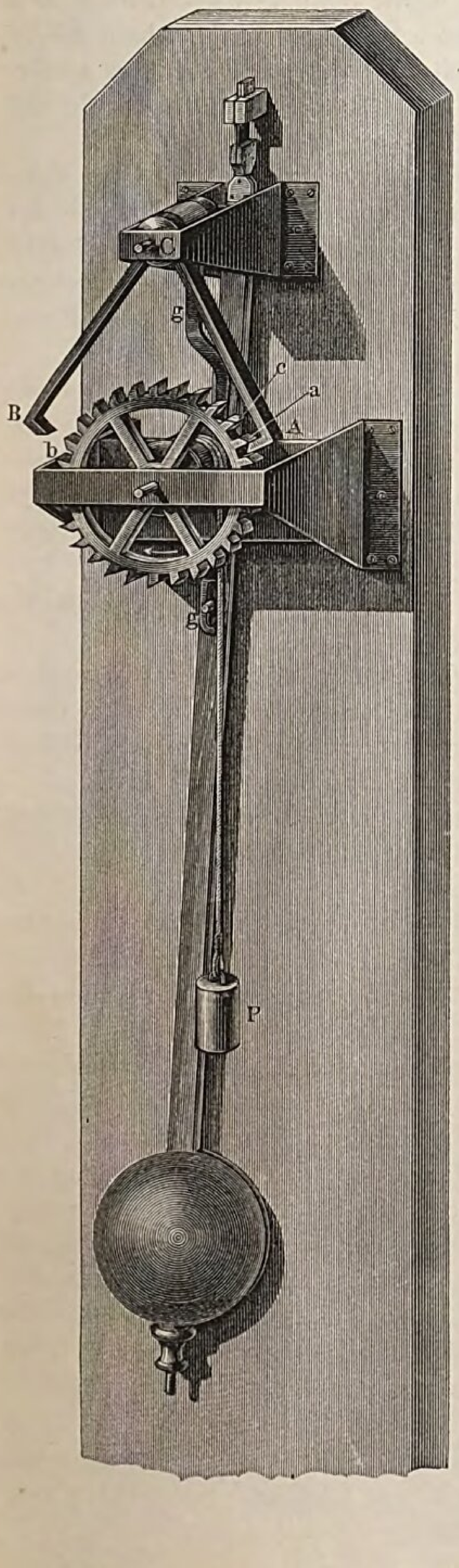


seinem Sohne Vincenzo und seinem Schüler Viviani anfertigen liess, deren Ausführung er aber nicht mehr erlebte. Fig. 305 giebt eine Copie dieser Zeichnung in verkleinertem Maassstabe*). Man erkennt in derselben die wesentlichen Theile der Pendeluhr, deren Erfindung gewöhnlich Huyghens zugeschrieben wird.

*) Dieselbe findet sich sammt einer Wiedergabe der darauf bezüglichen Mittheilungen Viviani's in R. Biedermann's Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London 1876, S. 411.

In jeder Uhr muss eine beschleunigende Kraft wirken, um die Bewegung hervorzubringen und zu erhalten. Wenn aber der beschleunigenden Kraft nicht eine andere oder ein äquivalentes Bewegungshinderniss entgegenwirkt, so kann die Bewegung nicht gleichförmig bleiben, sondern sie muss, wie bei einem fallenden Körper, schneller und schneller werden. Bei unseren Wanduhren wird die beschleunigende Kraft durch Gewichte gebildet, welche an einer um eine horizontale Achse geschlungenen Schnur hängen. Wenn das Gewicht durch seine Schwere herabgezogen wird, wird durch die Schnur diese Achse umgedreht und dadurch das ganze Uhrwerk in Bewegung gesetzt. Die Bewegung eines fallenden Gewichtes ist aber eine beschleunigte, folglich würde auch die Uhr anfangs langsam, dann schneller und schneller gehen müssen, wenn ihr Gang nicht regulirt würde, und diese Regulirung wird nun durch das Pendel bewerkstelligt.

Fig. 306.



Wie das Pendel den Gang einer Uhr reguliren könne, ist aus Fig. 306 ersichtlich. Aus der Achse, um welche die Schnur mit dem Gewichte P geschlungen ist, ist ein gezahntes Rad befestigt. Ueber diesem Rade befindet sich ein Anker ACB, welcher je nach seiner Stellung bald auf der einen, bald auf der anderen Seite in die Zähne des Rades eingreift. Dieser Anker wird durch die Schwingungen des Pendels hin und her geführt.

Die Figur stellt das Pendel gerade in der Lage vor, wo es seine äusserste Stellung links hat. Das Rad, welches durch das Gewicht in der Richtung des Pfeiles gedreht

wird, kann aber bei dieser Stellung des Pendels nicht vorangehen, weil der Zahn *a* durch den Haken *A* des Ankers aufgehalten wird; sobald aber das Pendel zurückgeht, geht *A* auf die Seite und der Zahn *a* wird vorbeigelassen; die Bewegung des Rades wird aber doch alsbald wieder gehemmt, weil nun auf der anderen Seite der Haken *B* des Ankers niedergeht und an diesen dann der Zahn *b* des Rades anstösst, sobald das Pendel seine äusserste Stellung rechts erreicht hat.

Geht nun das Pendel abermals nach der Linken, so wird der Zahn *c* durch *A* angehalten. Bei jedem Hin- und Hergange geht also das Rad um einen Zahn weiter, bei jedem Pendelschlage also um eine halbe Zahnweite voran. Hat das Rad 30 Zähne, so wird ein Zeiger, welcher an der Achse desselben befestigt ist, in 60 Sprüngen den ganzen Kreisumfang durchlaufen.

Das Pendel hat bei seinen Oscillationen verschiedene Widerstände zu überwinden, weshalb es allmälig zur Ruhe kommt, wenn es für sich allein schwingt. Im Uhrwerk wird nun aber dem Pendel sein Bewegungsverlust dadurch stets ersetzt, dass der Zahn, an der schiefen Fläche des austretenden Ankerarmes hinschleifend, diesem eine kleine Beschleunigung mittheilt.

Eine solche Vorrichtung nennt man eine Hemmung oder ein Echappement.

Bei Taschenuhren ist das Gewicht durch eine gespannte Stahlfeder, das Pendel aber durch die Balance ersetzt, d. h. durch einen Metallring, welcher von einer, vermöge ihrer Elasticität um ihre Gleichgewichtslage schwingenden Spiralfeder hin und her bewegt wird.

Die Länge des Secundenpendels wurde 1790 von Borda zuerst genau bestimmt. Dieselbe beträgt für Paris 993,86 mm.

73 **Erhaltung der Schwingungsebene des Pendels; Foucault's Pendelversuch.** Die Ebene, in welcher die Schwingungen eines Pendels erfolgen, bleibt unverändert, wenn auch der Faden des Pendels um seine Achse gedreht wird.

Um dies zu zeigen, bedient man sich der einfachen Vorrichtung Fig. 307, welche so auf eine Schwungmaschine befestigt wird, dass bei Drehung derselben der Aufhängepunkt *B* keinen Kreis beschreibt.

Giebt man dem Fadenpendel einen Anstoss, so dass es in einer bestimmten Ebene schwingt, und dreht dann die Schwungmaschine langsam herum, so behält das Pendel den Weltgegenden gegenüber die Lage seiner Schwingungsebene bei. Denkt man sich nun an Stelle der Schwungmaschine die rotirende Erde gesetzt, also das Pendel über einem der Erdpole aufgehängt, so muss ebenfalls die Schwingungsebene in ihrer Orientirung zum Weltall erhalten bleiben, während unter demselben die Erde von West nach Ost vorbei rotirt.

Ein daneben aufgestellter Beobachter würde offenbar den Eindruck erhalten, dass die Schwingungsebene binnen 24 Stunden von Osten nach

Westen gedreht werde. Würde man ein Pendel am Aequator der Erde aufhängen, so könnte daselbst keinerlei Drehung eintreten, da daselbst die Erde keinerlei Rotation in Bezug auf eine durch den Aufhängepunkt des Pendels gehende Verticallinie hat.

An allen Punkten zwischen Pol und Aequator wird eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene eintreten, welche sich um so bedeutender einstellen muss, je näher dem Pole der Aufstellungspunkt des Pendels liegt. Auf der nördlichen Halbkugel wird diese Drehung in der Richtung

Fig. 307.

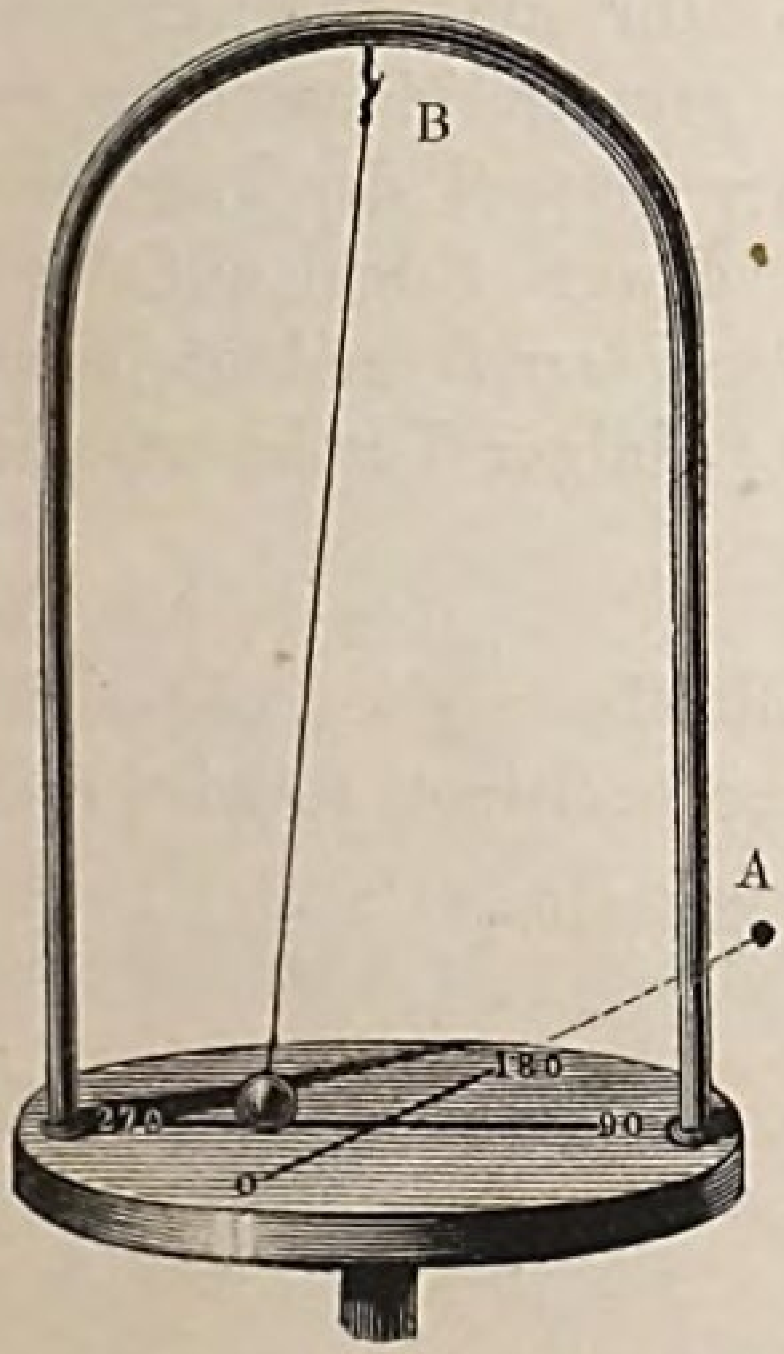
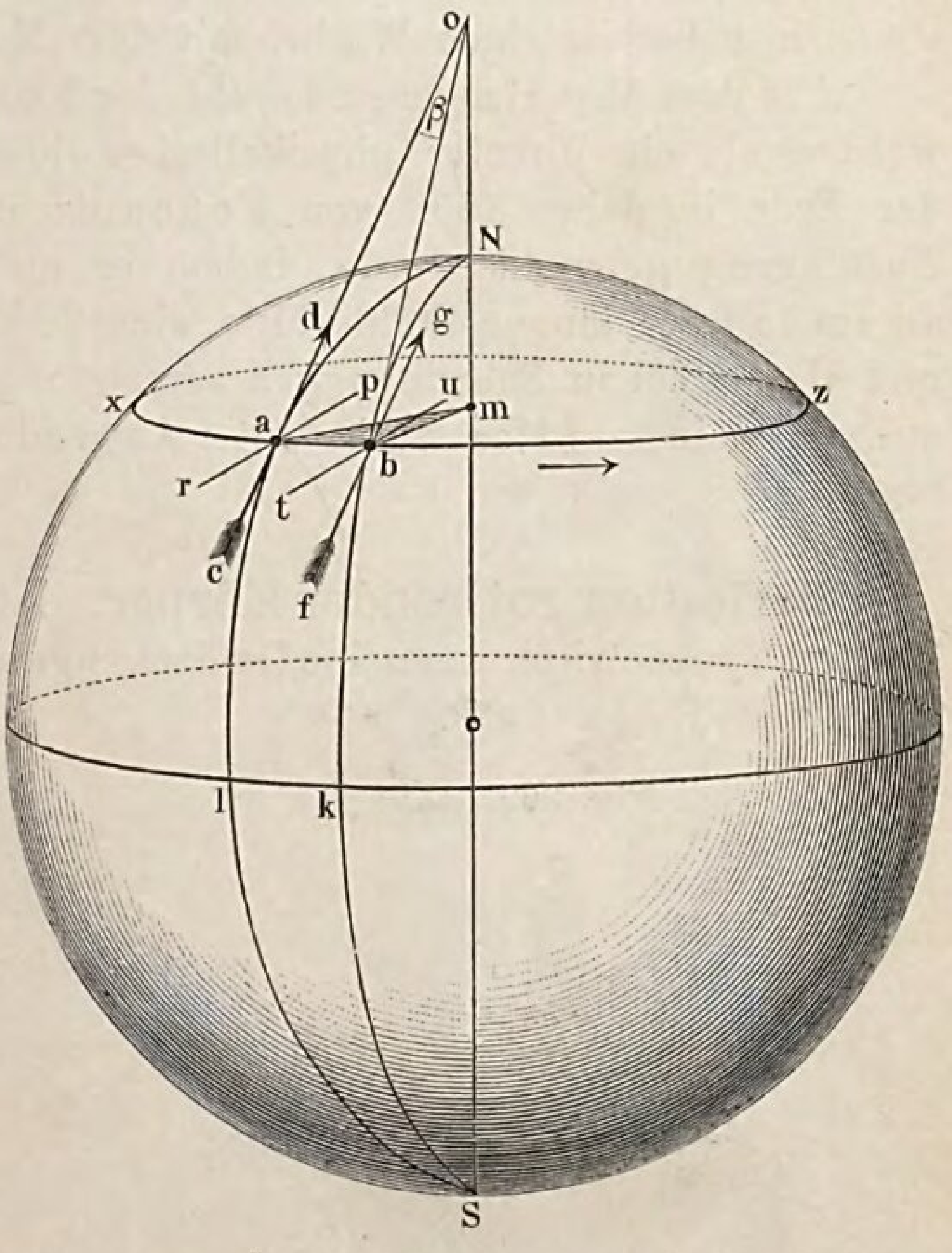


Fig. 308.



Ost, Süd, West, auf der südlichen nach der Richtung Ost, Nord, West erfolgen.

Die Rechnung lehrt, dass der Drehungswinkel dem Sinus der geographischen Breite proportional ist. Um dies zu zeigen, möge in Fig. 308 NS die Erdachse, $xabz$ den Parallelkreis durch den Standpunkt des Pendels und m den Mittelpunkt dieses Kreises vorstellen.

Das Pendel schwinge in a in der Richtung des Pfeiles cd, also in der Meridianebene. Eine in dieser Ebene an den Punkt a gezogene Tangente treffe die verlängerte Erdachse in O; der Winkel aom ist gleich der geographischen Breite des Punktes a und werde mit φ bezeichnet.

Nach einiger Zeit gelangt der Ort a in Folge der Achsendrehung der Erde nach b, die Tangente erhält die Lage bo, das Pendel schwingt

aber parallel mit cd in der Richtung des Pfeiles fg, seine Ebene bildet also mit der Meridianebene einen Winkel $gbo = aob$, welcher mit β bezeichnet werde. Gleichzeitig hat sich die Erde um den Winkel $amb = \alpha$ gedreht. Aus

$$\alpha : \beta = bo : bm$$

folgt:

$$\beta = \alpha \frac{bm}{bo} = \alpha \sin \varphi$$

An diesem Resultate würde nichts geändert, wenn die Schwingungsebene in a bereits einen Winkel mit dem Meridian gebildet hätte.

Auf dem Vorgetragenen beruht der Foucault'sche Pendelversuch, welcher als ein directer physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde im Jahre 1852 von Foucault im grossen Maassstabe zur Ausführung gebracht wurde, indem er an der Kuppel des Pantheons an einem 67 m langen Stahldrahte eine 28 kg schwere Kugel aufhängte und als Pendel in Schwingungen versetzte. Der Versuch gelingt jedoch auch in kleinerem Maassstabe unter Anwendung einiger Vorsichtsmaassregeln*).

74 **Verhalten rotirender Körper.** Ist die Masse eines rotirenden Körpers symmetrisch um seine Umdrehungsachse geordnet, so wird diese

Fig. 309.

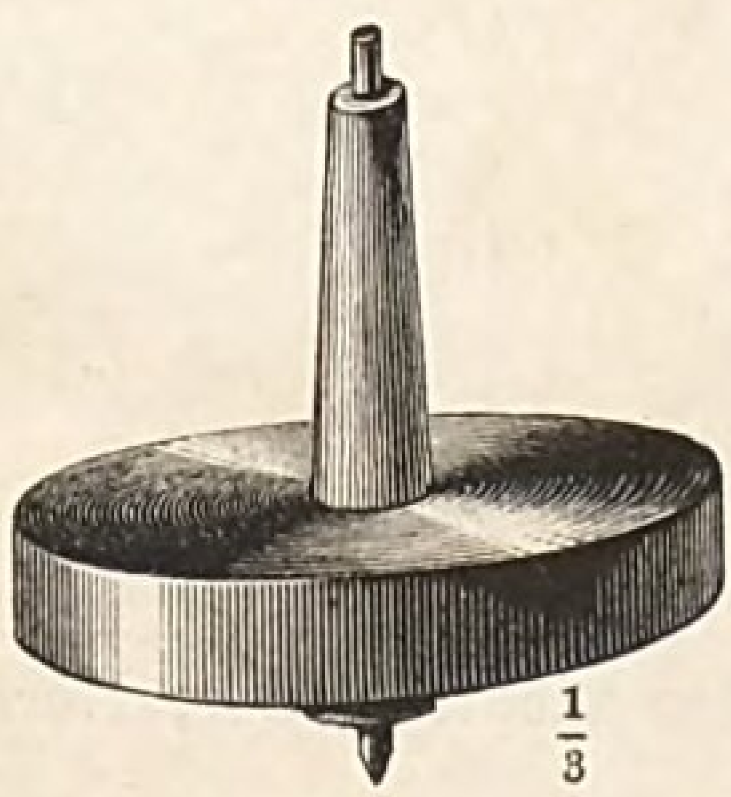
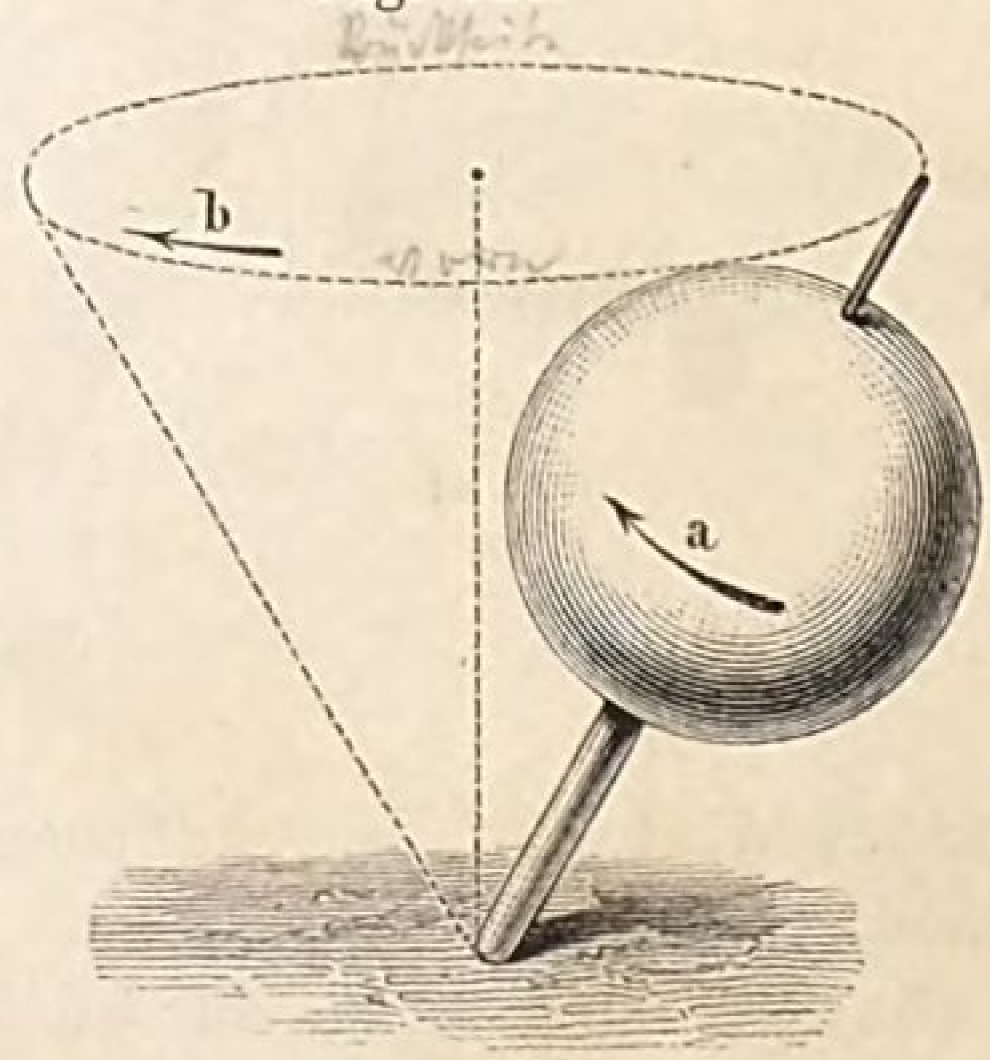


Fig. 310.



Achse in Folge der Rotation des Körpers keinen Druck, keine Spannung nach irgend einer Seite auszuhalten haben, weil die Schwungkraft jedes Theilchens des rotirenden Körpers durch eine gleiche und entgegengesetzte aufgehoben wird. Eine Achse, bei welcher dies der Fall ist, wird eine freie Achse genannt. Beispiele freier Achsen bieten uns ein Schwungrad, ein Kreisel etc.

Ein Körper, welcher um eine freie Achse rotirt, besitzt in Beziehung

*) Siehe Weinhold, „Physikalische Demonstrationen“ S. 97.

auf dieselbe stets eine mehr oder minder grosse Stabilität, d. h. es bedarf einer Kraft, um die Rotationsachse in eine andere Richtung zu bringen, wie dies am besten durch den Kreisel erläutert wird. Ein Kreisel, Fig. 309, welcher aus einem bleiernen flachen Cylinder besteht, dessen Umdrehungsachse unten mit einer stählernen, etwas abgerundeten Spitze versehen ist, kann eine halbe, ja eine ganze Stunde lang auf dieser Spitze rotiren, ohne umzufallen (Busolt's Farbenkreisel, Pogg. Ann. Bd. XXXII, S. 656).

Wenn nun auf eine solche freie und nach jeder Richtung hin auch frei bewegliche Achse von aussen her irgend eine störende Kraft einwirkt, welche die Richtung dieser Achse zu ändern strebt, so erfolgt eine Verschiebung der Achse rechtwinklig zur Richtung der störenden Kraft.

Fig. 311.

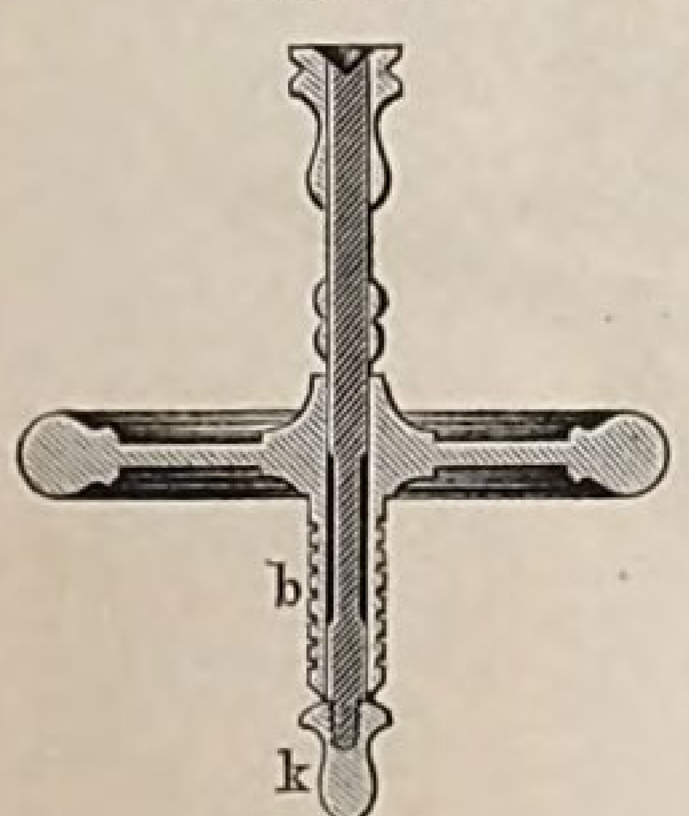
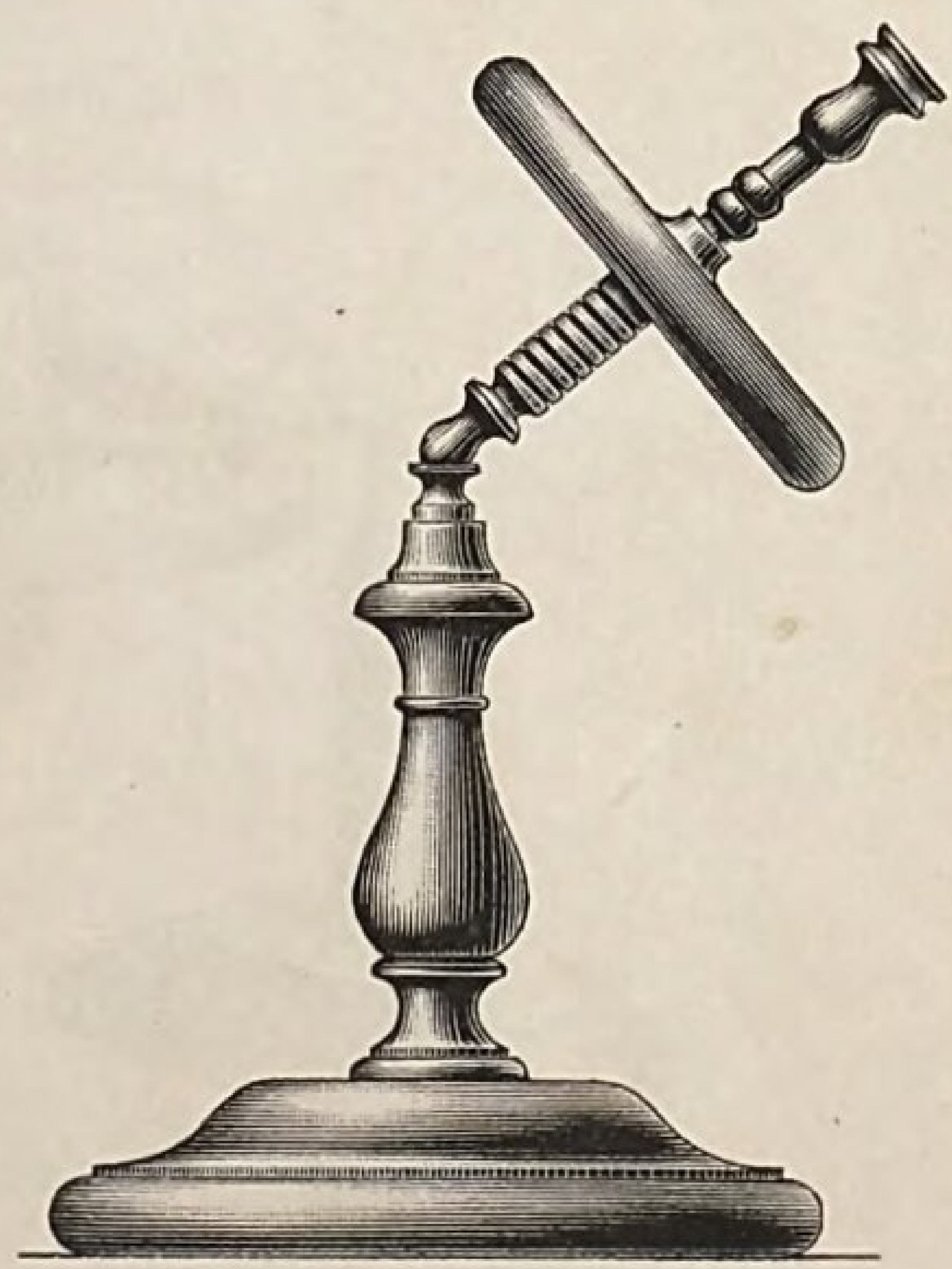


Fig. 312.



Man kann diese Erscheinung an jedem Kreisel, am bequemsten vielleicht an dem allgemein bekannten Brummkreisel (Brummtoppich) beobachten.

Fig. 310 stellt einen solchen Kreisel dar. Wenn die Rotationsachse desselben, gleich nachdem er angelassen worden ist, nicht vertical steht, sondern mit der Richtung des Bleilothes einen Winkel macht, wie es die Figur zeigt, so fällt er nicht etwa um, wie man auf den ersten Anblick wohl vermuthen könnte, weil der Schwerpunkt nicht unterstützt ist, sondern die Achse des Kreisels beschreibt in langsamer Bewegung die Oberfläche eines Kegels, wie dies in unserer Figur durch punktirte Linien angedeutet ist, ohne dass der Kreisel sich mehr gegen die horizontale Ebene neigt; ja der Kreisel richtet sich allmälig mehr und mehr auf, bis endlich seine Achse senkrecht steht, welches letztere jedoch nur eine

Folge der Reibung ist, welche die Spitze des Kreisels am Boden zu überwinden hat; dieses Aufrichten des Kreisels würde nicht stattfinden, wenn keine Reibung stattfände.

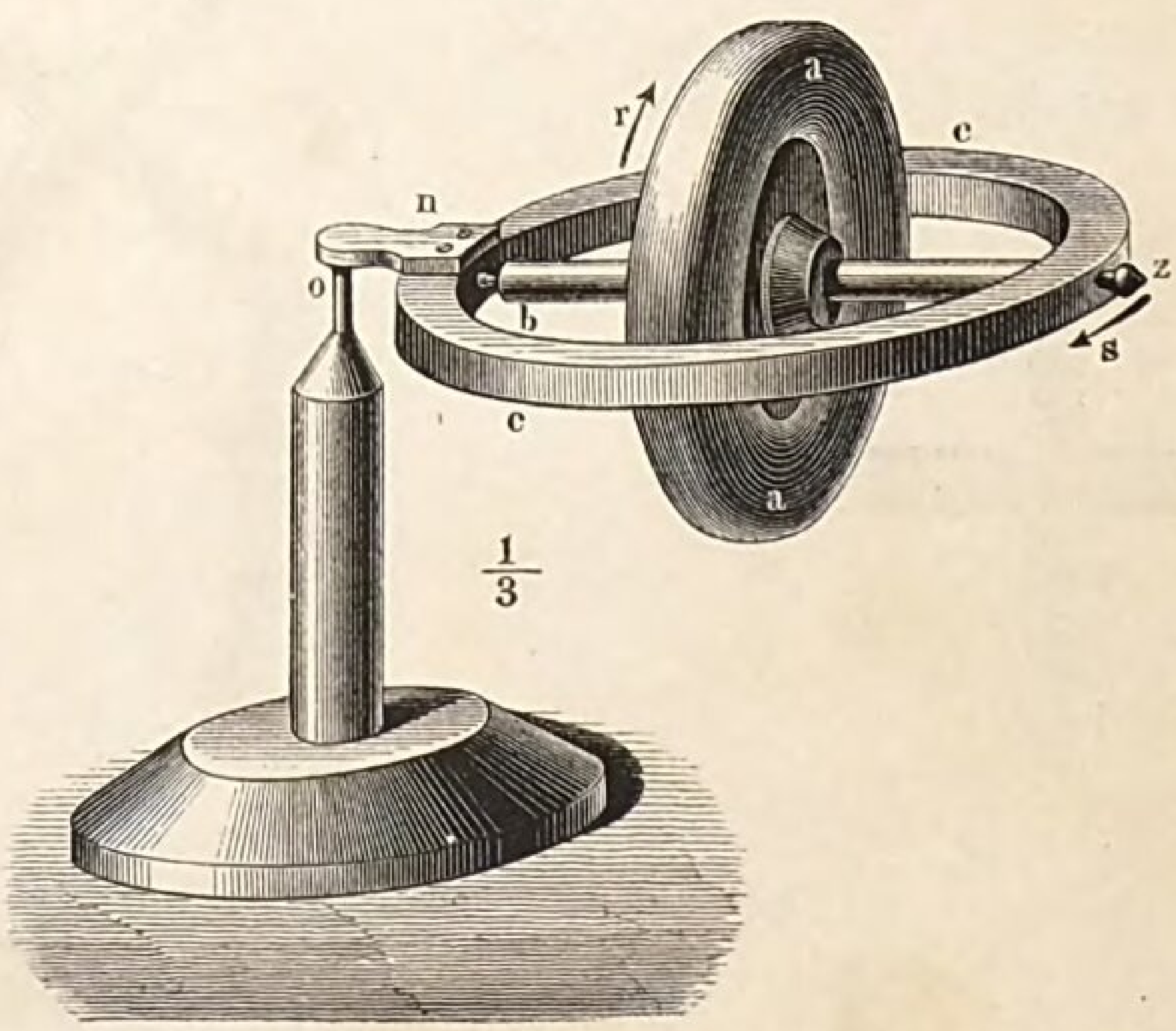
Wenn der Kreisel in der Richtung rotirt, welche der Pfeil *a* andeutet, so dreht sich die Rotationsachse in der Richtung des Pfeiles *b*.

Der Kreisel fällt erst um, wenn seine Rotationsgeschwindigkeit bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat.

Die für wissenschaftliche Versuche bequemste Form haben die vom Mechaniker Schmidt construirten Kreisel, wovon Fig. 311 (a. v. S.) einen Verticaldurchschnitt, Fig. 312 (a. v. S.) eine Vorderansicht in $^1/_3$ der natürlichen Grösse bietet.

Noch viel schöner und sicherer lässt sich diese langsame Drehung einer Rotationsachse an dem Gyroskop, Fig. 313, zeigen. *a* ist eine runde messingene Scheibe, deren äussere Begrenzung durch einen dicken

Fig. 313.



messingenen Wulst gebildet wird. Durch die Mitte dieser Scheibe geht eine stählerne, in Spitzen laufende Achse *b*, welche von einem messingenen Ringe *c* getragen wird.

An den Ring *c* ist in der Verticalebene der Achse *b* ein etwas vorragendes Metallstückchen *n* aufgeschraubt, welches mittelst einer in seiner Unterfläche angebrachten Vertiefung auf die Stahlspitze *o* aufgesetzt werden kann.

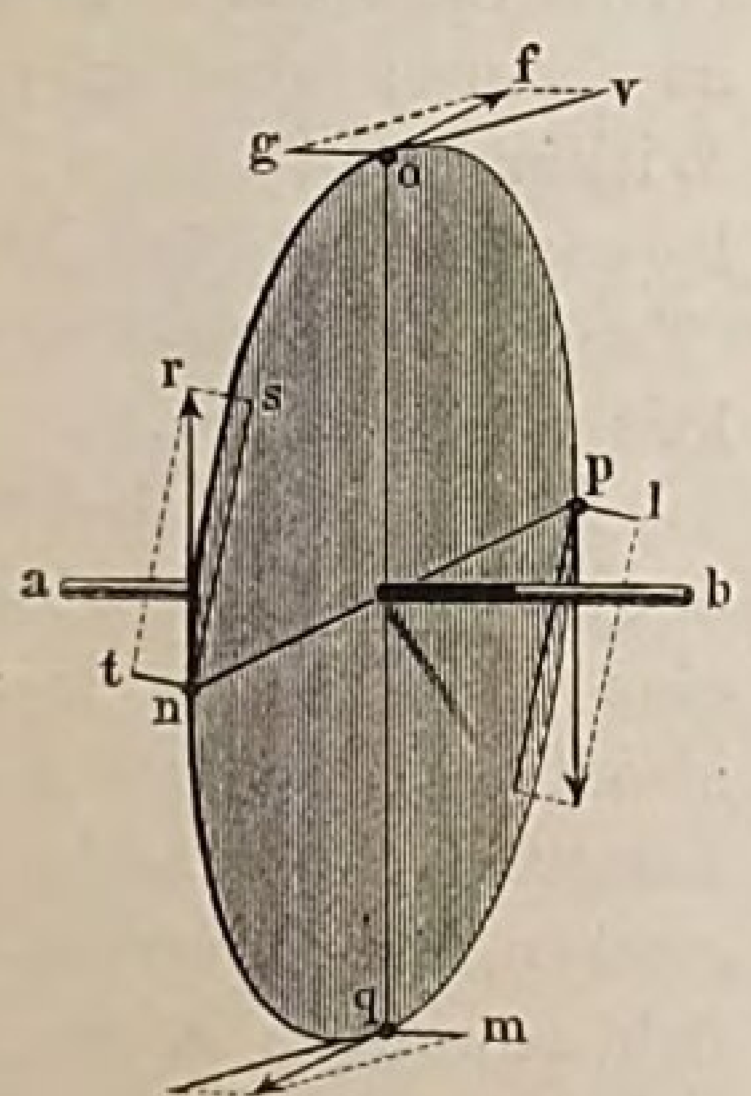
Geschähe dies, während die Messingscheibe *a* nicht um ihre Achse rotirt, so könnte der Ring *c* mit allem, was in ihm befestigt ist, die horizontale Stellung nicht behaupten, in welcher ihn unsere Figur darstellt, sein Schwerpunkt würde sich rasch niedersenken müssen. Wenn aber die Scheibe *a* vor dem Aufsetzen von *n* auf die Spitze *o* durch kräftiges

Abziehen einer um die stählerne Achse *b* gewickelten Schnur in rasche Rotation versetzt worden ist, so behält er die horizontale Stellung bei, während er sich nun langsam in horizontaler Ebene um die Spitze *o* umdreht. Erst nach einiger Zeit, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *a* in Folge der unvermeidlichen Reibung bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat, beginnt der Ring *c* sammt seinem Inhalte sich allmälig zu senken.

Wie sich die fragliche Erscheinung, wenigstens in ihren Hauptzügen, ohne Calcül erklären lässt, hat Poggendorff in seinen Annalen (Bd. XC, S. 348) gezeigt. Auf unseren speciellen Fall angewandt, würde die Poggendorff'sche Erklärung ungefähr folgende sein:

Wenn die materielle Scheibe *nopq*, Fig. 314, um die eben horizontal stehende Achse *ab* sehr rasch rotirt, so haben alle Theilchen der Scheibe tangentiale Geschwindigkeiten erlangt, welche für die Punkte *n*, *o*, *p* und *q* durch Pfeile angedeutet sind.

Fig. 314.



Wenn nun durch irgend eine Kraft die rechte Seite der Achse *ab* etwas gesenkt, also die Scheibe um die Achse *np* oder eine damit parallele etwas gedreht wird, so werden dadurch die Geschwindigkeiten, mit welchen gerade die Punkte *o* und *q* behaftet sind, nicht alterirt, sie werden gewissermaassen parallel mit sich selbst verschoben. Anders verhält es sich mit den materiellen Theilchen in *n* und *p*; sie werden genöthigt, aus der Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten, mit welchen sie eben behaftet sind, herauszutreten; das Theilchen *n* z. B. wird genöthigt, die Richtung *ns* einzuschlagen. Dadurch wird aber offenbar die ursprüngliche Geschwindigkeit *nr* in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine *ns* die Richtung bezeichnet, welche die in *n* an die Peripherie gelegte Tangente annehmen muss, während die andere Seitenkraft *nt* rechtwinklig zur Ebene der Scheibe als ein Druck wirkt, welcher eine Drehung um die Achse *oq* oder eine damit parallele zu bewirken strebt, und zwar in der Art, dass dadurch *b* nach vorn bewegt wird.

Wird in gleicher Weise die Geschwindigkeit zerlegt, mit welcher ursprünglich ein materielles Theilchen in *p* behaftet war, so ergiebt sich eine Seitenkraft *pl*, welche parallel mit *nt* die Scheibe sammt der Achse in gleicher Richtung zu drehen strebt, wie *nt*.

Daraus ergiebt sich zunächst, dass, wenn die Scheibe *a* des Apparates Fig. 313 in der Richtung des Pfeiles *r* rotirt, eine Drehung des Ringes *c* in der Richtung des Pfeiles *s* erfolgen muss.

Durch die Seitenkräfte *nt* und *pl*, Fig. 314, wird nun die Scheibe in der Weise um eine verticale Achse gedreht, dass dadurch auch die

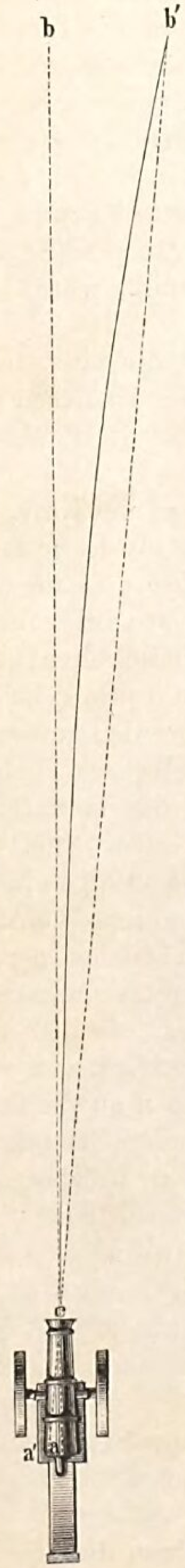


Fig. 315.

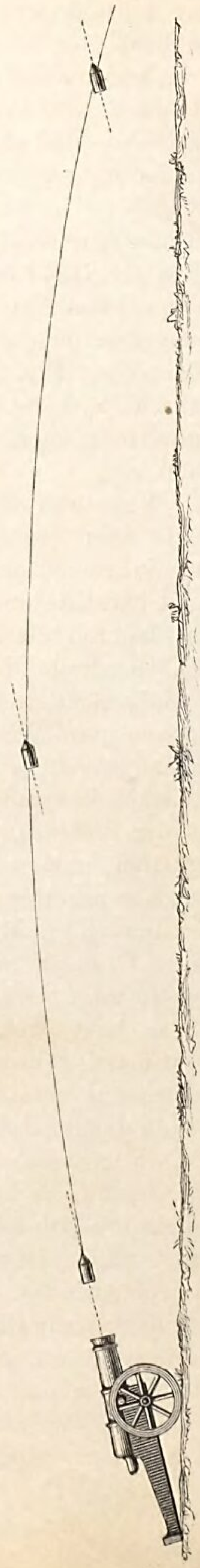


Fig. 316.

Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten in o und q alterirt wird. Das Theilchen o, welches die Tangentialgeschwindigkeit of hatte, wird eine Tangentialgeschwindigkeit in der Richtung ov annehmen müssen, die Geschwindigkeit of wird also in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine nach ov gerichtet ist, während die andere og als ein Druck auf die Scheibe wirkend dahin strebt, die rechte Seite der Achse ab zu heben; eine gleiche Wirkung geht aus der Zerlegung der ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit von q hervor.

In Folge der Drehung der Rotationsachse ab um eine verticale Achse treten also Kräfte auf, welche ihr äusseres Ende b zu heben streben, also der ursprünglich störenden Kraft gerade entgegenwirken; und so kommt es denn, dass, wenn die Rotationsgeschwindigkeit nur gross genug ist, die horizontale Lage der Rotationsachse erhalten bleibt.

Wir haben hier nur einen speciellen Fall.

Eine vollständige Erklärung der hierher gehörigen Erscheinungen nicht allein der Art, sondern auch der Grösse nach, ist ohne höhere Rechnung nicht wohl möglich.

Eine interessante, hierher gehörige Erscheinung ist die den Artilleristen wohlbekannte Seitenabweichung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen rotirenden Projectile. Man hat bemerkt, dass dieselben nicht in der Verticalebene, welche man sich durch die Rohrachse gelegt denken kann, fortfliegen, sondern ausser der verticalen Krümmung der Flugbahn auch eine Krümmung derselben in horizontaler Richtung und zwar meistens nach rechts zeigen. Fig. 315 stellt dieses Verhalten in übertriebenem Maassstabe dar. Um mit einem solchen Geschütze das anvisirte Ziel zu treffen, muss die Visirrichtung (durch Linksverschiebung des Absehens) nach rechts gedreht werden und zwar um so mehr, je weiter das Ziel entfernt ist. In der Fig. 315 ist ab die verlängerte Rohrachse, b' das Ziel, c das Korn (oder die Mücke), a das Absehen in der normalen, a' in der verschobenen Lage.

Wäre diese Abweichung durch eine schiefe Bohrung des Rohres veranlasst, so müsste, wenn man dasselbe auf dem Rücken liegend abfeuern würde, die Abweichung die entgegengesetzte werden; auch könnte durch eine schiefe Bohrung nur eine Winkelabweichung, aber nicht eine krumme Flugbahn entstehen.

Diese Erscheinung erklärt sich vielmehr folgendermaassen:

Zunächst ist klar, dass die Achse des Geschosses sich parallel zu bleiben sucht, während die Richtung der Flugbahn ihren Winkel mit dem Horizont ändert (siehe Fig. 316, wo die Lage des Geschosses am Anfang, in der Mitte und am Ende der Bahn angedeutet ist). Das Geschoss stellt offenbar dem Luftwiderstande immer mehr seine Unterseite entgegen. Bei den zur Anwendung kommenden Geschossformen geht nun die Resultirende des Luftwiderstandes fast immer über den Schwerpunkt hinweg und sucht daher die Achse des Geschosses vorn aufzurichten. Nach dem oben Vorgetragenen ist nun klar, dass eine solche Aufrichtung, verbunden mit der Rechtsrotation des Geschosses, eine Drehung desselben um seine verticale Achse herbeiführen muss, und zwar der Art, dass die Spitze nach rechts abweicht.

Ist diese Drehung einmal eingetreten, so wird durch die nun auf der linken Seite überwiegende Wirkung des Luftwiderstandes auch eine Seitenverschiebung aus der Verticalebene der Flugbahn nach rechts eintreten müssen*).

Um diese Erscheinung zu demonstriren, habe ich einen Apparat construirt, der die Bewegung eines rotirenden Projectils nachahmt. Derselbe ist in Fig. 317 (a. f. S.) in perspectivischer Ansicht, in Fig. 318 und 319 von oben und von der Seite gesehen gezeichnet.

Das Spitzgeschoss A ist innerhalb des horizontalen Rahmens B um seine eigene horizontale Achse drehbar und kann durch Abziehen einer

*) Ausserdem bewirkt auch noch die Reibung des Geschosses an der umgebenden Luft eine Abweichung in demselben Sinne. Einen Apparat zur Demonstration dieser Wirkung hat v. Beetz angegeben.

in *a* eingehängten aufgewickelten Schnur in Rotation versetzt werden. An zwei an der Aussenseite des Rahmens angebrachten Häkchen in *b b*, deren Verbindungslinie senkrecht auf der Rotationsachse steht und durch

Fig. 317.

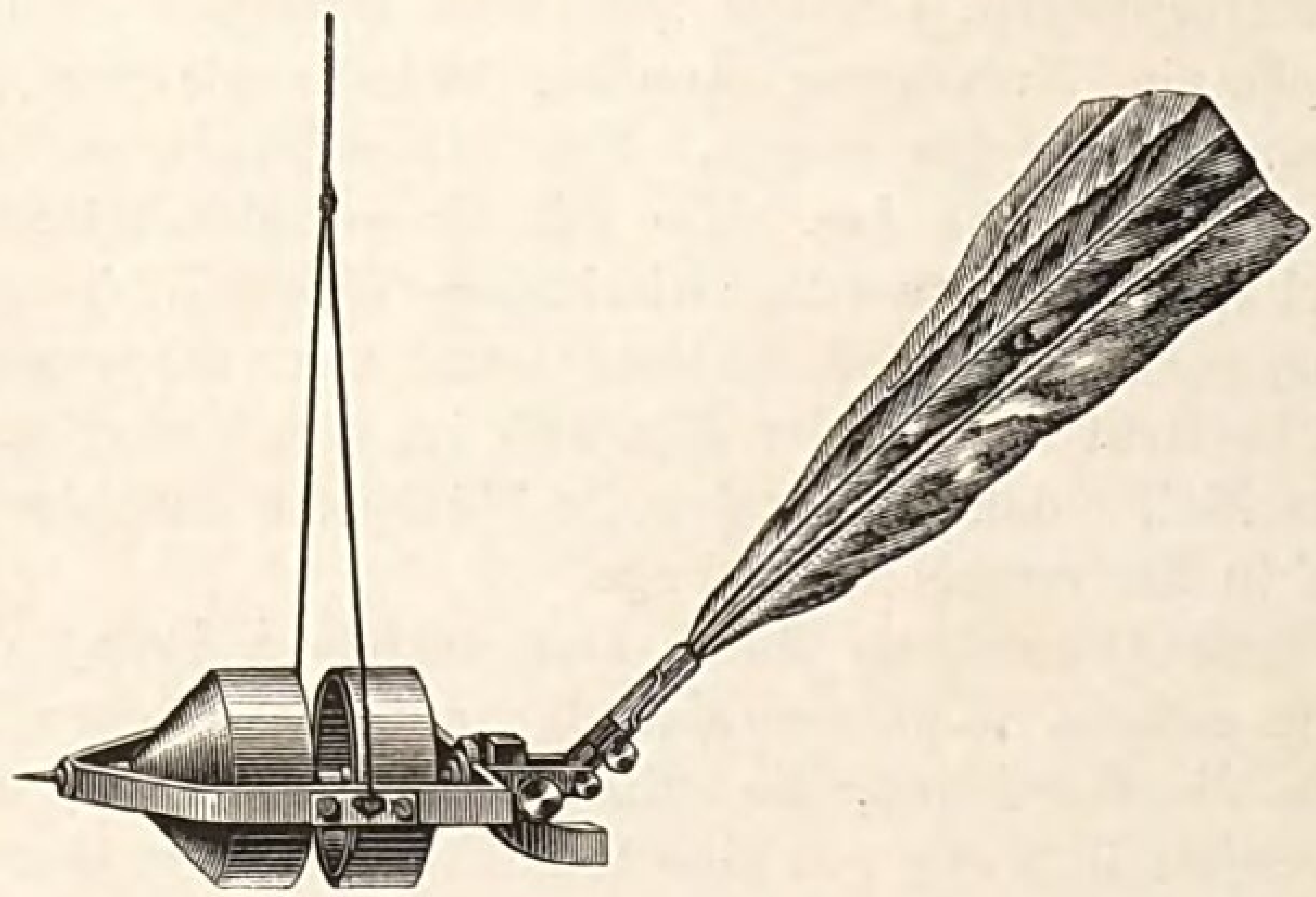


Fig. 318.

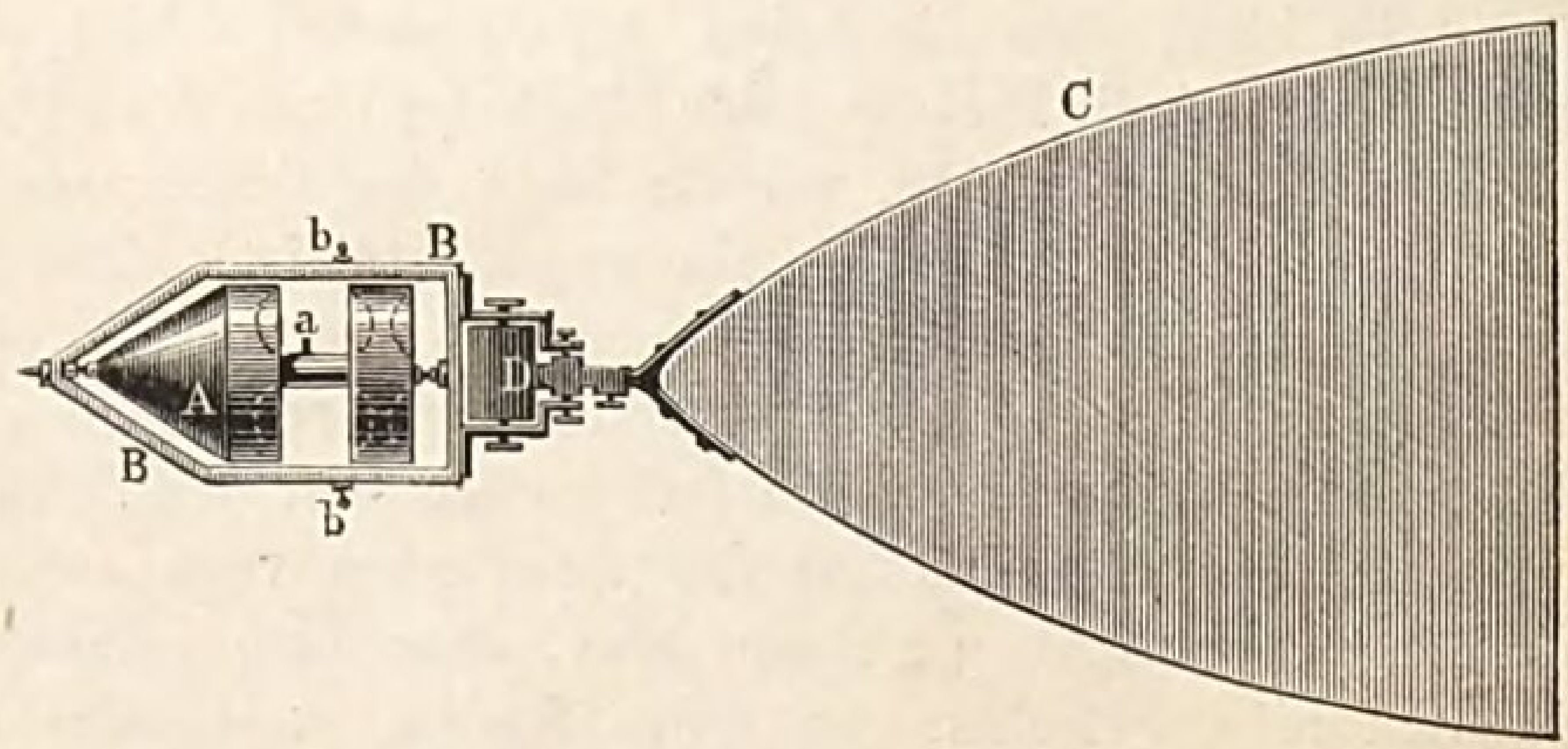
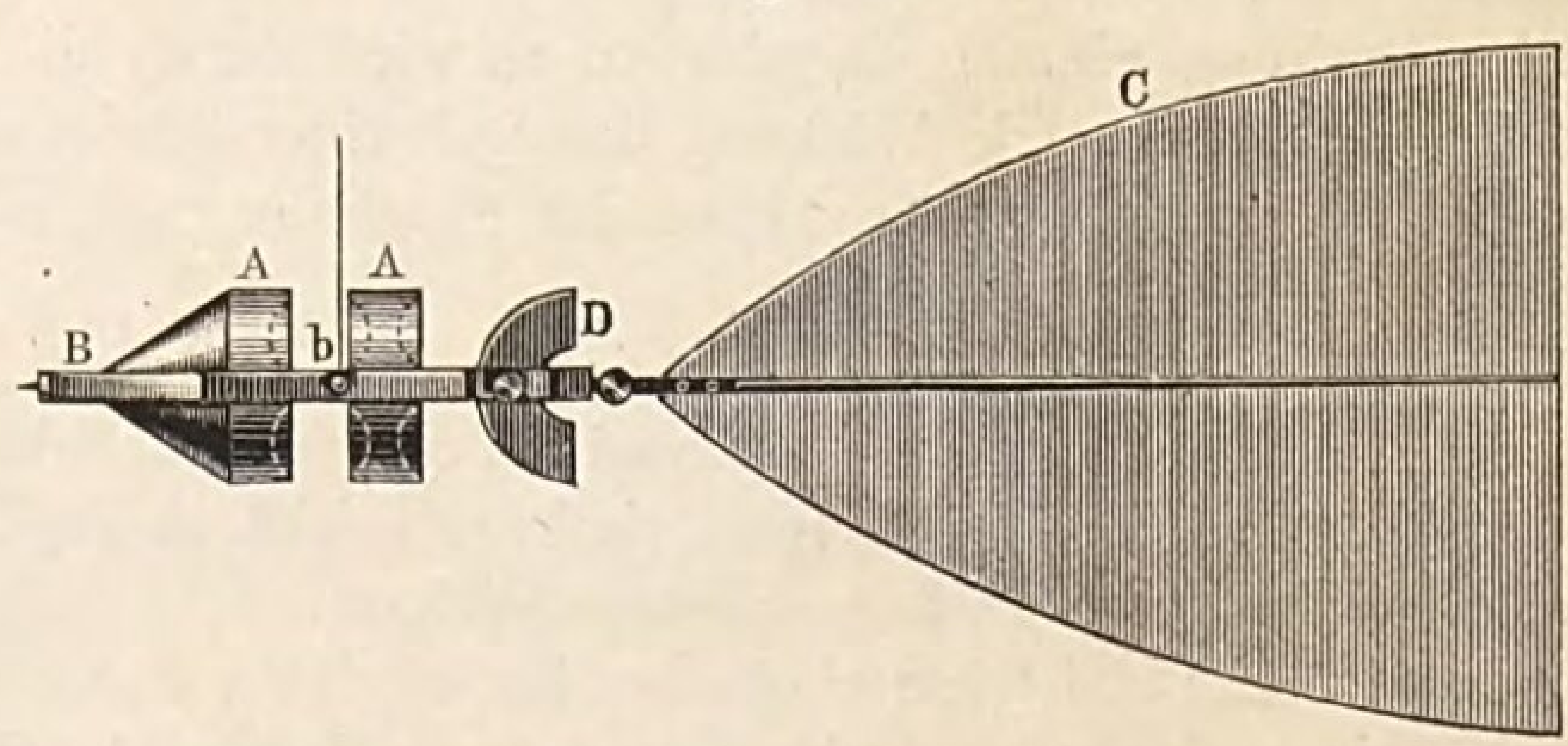


Fig. 319.



den Schwerpunkt des ganzen Apparates geht, sind zwei weiter oben sich vereinigende Fäden angebunden, deren gemeinschaftliche Fortsetzung bis zu einem Haken an der Decke des Zimmers reicht und dort befestigt

ist. Die Einrichtung ähnelt daher dem eines sogenannten Taubenschiessens.

An der Hinterseite ist ein Steuerflügel *C* in der Weise angebracht, dass durch dessen Stellung die Resultirende des Luftwiderstandes oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes des Projectils zu liegen kommt. (Fig. 317 zeigt die erstere Lage.) Damit durch die Verstellung des Steuerflügels der Schwerpunkt des Ganzen nicht verrückt werde, ist ein Gegengewicht *D* angefügt, so dass der Flügel sich um seinen eigenen Schwerpunkt drehen muss. Ausserdem kann man den Flügel um seine Längsachse drehen oder auch ihn fortnehmen und durch einen anderen mit zwei auf einander senkrechten Flächen (Fig. 319 *C*) ersetzen.

Mit diesem Apparate können nun folgende Experimente gemacht werden:

1. Stabilität der Rotationsachse (Vortheil der gezogenen Geschütze). Man lässt den Apparat in einem Bogen von etwa 5 m Länge schwingen, indem man ihn am Flügel haltend rückwärts zieht und fallen lässt. Rotirt das Projectil nicht, so schlägt es leicht um, oder kommt durch geringe Ursachen aus seiner Richtung, rotirt es, so bleibt sich seine Achse schön parallel. Hierbei ist dem Steuerflügel eine gegen den Luftwiderstand neutrale Stellung zu geben.

2. Seitendrehung. Man lässt nach rechts rotiren, stellt den Flügel *C* nach aufwärts, dann richtet sich die Spitze beim Vorwärtsfliegen deutlich nach rechts. Aendert man die Rotationsrichtung oder die Flügelstellung ins Gegentheil, so dreht sich die Spitze nach links, ändert man beides, so bleibt die Drehung nach rechts.

3. Seitenabweichung. Dieselbe lässt sich einigermaassen mittelst des Doppelflügels (Fig. 319 *C*) erreichen. Man stellt seine Ebenen so, dass eine vertical, die andere nach aufwärts oder abwärts gerichtet ist.

Der Flügel ist bei diesem Apparate deshalb nöthig, um den grösseren Luftwiderstand des viel schneller bewegten geschossenen Projectils durch die grössere Fläche des langsamer fliegenden Apparates zu erreichen *).

Auf denselben Principien beruhen noch verschiedene Phänomene, so vor Allem die so wichtige Präcession der Tag- und Nachtgleichepunkte **), dann die merkwürdigen Bewegungen des Bumerrangs (eines australischen Wurfholzes, welches, wenn richtig fortgeschleudert, in der Luft umkehrt und dem Werfenden zu Füssen niederfällt), endlich die Bewegungen des Tisches beim sogenannten Tischrücken u. m. a.

*) Dieser Apparat kann vom Universitätsmechaniker Miller in Innsbruck bezogen werden.

**) Man sehe hierüber die Monographie von Dr. Franz Heinen, „Ueber einige Rotationsapparate etc." Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn 1857.

Drittes Capitel.

Von den Molekularkräften in festen Körpern.

75 **Molekularkräfte, Cohäsion, Elasticität.** Ueber die Anordnung der Moleküle der festen Körper sind wir nicht unterrichtet, doch wird angenommen, dass dieselben durch anziehende und abstossende Kräfte auf einander einwirken, welche wir Molekularkräfte nennen.

Um das Verhalten der festen Körper beim Druck und beim Zug äusserer Kräfte zu erklären, hat man angenommen, dass die abstossenden Molekularkräfte bei der Annäherung der kleinsten Theile rascher zunehmen als die anziehenden, und dass bei der Entfernung der Theilchen umgekehrt die abstossenden Kräfte schneller abnehmen als die anziehenden. Im gewöhnlichen Zustande halten sich diese Kräfte (unter gleichzeitiger Mitwirkung des Luftdruckes) das Gleichgewicht und es wird demnach einer Trennung der Theilchen des Körpers ein gewisser Widerstand entgegengesetzt, welchen man die Cohäsion nennt.

Wenn die Theilchen eines festen Körpers durch eine äussere Kraft wirklich ein wenig aus ihrer gegenseitigen Lage verrückt worden sind, so ist deshalb der frühere Gleichgewichtszustand noch nicht völlig vernichtet; denn die Theilchen kehren in ihre frühere Lage zurück, wenn die störende Kraft zu wirken aufhört. Diese Eigenschaft der Körper, vermöge deren die Theilchen in ihre frühere Gleichgewichtslage zurückkehren, wenn die durch äussere Kraft veranlasste Verschiebung gewisse Grenzen nicht überschritten hat, nennt man Elasticität. Die Elasticität der festen Körper beweist, dass sich die Theilchen in einem stabilen Gleichgewichtszustande befinden; denn nur für den Fall des stabilen Gleichgewichts kehrt der Körper in seine Ruhelage zurück, wenn die Kräfte, welche ihn daraus entfernten, zu wirken aufhören.

Nicht alle Körper sind gleich elastisch; es giebt Körper, deren Theilchen selbst nach bedeutender Verschiebung doch wieder vollkommen

in ihre frühere Lage zurückkehren, und solche Körper, wie z. B. Federharz (Gummi elasticum), Stahl, Elfenbein etc., werden vorzugsweise elastisch genannt; andere hingegen, wie Blei, Glas etc., sind nur in geringem Grade elastisch, sie können keine grosse Verschiebung der Theilchen ertragen, ohne dass der frühere Gleichgewichtszustand aufgehoben wird.

Wenn überhaupt eine grosse Kraft nöthig ist, um eine Verschiebung der Theilchen eines Körpers hervorzubringen, so nennt man ihn hart. Ein Körper kann hart und elastisch sein, wie dies beim Elfenbein, beim Stahl etc. der Fall ist; das Glas dagegen ist hart und wenig elastisch.

Ein Körper, dessen Theilchen schon durch eine geringe Kraft verschoben werden können, wird weich genannt. Auch die weichen Körper können entweder elastisch sein, wie z. B. Federharz, oder nur einen sehr geringen Grad von Elasticität besitzen, wie dies z. B. beim feuchten Thon der Fall ist. Der Aggregatzustand solcher weichen, mehr oder weniger breiartigen Körper kann gewissermaassen als ein Mittelzustand zwischen dem vollkommen festen und dem vollkommen flüssigen betrachtet werden.

Wenn die Theilchen eines Körpers über die Elasticitätsgrenze hinaus verschoben werden, so hört entweder der Zusammenhang ganz auf, sie zerbrechen (Glasthränen), oder die Theilchen ordnen sich zu einem neuen stabilen Gleichgewichtszustande. Im ersteren Falle nennt man die Körper spröde, im letzteren dehnbar. Die äussere Gestalt spröder Körper lässt sich durch Druck, durch Stoss etc. nicht bleibend ändern; wenn durch äussere Ursachen ihre Theilchen über eine gewisse Grenze verschoben werden, so erfolgt eine vollständige Trennung; die Gestalt dehnbarer Körper hingegen lässt sich durch mechanische Mittel bleibend verändern, wie dies z. B. das Flachklopfen eines Bleidrahtes und das Prägen der Münzen beweist.

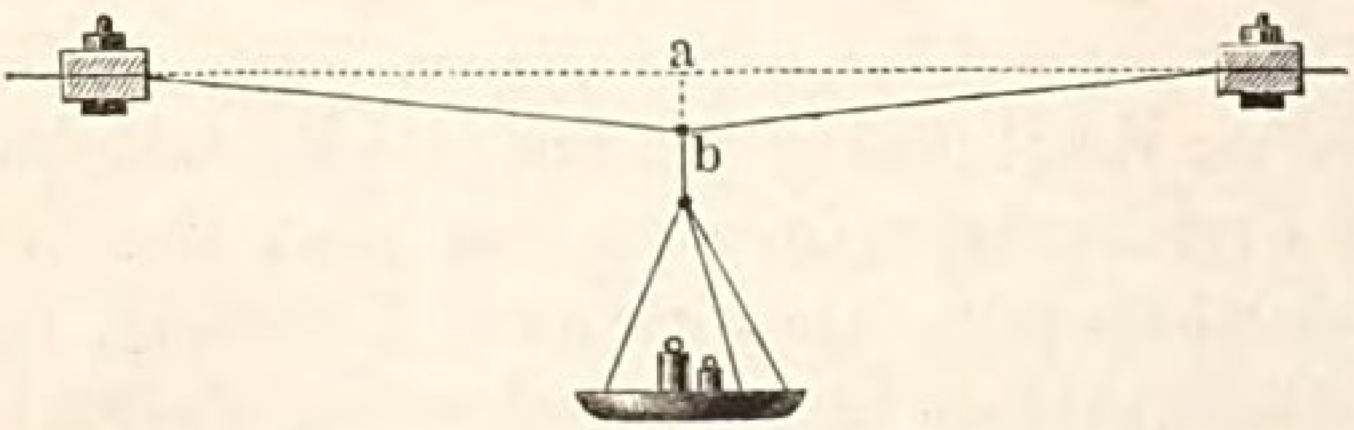
Die Verschiebung der Theilchen kann entweder durch Spannung, durch Zusammendrückung oder durch Drehung hervorgebracht werden.

Elasticitätscoefficient und Elasticitätsmodulus. Um die 76
Verlängerung zu messen, welche Drähte erfahren, wenn sie durch Gewichte innerhalb ihrer Elasticitätsgrenze gespannt werden, welche also weder Zerreissung noch eine merkliche bleibende Verlängerung erfahren, wandte S'Gravesande folgende Methode an. Der zu prüfende Draht wurde, wie Fig. 320 andeutet, in horizontaler Richtung ausgespannt, an beiden Enden fest eingeklemmt und dann in der Mitte durch Gewichte belastet. Wird die Länge ab gemessen, um welche die Mitte des Drahtes durch das angehängte Gewicht niedergezogen wird, so lässt sich daraus leicht die Verlängerung berechnen, welche der Draht erfahren hat.

Diese Methode ist für dickere Drähte und für Stäbe nicht mehr anwendbar. Wertheim fand es am zweckmässigsten, die Verlängerung

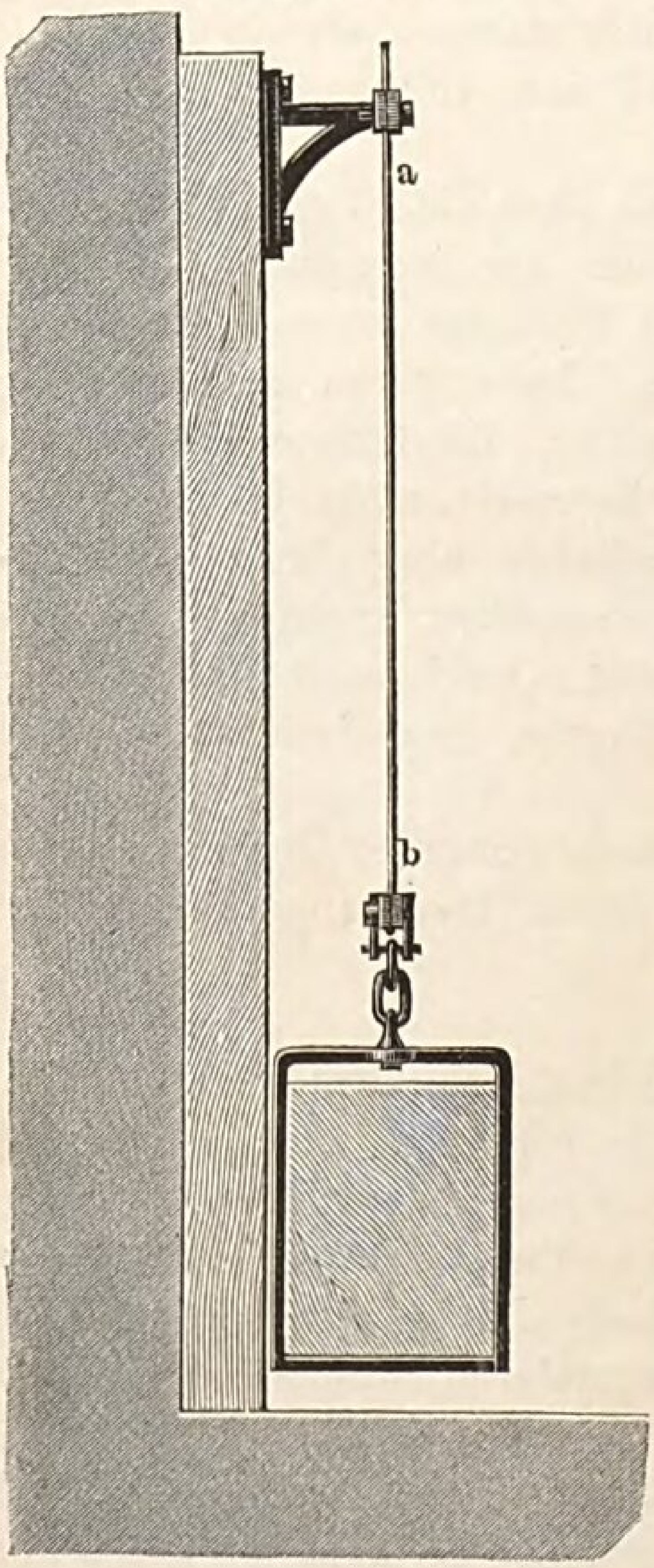
direct zu messen, und zwar auf folgende Weise. Der Stab, dessen Verlängerung gemessen werden sollte, war oben in einen eisernen Träger, Fig. 321, eingeklemmt und trug unten einen Haken, an welchen ein zur Aufnahme von Gewichten dienender Kasten angehängt wurde. Auf dem Stabe waren zwei Punkte *a* und *b* markirt, deren Abstand vor und während der Belastung durch ein bestimmtes Gewicht mit Hülfe des Kathetometers gemessen wurde.

Fig. 320.



Aus derartigen Messungen ergab sich nun, dass die elastische Verlängerung proportional ist:

Fig. 321.



1) dem angehängten Gewicht,
2) der Länge des Stabes,
3) umgekehrt dem Querschnitt des Stabes.

Die Verlängerung d, welche ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt f durch ein Gewicht P erleidet, ist also:

$$d = n\,\frac{Pl}{f} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn n einen constanten Factor bezeichnet, welcher für jede Substanz einen besonderen Werth hat und welcher der Elasticitätscoefficient genannt wird.

Aus Gleichung 1 folgt:

$$\frac{Pl}{df} = \frac{1}{n} = E \quad . \quad . \quad (2)$$

Da n für jede Substanz eine constante Grösse ist, so ist auch $\frac{1}{n}$ oder E eine constante Grösse, welche mit dem Namen des Elasticitätsmodulus bezeichnet wird. Denken wir uns in Gleichung (2) $l = 1$, $f = 1$ und $d = 1$ gesetzt, so wird $P = E$; E ist also das Gewicht, welches erforderlich wäre, um einen Stab von dem Querschnitt 1 und der Länge 1 um die Länge 1 auszudehnen, oder, was dasselbe ist, um ihn auf das Doppelte seiner

ursprünglichen Länge auszuziehen, vorausgesetzt, dass er eine solche Drehung ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze ertragen könnte.

Verschiedene Physiker haben die Elasticitätsconstanten mehrerer Stoffe mit möglichster Genauigkeit bestimmt. Die vollständigsten Untersuchungen über diesen Gegenstand sind aber diejenigen, welche Wertheim angestellt hat. (Pogg. Ann. Ergänzungsband II.)

Die wichtigsten Resultate seiner Versuche über Metalle sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Angelassen		Gezogen	
	n	E	n	E
Blei	0,000579	1727	0,000555	1803
Gold	0,000179	5585	0,000123	8131
Silber	0,000140	7141	0,000137	7274
Zink	—	—	0,000114	8734
Kupfer	0,000095	10519	0,000080	12449
Platin	0,000064	15518	0,000058	17044
Stahldraht	0,000058	17278	0,000053	18809
Gussstahl	0,000051	19561	0,000051	19549
Eisen	0,000048	20794	0,000048	20869
Messing	—	—	0,000117	8543

Unter n findet man, um den wievielten Theil seiner Länge ein Draht des in der ersten Columne genannten Metalls von 1 qmm Querschnitt verlängert wird, wenn er durch ein Gewicht von 1 kg gespannt wird. Ein 1 m langer Silberdraht von 1 qmm Querschnitt wird also durch Anhängen von 1 kg um 0,14 mm verlängert. — Auch die unter E stehenden Zahlen beziehen sich auf 1 qmm Querschnitt.

Für verschiedene Glassorten erhielten Wertheim und Chevandier folgende Werthe von E:

	n	E
Spiegelglas	0,000142	7015
Fensterglas	0,000126	7917
Krystallglas	0,000145	6890
desgl. bleihaltig	0,000182	5477

Als Elasticitätsgrenze bezeichnet man das Gewicht, welches eine bleibende Verlängerung von 0,00005 der Stab- oder Drahtlänge bewirkt, welches also einen 1 m langen Draht bleibend um 0,05 mm verlängert. Die folgende Tabelle giebt in dem eben angedeuteten Sinne die Elasticitätsgrenze für Drähte von 1 qmm Querschnitt in Kilogrammen.

	Elasticitätsgrenze	Verlängerung bei der Elasticitätsgrenze	Verlängerungsmaxima
Blei, ausgezogen	0,25	0,00014	0,243
„ angelassen	0,20	0,00012	0,614
Silber, ausgezogen . . .	11	0,00149	0,0045
„ angelassen . . .	3	0,00036	0,168
Kupfer, ausgezogen . . .	12	0,00093	0,003
„ angelassen . . .	3	0,00027	0,220
Platin, ausgezogen . . .	26	0,00142	—
„ angelassen . . .	14	0,00081	0,0023
Eisen, ausgezogen . . .	32	0,00150	0,026
„ angelassen	5	0,00022	0,109
Stahldraht, ausgezogen .	43	0,00200	—
„ angelassen .	15	0,00056	0,0044

Ferner finden wir in dieser Tabelle angegeben, um den wievielten Theil seiner Länge ein Draht von 1 qmm Querschnitt höchstens ausgezogen werden darf, wenn keine merkliche Verlängerung zurückbleiben soll; in der letzten Columne endlich findet man angegeben, um den wievielten Theil ihrer Länge Drähte noch ausgezogen werden können, ehe der Bruch erfolgt.

So sehen wir z. B., dass man an einen ausgezogenen Kupferdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bis zu 12 kg anhängen darf, ohne dass er eine merkliche (über 0,05 mm gehende) bleibende Verlängerung erfährt; dass der fragliche Draht durch 12 kg um 0,93 mm elastisch verlängert wird, und dass er im Ganzen um 3 mm ausgezogen werden kann, ehe der Bruch erfolgt.

Wertheim und Chevandier (Pogg. Ann. Ergänzungsband II, S. 481) fanden für Holzstäbe in der Richtung der Fasern bei 20 Proc. Feuchtigkeit folgende Werthe für die Elasticitätsconstanten (auf 1 qmm Querschnitt bezogen).

	Specifisches Gewicht	Elasticitäts-coefficient n	Elasticitäts-modulus E	Elasticitäts-grenze
Akazie	0,717	0,000792	1262	3,2
Tanne (Pin. abies) . . .	0,493	0,000890	1113	2,2
Föhre (Pin. silv.)	0,559	0,001773	564	1,6
Hagebuche	0,756	0,000921	1086	1,3
Birke	0,812	0,001003	997	1,6
Buche	0,823	0,001020	980	2,3
Eiche	0,872	0,001085	921	2,3
Ahorn	0,674	0,000979	1021	2,7
Pappel	0,477	0,001934	517	1,5

Durch akustische Versuche ermittelten Wertheim und Chevandier folgende Werthe für den Elasticitätsmodulus verschiedener Holzarten in der Richtung des Radius und in der Richtung der Tangente:

	In der Richtung des Radius	In der Richtung der Tangente
Hagebuche	208	103
Ahorn	157	73
Eiche	189	130
Birke	81	155
Buche	270	159
Pappel	73	39
Tanne	94	34
Föhre	97	29

Die Proportionalität zwischen der Verlängerung und dem spannenden Gewicht findet auch bei spiralförmig gewundenen Metalldrähten, sogenannten Spiralfedern, statt, nur ist hier eine verhältnissmässig kleine Kraft schon im Stande, bedeutende Verlängerungen zu bewirken, wie sich dies z. B. an Jolly's Federwage (Fig. 322, a. f. S.) zeigen lässt. — Ein spiralförmig gewundener Draht (etwa Claviersaite Nr. 6) ist bei *a* aufgehängt und trägt an seinem unteren Ende zwei kleine Wagschalen *c* und *d*, von denen die letztere stets in Wasser eingetaucht

ist. Das Glas, welches das Wasser enthält, steht auf einem Träger *B*, der am Stativ *A* auf- und niedergeschoben werden kann und welcher stets so zu stellen ist, dass *d* frei im Wasser schwebt. Um die Stellung der Marke *m* bequem und sicher ablesen zu können, ist die am Stativ *A* angebrachte Theilung auf einen Spiegelstreifen aufgetragen. Um

Fig. 322.

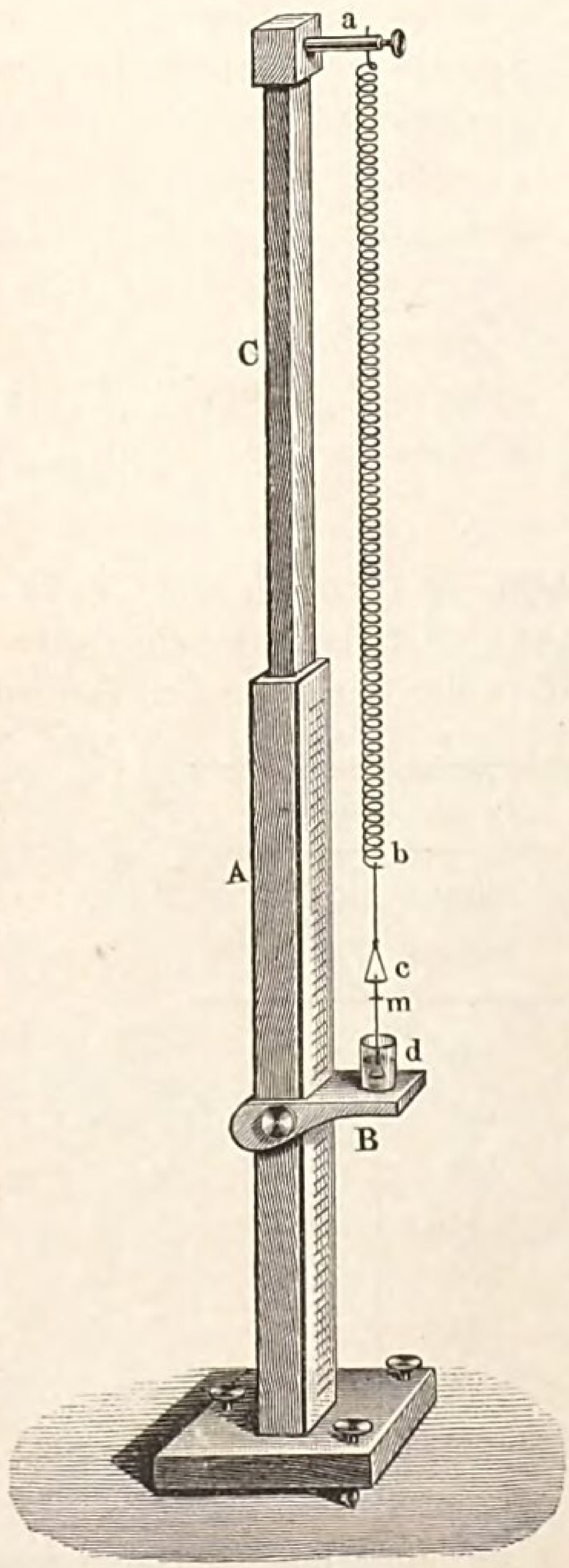
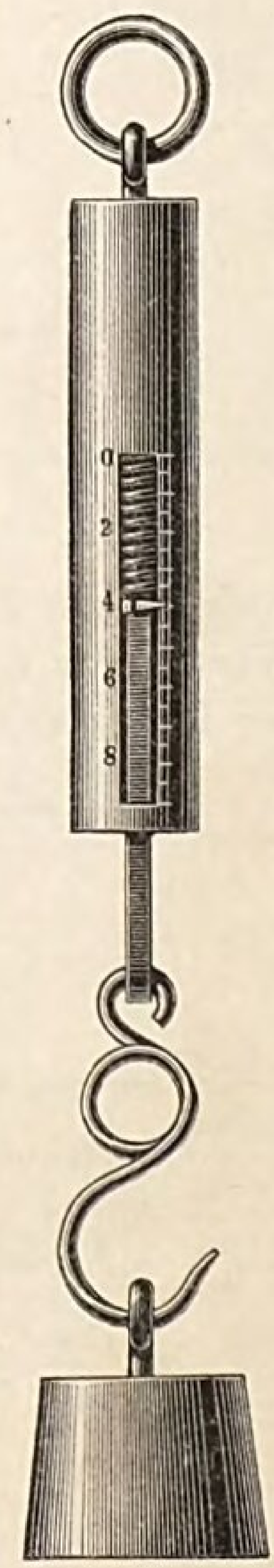


Fig. 323.



richtig abzulesen, mit welchem Theilstrich der Scala sich *m* in gleicher Höhe befindet, hat man das Auge in eine solche Stellung zu bringen, dass die Marke *m* mit ihrem Spiegelbild zusammenfällt.

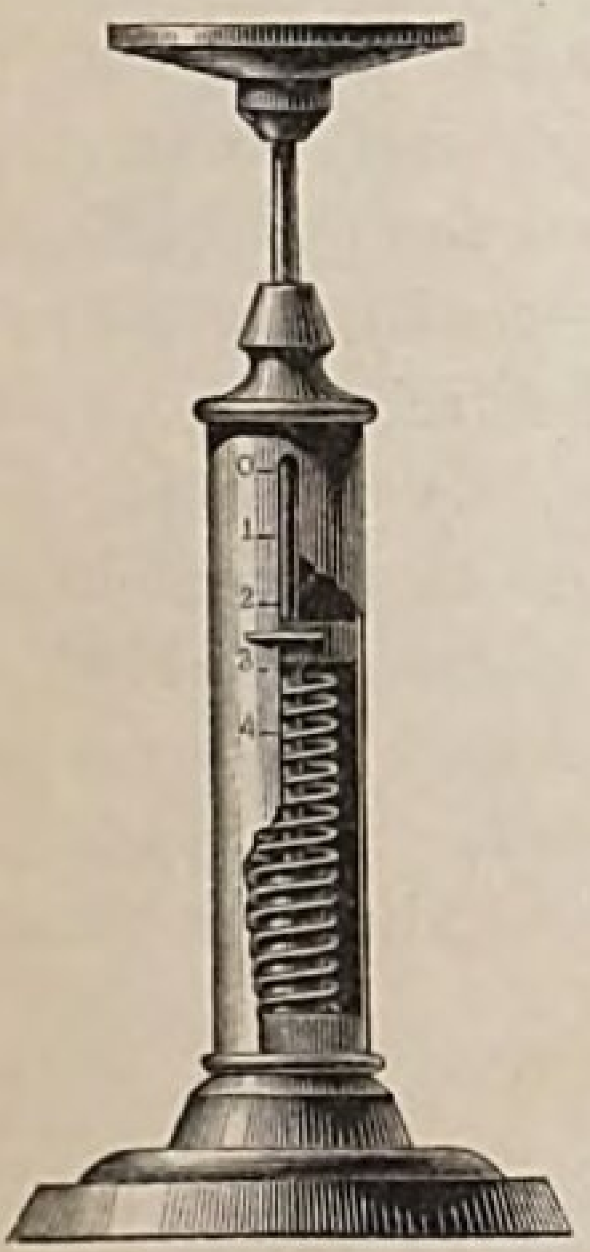
Bei einer Spirale von 36 Windungen der oben bezeichneten Drahtsorte stellte sich z. B. die Marke *m* beim Theilstrich 64 ein, als die Wage nicht weiter belastet war. Als auf die Wagschale *c* das Gewicht von

1 g aufgelegt wurde, musste man den Schieber *B* niedersenken, um die Wagschale *d* im Wasser freischwebend zu erhalten, und nun stellte sich die Marke *m* beim Theilstrich 436 ein. Die Spirale hat also durch die Last von 1 g eine Verlängerung von 436 — 64 = 372 Theilstrichen erfahren. Durch ein Gewicht von 0,5 oder 0,1 g erleidet sie eine Verlängerung von 186 oder 37,2 Theilstrichen. 1 mg verlängert die Spirale um 0,372 Theilstriche.

Das Auflegen eines kleinen Krystalls auf die Wagschale *c* bewirkte eine Verlängerung der Spirale um 211 Theilstriche, das Gewicht dieses Krystalls beträgt also $\frac{211}{372} = 0{,}567$ g. Um das specifische Gewicht des Krystalls zu bestimmen, wird er in die in Wasser eingetauchte Schale *d* gebracht und dann eine abermalige Wägung ausgeführt*).

Auf dasselbe Princip hat man auch Federwagen mit stärkerem Stahldraht für den alltäglichen Gebrauch construirt, wie eine solche in Fig. 323, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf, dargestellt ist. Während bei dieser Federwage die (bis 9 kg schweren) angehängten Lasten die Spiralfeder verlängern, wird bei der Briefwage, Fig. 324, die Spiralfeder durch die aufgelegten Gewichte zusammengedrückt.

Fig. 324.



Bei der Federwage wirkt das Gewicht des zu wägenden Körpers, welches von der Intensität der Schwerkraft abhängig ist, der von der Intensität der Schwerkraft unabhängigen Elasticität der Federn entgegen, für denselben Körper würden also die Angaben der Federwage verschieden ausfallen, wenn die Intensität der Schwerkraft sich änderte. Dieselbe Last z. B., welche an den Haken der Federwage, Fig. 323, angehängt, auf der Erde den Zeiger bis zum Theilstrich 6 herunterzieht, würde denselben auf dem Monde nur bis zum Theilstrich 1 herabziehen können. Die Wägungen mit der gewöhnlichen zweiarmigen Wage sind dagegen von der Intensität der Schwerkraft ganz unabhängig, weil etwaige Variationen derselben ganz gleichmässig auf den Inhalt beider Wagschalen wirken.

Eine Spiralfederwage von entsprechend starkem Stahldraht kann auch als Zugkraftmesser (Dynamometer) gebraucht werden.

Volumveränderung durch Zug. Nach Poisson's theoretischen Entwickelungen wird der Durchmesser eines Stabes im Verhältniss 77

*) Ueber die Verwendbarkeit der Jolly'schen Federwage hat Professor A. Steinhauser Untersuchungen veröffentlicht in der Zeitschrift „Die Realschule", 1873, III. Jahrg. Nr. 4 u. 5.

von 1 zu $1 - \frac{a}{4}$ verkleinert, wenn die Länge desselben durch Ziehen im Verhältniss von 1 zu $1 + a$ vermehrt worden ist. Damit stimmen die Resultate der Versuche von Cagniard La Tour überein, welche auf folgende Weise angestellt wurden. Der Metallstab, dessen unteres Ende festgehalten ist, während sein oberes Ende durch eine Hebelvorrichtung aufwärts gezogen wird, wie Fig. 325 anschaulich macht, ist von einer engen mit Wasser gefüllten Glasröhre umgeben. Sobald der Stab, durch Anziehen verlängert, dünner wird, senkt sich der Spiegel des Wassers in der Röhre, und man braucht nur die Grösse dieser Senkung zu messen, um daraus die Verminderung des Stabdurchmessers berechnen zu können.

Fig. 325.

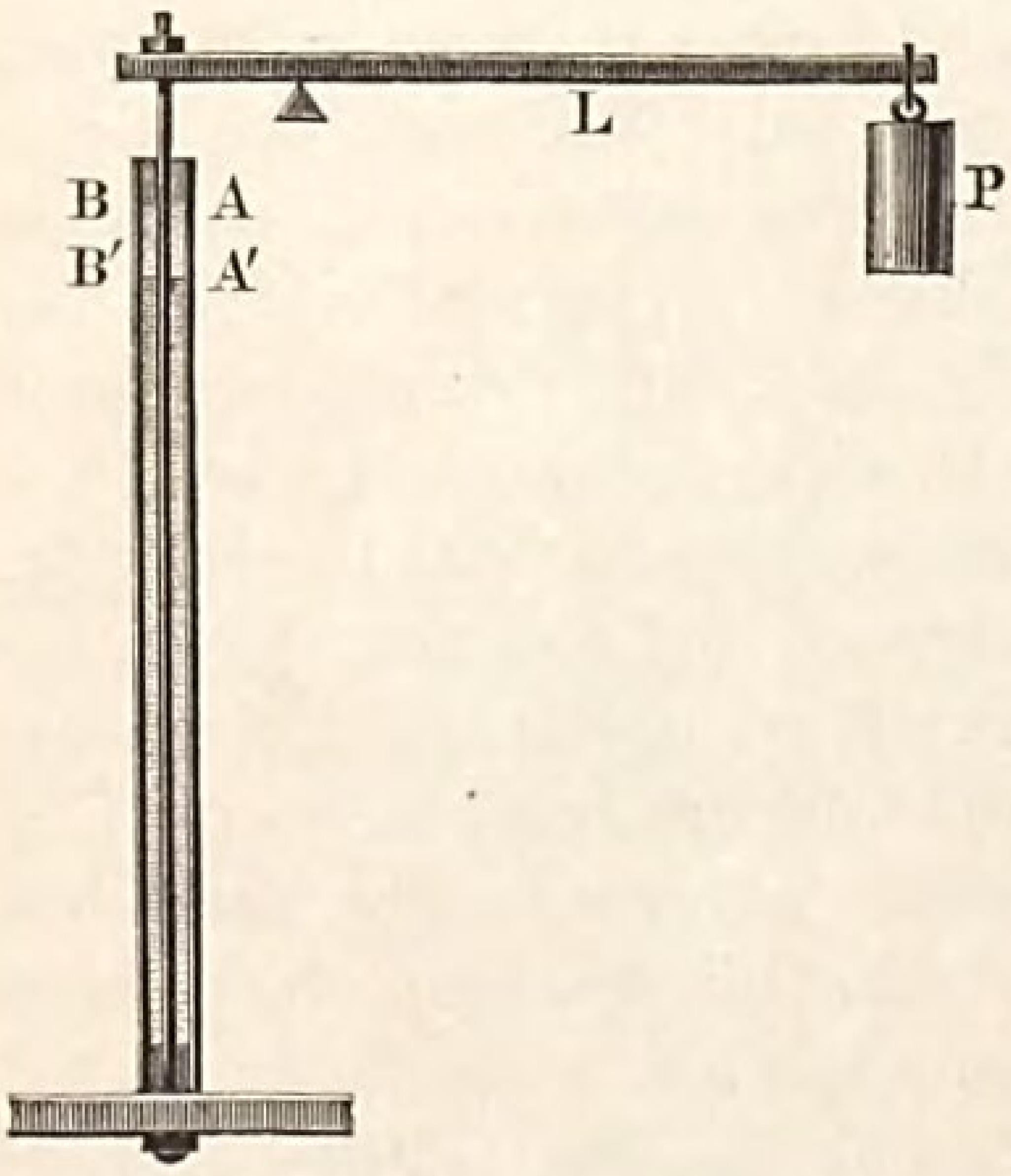
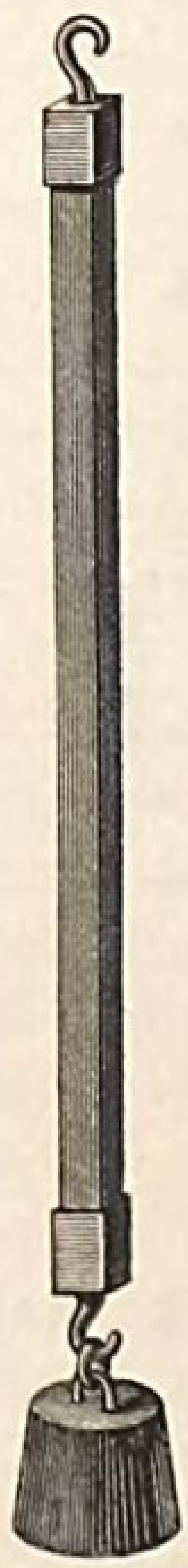


Fig. 326.



Wertheim's Versuche stimmen jedoch mit diesen Resultaten nicht überein. Zunächst machte er Versuche mit Kautschukstäben von quadratischem Querschnitt, Fig. 326; er fand durch directe Messung, dass, wenn diese Stäbe durch angehängte Gewichte im Verhältniss von 1 zu $1 + a$ verlängert werden, die Seite des Querschnitts im Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{a}{3}$ abnimmt. — Zu dem gleichen Resultat führten Versuche mit Messingröhren, welche, mit Wasser gefüllt, am oberen Ende mit einem engen Glasröhrchen in Verbindung standen. Durch Ausziehen der Röhre verändert sich der Rauminhalt derselben, wie man aus der Veränderung des Wasserstandes im Glasröhrchen erkennt.

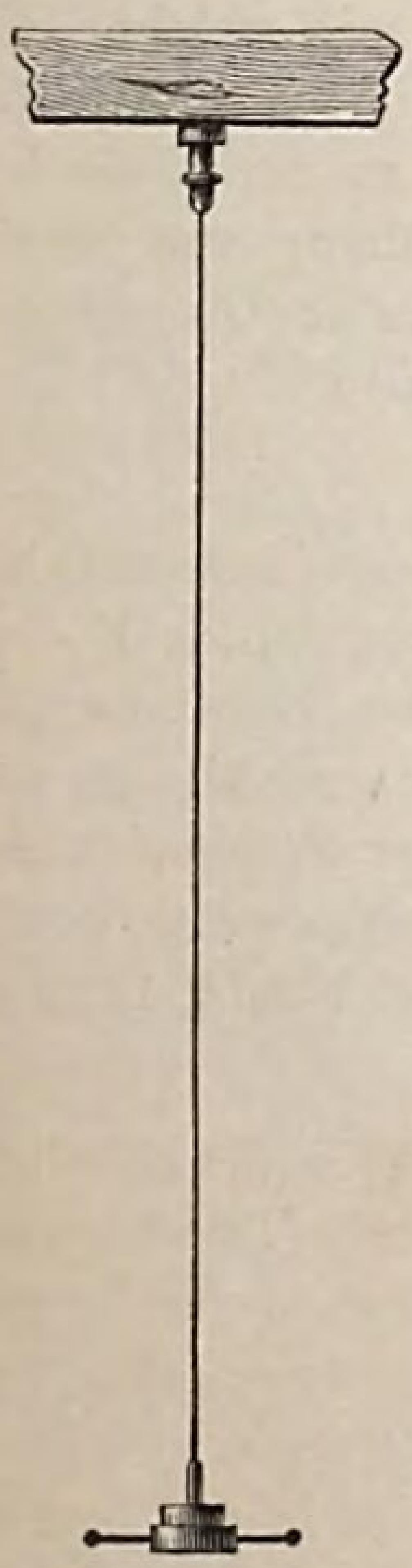
Wenn sich der Durchmesser des Stabes im Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{a}{3}$ verkleinert, so nimmt der Flächeninhalt des Querschnittes ab im Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{2}{3}\, a$ (da a klein genug ist, um seine höheren Potenzen zu vernachlässigen). Das Volumen des ganzen Stabes ändert sich aber im Verhältniss von

$$1 \text{ zu } (1 + a)\left(1 - \frac{2}{3}\, a\right)$$

oder, was dasselbe ist, im Verhältniss von 1 zu $1 + \frac{1}{3}\, a$.

Torsionselasticität. Wenn ein Stab an einem Ende festgeklemmt, an dem anderen Ende durch irgend eine Kraft um seine Achse umgedreht wird, so erleiden die einzelnen Theilchen eine Verschiebung, durch welche eine elastische Kraft hervorgerufen wird, welche die verschobenen Theilchen wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt. Um die Erscheinung der Torsionselasticität an Drähten zu studiren, werden sie an ihrem oberen Ende eingeklemmt, wie Fig. 327 zeigt, unten aber durch Gewichte belastet. Wenn man das Gewicht aus seiner ursprünglichen Lage um einen bestimmten Winkel herausdreht, wobei die Achse des Drahtes die Umdrehungsachse bildet, und es sich dann selbst überlässt, so wird es durch die Torsionselasticität zunächst in seine Gleichgewichtslage zurückgeführt. In der Gleichgewichtslage angekommen, bleibt es aber nicht in derselben stehen, sondern es geht in Folge seiner Trägheit über dieselbe hinaus, den Draht nach der entgegengesetzten Seite windend, und so entsteht eine Reihe von Schwingungen, welche kleiner und kleiner werden, bis endlich der Draht mit dem angehängten Gewichte in seiner Gleichgewichtslage zur Ruhe kommt. 78

Fig. 327.



In Beziehung auf die Grösse der Torsionskraft gelten folgende Gesetze:

1. Die Torsionskraft ist dem Drehungswinkel proportional, wenn man also das untere Ende des Drahtes um $2n$, $3n$, $4n$ Grade etc. aus der Gleichgewichtslage herausdreht, so ist die dadurch hervorgerufene Torsionskraft 2-, 3-, 4- etc. mal so gross, als wenn die Drehung nur n Grade betragen hätte. Dies Gesetz geht daraus hervor, dass die Schwingungsdauer von der Grösse der ursprünglichen Drehung unabhängig ist, vorausgesetzt, dass man die Elasticitätsgrenze nicht überschritten hat.

Auf dieses Gesetz hat Coulomb, welcher überhaupt die Torsionselasticität zuerst gründlich studirt hat, seine Drehwage gegründet, welche als ein für die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität höchst wichtiges Instrument später besprochen werden soll.

2. Die Torsionskraft ist von der Spannung des Drahtes unabhängig.

3. Die Torsionskraft ist der Länge des Drahtes umgekehrt proportional.

79 **Festigkeit.** Die Kraft, mit welcher ein Körper der Trennung seiner Theilchen widersteht, nennt man seine Festigkeit.

Der zwischen den einzelnen Theilchen eines festen Körpers stattfindende Zusammenhang lässt sich durch Zerreissen, durch Zerbrechen, durch Zerwinden (Abdrehen) oder durch Zerdrücken aufheben.

Absolute Festigkeit nennt man die Kraft, mit welcher ein Körper dem Zerreissen widersteht, wenn er der Länge nach gespannt wird. Dieser Widerstand ist dem Querschnitte des zu zerreissenden Körpers proportional, denn es muss ja der Zusammenhang von zwei-, drei-, viermal so viel Theilchen aufgehoben werden, wenn der Querschnitt des Körpers zwei-, drei-, viermal so gross ist. Es ist also

$$P = n k$$

wenn P die absolute Festigkeit, also die eben zum Zerreissen nöthige Kraft, n den Querschnitt des Körpers und k einen constanten Factor bezeichnet, welcher von der Natur der zu zerreissenden Substanz abhängig ist. Dieser Factor k, also die Kraft, welche eben nöthig ist, um einen Stab zu zerreissen, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, wird der Festigkeitsmodulus genannt. Der Zahlenwerth von k hängt davon ab, welche Flächeneinheit und welche Gewichtseinheit man wählt.

Schon Muschenbroek hat zahlreiche Versuche über die absolute Festigkeit verschiedener Körper angestellt. Die folgende Tabelle enthält den in Kilogrammen ausgedrückten Festigkeitsmodulus, wenn man das Quadratmillimeter als Flächeneinheit annimmt, also das Gewicht, welches eben nöthig ist, um Drähte von 1 Quadratmillimeter Querschnitt zu zerreissen, wie es Wertheim in der bereits oben citirten Abhandlung angiebt.

	Ausgezogen Kilogramm	Angelassen Kilogramm
Blei	2,2	1,9
Zinn	2,6	2,4
Gold	26	11
Silber	29	16
Kupfer	40	31
Platin	34	25
Eisen	63	48
Gussstahl	83	65
Messing	60	—

Auf denselben Querschnitt beziehen sich die folgenden von Wertheim und Chevandier ermittelten Werthe für den Festigkeitsmodulus verschiedener Holzsorten:

	In der Richtung		
	der Fasern	des Radius	der Tangente
Akazie	7,93	—	—
Tanne (Pin. abies) . .	4,18	0,22	0,29
Föhre (Pin. silv.) . .	2,48	0,26	0,20
Hagebuche	2,99	1,00	0,61
Birke	4,30	0,82	1,06
Buche	3,57	0,88	0,75
Eiche	5,66	0,58	0,41
Ahorn	2,71	0,72	0,37
Pappel	1,48	0,15	0,21

Nach anderen Angaben ist die absolute Festigkeit der Holzarten bedeutend grösser, so z. B. für

Eiche	6 bis 8 kg
Tanne	8 „ 9 „
Buche	8 „

Der Grund dieser Verschiedenheit ist vielleicht im ungleichen Wassergehalt, im verschiedenen Alter der Bäume, verschiedenem Standort etc. zu suchen.

Für Hanfseile ist nach älteren Bestimmungen die absolute Festigkeit für das Quadratmillimeter Querschnitt 3,5 bis 6,2.

Die grosse Verschiedenheit in der Festigkeit der Hanfseile rührt von der ungleichen Beschaffenheit der Materiale her, aus denen sie verfertigt sind. Dünne Seile sind verhältnissmässig stärker als dicke, weil sie aus besserem Hanf gemacht sind. Durch starkes Drehen der einzelnen Fäden wird die Tragkraft der Seile bedeutend vermindert. Nasse Seile haben eine geringere Festigkeit als trockene.

Bei praktischen Anwendungen wird man der Sicherheit wegen wohl thun, bei Metallen nur $^1/_3$, bei Hölzern nur $^1/_4$ der durch die Versuche ermittelten absoluten Festigkeit in Rechnung zu bringen.

Die Kraft, welche ein Körper dem Zerbrechen entgegensetzt, nennt man eine relative, diejenige, welche er dem Zerdrücken entgegensetzt, die rückwirkende Festigkeit. Die relative Festigkeit

sowohl wie die rückwirkende steht in einem innigen Verhältniss zur absoluten, was sich auch in mathematischer Form ausdrücken lässt; doch ist hier nicht der Ort, weiter darauf einzugehen.

80 **Adhäsion.** Dieselbe Kraft, welche die Theilchen eines festen Körpers zusammenhält, wirkt auch, um die Theilchen zweier vorher getrennter Körper zusammenzuhalten, wenn man nur im Stande ist, sie in eine hinreichend innige Berührung zu bringen. So verbinden sich Spiegelplatten, welche nach der Politur dicht an einander gelegt worden sind, oft so innig mit einander, dass sie nicht mehr getrennt werden können, ohne die Platten zu zerbrechen. Ebenso haften zwei Bleiplatten, die man zusammendrückt, fast so fest auf einander, als ob sie nur eine einzige Bleimasse ausmachten, vorausgesetzt, dass die Flächen, in welchen sich die beiden Bleistücke berühren, vollkommen eben und metallisch sind.

Dieses Aneinanderhaften zweier Körper wird mit dem Namen der Adhäsion bezeichnet.

Die Adhäsion zeigt sich nicht allein zwischen gleichartigen, sondern auch zwischen verschiedenartigen Körpern. Eine Bleiplatte mit einer Zinnplatte oder eine Kupferplatte mit einer Silberplatte durch Glättwalzen gezogen, giebt ein fast untrennbares Ganzes.

Besonders stark zeigt sich die Adhäsion, wenn ein flüssiger Körper mit einem festen Körper in Berührung gebracht und dann durch Erkalten oder durch Verdunstung des Lösungsmittels fest wird; hierauf beruht das Leimen, Kitten und Löthen. Kittet man z. B. vermittelst Siegellack zwei Glasstücke zusammen, so kommt es oft vor, dass sich beim Auseinanderreissen nicht das Glas vom Siegellack trennt, sondern dass Stücke aus dem Glase herausgerissen werden. Wenn man eine Glasplatte mit Leim bestreicht, so haftet dieser oft so fest am Glase, dass Stücke aus demselben (dem Glase) herausgerissen werden, wenn sich der Leim beim Austrocknen zusammenzieht.

Wenn zwei Körper mit ebenen Flächen auf einander liegen, und man den einen über den anderen hinausschieben will, so setzt die Adhäsion dieser Bewegung ein Hinderniss entgegen; die Adhäsion hat also einigen Antheil am Reibungswiderstand, der überall da überwunden werden muss, wo zwei Körper über einander hingleiten, oder wo sich ein Körper über einen anderen hinwälzt. Von der Reibung wird noch weiter unten die Rede sein.

J. Stefan hat nachgewiesen*), dass die Adhäsion auf einander gelegter ebener Platten in vielen Fällen nur eine scheinbare ist. Hängt man nämlich die obere Platte horizontal an einen Wagebalken und bringt sie ins Gleichgewicht, stellt die zweite Platte sehr nahe der ersteren und parallel unterhalb derselben auf, so wird durch jedes noch so kleine

*) Sitzungsber. der Wiener Akademie vom Jahre 1874 (2) LXIX, 713.

Uebergewicht die obere Platte mit langsam beschleunigter Geschwindigkeit abgezogen. Ist die Distanz der Platten klein, ihr Durchmesser gross, so erfolgt die Bewegung anfangs so langsam, dass man längere Zeit hindurch dieselbe nicht direct wahrzunehmen vermag. Trotzdem lässt sich durch optische Mittel (Interferenzstreifen) der Nachweis führen, dass die Bewegung der Platte sofort nach dem Auflegen eines Uebergewichtes beginnt.

Am auffälligsten ist diese Erscheinung, wenn die Platten sich innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, z. B. unter Wasser, befinden.

So beobachtete z. B. *Stefan* an zwei Platten von 155 mm Durchmesser, welche unter Wasser anfänglich um 0,1 mm von einander abstanden, dass durch den continuirlichen Zug eines Gramms dieser Abstand in $1^1/_2$ Minuten um 0,01 mm, in 7 Minuten erst um 0,1 mm vergrössert wurde. Durch diese Langsamkeit der Bewegung irre geführt, wird man versucht, das Phänomen für ein solches zu halten, welches auf statischem Gleichgewicht beruht, während es in Wirklichkeit ein dynamisches Phänomen ist. Sollen die Platten sich entfernen, so muss sich der entstehende grössere Zwischenraum zuvor mit Flüssigkeit füllen, da sonst der äussere Druck die Entfernung fördert.

In Folge der Reibung dringt jedoch die umgebende Flüssigkeit anfangs nur sehr langsam ein und verursacht deshalb die Verzögerung. *Stefan* fand, dass sowohl in Luft als in tropfbaren Flüssigkeiten die *Zeit* zur Erreichung eines gewissen grösseren Abstandes *dem aufgelegten Uebergewichte genau verkehrt proportional sei*, diese Zeit wächst ferner bei gleichem Uebergewicht nahezu im *quadratischen Verhältnisse*, wenn die Plattendistanz im *einfachen Verhältniss* abnimmt. Endlich verhalten sich unter sonst gleichen Umständen diese Zeiten wie die *vierten Potenzen der Radien* der Platten. Auf die Erörterung des theoretischen Zusammenhangs dieser Gesetze mit denen der inneren Reibung müssen wir hier verzichten.

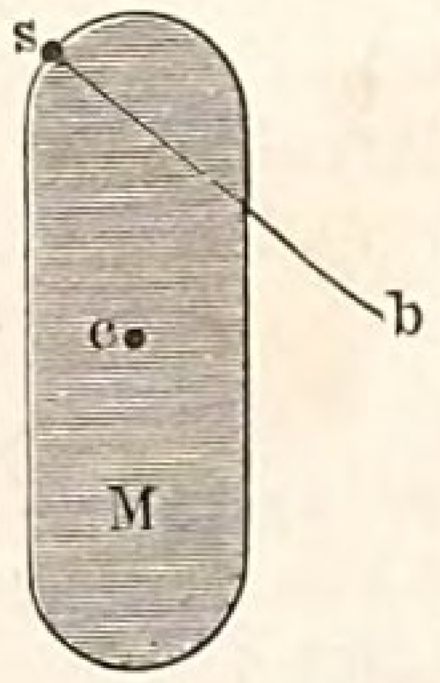
Aus dem Mitgetheilten ist nicht zu folgern, dass es überhaupt keine wahre Adhäsion gebe, wohl aber ist die Annahme der letzteren auf solche Fälle zu beschränken, in denen die Abstände der Platten so klein sind, dass sie in den Wirkungskreis der Molekularkräfte kommen.

Vom Stoss. Wenn ein in Bewegung begriffener Körper auf seiner 81
Bahn mit irgend einem anderen Körper zusammentrifft, so entsteht ein *Stoss*, in Folge dessen jeder den Bewegungszustand des anderen mehr oder weniger modificirt. Der nächste in sehr kurzer Zeit vollendete Erfolg des Stosses ist eine Formveränderung der zusammentreffenden Körper, welche vorübergehend ist bei elastischen, bleibend bei nicht elastischen Substanzen.

In Beziehung auf die Lage des Punktes, in welchem ein Körper zuerst durch einen anderen ihn treffenden gestossen wird, unterscheidet man *centrale* und *excentrische* (nicht centrale) Stösse. Denkt man

sich auf der Oberfläche des Körpers in dem Punkte, auf welchen der Stoss erfolgt, eine Normale gezogen, so ist der Stoss central, wenn diese Normale durch den Schwerpunkt des Körpers geht; der Stoss ist excentrisch, wenn dies nicht der Fall ist.

Fig. 328.



Wie also auch eine homogene Kugel mit anderen Körpern zusammentreffen mag, so erleidet sie stets einen centralen Stoss, weil alle Normalen der Kugeloberfläche durch den Mittelpunkt derselben gehen; wird jedoch ein homogener Körper M von der Gestalt Fig. 328 im Punkte s von irgend einem anderen getroffen, so ist der Stoss in Beziehung auf diesen Körper M nicht central, weil die Normale sb nicht durch den Schwerpunkt C des Körpers M geht.

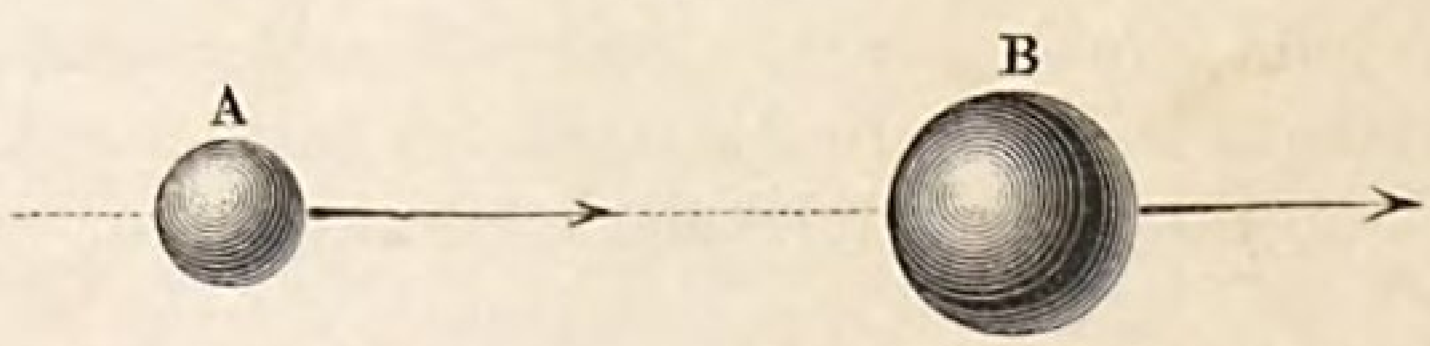
In Beziehung auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden und den schiefen Stoss. Beim geraden Stoss fällt die Bewegungsrichtung mit der Normalen des Berührungspunktes zusammen, beim schiefen Stoss ist dies nicht der Fall.

Der Stoss zweier Kugeln wird also ein gerader sein, wenn sich beide in der Verbindungslinie der Mittelpunkte bewegen.

Wir können uns hier nur mit dem geraden centralen Stoss beschäftigen.

82 **Vom Stoss unelastischer Körper.** Wenn zwei unelastische Körper A und B, Fig. 329, mit verschiedenen Geschwindigkeiten behaftet, zusammenstossen, so findet zunächst eine gegenseitige Zusammendrückung, eine Formveränderung statt, welche beendigt ist, wenn die Geschwindigkeit beider Körper die gleiche geworden ist. Es ist nun die Aufgabe, diese gemeinschaftliche Endgeschwindigkeit zu finden.

Fig. 329.



Es seien M und M_1 die Massen der beiden Körper, c und c_1 ihre Geschwindigkeiten, welche positiv bezeichnet werden sollen, wenn sie von der Linken zur Rechten gerichtet sind. Die Bewegungsgrössen der beiden Körper sind Mc und $M_1 c_1$; was der eine nach dem Stoss an Bewegungsquantität eingebüsst hat, um so viel hat die Bewegungsquantität des anderen zugenommen, und danach lässt sich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit v nach dem Stosse berechnen. Nehmen wir an, dass bei gleichgerichteter Geschwindigkeit beider Körper die Geschwindigkeit c des Körpers A grösser sei als die Geschwindigkeit c_1 des Kör-

pers B, so ist der Verlust an Bewegungsquantität, welchen A durch den Stoss erleidet, $M(c - v)$, die Zunahme der Bewegungsquantität von B ist dagegen $M_1(v - c_1)$, wir haben also

$$M(c - v) = M_1(v - c_1)$$

und daraus

$$v = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1} \quad \text{. 1)}$$

Wenn sich B in entgegengesetzter Richtung von A bewegt, so ist c_1 negativ, und man erhält

$$v = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1}$$

Jeder Stoss unelastischer Körper ist von einem Verlust an lebendiger Kraft verbunden. Die lebendige Kraft des Körpers A ist vor dem Stosse

$$\frac{M c_2}{2}$$

die des Körpers B ist

$$\frac{M_1 c_1^2}{2}$$

also die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stosse

$$M\frac{c^2}{2} + M_1\frac{c_1^2}{2} \quad \text{. 2)}$$

Nach dem Stosse ist die lebendige Kraft

$$(M + M_1)\frac{v^2}{2} \quad \text{. 3)}$$

Zieht man den Werth (3) von (2) ab, so erhält man als Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoss

$$\alpha = M\frac{c^2 - v^2}{2} + M_1\frac{c_1^2 - v^2}{2}$$

Dieser Werth lässt sich in folgender Weise umformen:

$$\alpha = \frac{M}{2}(c + v)(c - v) + \frac{M^1}{2}(c_1 + v)(c_1 - v)$$

$$\alpha = \frac{M}{2}(c + v)(c - v) - \frac{M_1}{2}(v + c_1)(v - c_1) \quad \text{. . 4)}$$

Setzen wir in die Differenz $c - v$ für v seinen obigen Werth bei 1), so kommt

$$c - v = \frac{M_1(c - c_1)}{M + M_1}$$

und

$$M(c - v) = \frac{M M_1(c - c_1)}{M + M_1}$$

da aber $M(c - v) = M_1(v - c_1)$, so ist auch

$$M_1(v - c_1) = \frac{MM_1(c - c_1)}{M + M_1}$$

setzt man diese Werthe für $M(c - v)$ und $M_1(v - c_1)$ in Gleichung 4), so kommt

$$\alpha = \frac{MM_1(c - c_1)}{M + M_1} \cdot \frac{(c + v - v - c_1)}{2}$$

$$\alpha = \frac{MM_1}{M + M_1} \cdot \frac{(c - c_1)^2}{2} \text{*)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Die Grösse $\frac{MM_1}{M + M_1}$ bezeichnet man als das harmonische Mittel der Massen M und M_1.

Zahlenbeispiel: Wenn z. B. auf einer Eisenbahn zwei Züge von 60 000 kg und 80 000 kg Masse in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten $c = 7$ m und $c_1 = -5$ m sich bewegend zusammenstossen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotiven und Wagen verwendeter Verlust an lebendiger Kraft, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität aller zum Stoss gelangender Theile sein würde:

$$\frac{60\,000 \cdot 80\,000}{140\,000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2} = 2\,468\,563 \text{ Watt (in absolutem Maasse)**)}.$$

Aus den obigen Betrachtungen und Berechnungen geht hervor, wie nachtheilig Stösse in einer Maschine wirken müssen, welche nicht geradezu zur Ausübung von Stössen bestimmt ist, sondern in welcher dieselben nur in Folge mangelhafter Construction auftreten. Solche Stösse verzehren nicht allein ganz unnöthigerweise einen grossen Theil lebendiger Kraft, sondern sie führen auch die Maschine selbst einem raschen Ruine entgegen.

83 **Stoss elastischer Körper.** Wenn zwei Körper im geraden centralen Stoss zusammentreffen, so ist der erste Effect eine gegenseitige Zusammendrückung, welche so lange fortdauert, bis die Geschwindigkeit der beiden Massen die gleiche geworden ist. Ist bis zu diesen Momenten die Verschiebung der Theilchen beider Körper über ihre Elasticitätsgrenze hinausgegangen, so dass ihre Formveränderung (wenn nicht Zertrümmerung erfolgt) eine bleibende ist, so erfolgt die fernere Bewegung nach den im vorigen Paragraphen besprochenen Gesetzen. Ist jedoch

*) Diese Formel bezieht sich auf das absolute Maasssystem; im praktischen Maasssysteme, in welchem statt der Massen M, M_1 die Gewichte P, P_1 eingeführt werden, erhielte man

$$\alpha = \frac{PP_1}{P + P_1} \cdot \frac{(c - c_1)^2}{2g}.$$

**) Im praktischen Maasssystem: $\frac{60\,000 \cdot 80\,000}{140\,000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 251\,895$ mkg.

durch Zusammendrückung der beiden zusammenstossenden Körper in dem Augenblicke, in welchem ihre Geschwindigkeit die gleiche geworden ist, ihre Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten, so streben nun beide Körper, ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, wodurch sie, in dem Berührungspunkte gegen einander drückend, gleichsam einen abermaligen Stoss erleiden. Jede Kugel erhält durch die Wiederherstellung der Form gleichsam den Stoss zurück, welchen sie während der Zusammendrückung auf die andere ausgeübt hat.

Zur Construction der Formel wollen wir wieder wie im vorigen Paragraphen von dem Fall ausgehen, dass sich beide Körper nach derselben Seite hin (nach der rechten) bewegen. Die links sich befindliche Kugel A, deren Masse M ist, habe die grössere Geschwindigkeit c; wenn sie gegen die andere Kugel B, deren Masse M_1 und deren Geschwindigkeit c_1 ist, anstösst, so verliert sie beim Anstoss während der Zusammendrückung bis zu dem Moment, in welchem beide Kugeln gleiche Geschwindigkeit haben, die Bewegungsquantität $M\,(c - v)$, wo v dieselbe Bedeutung hat wie in §. 81. Die Bewegungsquantität der Kugel B hat dabei aber um $M\,(v - c)$ zugenommen. Während nun beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder annehmen, erleidet jede Kugel einen Rückstoss, welcher dem Stosse gleich ist, den sie der anderen ertheilt hat; die Kugel A wird also abermals einen Verlust an Bewegungsquantität erleiden, welcher gleich ist $M\,(c - v)$; der Gesammtverlust an Bewegungsquantität, welchen die Kugel A nach Beendigung des elastischen Stosses erlitten hat, ist also:

$$2\,M\,(c - v).$$

In gleicher Weise ergiebt sich für den Gewinn an Bewegungsquantität, welchen die Kugel B bis zu dem Moment erfahren hat, wo beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder angenommen haben und aus einander zu fahren beginnen,

$$2\,M_1\,(v - c_1)$$

Die Geschwindigkeit von A wird also nach Beendigung des elastischen Stosses sein:

$$V = c - 2\,(c - v) = 2\,v - c\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die Geschwindigkeit von B wird aber geworden sein:

$$V_1 = c_1 + 2\,(v - c_1) = 2\,v - c_1\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Setzen wir in diese Werthe von V und V' für v seinen Werth aus 1) auf Seite 349, so kommt:

$$V = \frac{(M - M_1)\,c + 2\,M_1\,c_1}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

und

$$V_1 = \frac{(M_1 - M)\,c_1 + 2\,M\,c}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Für den Fall, dass die beiden Kugeln gleiche Masse besitzen, also $M = M_1$ ist, gehen diese Formeln über in folgende:

$$V = c_1$$
$$V_1 = c$$

d. h. die Kugeln vertauschen beim Stosse ihre Geschwindigkeiten.

Die Bewegungsquantität der beiden Kugeln vor dem Stosse war:

$$Mc + M_1 c_1 \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Nach dem elastischen Stosse ist sie:

$$MV + M_1 V_1 \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

Setzen wir für V und V_1 ihre Werthe 1) und 2), so kommt:

$$MV + M_1 V_1 = M(2v - c) + M_1 (2v - c_1)$$
$$= 2(M + M_1)v - (Mc + M_1 c_1).$$

Nun aber ist nach §. 82 Gleichung 1):

$$(M + M_1)v = Mc + M_1 c_1$$

Setzt man nun für $(M + M_1)v$ diesen Werth in obige Gleichung, so kommt:

$$MV + M_1 V_1 = 2(Mc + M_1 c_1) - (Mc + M_1 c_1)$$
$$MV + M_1 V_1 = Mc + M_1 c_1 \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Die Bewegungsquantität ist nach dem elastischen Stosse ebenso gross wie vor demselben.

Gehen wir nun zur Bestimmung der lebendigen Kräfte nach dem elastischen Stoss über.

Zieht man Gleichung 2) ab von der Gleichung 1), so kommt:

$$V - V_1 = c_1 - c$$

und daraus:

$$V + c = V_1 + c_1 \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

Aus der obigen Gleichung 7) ergiebt sich aber:

$$M(V - c) = M_1 (c_1 - V_1) \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Durch Multiplication der Gleichungen 9) und 8) erhält man aber:

$$M(V^2 - c^2) = M_1 (c_1^2 - V_1^2),$$

und daraus endlich:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{M_1 V_1^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} + \frac{M_1 c_1^2}{2}$$

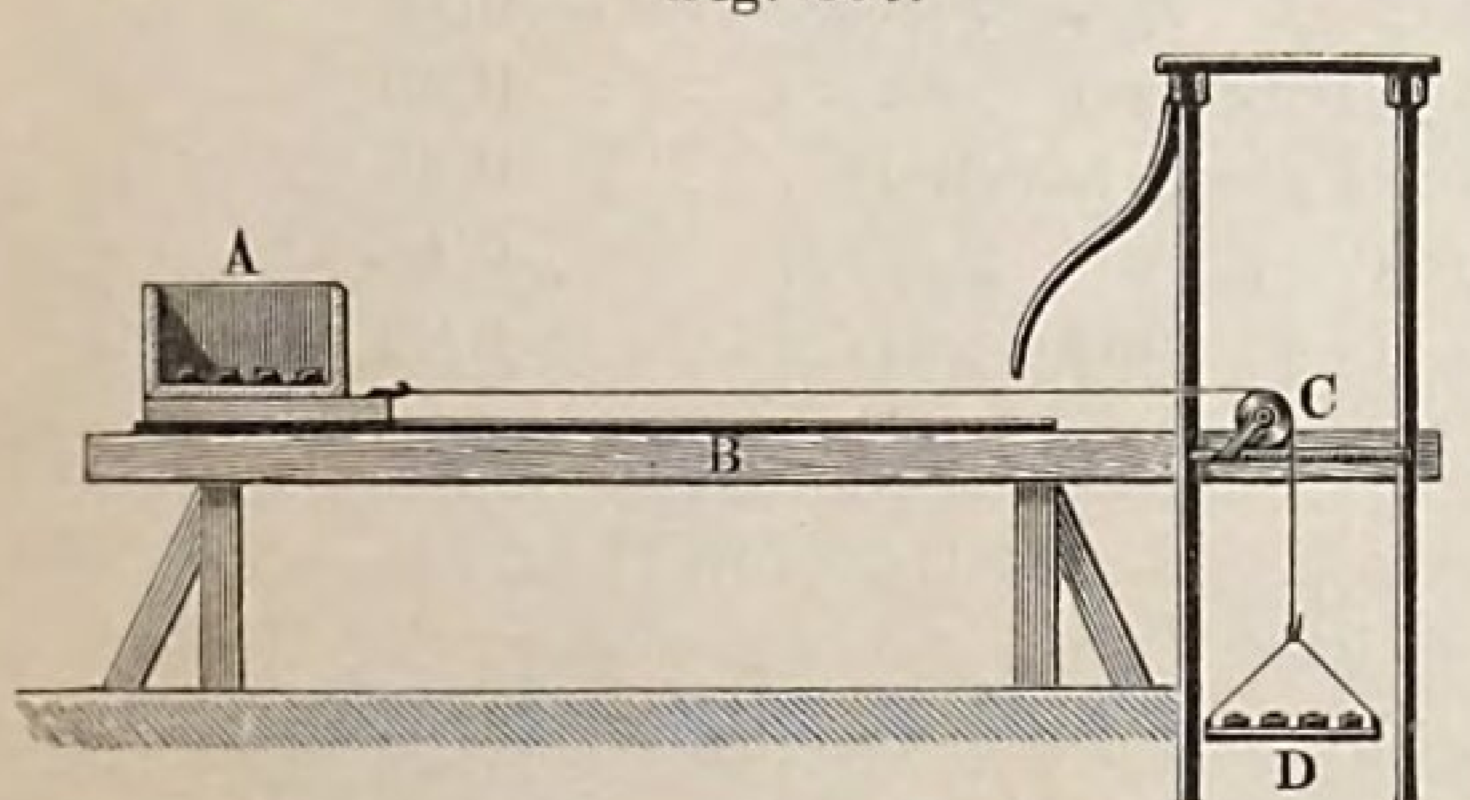
d. h. die Summe der lebendigen Kräfte nach dem elastischen Stoss ist eben so gross wie vor demselben, beim elastischen Stoss findet also kein Verlust an lebendiger Kraft statt.

84 **Gleitende Reibung.** Ein schon mehrfach besprochener Widerstand, welcher fast auf alle Bewegungen einen bedeutenden Einfluss aus-

übt, ist die Reibung. Um eine nur etwas grosse Last auf einer horizontalen Ebene fortzuschleifen, ist ein bedeutender Kraftaufwand nöthig, welcher lediglich von den Reibungswiderständen herrührt. Wäre die Ebene sowohl, auf welcher die Last fortgeschleift werden soll, als auch die Unterfläche der Last selbst absolut hart und glatt (was in der Natur nie der Fall ist) und fände ausserdem nicht die mindeste Adhäsion zwischen den über einander hin gleitenden Flächen statt, so könnte die kleinste Kraft die grösste Last in Bewegung setzen, und einmal angestossen müsste sich die Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf der horizontalen Ebene fortbewegen.

Die Reibung rührt unstreitig daher, dass die Erhabenheiten einer jeden der über einander hingleitenden Flächen in die Vertiefungen der anderen eingreifen. Wenn nun Bewegung stattfinden soll, so müssen entweder die hervorragenden Theilchen von der Masse ihres Körpers abgerissen, oder der eine Körper muss fortwährend über die Unebenheiten hinweggehoben werden. Ersteres findet vorzugsweise statt, wenn die reibenden Flächen sehr rauh, letzteres, wenn sie mehr geglättet sind. Je glatter die reibenden Flächen sind, desto mehr Einfluss gewinnt auch die Adhäsion, welche namentlich bei Anwendung von flüssiger oder halbflüssiger Schmiere von Bedeutung wird.

Fig. 330.



Um Versuche über gleitende Reibung anzustellen, wandte Coulomb den Fig. 330 dargestellten Apparat (Tribometer) an. Ein Kästchen A, welches man nach Belieben mit Gewichten belasten kann, ruht auf zwei horizontalen Schienen, welche neben einander gelegt sind. Eine an dem Kästchen befestigte Schnur geht über eine Rolle C und trägt an ihrem freien Ende eine Wagschale D, auf welche so lange Gewichte zugelegt werden, bis dadurch das Kästchen A eben noch in Bewegung gesetzt, oder, wenn angestossen, in gleichförmiger Bewegung erhalten wird.

Nehmen wir an, die untere Fläche des Kästchens sei durch eine eiserne Platte gebildet und die Schienen seien gleichfalls von Eisen; ferner betrage das Gewicht des Kästchens A, sammt Allem, was darin liegt, 10 kg, so wird es, einmal in Bewegung gesetzt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgeschleift werden, sobald die Wagschale D sammt ihrem Inhalte 1,4 kg wiegt. Die zur Ueberwindung der Reibung hier anzuwendende Kraft beträgt also in diesem Falle 14 Procent der Last.

Wäre das Gewicht des Kästchens A 2 mal, 3 mal so gross gewesen, so hätte an der Schnur auch eine doppelte, dreifache Kraft ziehen müssen, um die Reibung zu überwinden, und so ergiebt sich:

1) Die Reibung ist dem Drucke proportional, mit welchem die Flächen, welche über einander hergleiten sollen, auf einander gedrückt werden.

Hätte man, ohne am Gewicht des Kästchens etwas zu ändern, die eisernen Schienen breiter oder schmäler gemacht, so würde man doch immer zu demselben Resultate gekommen sein, d. h. zur Ueberwindung der Reibung würden immer 14 Procent der Last nöthig gewesen sein, und so ergiebt sich:

2) Die Reibung ist unabhängig von der Ausdehnung der reibenden Flächen.

Die Zahl, welche angiebt, der wievielte Theil der Last zur Ueberwindung der Reibung verwandt werden muss, wird der Reibungscoëfficient genannt. Für Eisen auf Eisen ist dieser Coëfficient, wie wir gesehen haben, 0,14; der Reibungscoëfficient ändert sich jedoch mit der Natur der reibenden Flächen. Die folgende Tabelle enthält nach Morin's Versuchen einige der in der Praxis wichtigsten Reibungscoëfficienten.

Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen . . .	0,14
Messing auf Gusseisen	0,19
Schmiedeeisen auf Gusseisen	0,20
Buche auf Buche (Fasern parallel) . . .	0,36
Eiche auf Eiche („ „) . . .	0,48
Eiche auf Eiche („ gekreuzt) . . .	0,32

Durch eine zweckmässige Schmiere kann der Reibungswiderstand noch verringert werden. Für Metalle ist Oel, für Holz hingegen Talg das beste Schmiermittel. So ist z. B. bei guter Schmiere der Reibungscoëfficient für Schmiedeeisen auf Gusseisen nur 0,06.

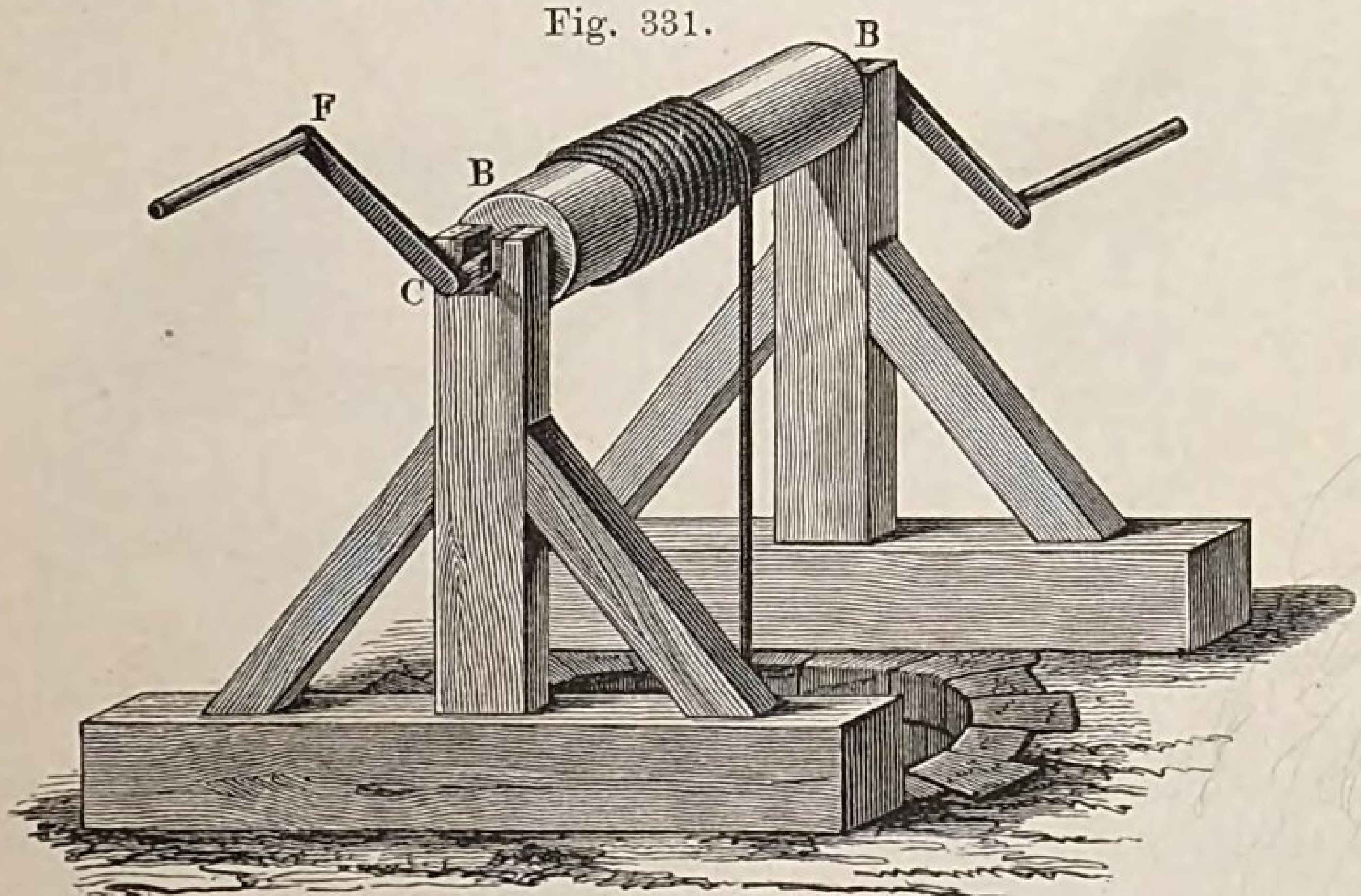
Bei Hölzern ist es nicht gleichgültig, wie die Fasern laufen; die Reibung ist nämlich bei gekreuzten Fasern viel geringer als bei parallelen.

Den Reibungscoëfficienten zwischen Eisen und Eis hat J. Müller in folgender Weise bestimmt: ein junger Mann hielt, auf seinen Schlittschuhen (neuer Construction mit glatter Bahn) stehend, eine Federwage von der in Fig. 323, Seite 340, dargestellten Art in den Händen; an derselben war eine starke Schnur befestigt, mittelst welcher ihn ein zweiter Schlittschuhläufer auf dem Eise fortzog. Beim Beginn der Bewegung zeigte die Federwage eine Zugkraft von 5 bis 6 kg, während des Laufes aber schwankte sie zwischen 1 und 2 kg. Da nun der gezogene junge Mann 62 kg wog, so beträgt der Reibungscoëfficient während der Bewegung $^1/_{62}$ bis $^2/_{62}$ oder 1,6 bis 3,2 Procent.

Gleitende Reibung findet unter Anderem auch überall da statt, wo Zapfen in ihren Pfannen gedreht werden. Untersuchen wir z. B. den Effect der Zapfenreibung an dem schon öfter betrachteten Haspel, Fig. 331. Das Gewicht des Wellbaumes selbst mit Allem, was daran

befestigt ist, mitsammt der daran hängenden Last von 50 kg, bewirke während des Aufwindens einen Gesammtdruck auf die Zapfenlager = 100 kg. Wenn die Zapfenlager von Gusseisen, die Zapfen aber von Schmiedeeisen sind, so beträgt der Reibungswiderstand, welcher am Umfange der Zapfen wirkt, 20 Procent, der Effect der Reibung ist also derselbe, als ob man statt ihrer um den Zapfen eine Schnur in derselben Richtung geschlungen hätte, wie das Seil, welches die Last trägt, und an dieser Schnur ein Gewicht 100 . 0,2 oder 20 kg angehängt hätte; oder als wenn die am Umfange des Wellbaumes wirkende Last um $\frac{20}{5} = 4$ kg grösser gewesen wäre, vorausgesetzt nämlich, dass der Durchmesser des Zapfens $^1/_5$ vom Durchmesser des Wellbaumes ist. Es werden also bei diesem Haspel circa 8 Procent der angewandten Kraft für die Ueberwindung der Reibungswiderstände verzehrt.

Fig. 331.



Wenn ein Körper, welcher bis dahin ruhig auf seiner Unterlage lag, in Bewegung gesetzt werden soll, so ist der dabei zu überwindende Widerstand etwas grösser als die Reibung, welche überwunden werden muss, wenn die Bewegung bereits eingeleitet ist. Für sehr harte Körper ist dieser Unterschied unbedeutend und er ist nur durch den Kraftaufwand bedingt, welcher nöthig ist, um dem bis dahin ruhenden Körper eine gewisse Geschwindigkeit mitzutheilen. Bei weichen Körpern ist die Reibung der Ruhe, d. h. die Kraft, welche angewendet werden muss, um den bis dahin ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, erheblich grösser als die während der Bewegung zu überwindende Reibung, weil ein weicher Körper, welcher einige Zeit lang gegen einen anderen angepresst wurde, nothwendig eine Zusammendrückung erfährt, wodurch die kleinen Hervorragungen des einen mehr und mehr in den Vertiefungen des anderen gleichsam eingekeilt werden.

85 **Wälzende Reibung** findet da statt, wo ein runder Körper etwa eine Kugel, ein Cylinder, über die Unterlage hinwegrollt. Es kommt dabei die Unterlage stets mit neuen Punkten des rollenden Körpers in Berührung. Der hierbei entstehende Widerstand ist bei Weitem geringer als der Widerstand der gleitenden Reibung. Coulomb verwandte zu seinen Versuchen über wälzende Reibung Walzen von Guajak- und Ulmenholz, deren Durchmesser von 5 bis 31 cm variirte und die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen liess. Um auch den Druck abzuändern, mit welchem die Walze auf die Unterlage aufgedrückt wird, wurden zwei Schnüre *a* über die Walze gelegt und an beiden Seiten gleiche Gewichte angehängt, wie Fig. 332 andeutet. Das Uebergewicht, welches die Bewegung hervorbringen soll, wurde in die an der Schnur *b* hängende leichte Wagschale gelegt.

Fig. 332.

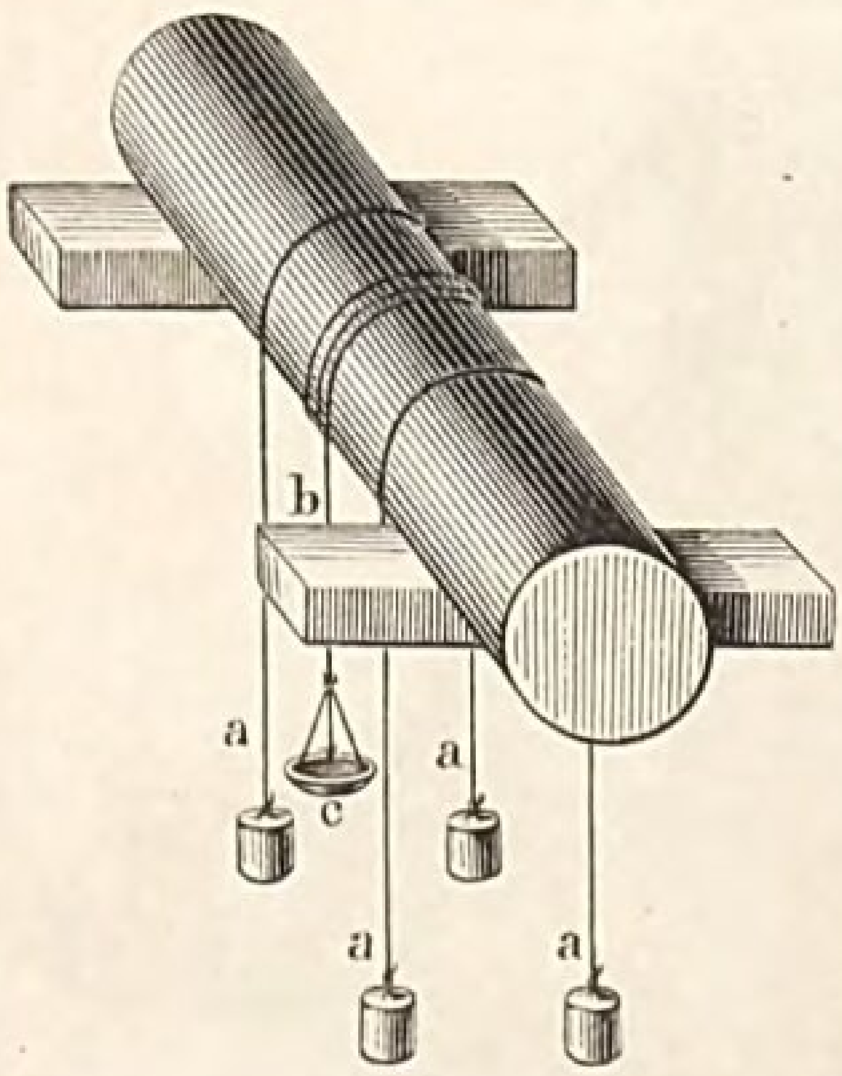
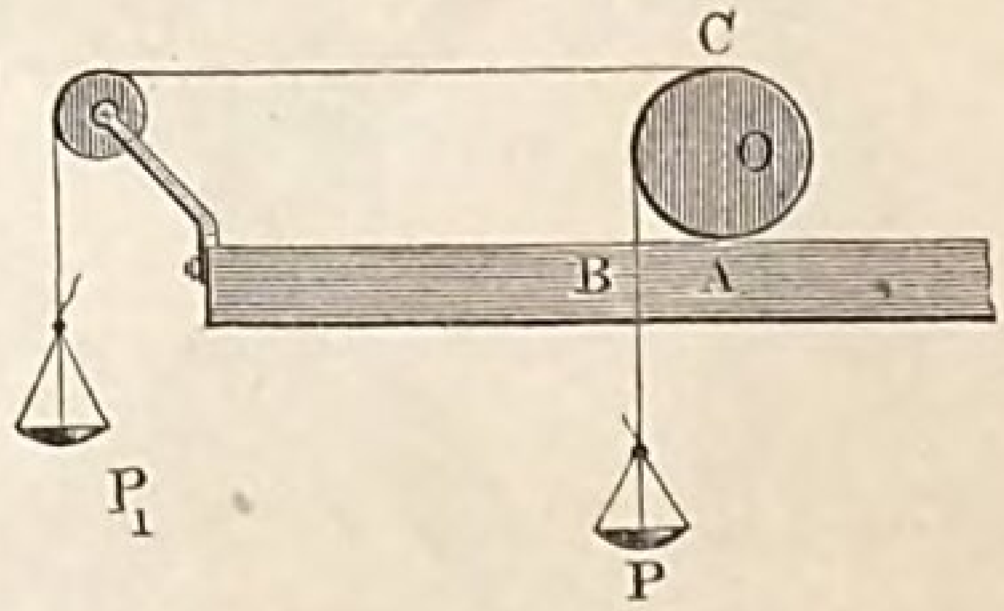


Fig. 333.



Nach diesen Versuchen ist die wälzende Reibung dem Druck direct und dem Halbmesser der Walze umgekehrt proportional, oder es ist

$$F = \varphi \cdot \frac{P}{R},$$

wenn F die wälzende Reibung, P den Druck und R den Radius der Walze bezeichnet. Coulomb fand

für Walzen aus Guajakholz den constanten Factor $\varphi = 0{,}018$
für Walzen aus Ulmenholz $\varphi = 0{,}031$.

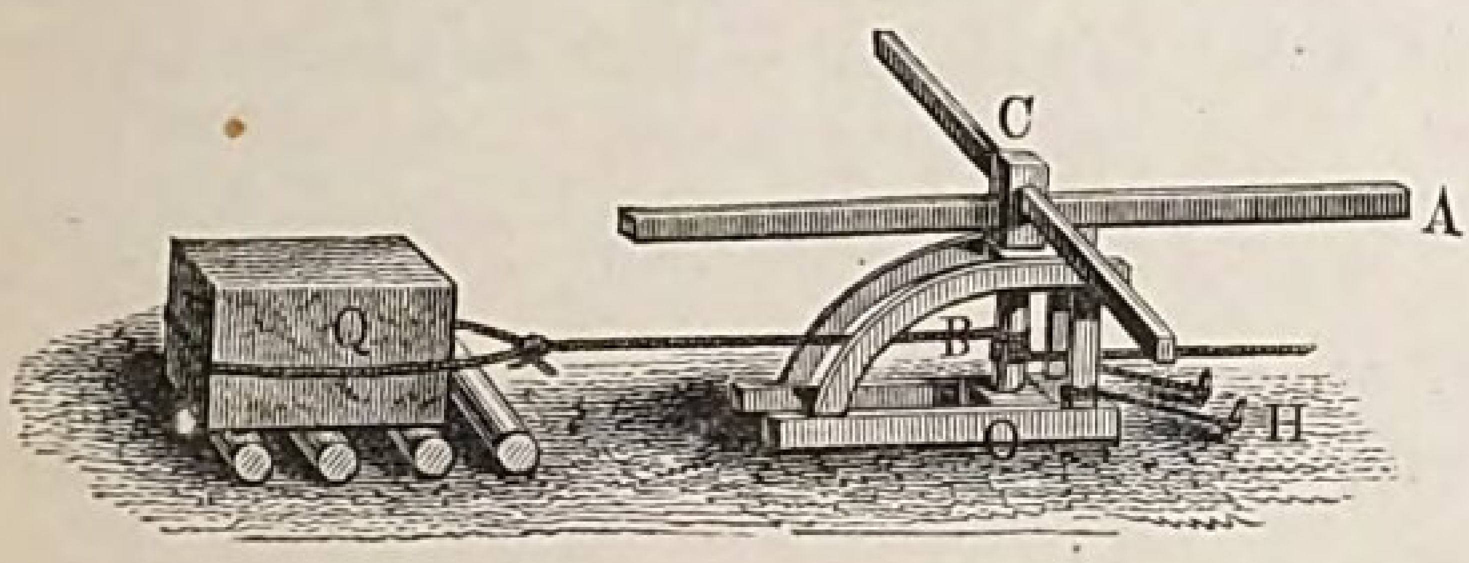
Für gusseiserne Räder, welche auf gusseisernen Schienen laufen, fand Weisbach $\varphi = 0{,}018$.

Die obige Formel setzt voraus, dass die Kraft F an einem Hebelarm angreift, welcher dem Halbmesser der Walze gleich ist, wie es bei der obigen Anordnung der Fall war; wenn aber die Kraft an dem oberen Ende C der Walze, Fig. 333, angreift, so ist die wälzende Reibung nur halb so gross wie im vorigen Falle.

Wo es auf Verminderung der Reibungswiderstände ankommt, sucht man wo möglich die gleitende Reibung in eine wälzende zu verwandeln;

um schwere Lasten fortzuschaffen, legt man dieselben auf Walzen, Fig. 334, und darin liegt auch der Vortheil der Räder unserer Fuhrwerke, an deren Umfang nur wälzende Reibung zu überwinden ist, während die gleitende Reibung lediglich auf die Achsen reducirt bleibt, wo die Ueberwindung derselben nur einen geringen Kraftaufwand in Anspruch nimmt, weil der Reibungscoëfficient durch Glätte der Flächen und Anwendung von Schmiermitteln möglichst herabgesetzt ist.

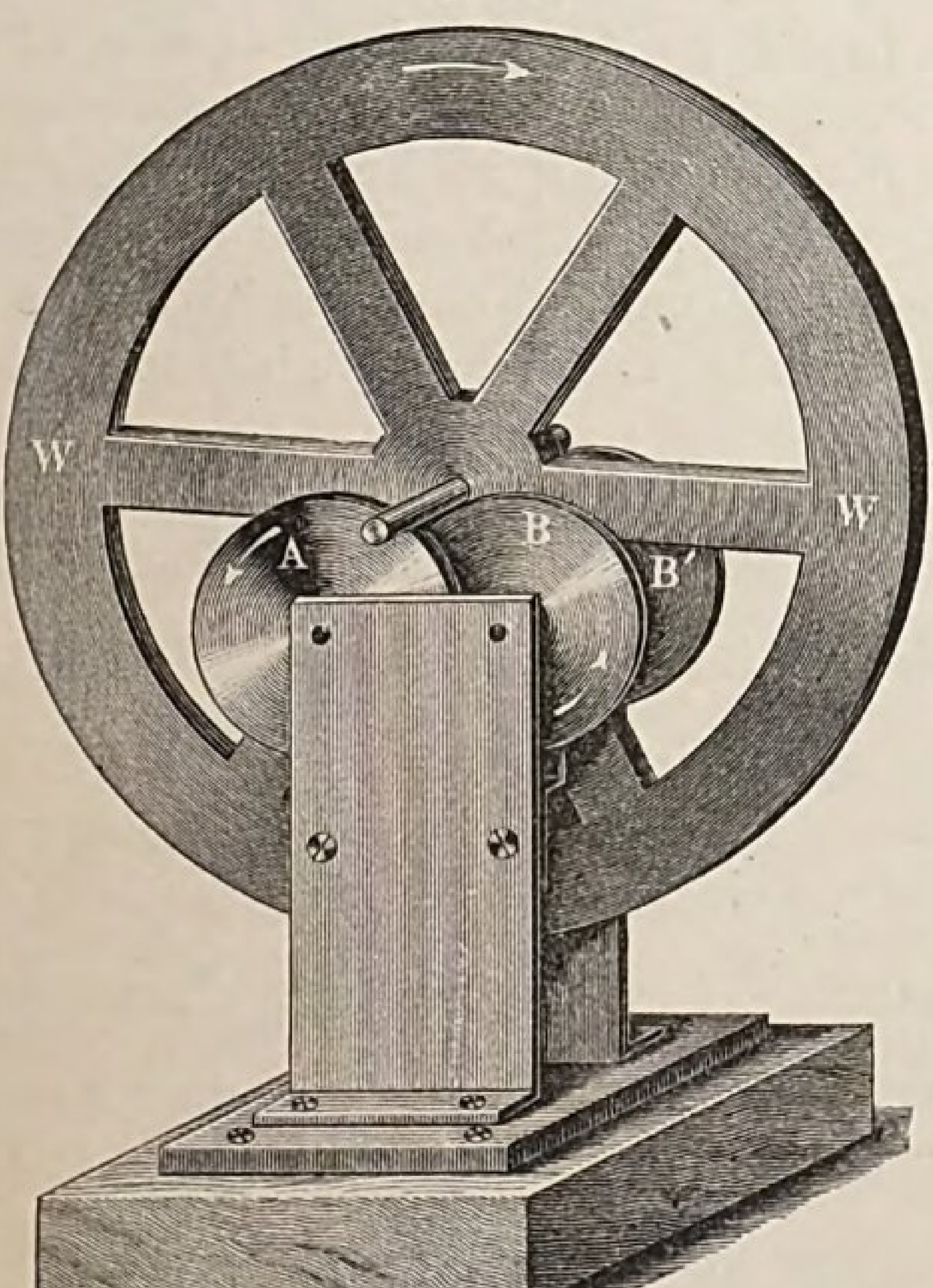
Fig. 334.



Aus obiger Formel geht auch hervor, dass der Reibungswiderstand an einem Wagen um so geringer ausfallen wird, je grösser der Halbmesser seiner Räder ist.

In der Praxis ist man aber doch an gewisse Grenzen gebunden, denn man darf die Räder nicht zu gross machen, damit das Fuhrwerk nicht Dimensionen annimmt, welche für den Gebrauch unbequem oder störend sind.

Fig. 335.



Die Zugkraft, welche nöthig ist, um einen Lastwagen auf einer guten horizontalen Landstrasse fortzufahren, beträgt 5 bis 7 Procent der Last. Auf horizontalen Eisenbahnen beträgt die erforderliche Zugkraft nur 0,5 bis 0,7 Procent der Last.

Um die Zapfenreibung zum Theil noch in wälzende Reibung zu verwandeln, legt man den Zapfen einer Welle oder eines Rades nicht in ein Zapfenlager, sondern auf sogenannte Frictionsrollen, deren Einrichtung durch Fig. 335 erläutert wird. Die Frictionsrollen bestehen aus zwei Räderpaaren, von denen das eine, aus den Rädern A und B gebildet, das vordere Ende der Achse trägt, um welche das Rad W gedreht werden soll, während das hintere Ende dieser Achse in gleicher Weise auf den Rädern A' und B' (A' ist in der Figur gänz-

lich verdeckt) aufliegt. Die Umdrehungsachsen der beiden dicht hinter einander liegenden zusammengehörigen Räder wie A und B sind um mehr als den Halbmesser und um weniger als den Durchmesser eines solchen Rades von einander entfernt, so dass sie oben mit einander einen einspringenden Winkel bilden, in welchen die Achse des Rades W hineingelegt wird.

Bezeichnet P die auf die Achse des Rades W ausgeübte Kraft, f den Coëfficienten für gleitende Reibung, so ist fP die Reibung, welche zu überwinden wäre, wenn die Achse des Rades W sich in einem Zapfenlager drehen müsste, und

$$K = f \,.\, P \,.\, u \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

ist die mechanische Arbeit, welche durch Ueberwindung dieser Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Rades verrichtet würde, wenn u den Umfang der Achse bezeichnet.

Nun aber dreht sich der Zapfen des Rades W nicht in einem Zapfenlager, sondern auf dem Umfange der Frictionsrollen, deren Achsen zusammen nahezu ebenfalls die Last P zu tragen haben, so dass fP nun auch die Summe der Reibung an den Achsen der Frictionsrollen bezeichnet. Dreht sich nun das Rad W um, so findet am Umfange seiner Achse eine wälzende Reibung statt, welche sehr unbedeutend ist, allein die Räder A und B einerseits, sowie A' und B' andererseits drehen sich um ihre Achsen, und an diesen Achsen ist nun die gleitende Reibung zu überwinden.

Die Achse des Rades W macht aber n Umdrehungen, während die Frictionsräder nur eine machen, jeder Umdrehung des Rades W entspricht nur $\frac{1}{n}$ Umdrehung der Frictionsräder, es ist also $K' = \frac{1}{n} fPu'$ die mechanische Arbeit, welche bei jeder Umdrehung des Rades W durch Ueberwindung der Reibung an den Achsen der Frictionsrollen überwunden werden muss, wenn u' den Umfang einer jeden dieser Achsen bezeichnet.

Es ist aber $\frac{1}{n}$ offenbar gleich $\frac{u}{U}$, wenn u, wie bereits erwähnt, den Umfang der Achse des Rades W, U aber den Umfang einer Frictionsrolle bezeichnet. Folglich ist auch:

$$K' = f \,.\, P \,.\, u' \frac{u}{U} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Vergleichen wir den Werth von K' bei 2) mit dem obigen Werth von K, so sehen wir, dass

$$K' = K \frac{u'}{U} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Durch Anwendung der Frictionsrollen wird also die Reibungsarbeit im Verhältniss $\frac{u'}{U}$, d. h. in dem Verhältniss vermindert, in welchem der

Umfang der Frictionsrollen zum Umfang ihrer Achsen steht, oder auch was dasselbe ist, in dem Verhältniss, in welchem der Halbmesser der Frictionsrollenachse kleiner ist, als der Halbmesser der Frictionsrolle selbst.

Wäre z. B. der Radius der Frictionsrollenachse $1/_{20}$ vom Radius der Frictionsrolle, so würde der zu überwindende Reibungswiderstand nur $1/_{20}$ von dem sein, welchen die Umdrehung des Rades *W* erfahren würde, wenn seine Achse direct in Zapfenlagern liefe.

Nutzen und Anwendung der Reibung. Wir haben bisher 86 die Reibung nur als ein Bewegungshinderniss betrachtet, welches bei Maschinen einen bedeutenden Theil der bewegenden Kraft verzehrt, also offenbar nachtheilig auf den Nutzeffect wirkt; allein diese Reibung, welche hier freilich störend wirkt, bringt uns in anderen Fällen ungleich mehr Vortheil, und in vielen Fällen machen wir von derselben für unsere Zwecke Anwendung.

Zunächst könnten wir ohne Reibung weder sicher gehen noch stehen, wie uns das Glatteis zeigt, auf welchem nur eine stark verminderte Reibung stattfindet; dass der Nagel in der Wand hält, ist lediglich eine Folge der Reibung; ohne Reibung würden wir keinen Körper fest in den Händen halten können, sie würden uns entgleiten wie ein schlüpfriger Aal.

Beim Betrieb von Maschinen machen wir häufig Anwendung von der Reibung zur Fortpflanzung der Bewegung; denn nur durch die Reibung wird es möglich, mittelst Seilen oder Riemen die Bewegung eines Rades auf ein anderes zu übertragen, wie dies z. B. bei der Schwungmaschine Fig. 131 auf Seite 159 und bei der Drehbank der Fall ist.

Ein Seil, an dessen einem Ende eine Last *P*, Fig. 336 (a. f. S.), hängt, sei über einen horizontal liegenden, nicht drehbaren Cylinder geschlungen, so ist die Reibung, welche das Seil am Umfange des Cylinders zu überwinden hat, wenn die Last *P* niedergehen soll, sehr bedeutend, so dass eine geringe Kraft *Q* hinreicht, um das Herabsinken von *P* zu verhindern.

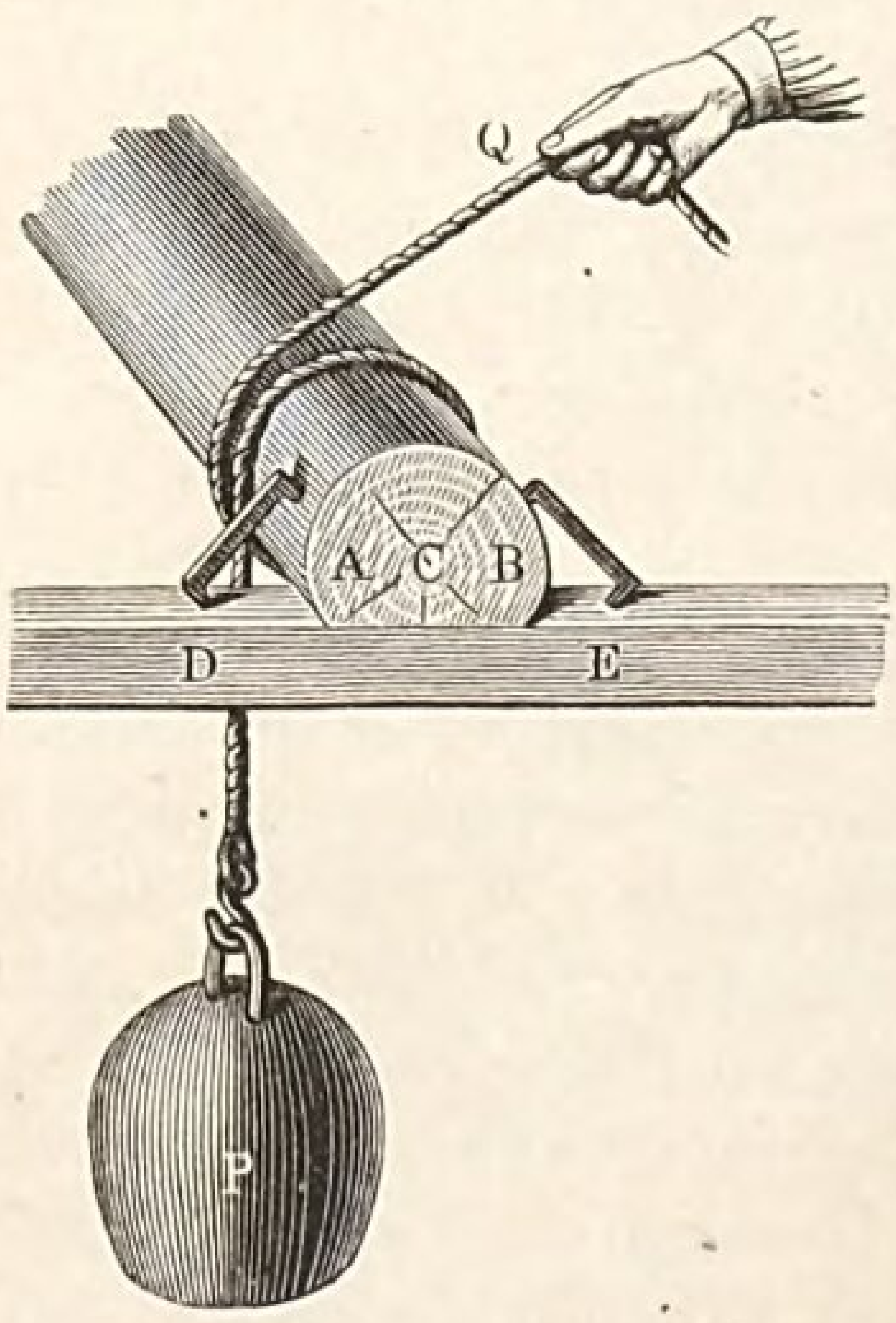
Q	ist	ungefähr	0,6000 *P*	bei	$1/_4$	Umwickelung	des	Cylinders,
Q	„	„	0,3800 *P*	„	$1/_2$	„	„	„
Q	„	„	0,1200 *P*	„	1	„	„	„
Q	„	„	0,0150 *P*	„	2	„	„	„
Q	„	„	0,0002 *P*	„	4	„	„	„

Man macht hiervon Gebrauch, um eine grosse untheilbare Last von einer gewissen Höhe herabzulassen, indem man das Seil, an welchem die Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm schlägt und das andere Ende des Seiles in die Hand nimmt.

So kann ein Fasszieher, wenn er beim Hinablassen eines vollen Fasses in einen Keller das dabei angewandte Seil 3mal um einen quer über die Kellerthür gelegten Stamm wickelt, mit einer Kraft gleich dem Gewichte von 12,5 kg eine Last von 6600 kg ohne Gefahr hinablassen.

Ohne Reibung würde eine Locomotive nicht im Stande sein, einen Wagenzug fortzubringen. Die Kraft der Dampfmaschine der Locomotive bewirkt zunächst eine Umdrehung der Treibräder. Diese Räder laufen nun entweder um, während die Locomotive fortrollt; dann müssen sämmtliche Reibungs- und sonstige Widerstände an dem Wagenzug überwunden werden, welcher der Locomotive folgt; — oder die Treibräder drehen sich um, während die Locomotive an ihrer Stelle stehen bleibt, dann ist die gleitende Reibung zu überwinden, welche beim Schleifen der Treibräder auf den Schienen entsteht. Es ist nun klar, dass der Zug fortgehen wird, so lange die Summe aller Widerstände, welche beim Fortrollen des ganzen Wagenzuges überwunden werden müssen, noch kleiner ist als die gleitende Reibung, welche am Umfange der Treibräder entstände, wenn sie umgedreht werden sollten, ohne dass die Locomotive fortrollt.

Fig. 336.



Ist die fortzuziehende Last zu gross, so findet in der That ein Umlaufen der Treibräder ohne entsprechendes Fortrollen statt, wie man dies bei grossen Güterzügen oft bemerkt, wenn der Zug sich in Bewegung setzen soll, weil beim Anfange der Bewegung nicht allein die Reibungswiderstände, sondern auch der Trägheitswiderstand der bedeutenden in Bewegung zu setzenden Masse überwunden werden muss.

Aus dem Allen geht hervor, dass es bei der Locomotive nicht allein darauf ankommt, dass die Maschine mit grosser Kraft die Räder umdreht, sondern auch darauf, dass die gleitende Reibung, welche beim Schleifen der Treibräder auf den Schienen entsteht, recht gross ist; diese Reibung wächst aber mit dem Gewicht der Locomotive; die Dampfmaschine der Locomotive muss also nicht allein die gehörige Kraft entwickeln, sondern die Locomotive selbst muss auch das genügende Gewicht haben, welches um so grösser sein muss, je grössere Lasten fortgezogen werden sollen; deshalb muss man auch nicht allein stärkere, sondern auch schwerere Maschinen anwenden, wenn die Eisenbahn nur eine Steigung von 1 bis $1^1/_2$ m auf eine Länge von 100 m hat.

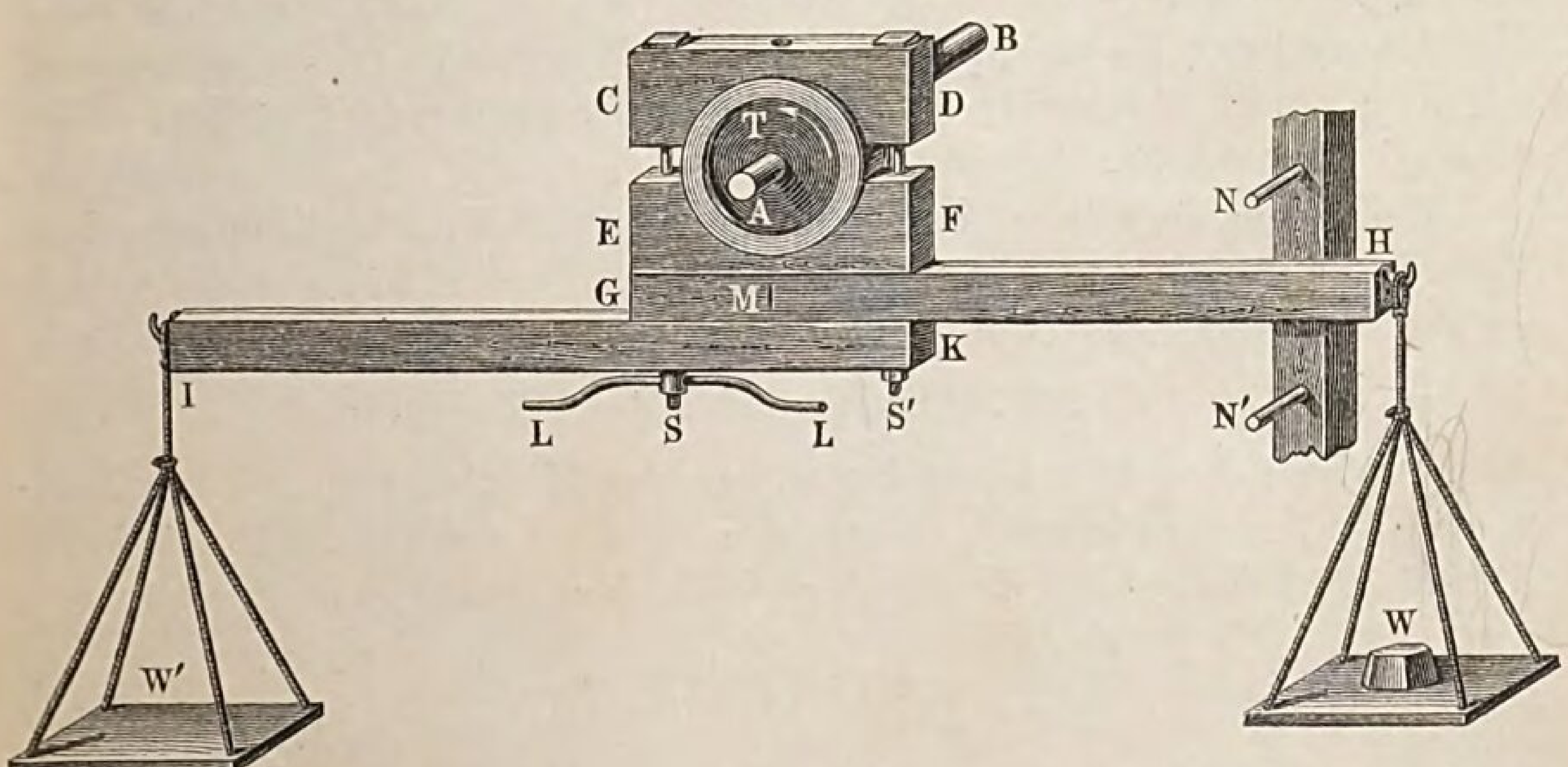
Man wendet die Reibung auch an, um die mechanische Leistung verschiedener Motoren zu bestimmen. In der Regel besteht die Arbeit der Motoren, z. B. der Wasserräder, Dampfmaschinen etc. in der Umdrehung einer Welle, deren Bewegung dann auf irgend eine Weise fortgepflanzt wird. An diese Welle wird nun, um die Leistung des Motors

zu bestimmen, während die Maschine keine weitere Arbeit verrichtet, ein sogenanntes Bremsdynamometer oder der nach seinem Erfinder genannte Prony'sche Zaum angelegt, welcher in Fig. 337 dargestellt ist.

AB ist ein Stück der horizontalen Achse, welche durch den Motor etwa durch ein Wasserrad, umgedreht wird. Auf dieser Achse wird eine eiserne Trommel *T* befestigt, deren Mantelfläche bei ungefähr $1/2$ m Durchmesser eine Breite von 15 cm hat. Auf den Umfang dieser Trommel ist nun oben das Holzstück *CD* aufgesetzt, dessen fast halbkreisförmiger Ausschnitt gleichen Radius mit der Trommel hat. In dem Ausschnitt eines ähnlichen Holzstückes *EF* liegt die untere Hälfte der Trommel.

Durch Anziehen der Schrauben *S* und *S'* kann man die beiden Holzbacken *CD* und *EF* mehr oder weniger fest auf den Umfang der Trommel andrücken und auch während des Versuchs den Druck mit Hülfe des Hebels *LL* reguliren. Unterhalb des Holzbackens *EF* ist

Fig. 337.



ein im Ganzen ungefähr $2^1/_2$ m langer Balken *GH* angebracht, welcher bei *H* eine Wagschale *W* trägt. Um das Gewicht dieses Wagbalkens *GH* und der Wagschale *W* nicht in Rechnung bringen zu müssen, ist ihm entgegengesetzt ein zweiter, dem ersteren gleicher Hebelarm *KI* angebracht, welcher die Wagschale *W'* trägt, so dass *GH* mit *W* durch *IK* und *W'* äquilibrirt ist. Sollte das Gleichgewicht nicht vollständig sein, so kann man es leicht durch Auflegen kleiner Gewichte auf die eine oder andere Wagschale herstellen.

Wenn sich nun die Achse *AB* in der Richtung des Pfeils umdreht, so würde auch die ganze Brems- und Hebelvorrichtung in der gleichen Richtung gedreht werden, wenn auf *W* gar kein oder doch ein zu geringes Gewicht aufgelegt wäre. Um die Drehung in dieser Richtung zu begrenzen, ist in einem seitlich stehenden verticalen Balken der eiserne Stab *N* eingesetzt, an welchem der Hebelarm *GH* alsbald anstossen wird.

Wird auf die Wagschale W ein Gewicht aufgelegt, welches gerade der Reibung am Umfang der rotirenden Trommel T das Gleichgewicht hält, so wird der Hebel GH, unbedeutende Schwankungen abgerechnet, auch während der Rotation der Achse AB in horizontaler Lage verbleiben, während er niedergezogen wird, wenn das auf W aufgelegte Gewicht zu gross ist. Um ein zu weites Herabziehen des Hebels GH zu verhindern, dient der eiserne Stab N'.

Der Versuch wird nun in der Weise angestellt, dass man, während die Achse AB sammt der Trommel T rotirt, das Gewicht W und die Reibung am Umfang von T mit Hülfe des Hebels LL so regulirt, dass der Hebelarm GH in horizontaler Stellung verbleibt. Ist so das Gleichgewicht hergestellt, so hat man noch zu zählen, wie viel Umdrehungen die Achse AB in der Minute macht.

Wenn alles in der angegebenen Weise regulirt ist, so hält das auf W aufgelegte Gewicht P gerade der Reibung am Umfang der Rolle das Gleichgewicht, und die Arbeit, welche die Maschine bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet, ist (in praktischem Maasse) gleich $P 2 \pi r$, wenn r den Abstand des Hakens, an welchem die Wagschale W aufgehängt ist, von dem Punkt M bezeichnet, welcher auf den Balken GH vertical unter dem Mittelpunkt der Trommel liegt.

Bei einem derartigen Versuche, welcher zur Kraftbestimmung einer Turbine angestellt wurde, war $r = 1{,}92$ m, $P = 21$ kg, also die Arbeit, welche bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet wurde,

$$21 \;.\; 1{,}92 \;.\; 2 \;.\; 3{,}14 = 253{,}2 \text{ Meterkilogramm,}$$

da aber die Achse 120 Umdrehungen in der Minute, also 2 Umdrehungen in der Secunde machte, so war die während einer Secunde geleistete Arbeit 506,4 Meterkilogramm oder gleich der Arbeit von

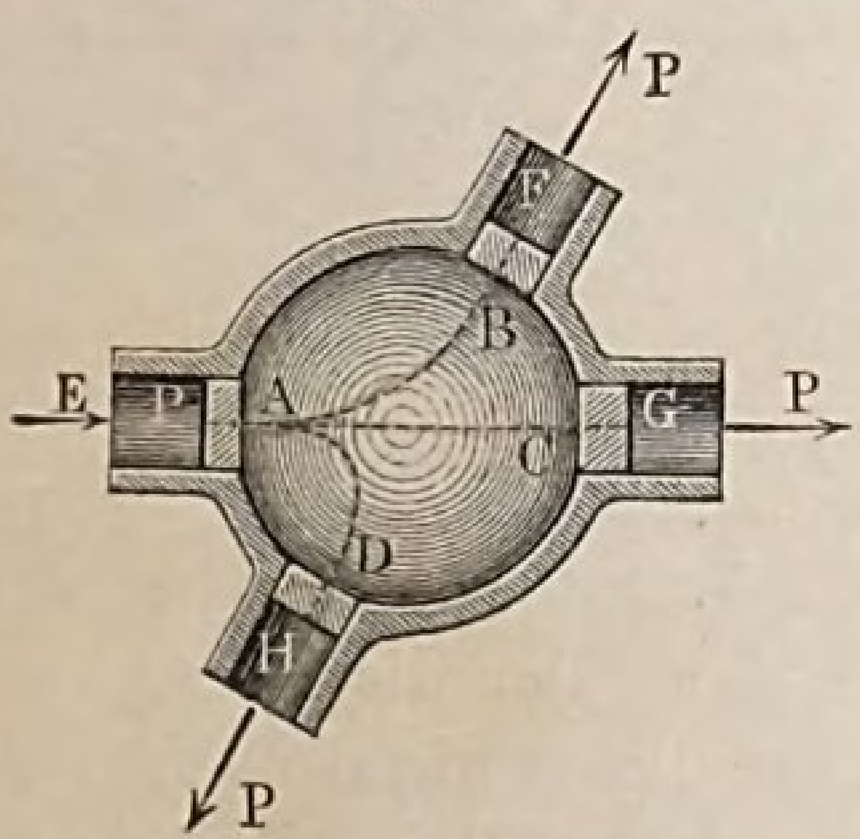
$$\frac{506{,}4}{75} = 6{,}75 \text{ Pferdekräften.}$$

Viertes Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen tropfbar flüssiger Körper.

Gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in flüssigen Körpern. 87
Tropfbar flüssige Körper haben in Folge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theilchen die Eigenschaft, dass sie jeden Druck, welcher auf einen Theil ihrer Oberfläche ausgeübt wird, nach allen Seiten gleichmässig fortpflanzen.

Fig. 338.



Es sei in Fig. 338 der horizontale Durchschnitt eines mit Wasser gefüllten allseitig geschlossenen Gefässes dargestellt, an welchem sich in gleicher Höhe vier vollkommen gleiche Röhren befinden, die durch Kolben verschlossen sind. Da diese Kolben gleichen Durchmesser haben und in gleicher Höhe liegen, so haben sie auch vollkommen gleichen Druck durch die Schwere des Wassers auszuhalten, einen Druck, von welchem wir also vor der Hand ganz absehen können, den wir also als nicht vorhanden betrachten wollen.

Würde nun durch irgend eine Kraft einer der Kolben, etwa A, nach Innen gedrückt, so pflanzt sich dieser Druck durch das Wasser hindurch auf die übrigen Kolben fort, und man müsste, um zu verhindern, dass diese Kolben herausgedrückt werden, auf jeden derselben einen nach Innen gerichteten Gegendruck anbringen, welcher vollkommen dem auf den Kolben A wirkenden Druck gleich ist; das Gleichgewicht kann also nur dann bestehen, wenn alle vier Kolben durch ganz gleiche Kräfte nach Innen gedrückt werden.

Der Druck pflanzt sich jedoch nicht allein vom Kolben A auf die übrigen Kolben, sondern auf alle Theile der Gefässwand fort, so dass

jeder Flächentheil der Gefässwand, welcher ebenso gross ist, wie der Querschnitt des Kolbens A, auch einen ebenso grossen Druck auszuhalten hat.

In Fig. 339 ist der Durchschnitt eines ähnlichen Gefässes mit zwei Röhren dargestellt, welche gleichfalls mit Kolben geschlossen sein sollen, die Röhren und folglich auch der Querschnitt der Kolben sind aber nicht gleich. Es sei z. B. die Oberfläche des Kolbens C zehnmal so gross als die des Kolbens A, so wird, wenn irgend eine Kraft gegen den Kolben A drückt, der Gesammtdruck auf den Kolben C auch zehnmal so gross sein als der auf A wirkende, weil jedes Flächenstück des Kolbens C, welches der Oberfläche des Kolbens A gleich ist, einen ebenso grossen Druck auszuhalten hat als A selbst.

Wenn man also den Kolben A mit einer Kraft gleich dem Gewichte von 5 kg nach Innen drückt, so müsste man zur Erhaltung des an dem Kolben C einen nach Innen gerichteten Druck gleich dem Gewichte von 50 kg anbringen.

Fig. 339.

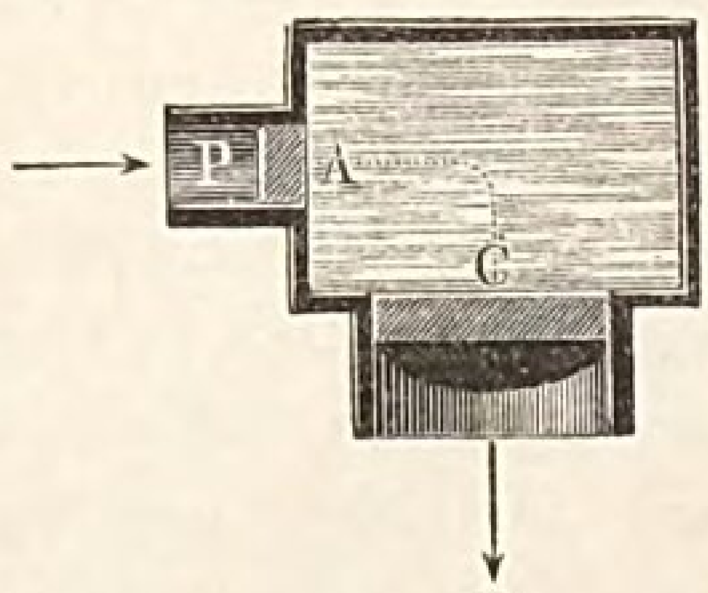
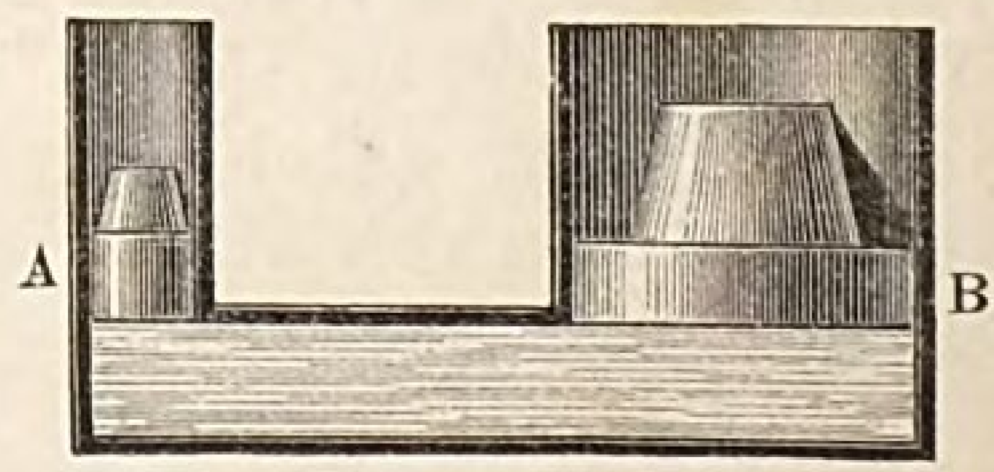


Fig. 340.



Der Druck pflanzt sich nicht allein in einer Horizontalebene fort, wie dies in den bisher betrachteten Beispielen der Fall war, sondern nach allen Seiten, also auch nach oben und nach unten.

Fig. 340 stellt den verticalen Durchschnitt zweier unten verbundener Röhren von ungleichem Querschnitt dar. Der die Röhren verbindende Raum sei mit Wasser gefüllt und auf dieses die Kolben A und B aufgesetzt. Wenn nun auf den Kolben A, dessen Querschnitt zehnmal kleiner sein mag, als der des Kolbens B, ein Gewicht, etwa von 6 kg, aufgelegt wird, so wird sich der Druck in der Weise bis zum Kolben B fortpflanzen, dass gegen jedes Flächenstük von B, welches ebenso gross ist als der Querschnitt von A, ein nach oben gerichteter Druck gleich dem Gewicht von 6 kg wirkt, man müsste also den Kolben B mit 60 kg belasten, wenn das Gleichgewicht ungestört bleiben soll.

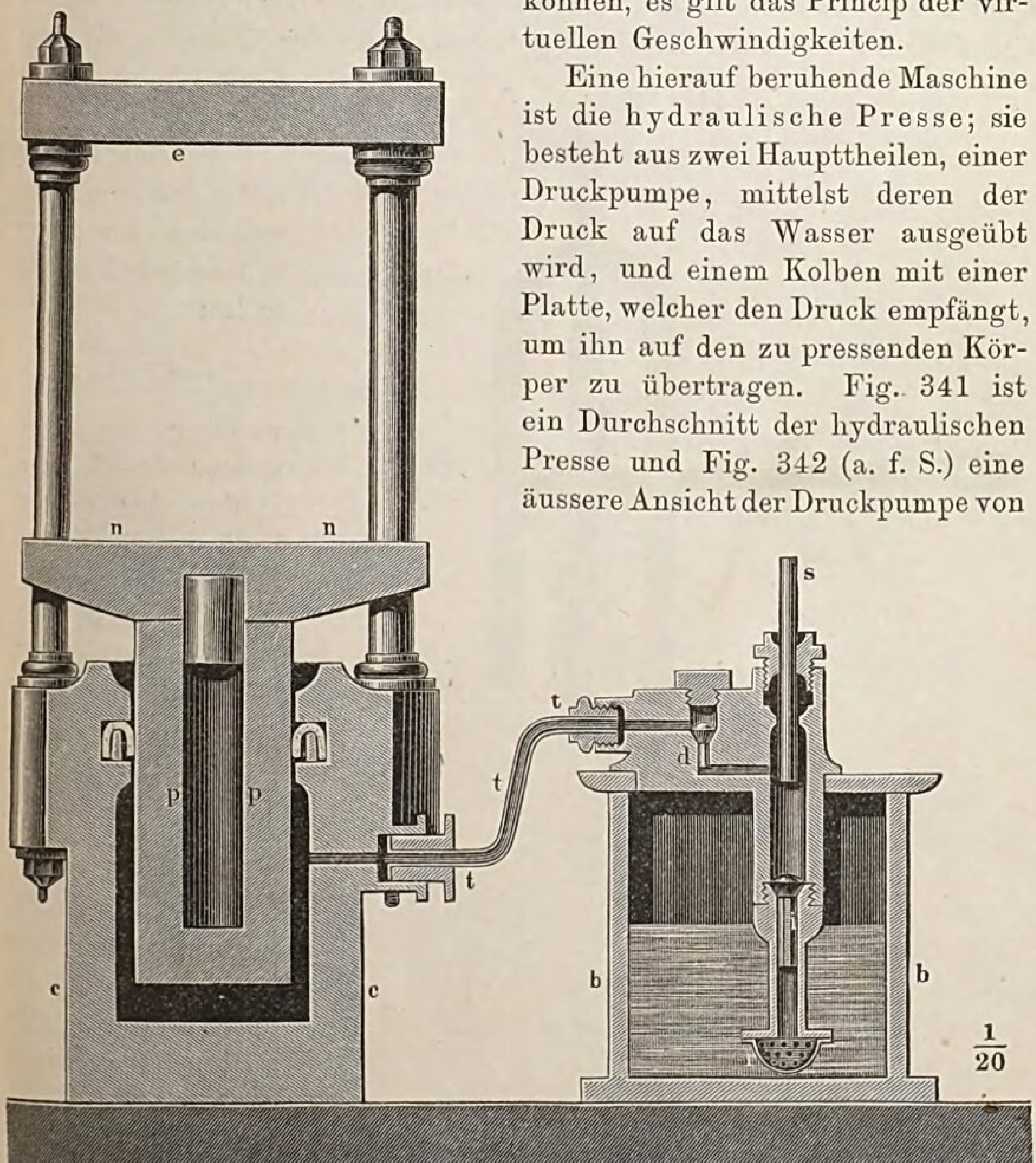
Wird der Kolben A mit dem Querschnitt q und einer Höhe h hinabgedrückt, so verdrängt er ein Volumen Wasser $= q\,h$. Wird der Kolben B vom Querschnitt Q gleichzeitig um die Höhe H gehoben, so wird dadurch ein Raum vom Volumen $= Q\,H$ gewonnen. Da nun offenbar $q\,h = Q\,H$ sein muss, so folgt hieraus:

$$h : H = Q : q$$

d. h. die Wege der Kolben verhalten sich verkehrt wie ihre Querschnitte. Da aber die Querschnitte sich verhalten wie die Kräfte, so verhalten sich die Wege verkehrt wie die Kräfte, wie wir dies bei den aus festen Körpern gebauten Maschinen nachgewiesen haben. Es gilt also auch bei der Vorrichtung in Fig. 340, dass die übertragene Arbeit gleich gross bleibt, oder, wie wir auch sagen können, es gilt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Eine hierauf beruhende Maschine ist die hydraulische Presse; sie besteht aus zwei Haupttheilen, einer Druckpumpe, mittelst deren der Druck auf das Wasser ausgeübt wird, und einem Kolben mit einer Platte, welcher den Druck empfängt, um ihn auf den zu pressenden Körper zu übertragen. Fig. 341 ist ein Durchschnitt der hydraulischen Presse und Fig. 342 (a. f. S.) eine äussere Ansicht der Druckpumpe von der rechten Seite der Fig. 341 gesehen. Durch den Hebel l wird der Kolben s gehoben, das Wasser des Behälters b dringt durch das Sieb r, hebt das Ventil i und gelangt so unter den Kolben s. Wenn man den Hebel niederdrückt, so geht auch der Kolben s nieder, das zurückgetriebene Wasser schliesst das Ventil i, hebt das Ventil d und gelangt durch die Röhre t in den Cylinder c der Presse; hier drückt es nun, vorausgesetzt, dass die ganze Höhlung von c sammt der Röhre t bereits mit Wasser

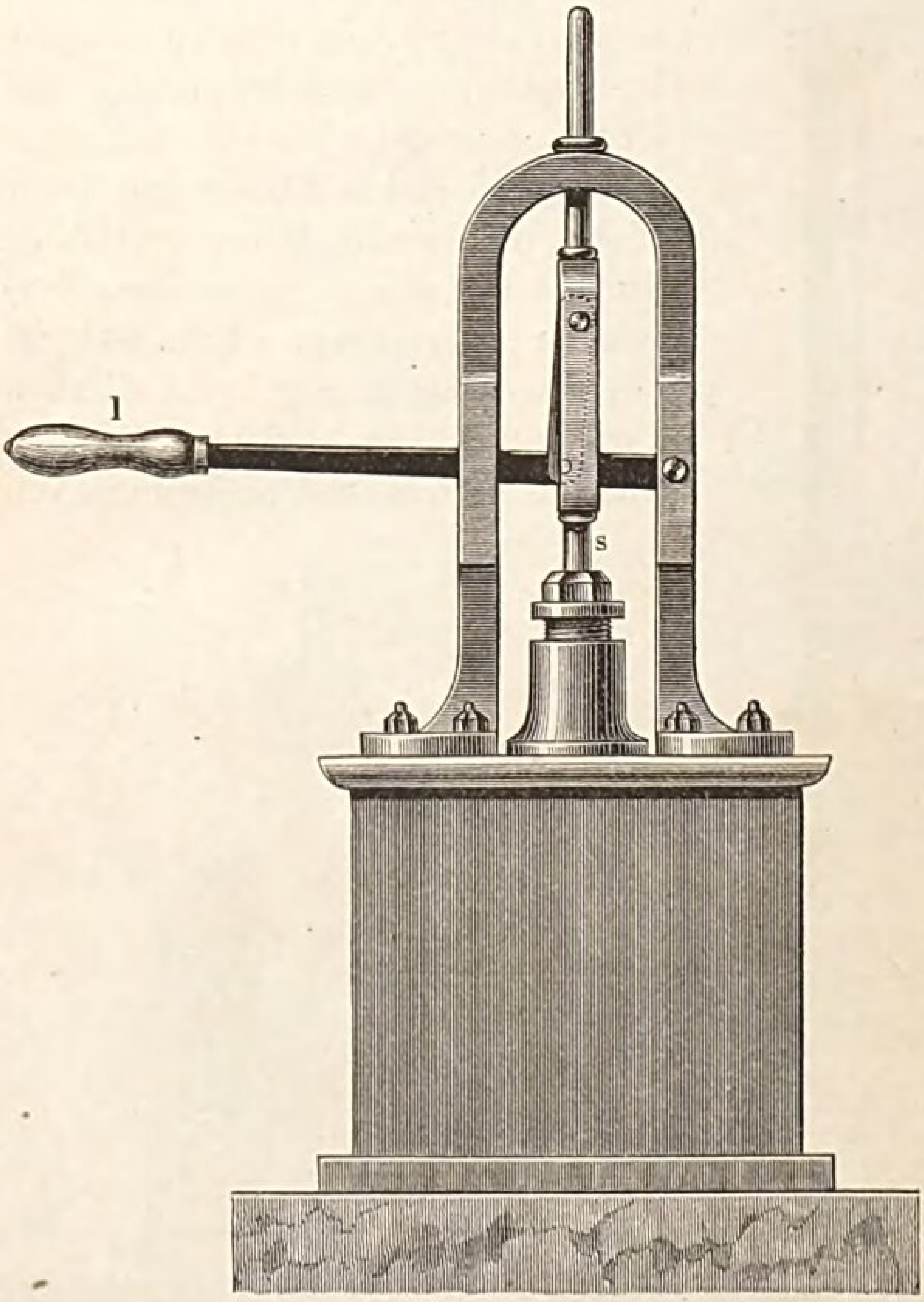
Fig. 341.



gefüllt sind, gegen den Kolben p, den es mit der Platte n hebt, und so wird der zu pressende Körper zwischen n und der festen Platte e zusammengedrückt.

Wenn der Kolben s durch irgend eine Kraft niedergedrückt wird, so hat jeder Flächentheil der Gefässwände, welcher dem Querschnitt des Kolbens s gleich ist, einen gleichen Druck auszuhalten. Ist also der Querschnitt des Kolbens p n-mal so gross als der des Kolbens s, so wird der Kolben p mit einer Kraft nk gehoben, wenn der Kolben s mit einer Kraft k niedergedrückt wird.

Fig. 342.



Bezeichnen wir mit K den Druck, mit welchem der grosse Kolben gehoben wird, so ist:

$$K = k \frac{R^2}{r^2}$$

wenn r den Halbmesser des kleinen, R den des grossen Kolbens bezeichnet. Ist nun ferner l der Hebelarm, an welchem der kleine Kolben angehängt ist, L der Hebelarm, an welchem der Arbeiter drückt, so ist:

$$k = D \frac{L}{l}$$

wenn D den Druck bezeichnet, welchen der Arbeiter ausübt, mithin haben wir:

$$K = D \frac{L \cdot R^2}{l \cdot r^2}.$$

Ist z. B. $R = 10 r$ und $L = 6 l$, so ist: $K = D \cdot 600$.

Wenn also der Hebel bei l mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 10 kg niedergedrückt wird, so wird der Kolben p mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 6000 kg gehoben.

Von der Kraft, welche am Hebel l angewandt wird, geht ein Theil durch Reibungswiderstände verloren, bevor sie sich bis zum Kolben p fortpflanzt; deshalb wird der Effect stets geringer sein, als er nach den eben angeführten Betrachtungen sein sollte.

Da das Uebersetzungsverhältniss an der hydraulischen Presse ein desto grösseres ist, je grösser das Verhältniss der Durchmesser der Kolben, so hat man zur Erreichung möglichst grosser Druckkräfte den Durchmesser des Presskolbens möglichst gross, dagegen jenen des Druckkolbens möglichst klein zu machen. Da letzteres den Missstand mit sich bringt, dass der Druckkolben zu schwach wird, so hat man Maschinen construirt, bei welchen der Druckkolben die Form eines Stahldrahtes oder einer Darmsaite besitzt, welche mittelst Kurbel und Walze durch eine runde Oeffnung in das Innere des Behälters hineingezogen werden. Solche Maschinen werden stereohydraulische Pressen genannt. Sie eignen sich zur Ausübung sehr bedeutender Kräfte auf sehr kurze Wegstrecken, z. B. für Lochmaschinen zur Durchbohrung von Kesselblech etc.

Communicirende Gefässe. Denken wir uns in der Vorrich- 88
tung Fig. 343 die Dicke (Höhe) der Kolben A und B auf Null reducirt, oder denken wir uns statt der Kolben nur Wasserschichten, so werden doch die Gleichgewichtsbedingungen unverändert dieselben bleiben. Wenn auf die Schicht AC, Fig. 344, irgend ein gleichförmiger Druck ausgeübt wird, so findet das Gleichgewicht nur dann statt, wenn auf die n mal grössere Schicht BD ein auch n mal grösserer Druck wirkt. Wird auf die Wasserschicht AC eine Wassersäule $ACFG$ aufgeschüttet, so

Fig. 343.

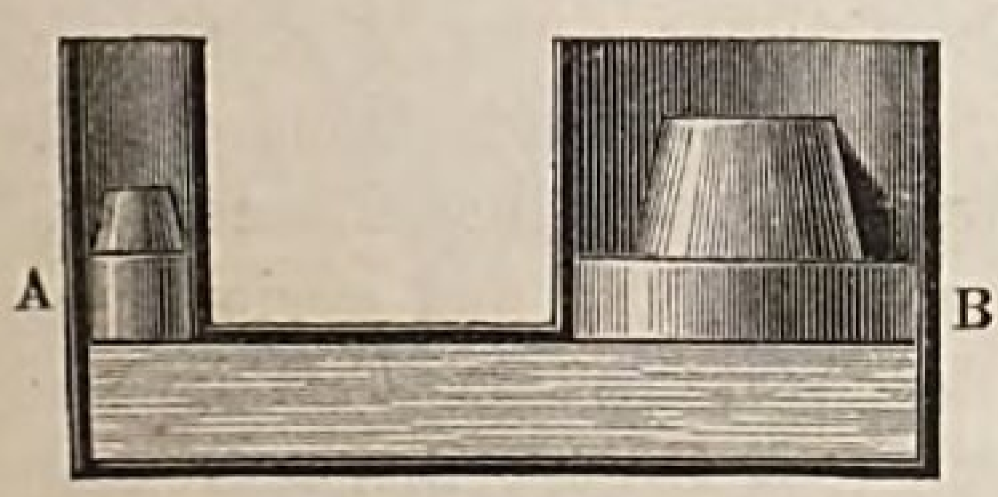
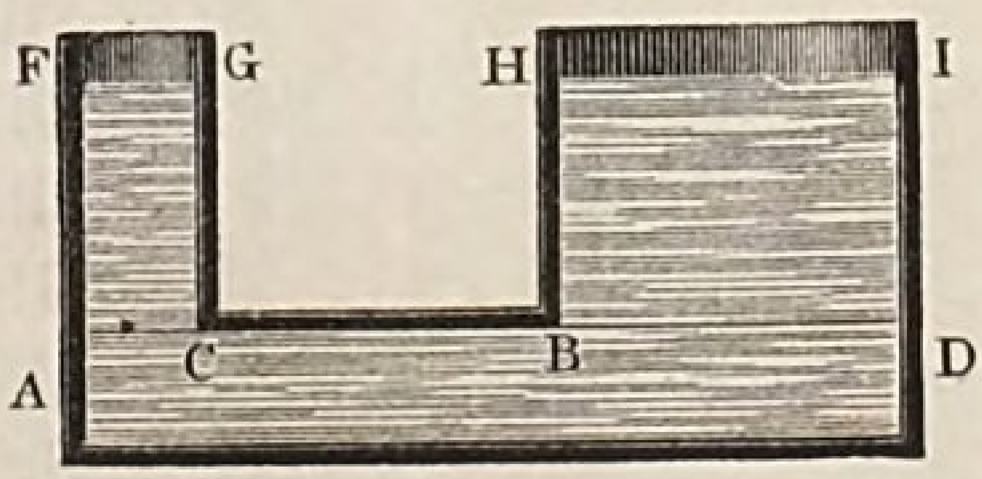


Fig. 344.



ist es das Gewicht derselben, welches auf AC drückt. Will man diesem Druck durch eine auf BD lastende Wassersäule das Gleichgewicht halten, so muss diese Wassersäule $BDHJ$ nothwendig n mal so schwer sein als $ACFG$. Soll aber die Wassersäule $BDAJ$ wirklich n mal schwerer sein als $ACFG$, so müssen beide Wassersäulen gleiche Höhe haben, da ja die Grundfläche BD schon n mal grösser ist als AC.

Für cylindrische verticale Röhren, die unten auf irgend eine Weise mit einander in Verbindung stehen, gilt also das Gesetz, dass sie mit der gleichen Flüssigkeit bis zu gleicher Höhe gefüllt sein müssen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, mag nun ihr Durchmesser gleich sein oder nicht.

Auf dies Gesetz gründet sich die Anwendung der Wasserwage, Fig. 345 (a. f. S.).

Nur bei ganz engen Röhren findet eine Abweichung statt, die später besprochen werden wird.

Sind Flüssigkeiten von ungleichem specifischem Gewicht in die beiden Schenkel gegossen, so sind natürlich die Flüssigkeitssäulen, welche sich das Gleichgewicht halten, nicht mehr gleich hoch, sondern ihre

Fig. 345.

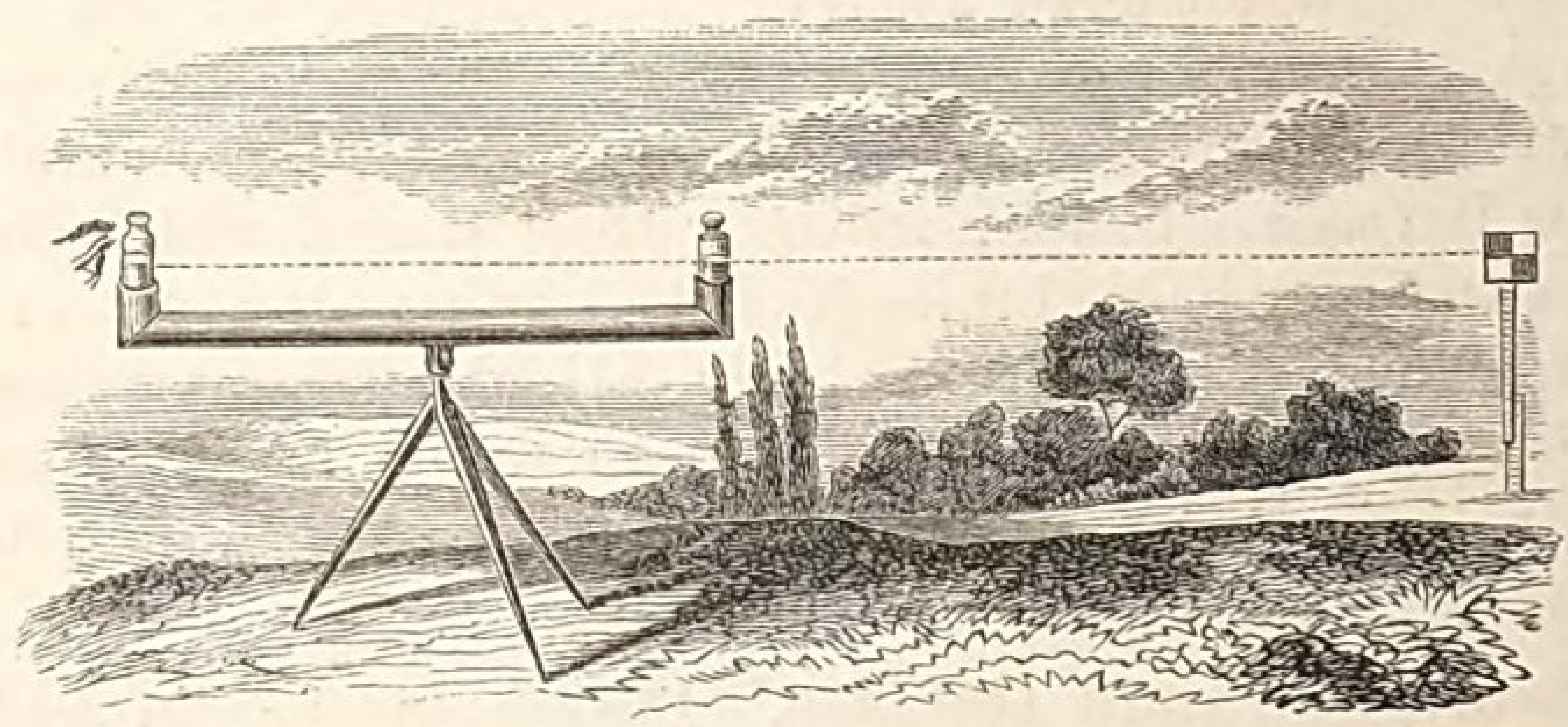


Fig. 346.

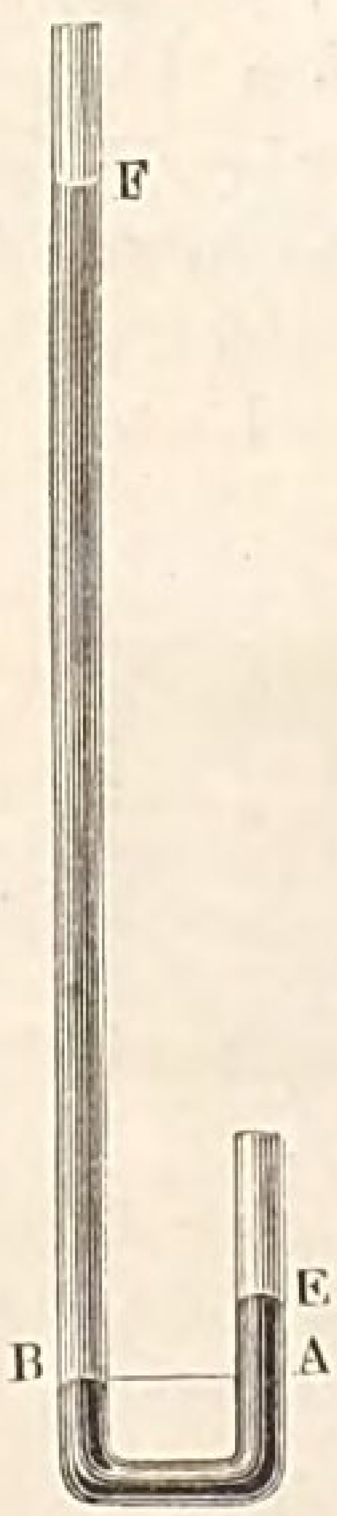
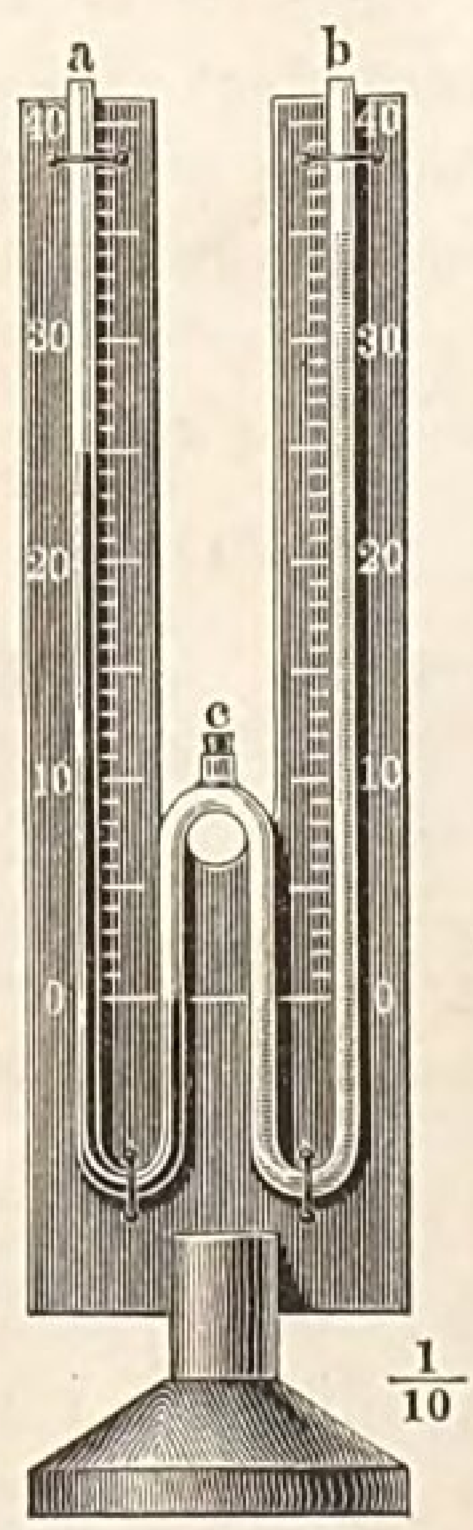


Fig. 347.



Höhen verhalten sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte.

In die heberförmig gebogene Röhre, Fig. 346, sei z. B. Quecksilber und dann in den längeren Schenkel Wasser gegossen. Denken wir uns durch die Berührungsstelle von Quecksilber und Wasser eine horizontale Ebene BA gelegt, so wird alles Quecksilber unter BA für sich im Gleichgewicht sein, die Höhe der Quecksilbersäule AE ist aber für den Fall des Gleichgewichts 13,6 mal geringer als die Höhe der Wassersäule FB im anderen Schenkel, weil das specifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 mal so gross ist als das des Wassers.

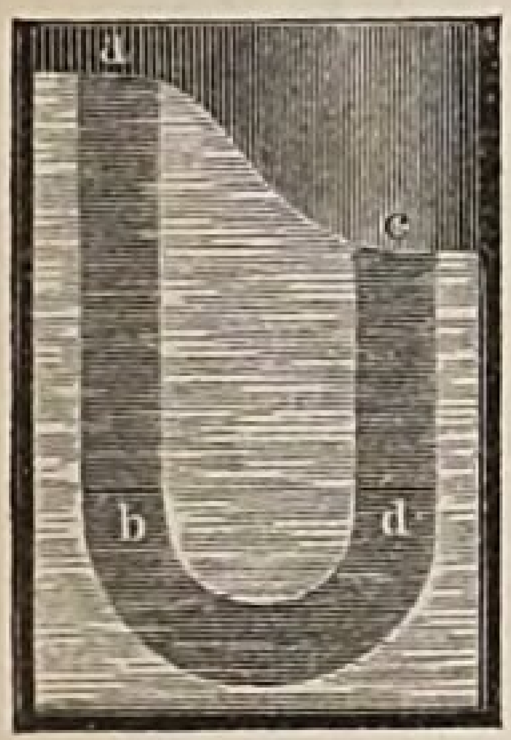
Was man nun auch für verschiedene Flüssigkeiten anwenden mag, immer müssen sich die Höhen der Säulen umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten. So hält z. B. eine 8 cm hohe Säule von concentrirter Schwefelsäure einer Wassersäule von 14,8 cm, und eine 8 cm hohe Säule von Aether einer Wassersäule von 5,7 cm das Gleichgewicht.

Ein Apparat, mit dem sich dies zeigen lässt, bei welchem eine directe Berührung der Flüssigkeiten vermieden werden muss, ist in Fig. 347 dargestellt.

89 **Freie Oberfläche der Flüssigkeiten.** Aus dem Satze, welcher zu Anfang des vorigen Paragraphen bewiesen wurde, geht nun auch hervor, dass die freie Oberfläche einer Flüssigkeit in irgend einem

Gefässe nothwendig horizontal sein muss. Wir können uns die ganze Flüssigkeitsmasse in eine beliebige Menge verticaler Säulchen zerlegt denken und diese müssen sich unter einander nach dem Principe der communicirenden Röhren das Gleichgewicht halten. Hätte z. B. die Oberfläche der Flüssigkeit die Gestalt der Fig. 348, so könnten sich unmöglich die Wassersäulen *cd* und *ab*, welche zur Unterscheidung von der übrigen Wassermasse stärker schraffirt sind, das Gleichgewicht halten; es muss nothwendig ein Sinken der höheren und ein Steigen der niedrigeren erfolgen, bis die ganze Oberfläche rechtwinklig ist zur Richtung der Schwere.

Fig. 348.



Wenden wir dies auf die Oberfläche des Meeres an, welches wir als vollkommen ruhig betrachten wollen, so ist klar, dass, wenn die Schwerkraft allein wirkte und wenn sie stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet wäre, die Oberfläche aller Meere Theile einer Kugeloberfläche sein müssten.

Bodendruck der Flüssigkeiten. Wenn flüssige Massen im 90
Gleichgewicht sind, so üben sie in Folge ihrer Schwere einen mehr oder minder bedeutenden Druck auf den Boden und die Seitenwände der

Fig. 349.



Fig. 350.

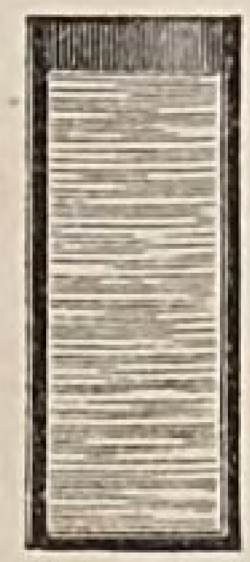


Fig. 351.



Fig. 352.



Gefässe aus, in denen sie enthalten sind, dessen Werth wir nun bestimmen wollen. Zunächst wollen wir den Druck untersuchen, welcher von oben nach unten oder von unten nach oben auf horizontale Flächen, alsdann den Druck, welcher auf die Seitenflächen ausgeübt wird.

In Gefässen, die wie in Fig. 349 bis 352 gleiche Grundfläche haben und bis zu gleicher Höhe mit Wasser gefüllt sind, hat der Boden gleichen Druck auszuhalten, mag nun das Gefäss oben weit oder eng, mag es gerade oder schräg sein.

Der Druck, welchen der Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes auszuhalten hat, ist gleich dem Gewicht einer verticalen Wassersäule, deren Basis gleich ist jenem Boden und deren Höhe gleich ist der Tiefe des Bodens unter dem Wasserspiegel.

Der Druck, welchen der Boden des Gefässes Fig. 349 bis 352 auszuhalten hat, ist also gleich dem Gewichte der im Gefässe Fig. 350 enthaltenen Wassersäule.

Wenn man allgemein mit s den Flächeninhalt des Bodens, den man betrachtet, mit h die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Boden, mit P den auf dem Boden lastenden Druck und mit d das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit bezeichnet, so ist:

$$P = s \,.\, h \,.\, d.$$

Es sei z. B. der Flächeninhalt des Bodens 3 qdm, die Höhe des Wasserspiegels über dem Boden 4 dm, so ist der Druck auf den Boden gleich dem Gewichte von $3 \times 4 = 12$ kg.

Dass der Druck auf den Boden eines geraden cylindrischen Gefässes, wie Fig. 350, gleich ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers, ist

Fig. 353.

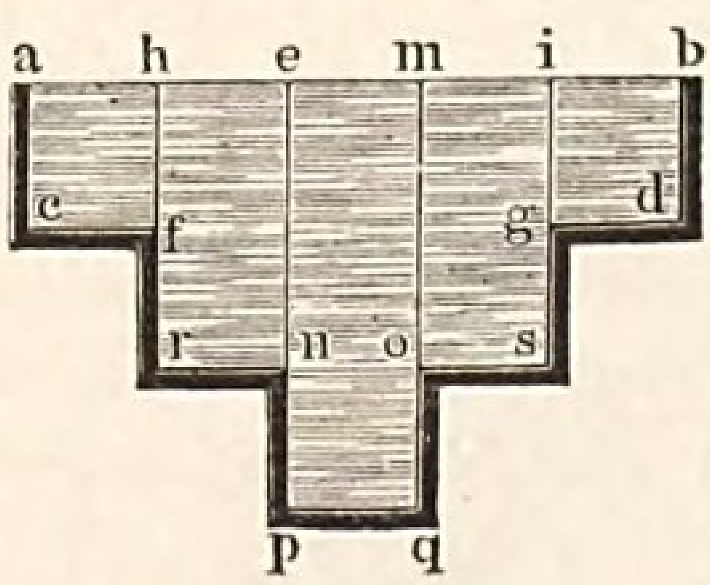


Fig. 354.

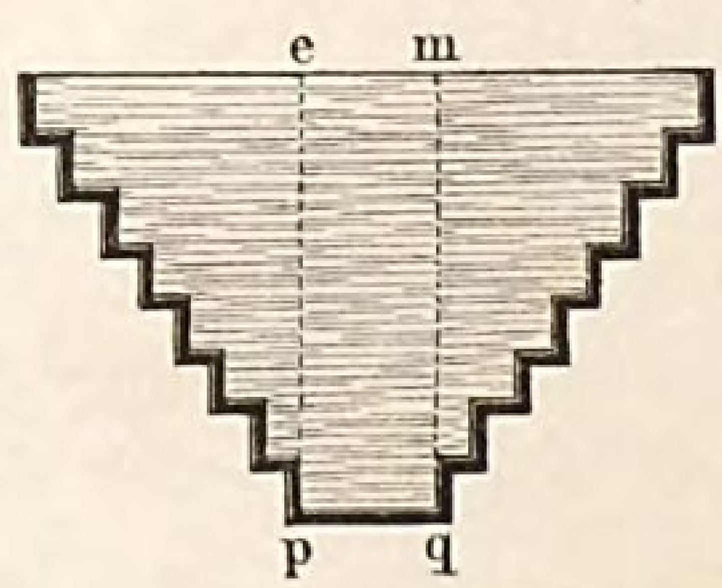
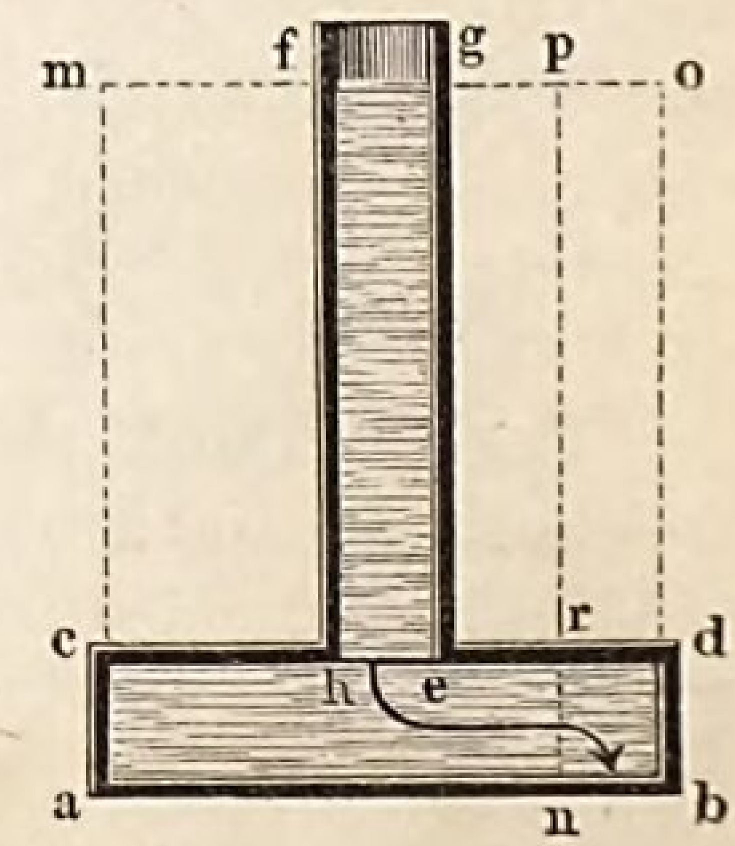


Fig. 355.



klar; dass aber der Druck auf den Boden der oben erweiterten, verengten und schrägen Gefässe derselbe sein muss, bedarf noch eines Beweises.

Fig. 353 stellt ein Gefäss vor, welches sich in treppenförmigen Absätzen nach oben erweitert. Die oberste verticale Wassersäule $acdb$ drückt mit ihrem ganzen Gewicht auf die Grundfläche cd; jeder Theil dieser Grundfläche hat natürlich gerade das Gewicht der vertical auf ihm lastenden Wassersäule zu tragen, und somit ist die Wasserschicht fg durch das Gewicht der Wassersäule $fghi$ gedrückt.

Der Druck der Wassersäule $hfgi$ pflanzt sich vertical nach unten fort, so dass die Fläche rs, welche gleich fg ist, nicht nur den Druck der unmittelbar auf ihr lastenden Wassersäule $rfgs$, sondern auch noch den der Wassersäule $fghi$ zu tragen hat. — Die Fläche rs trägt also das Gewicht der Wassersäule $rshi$.

Wenn man auf diese Weise weiter schliesst, so ergiebt sich, dass die Basis pq einen Druck auszuhalten hat, welcher gleich ist dem Gewichte der Wassersäule $pqem$.

Dasselbe gilt auch für ein Gefäss, bei welchem, wie Fig. 354, die einzelnen treppenförmigen Absätze eine ganz geringe Höhe haben, der Boden pq ist durch das Gewicht der Wassersäule $pqem$ gedrückt.

Da diese Schlüsse von der Höhe und den Dimensionen der Absätze überhaupt ganz unabhängig sind, so gelten sie auch noch für den Fall, dass die einzelnen treppenförmigen Absätze verschwindend klein werden, sie gelten also auch für jedes oben erweiterte Gefäss.

Fig. 355 (a. v. S.) stelle ein unten weites Gefäss dar, an welches sich oben eine engere Röhre ansetzt. Das Gefäss sei bis *fg* mit Wasser gefüllt. Der Boden *ab* hat zunächst das Gewicht der Wassersäule *abcd* zu tragen. Diese ist aber selbst durch die Wassersäule *hfge* gedrückt, deren Gewicht auf die Wasserschicht *he* presst. Der auf *he* lastende Druck pflanzt sich nun durch das Wasser in *abcd* in der Art gleichförmig fort, dass jeder Theil des Bodens *ab*, welcher ebenso gross ist wie *he*, einen dem Gewichte der Wassersäule *fghe* gleichen Druck auszuhalten hat. Jedes Flächenstück des Bodens, welches gleich ist *he*, hat demnach einen Gesammtdruck auszuhalten, welcher gleich ist dem Gewicht einer verticalen Wassersäule, deren Basis gleich *he*, deren Höhe aber gleich $ac + hf$ ist; daraus folgt nun ferner, dass der Gesammt-

Fig. 356.

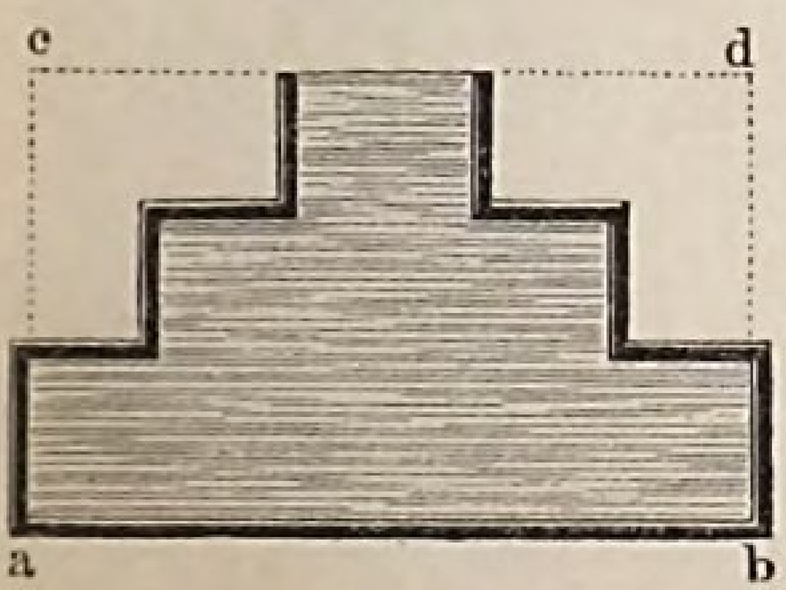


Fig. 357.



Fig. 358.



Fig. 359.



druck, welchen der Boden *ab* auszuhalten hat, gleich ist dem Gewicht einer geraden Wassersäule, deren Basis *ab* und deren Höhe *am* ist.

Darauf gründet sich die Real'sche Presse.

Wenden wir diese Schlüsse auf das Gefäss Fig. 356 an, welches bis oben hin mit Wasser gefüllt sein soll, so ergiebt sich, dass der Druck auf den Boden *ab* gleich ist dem Gewicht einer verticalen Säule, deren Basis *ab* und deren Höhe *ac* ist.

Aus denselben Gründen sind auch die Boden der Gefässe Fig. 357 und Fig. 358 gerade so stark gedrückt, als ob sie eine gerade Wassersäule von gleicher Basis und gleicher Höhe zu tragen hätten, da ja diese Schlüsse ebenso für kleinere und endlich auch für verschwindend kleine Absätze des Gefässes gültig sind.

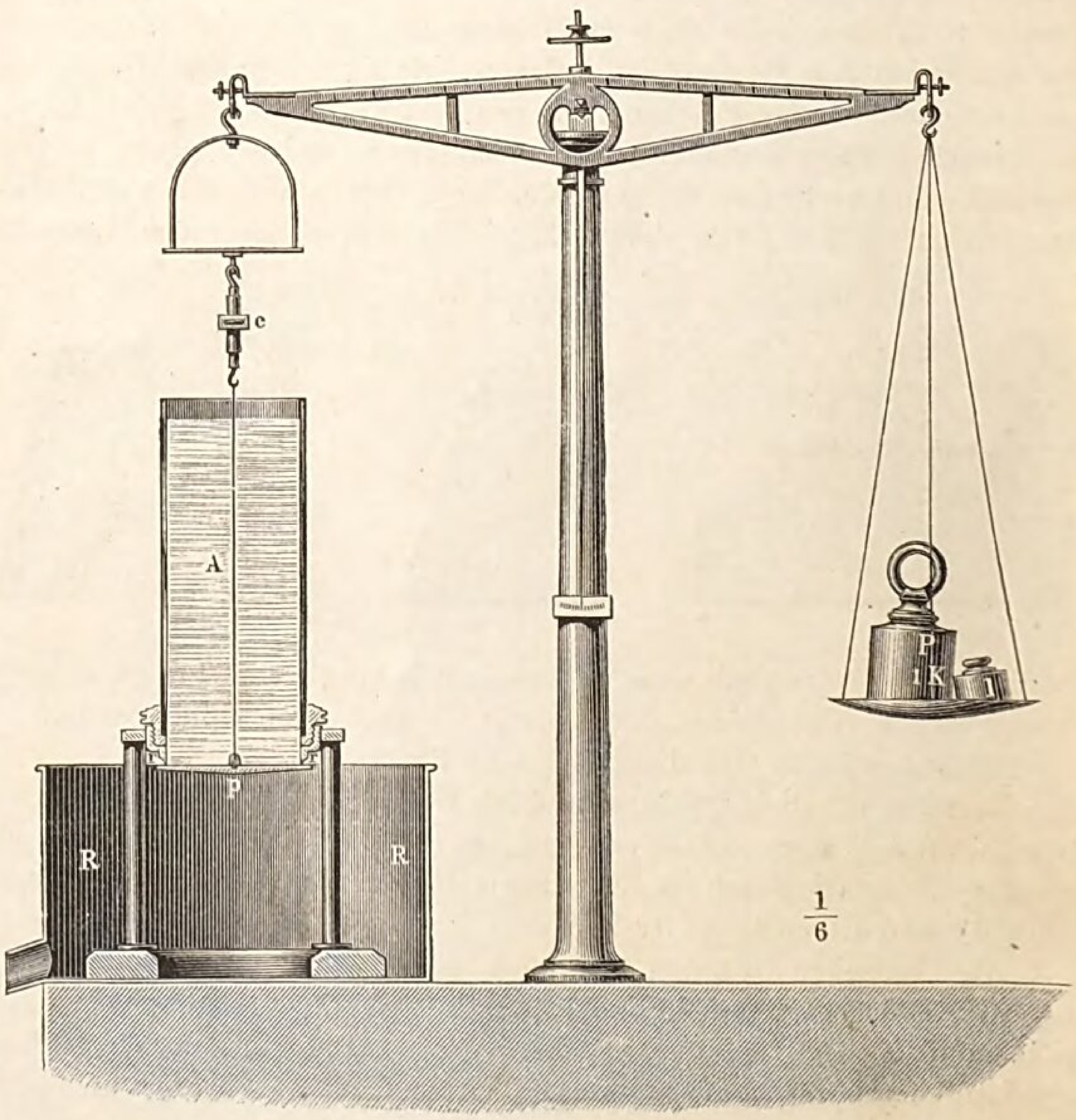
Aus dem Gesagten ergiebt sich auch nun leicht die Richtigkeit unseres Satzes für den in Fig. 359 dargestellten Fall, dass das Gefäss schräg ist.

Kurz, der Druck, den der Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes auszuhalten hat, ist von der Form dieses Gefässes ganz unabhängig, er hängt nur von der Grösse des Bodens und seiner Tiefe unter dem Wasserspiegel ab.

Die Behauptung, welche soeben theoretisch begründet wurde, muss auch noch experimentell bewiesen werden, und dazu eignet sich besonders der Pascal'sche Apparat, welchen Fig. 360 in der sehr zweckmässigen Form darstellt, in welcher er in der mechanischen Werkstätte zu Genf construirt wird.

Die untere Oeffnung eines Messingringes *r*, welcher genau 0,798 dm inneren Durchmesser hat, und dessen unterer genau horizontal stehender Rand vollkommen eben abgeschliffen sein muss, wird durch eine Messing-

Fig. 360.



platte *p* geschlossen, welche mittelst eines Drahtes an den einen Arm einer Wage angehängt ist. In die Wagschale auf der anderen Seite der Wage wird ein Gewicht *l* gelegt, welches genau der Platte *p* das Gleichgewicht hält. Bei *c* befindet sich eine Vorrichtung, mittelst deren man die Platte *p* etwas heben oder senken kann, und welche erlaubt, ihre Höhe so zu reguliren, dass sie gerade die Oeffnung des Ringes *r* schliesst, wenn der Wagbalken horizontal steht.

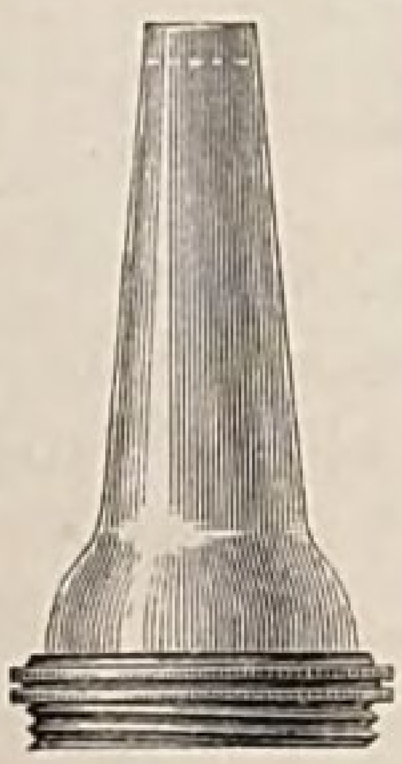
In den Ring r ist nun zunächst ein cylindrisches Gefäss A eingeschraubt, welches gleichen Durchmesser mit dem Ringe hat und dessen Boden durch die Platte p gebildet wird. Der Inhalt dieses Gefässes vom Boden bis zu einer 2 dm über dem Boden befindlichen Marke beträgt, wie sich leicht berechnen lässt, gerade 1 cdm, das diesen Raum ausfüllende Wasser hat also das Gewicht von 1 kg. Legt man also ein Kilogrammstück P auf die Wagschale rechts, so wird gerade Gleichgewicht bestehen, wenn das Gefäss A bis zur Marke mit Wasser gefüllt ist; jedes fernere Zuschütten von Wasser bewirkt ein Niederdrücken der Bodenplatte p, in Folge dessen ein Theil des Wassers aus A in das Gefäss R ausfliesst (dessen Durchmesser in unserer Figur der Raumersparniss wegen zu klein gezeichnet ist).

Schraubt man nun in den Ring r statt des cylindrischen Gefässes A das oben verengte Gefäss Fig. 362, oder das oben erweiterte Gefäss Fig. 361, so muss man dieselben wieder genau 2 dm hoch voll Wasser schütten, wenn der Druck auf den Boden derselbe bleiben, jedes fernere Zuschütten von Wasser also ein Abdrücken der Bodenplatte p bewirken soll.

Fig. 361.



Fig. 362.



Der Satz von der Unabhängigkeit des Bodendruckes von der Form der Seitenwände des Gefässes, welcher auch das hydrostatische Paradoxon genannt wird, kann auch mittelst des Satzes von den virtuellen Momenten (§. 60) abgeleitet werden.

Man denke sich ein Gefäss mit senkrechten Wänden, Fig. 363 (a. f. S.), dessen Boden durch einen ohne Reibung beweglichen Kolben k gebildet wird und welches bis zum Niveau cd mit einer Flüssigkeit, z. B. Wasser, gefüllt ist. Der Druck auf den Kolben ist dann gleich dem Gewichte der Wassermasse $abcd$. Gleichgewicht wird also herrschen, wenn der Kolben mit einer ebenso grossen Kraft emporgedrückt wird.

Wird dieser Kolben um die Höhe aa' gehoben, so wird auch die ganze Wassermasse um dieselbe Höhe gehoben. Das schliessliche Resultat ist aber dasselbe, als wenn die Wassermasse $a'b'dc$ in Ruhe geblieben wäre und nur die Wassermasse $abb'a'$ aus ihrer Lage in die Lage $cdd'c'$ gebracht worden wäre. Ist der Flächeninhalt des Kolbens $= F$, die Höhe $ac = H$, die Höhe $aa' = h$, so ist die Masse des Wassers $abdc = FH$, die Kraft, mit der sie auf den Kolben drückt $= gFH$; wird diese Kraft längs des Weges $aa' = h$ überwunden, so ist die Arbeit $= gFH \,.\, h$. Denkt man sich die Wassermasse $abb'a'$ nach $cdd'c'$ gehoben, so hat man ihre Masse $= Fh$, ihren Druck $= gFh$, den Weg $= H$, also die Arbeit $= gFh \,.\, H$, also ebenso gross wie oben.

Gehen wir nun über zu dem in Fig. 364 dargestellten Falle, in welchem das ursprüngliche Gefäss theilweise durch eine enge Röhre ersetzt ist, so wird bei Hebung des Kolbens aus der Lage *ab* um die Höhe $aa' = h$ wiederum die Wassermasse $abb'a'$ um die Höhe H emporgehoben, also genau dieselbe Arbeit geleistet wie früher; da aber die Hubhöhen beide Male dieselben sind, so müssen es auch die Kräfte, d. h. die Bodendrucke sein.

Fig. 363.

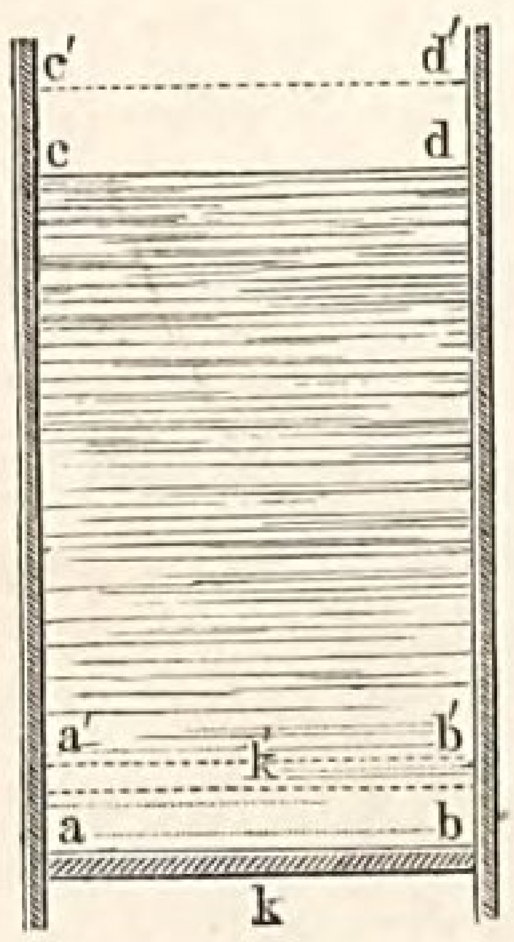


Fig. 364.

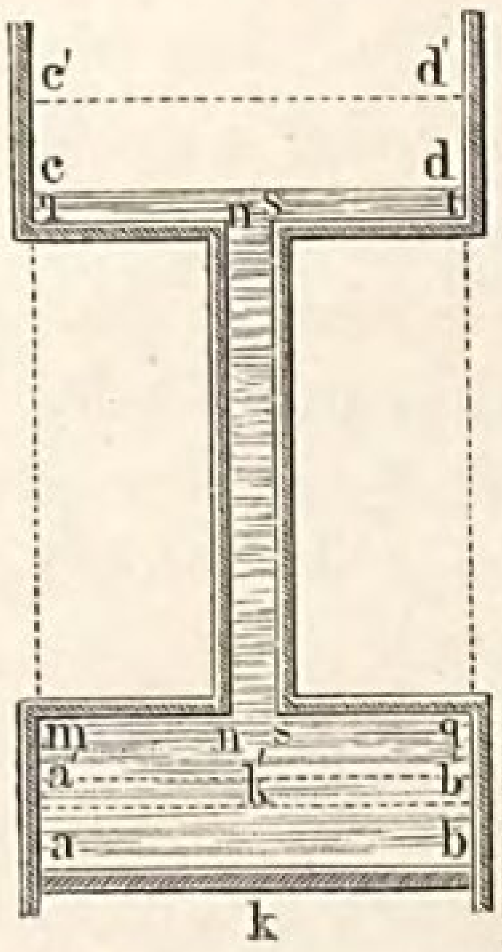
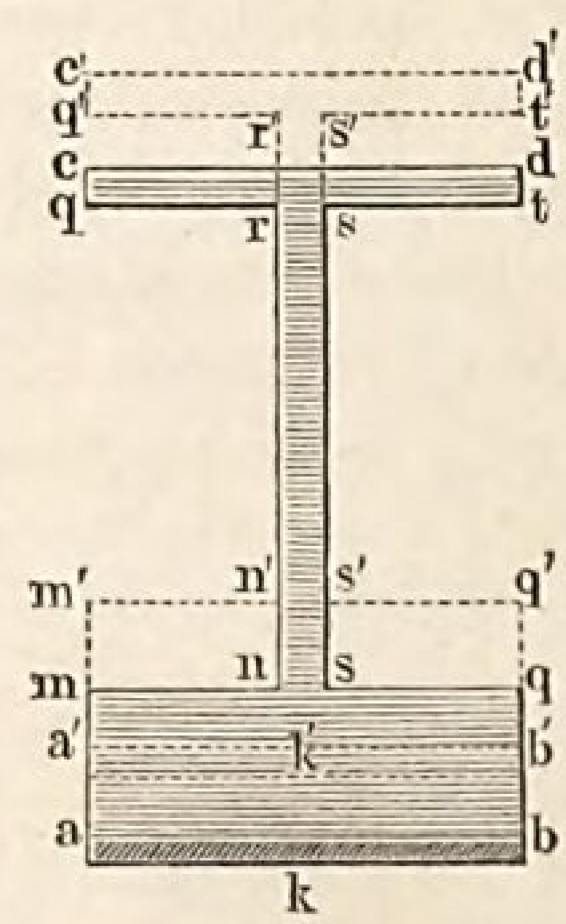
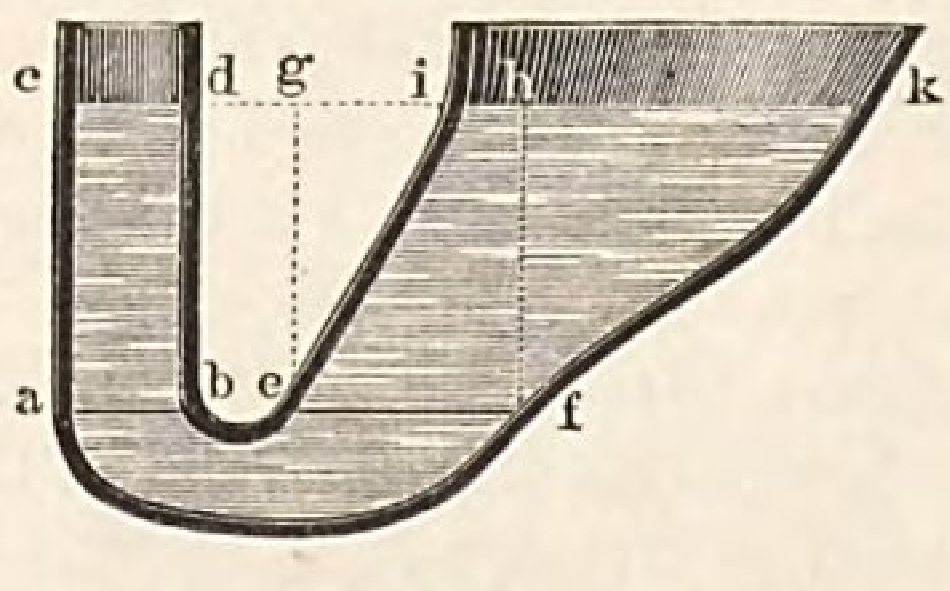


Fig. 365.



Ganz anders stellt sich die Sache, wenn wir uns vorstellen, dass das Wasser zu Eis gefroren und die Gefässwände beseitigt wären (Fig. 365). In diesem Falle ist die Arbeit bei der Hebung um die Höhe $h = aa'$ gleich gh mal der gehobenen Masse, also viel kleiner als früher, da diese Masse viel kleiner ist als FH. In diesem Falle reducirt sich der Bodendruck auf das Gewicht des Eises.

Fig. 366.



Bei diesen Betrachtungen ist auf die kinetische Energie, welche nothwendiger Weise mit aufgewendet werden muss, um die Flüssigkeit in Bewegung zu setzen, keine Rücksicht genommen.

Aus dem Satze, dass der Bodendruck nicht von der Form des Gefässes, sondern nur von dem Flächeninhalte des Bodens und seiner Tiefe unter dem Wasserspiegel abhängt, folgt ferner, dass der Satz, welcher §. 88 nur für gerade cylindrische Gefässe bewiesen wurde, ganz allgemein wahr ist, dass in communicirenden Gefässen für den Fall des Gleichgewichts der Spiegel der Flüssigkeit in gleicher Höhe sein muss, welches auch übrigens die Gestalt der Gefässe sein mag. Dem Druck der Wassersäule *abcd*, Fig. 366, wird das Gleichgewicht gehalten, wenn auf *ef* ein Druck wirkt, welcher dem Gewicht der verticalen Wassersäule *efgh* gleich ist. Nun aber übt ja, wie wir eben gesehen haben, die unregelmässig geformte schräge Wassersäule *efik* auf ihre Grundfläche *ef* genau denselben Druck aus, wie die gleich hohe gerade Säule *efgh*, folglich

muss in der That in beiden Schenkeln unseres Gefässes das Wasser gleich hoch stehen, wenn Gleichheit stattfinden soll.

Auch dieser Satz würde sich direct aus der Betrachtung der virtuellen Momente, d. h. der beiderseitigen Arbeiten, ergeben.

Seitendruck der Flüssigkeiten. In Folge der gleichförmigen 91
Fortpflanzung des Drucks durch Flüssigkeiten hat nicht allein der Boden der mit Flüssigkeiten gefüllten Gefässe einen Druck auszuhalten, sondern auch die Seitenwände, und diesen Seitendruck wollen wir jetzt näher betrachten.

Es sei *ab*, Fig. 367, ein Stück der verticalen Wand eines mit Wasser gefüllten Gefässes, so bildet es ein Stück Grenzfläche der horizontalen Wasserschicht *abcd*, deren Höhe wir so gering annehmen wollen, dass man von dem Druck, welchen diese Wasserschicht selbst gegen ihre Grenzflächen ausübt, abstrahiren kann. Auf der oberen Grenzfläche *ac* dieser Wasserschicht lastet aber das Gewicht der Wasser-

Fig. 367.

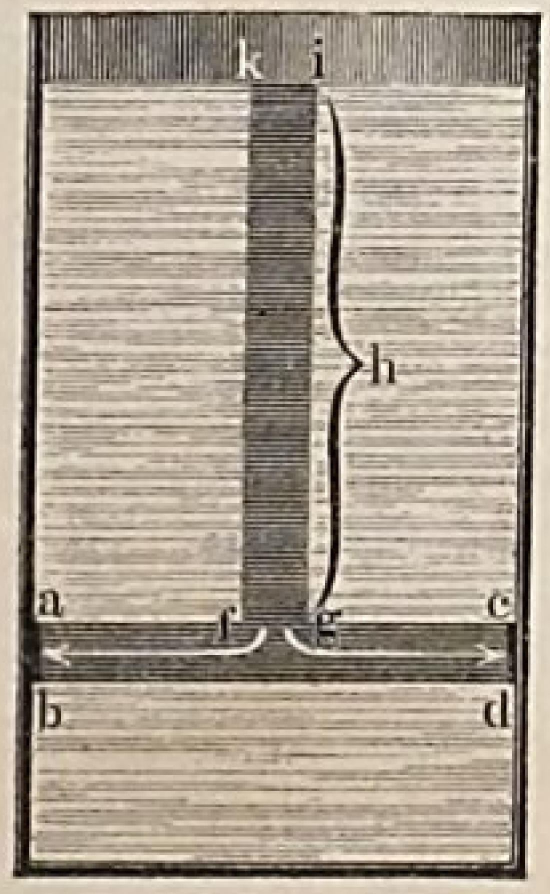
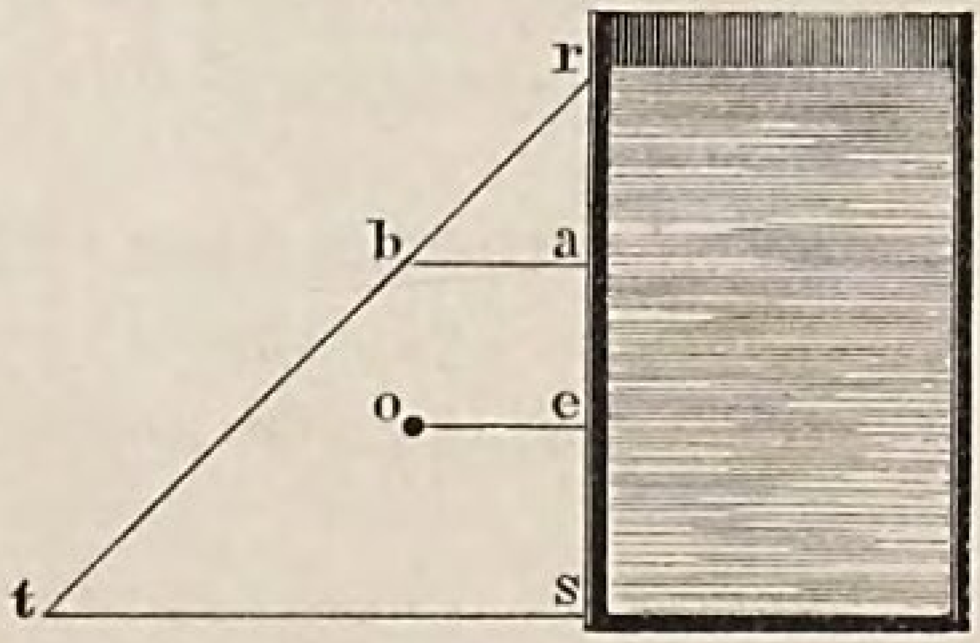


Fig. 368.



säule von *ac* bis zum oberen Wasserspiegel, deren Höhe wir mit h bezeichnen wollen. Ist nun *fg* ein Flächenstück der Grenzfläche *ac*, welches dem Flächenstück *ab* der Seitenwand gleich ist und dessen Flächeninhalt wir mit s bezeichnen wollen, so ist offenbar $p = s \, . \, h \, . \, d$ der Druck, welchen es auszuhalten hat (wenn d das Gewicht der Volumeinheit Wasser bezeichnet) und dieser Druck pflanzt sich durch die Flüssigkeitsschicht *abcd* in der Weise gleichförmig fort, dass auch die Flächenstücke *ab* und *cd* den Druck $p = s \, . \, h \, . \, d$ auszuhalten haben.

Der Druck, welchen ein kleines Stückchen in der Seitenwand eines Gefässes auszuhalten hat, ist also dem Gewicht der Flüssigkeitssäule gleich, welche den Flächeninhalt des fraglichen Wandstückes zur Basis und seine Tiefe unter dem Wasserspiegel zur Höhe hat. In einem 10 m hohen Behälter voll Wasser ist z. B. der Druck auf 1 qcm der Seitenwand in einer Tiefe von 1 m gleich dem Drucke von 100 g, in einer Tiefe von 2 m gleich dem Druck von 200 g, in einer Tiefe von 10 m aber, d. h. am Boden, gleich dem Drucke von 1 kg.

Der Druck, den irgend ein Punkt a der verticalen Wand irgend eines mit Wasser gefüllten Gefässes auszuhalten hat, lässt sich durch Zeichnung Fig. 368 (a. v. S.) anschaulich machen. Man ziehe in a eine wagerechte Linie und mache ihre Länge ab gleich der Tiefe des Punktes a unter dem Wasserspiegel, so kann die Linie ab den Druck repräsentiren, den der Punkt a auszuhalten hat. Macht man dieselbe Construction für mehrere Punkte der verticalen Linie rs, so werden die Endpunkte aller der horizontalen Drucklinien in die Linie rt fallen. Es folgt daraus, dass der Gesammtdruck, welchen die Linie rs der verticalen Gefässwand auszuhalten hat, durch den Flächenraum des Dreiecks rst repräsentirt ist.

Der Angriffspunkt der Resultirenden aller elementaren Pressungen, welche ein Wandstück auszuhalten hat, heisst Mittelpunkt des Drucks. Er liegt immer tiefer als der Schwerpunkt des Wandstücks, weil ja die Stärke des Drucks nach unten wächst. Der Mittelpunkt des Drucks für die verticale Linie rs ist leicht zu ermitteln; denn es ist offenbar derjenige Punkt e, in welchem die Linie rs von derjenigen horizontalen Linie getroffen wird, die durch den Schwerpunkt o des Dreiecks rst geht. Wir haben hier nur die Linie rs betrachtet; nehmen wir statt derselben einen beliebig breiten Streifen der verticalen Wand, so liegt der Mittelpunkt des Drucks für denselben auf seiner verticalen Mittellinie, und zwar ist seine Höhe über dem Boden $\frac{1}{3}$ der Höhe, in welcher sich der Wasserspiegel über dem Boden befindet.

92 **Druck im Inneren der Flüssigkeiten, Auftrieb.** Jede Schicht einer im Gleichgewicht befindlichen Wassermasse hat von beiden Seiten her einen vollkommen gleichen Druck auszuhalten. Gegen die

Fig. 369.

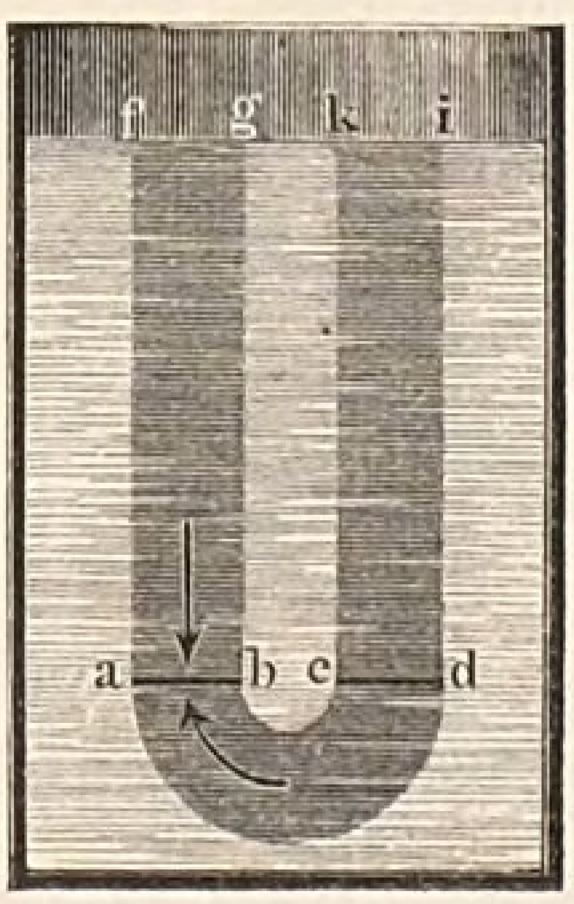
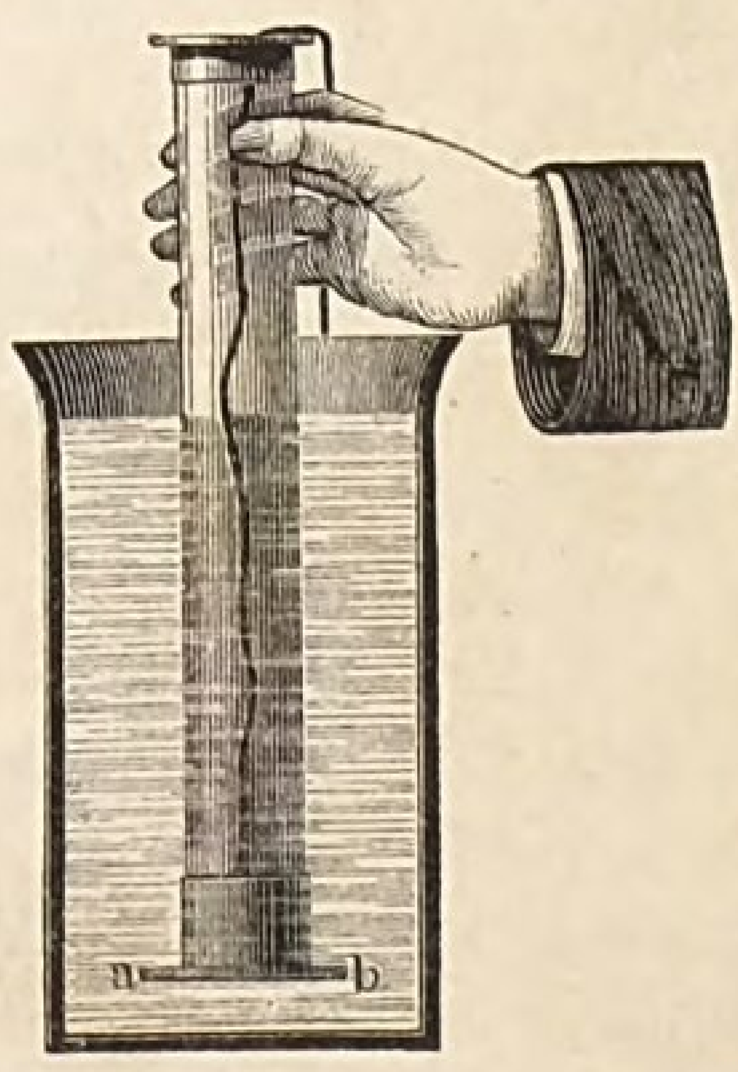
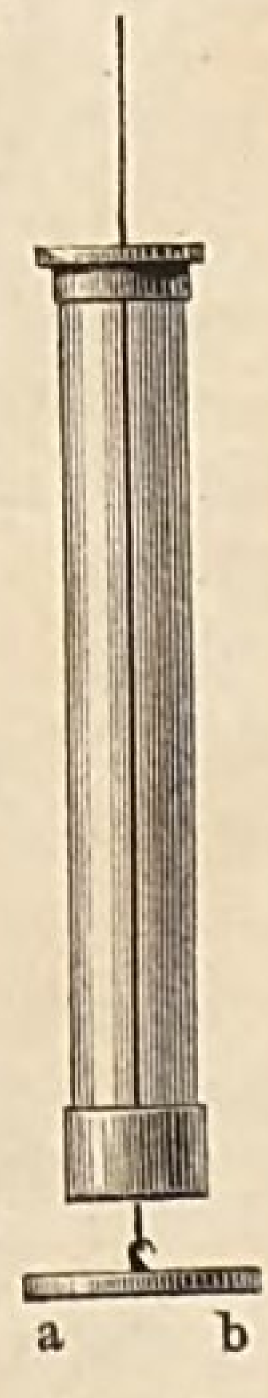


Fig. 370.





untere Seite einer horizontalen Wasserschicht wirkt also ein ebenso grosser Druck von unten her, wie der ist, welcher von oben her auf ihr lastet. Auf der horizontalen Wasserschicht ab, Fig. 369, lastet z. B.

das Gewicht der Wassersäule *abfg*, welches durch einen vollkommen gleichen, von unten her gegen *ab* wirkenden, von den benachbarten Wassersäulen herrührenden Druck äquilibrirt wird.

Hätte man an die Stelle der Wassersäule *fgab* einen festen Körper in die Wassermasse eingeschoben, so hätte demnach die untere Fläche *ab* desselben einen nach oben gerichteten Druck auszuhalten, welcher dem Gewicht der Wassersäule *abfg* gleich ist. Dass im Inneren der Flüssigkeit ein solcher nach oben wirkender Druck wirklich vorhanden ist, lässt sich leicht durch den Versuch zeigen.

Das untere Ende einer 5 bis 6 cm weiten Glasröhre, Fig. 370, ist mit einer Messingfassung versehen, deren Rand genau eben abgeschliffen ist. *ab* ist eine Metallscheibe, welche in ihrer Mitte einen Haken hat, vermittelst dessen man sie an einer durch die Röhre hindurchgehenden Schnur anhängen kann, so dass, wenn man den Faden anzieht, die Scheibe die untere Oeffnung der Röhre vollkommen verschliesst. Auf diese Weise verschlossen, wird die Röhre in Wasser eingetaucht. Nun ist es nicht mehr nöthig, den Faden anzuziehen, um das Herunterfallen der Scheibe zu verhindern, weil sie durch die Flüssigkeit nach oben gedrückt wird. Giesst man Wasser in die Röhre, so wird die Metallscheibe durch ihr eigenes Gewicht fallen, sobald das Niveau des Wassers in der Röhre dem äusseren gleich ist, denn nun erleidet die Metallscheibe durch die Flüssigkeit gleichen Druck nach unten und nach oben.

Dieser Satz wird von seinem Entdecker das Archimedische Princip genannt*).

Das Archimedische Princip. Dem vorigen Paragraphen gemäss wirkt auf jeden Körper, welcher in eine Flüssigkeit getaucht wird, eine verticale Kraft, welche ebenso gross ist wie die Kraft, mit welcher ein dem Körper gleich grosses Volumen der Flüssigkeit von der Erde angezogen wird. 93

Da diese Kraft, der Auftrieb, dem Gewichte des Körpers entgegengerichtet ist, so kommt nur die Differenz beider Kräfte zur Wirkung. Man pflegt daher oft diesen Satz abgekürzt so auszudrücken: Jeder Körper verliert scheinbar beim Eintauchen in eine Flüssigkeit so viel von seinem Gewichte, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Dieser Druck, welcher gegen die untere Fläche eines jeden in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers wirkt, heisst der Auftrieb.

Der „Gewichtsverlust" durch den Auftrieb ist nur ein scheinbarer, da das wirkliche Gewicht, das ist die Anziehungskraft der Erde auf den Körper, durch sein Eintauchen keine Verminderung erleidet.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes durch eine einfache Betrachtung überzeugen. Irgend ein gerades Prisma sei vertical

*) Ueber diese Entdeckung berichtet Vitruv, „De architecture" lib. 9. Archimedes lebte 287 bis 212 vor Christus.

in eine Flüssigkeit eingetaucht, wie es Fig. 371 zeigt. Der Querschnitt desselben sei F, die Höhe desselben H. Der Abstand der oberen und unteren Fläche vom Spiegel der Flüssigkeit sei h und h', also $h' - h = H$. Der Flüssigkeitsdruck auf die obere Fläche ist demnach $= g F h s$, der auf die untere $= g F h' s$, wenn mit g die Accelleration der Schwere, mit s das specifische Gewicht der Flüssigkeit bezeichnet wird.

Der Ueberschuss des auf die untere Fläche wirksamen Druckes, also der Auftrieb A, ist daher gleich gegeben durch

$$A = g F s (h' - h) = g s F H.$$

Da aber FH das Volumen des eingetauchten Körpers darstellt, so ist $s F H$ die Masse der verdrängten Flüssigkeit und $g s F H = A$ ihr Gewicht.

Nehmen wir statt eines einzelnen Prismas ein Bündel von mehreren, so ist klar, dass jedes einzelne Prisma durch das Eintauchen in eine Flüssigkeit von seinem Gewichte scheinbar so viel verliert, als ein gleiches Volumen der Flüssigkeit wiegt, folglich ist auch der scheinbare Gewichtsverlust, welchen der ganze aus mehreren Prismen zusammengesetzte Körper erleidet, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsmasse, deren Volumen dem Gesammtvolumen aller Prismen gleich ist. Da man sich aber einen jeden Körper in eine Menge solcher vertical stehender Prismen von sehr kleinem Durchmesser zerlegt denken kann, so lässt sich unser Schluss auf jeden beliebigen Körper ausdehnen.

Eine ganz andere Betrachtungsweise führt uns zu demselben Resultate. Denken wir uns, der Raum, den der in Wasser eingetauchte Körper einnimmt, sei selbst mit Wasser gefüllt, so wird dieser Wasserkörper in der übrigen Wassermasse schweben, er wird nicht steigen und nicht sinken. Denken wir uns nun den Wasserkörper durch einen anderen ersetzt, der bei gleichem Volumen gleiches Gewicht mit dem Wasserkörper hat, so wird auch dieser schweben, sein ganzes Gewicht wird also durch das Wasser, in welchem er eingetaucht ist, getragen, und somit ist klar, dass allgemein von dem Gewichte eines jeden in Wasser getauchten Körpers ein Theil durch das Wasser getragen wird, welcher dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist.

Fig. 371.

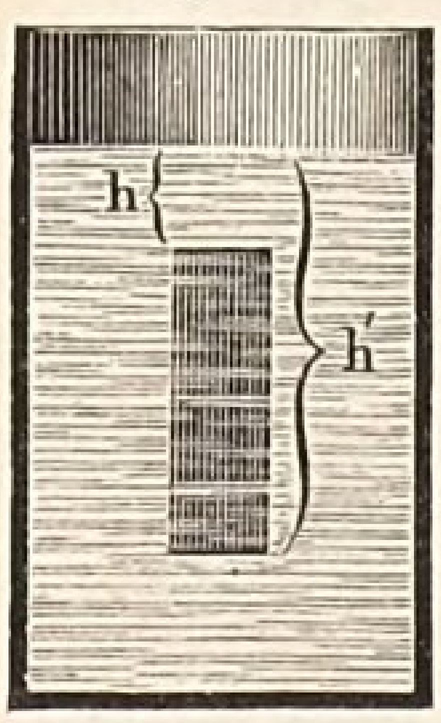
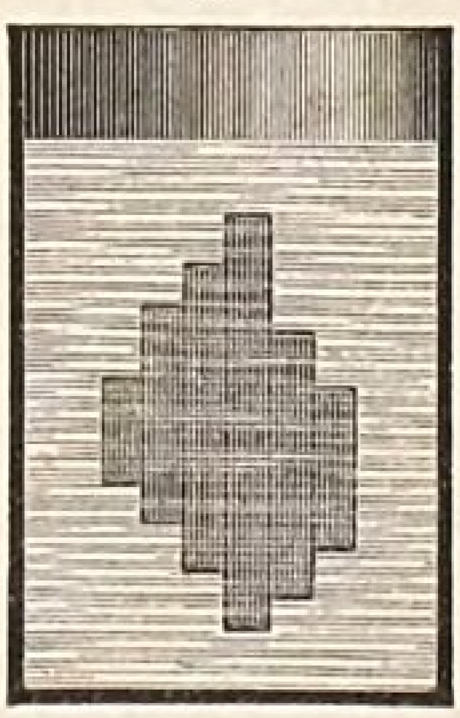


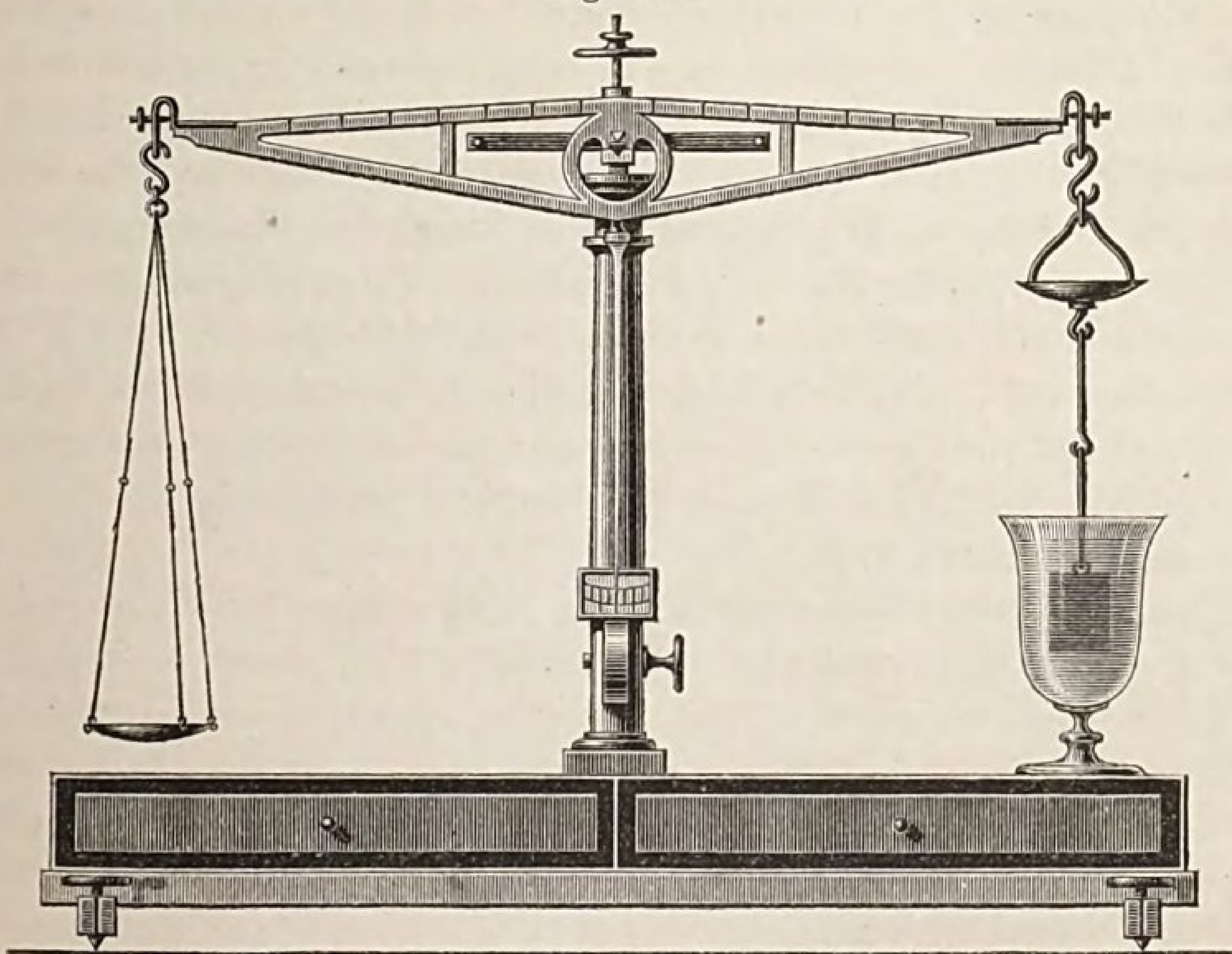
Fig. 372.



Von der Wahrheit des Archimedischen Princips kann man sich auch durch den Versuch überzeugen. An der einen Schale einer Wage, Fig. 373, ist ein hohler Cylinder *c* angehängt, an welchem wieder ein massiver Cylinder *p* hängt, der ganz genau in die Höhlung des oberen hineinpasst, wie man dies Fig. 374 sieht, in welcher der Cylinder *p* theilweise in *c* steckend in grösserem Maassstabe dargestellt ist. Auf die

andere Wagschale legt man so viele Gewichte, dass das Gleichgewicht hergestellt ist. Taucht man nun aber den Cylinder *p* in Wasser, so ver-

Fig. 373.



liert er dadurch scheinbar einen Theil seines Gewichtes, das Gleichgewicht ist also gestört; um es wieder herzustellen, braucht man nur den Cylin-

Fig. 374.

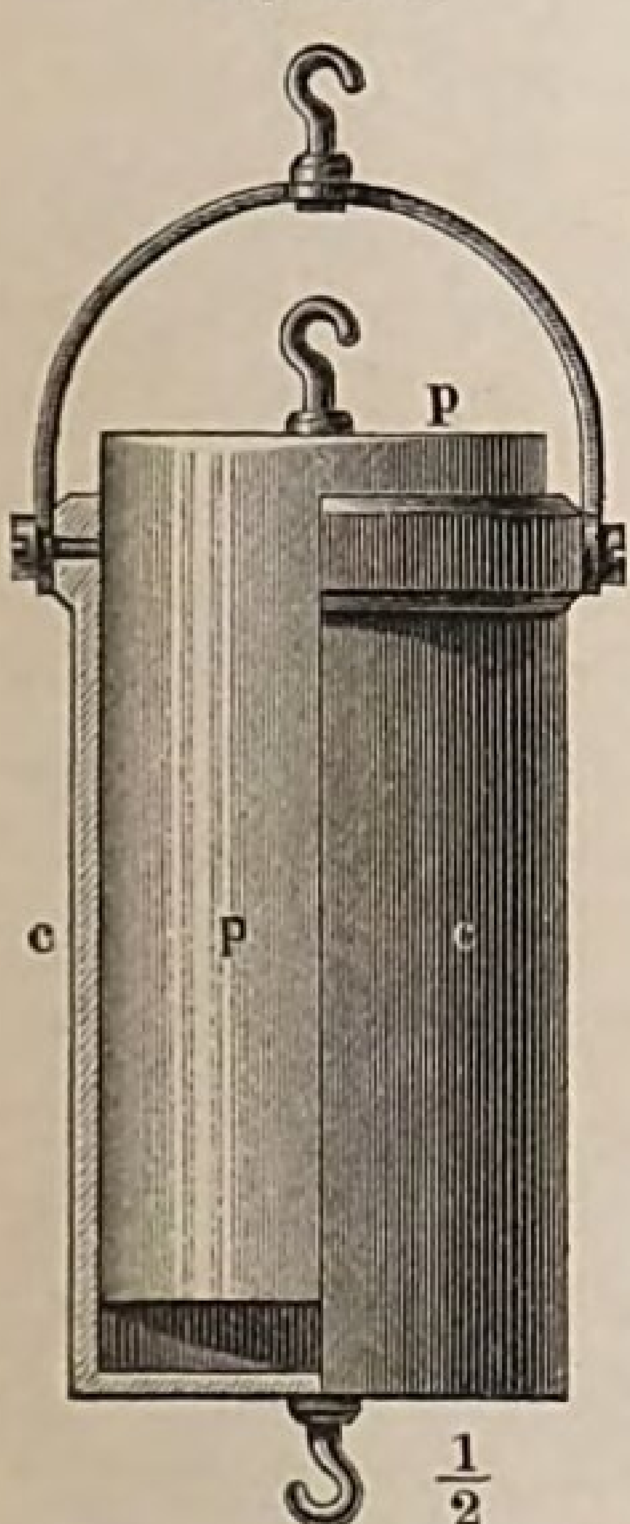
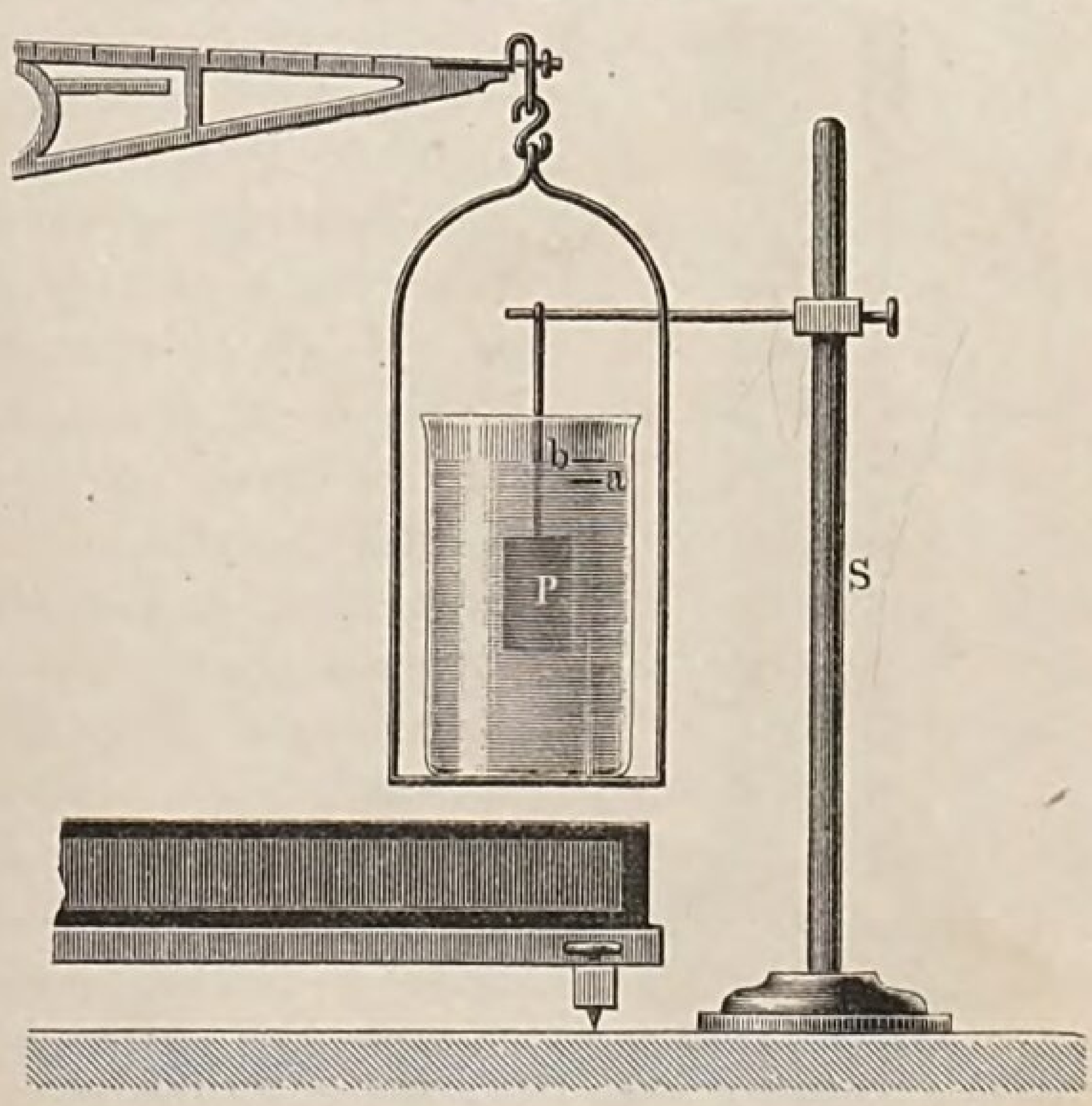


Fig. 375.



der *c* voll Wasser zu giessen, was offenbar zeigt, dass *p* durch das Eintauchen in Wasser gerade so viel an Gewicht scheinbar verloren hat, als

das Wasser wiegt, welches den Cylinder c ausfüllt. Das Volumen des in c befindlichen Wassers ist aber dem Volumen des Wassers gleich, welches der Cylinder p aus der Stelle treibt; mithin ist der scheinbare Gewichtsverlust von p gleich dem Gewichte des aus der Stelle vertriebenen Wassers.

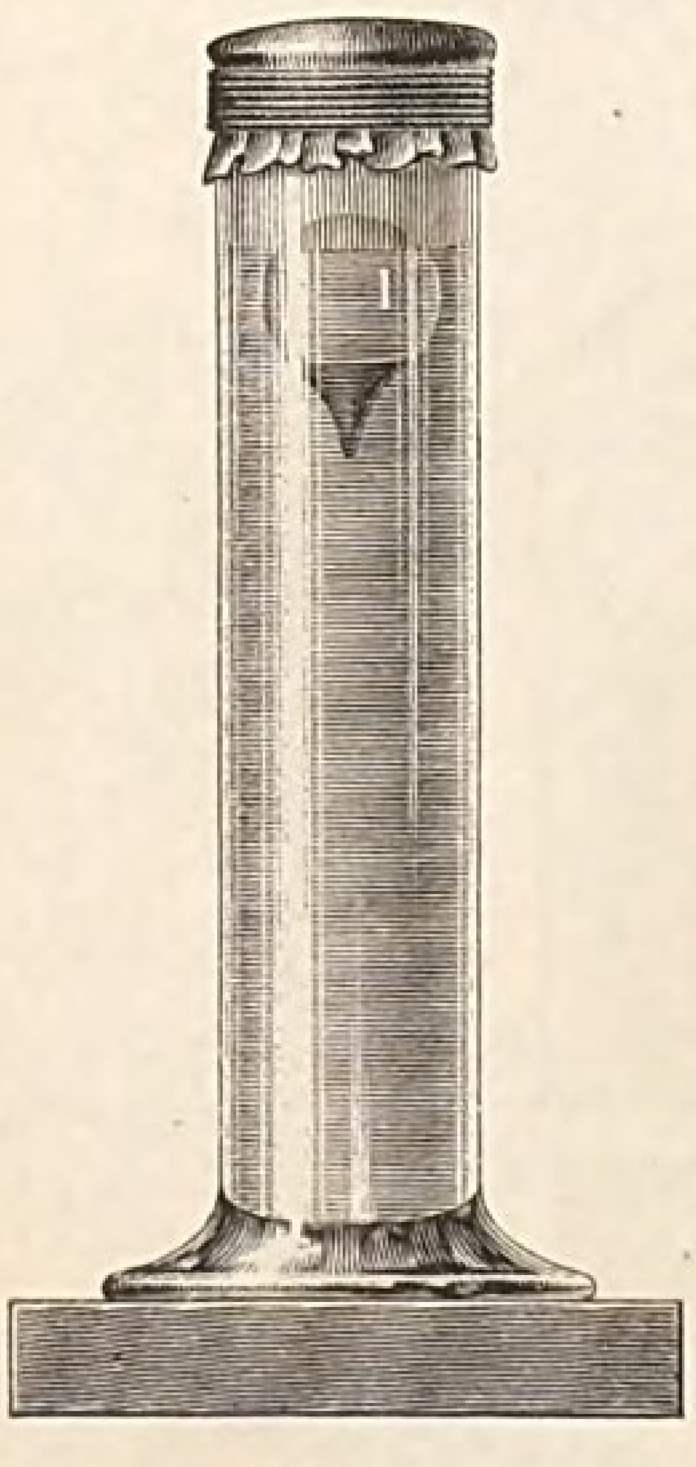
Eine lehrreiche Modification des beschriebenen Experiments ist folgende. Auf die rechtsseitige Schale der Wage wird ein Gefäss mit Wasser gesetzt, Fig. 375 (a. v. S.), und dieses durch Gewichte auf der anderen Schale ins Gleichgewicht gebracht. Der Stand des Wasserspiegels wird durch eine angeklebte Marke a bezeichnet. Hierauf wird ein an dem horizontalen Arm eines festen Statives S aufgehängter Körper P in das Wasser eingesenkt. Die Schale sinkt und es ist eine Anzahl von Gewichtsstücken auf der anderen Schale zuzulegen, damit das Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Der Wasserspiegel reicht jetzt bis b, wo eine zweite Marke angebracht wird.

Nimmt man nun den eingehängten Körper wieder fort, so steigt die Schale wieder und kommt erst ins Gleichgewicht, wenn so viel Wasser zugegossen wird, bis dessen Spiegel wieder an die Marke b reicht.

Wie man sieht, unterscheidet sich das Experiment vom vorigen wesentlich nur dadurch, dass diesmal der eingetauchte Körper unbeweglich, dagegen die Flüssigkeit sammt dem Gefässe beweglich ist, während es früher umgekehrt war.

Bezeichnen wir mit G das Gewicht eines Körpers, mit W den scheinbaren Gewichtsverlust, welchen er durch Untertauchen unter Wasser erleidet, so ist die Kraft K, welche ihn im Wasser noch niedertreibt:

Fig. 376.



$$K = G - W.$$

Ist $G > W$, d. h. ist der Körper schwerer als die verdrängte Wassermasse, so hat K einen positiven Werth, der Körper wird, sich selbst überlassen, untersinken.

Ist $G < W$, d. h. ist der Körper leichter als die durch ihn verdrängte Wassermasse, so wird K negativ, der Körper sinkt nicht mehr unter, sondern er steigt in Folge des überwiegenden Auftriebs in die Höhe, bis ein Theil desselben über die Oberfläche des Wassers hervorragt, bis er schwimmt.

Das (wirkliche) Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht der durch den untergetauchten Theil verdrängten Flüssigkeit.

Wenn $G = W$, so ist $K = 0$; ein Körper, dessen Gewicht genau das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist, wird, in Wasser untergetaucht, weder sinken noch steigen, er wird schweben.

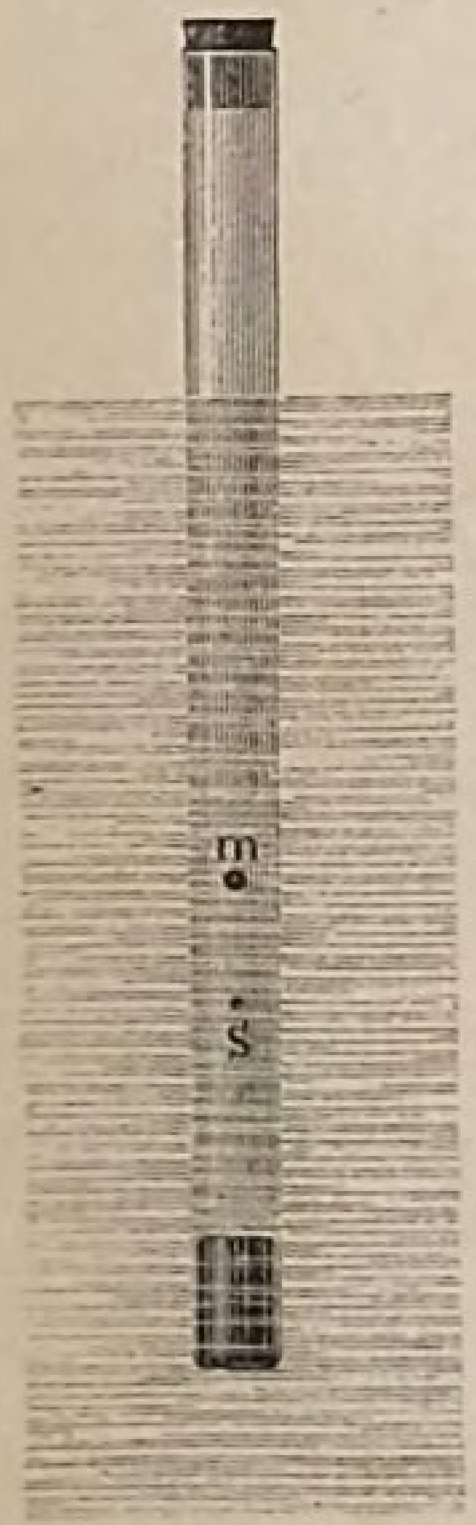
Einen in Wasser schwebenden Körper könnte man etwa dadurch herstellen, dass man in eine Kugel von weissem Wachs einige Schrotkörner von passender Grösse einknetet. Ein so hergestellter, in Wasser schwebender Körper wird in Weingeist untersinken, in Salzwasser aber schwimmen.

Ein solches Schweben lässt sich leicht mit Hülfe eines Apparates, Fig. 376, hervorbringen; die hohle Glaskugel *l* ist zum Theil mit Luft, zum Theil mit Wasser gefüllt und hat unten eine kleine Oeffnung; sie schwimmt auf dem Wasser eines Glascylinders, welcher oben mit einer Blase oder mit Kautschuk verschlossen ist. Drückt man auf die Blase, so wird etwas mehr Wasser in die Kugel *l* hineingepresst, sie wird schwerer und sinkt nieder; wenn der Druck nachlässt, dehnt sich die Luft in der Kugel *l* wieder aus und treibt etwas Wasser aus, die Kugel wird leichter und steigt; es ist nun leicht, den Druck so zu reguliren, dass die Kugel gerade im Wasser schwebt, ohne zu sinken oder zu steigen (Cartesianische Taucher).

**Bedingungen des Gleichgewichts schwimmender Kör- 94
per.** Im vorigen Paragraphen haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter welchen ein fester Körper in einer Flüssigkeit untersinkt, schwimmt oder schwebt. Damit aber der Körper mit Stabilität schwimme oder schwebe, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

Auf einen schwebenden oder schwimmenden Körper wirken zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung: sein Gewicht, im Schwerpunkt des Körpers angreifend, zieht ihn nach unten; der Auftrieb, im Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, oder richtiger gesagt, in dem Punkte angreifend, welcher der Schwerpunkt des untergetauchten Körpertheils sein würde, wenn dieses untergetauchte Stück eine vollkommen gleichartige Masse wäre, treibt den Körper nach oben. Den Angriffspunkt des Auftriebs bezeichnet man auch mit dem Namen Mittelpunkt des Wasserdrucks.

Fig. 377.



Der schwebende Körper hat entweder seinen Schwerpunkt dort, wo der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt; dann befindet er sich im indifferenten Gleichgewicht. Dies ist bei allen homogenen Körpern der Fall. Oder der Schwerpunkt des Körpers fällt nicht mit dem der verdrängten Flüssigkeit zusammen; dann besteht ein Gleichgewicht nur dann, wenn beide Schwerpunkte in einer Verticalen liegen und zwar labiles Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt des Körpers über, stabiles Gleichgewicht, wenn er unterhalb des Schwerpunktes der Flüssigkeit liegt.

Ein schwimmender Körper ist ebenfalls dann im Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt und der Angriffspunkt des Auftriebs in einer und derselben Verticallinie liegen und dieses Gleichgewicht ist jedenfalls ein stabiles, wenn der Schwerpunkt des Körpers unter dem der verdrängten Flüssigkeit liegt, wie dies z. B. bei der in Fig. 377 (a. v. S.) dargestellten, unten zugeschmolzenen und daselbst beschwerten Glasröhre der Fall ist, bei welcher in *s* ihr Schwerpunkt, in *m* der Schwerpunkt des verdrängten Wassers ist. Bei homogenen schwimmenden Körpern ist diese Lage unmöglich, da ihr Schwerpunkt immer höher liegen muss,

Fig. 378.

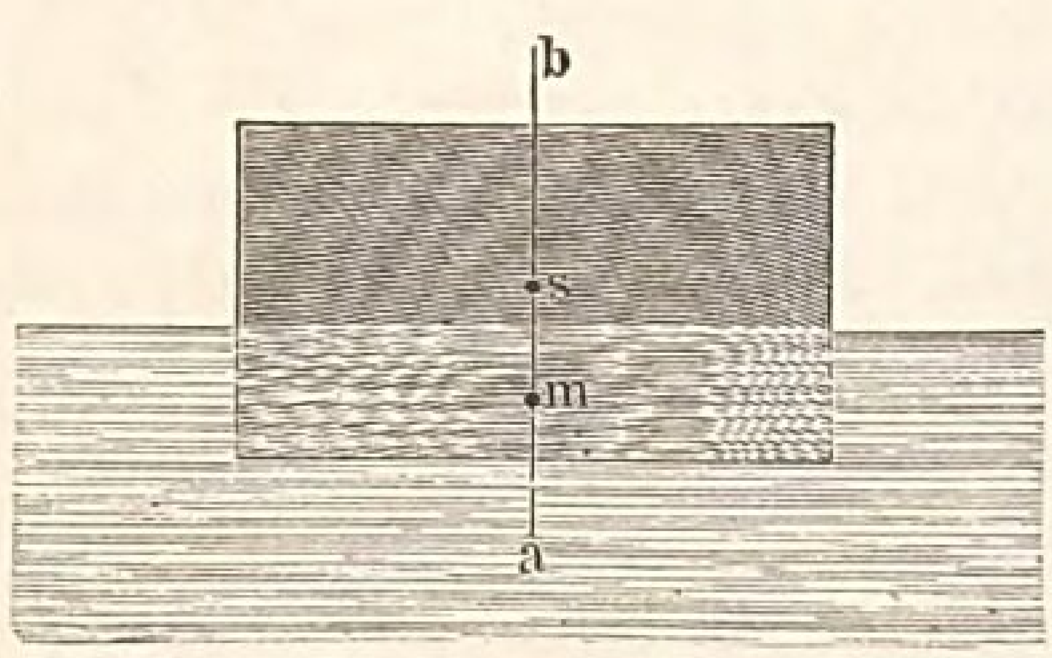
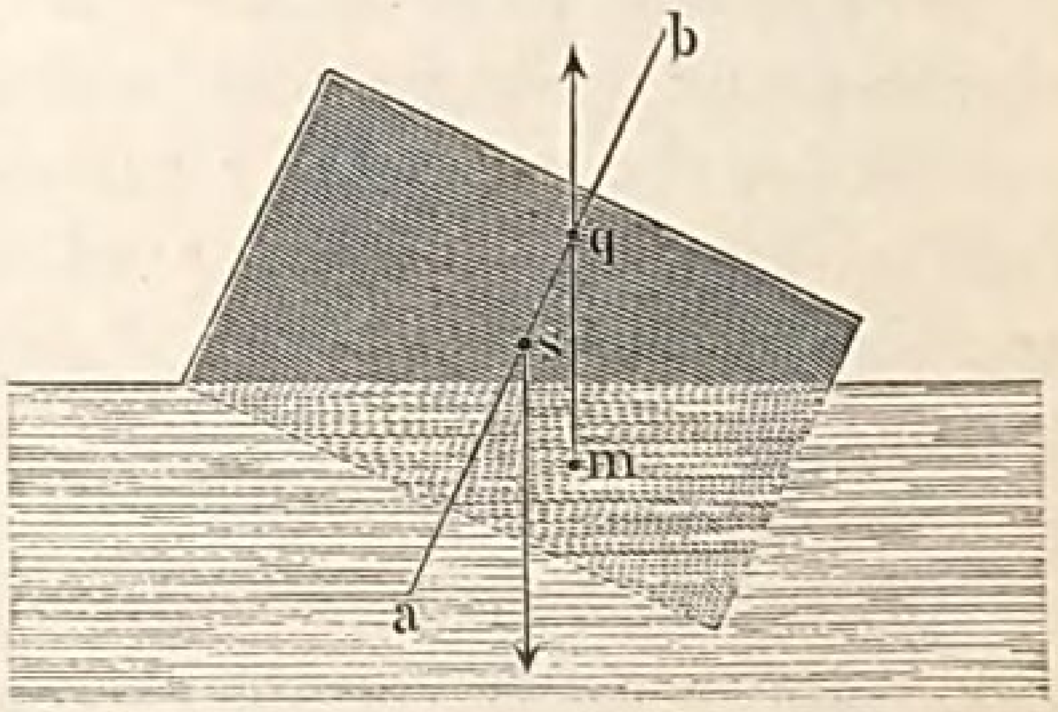


Fig. 379.

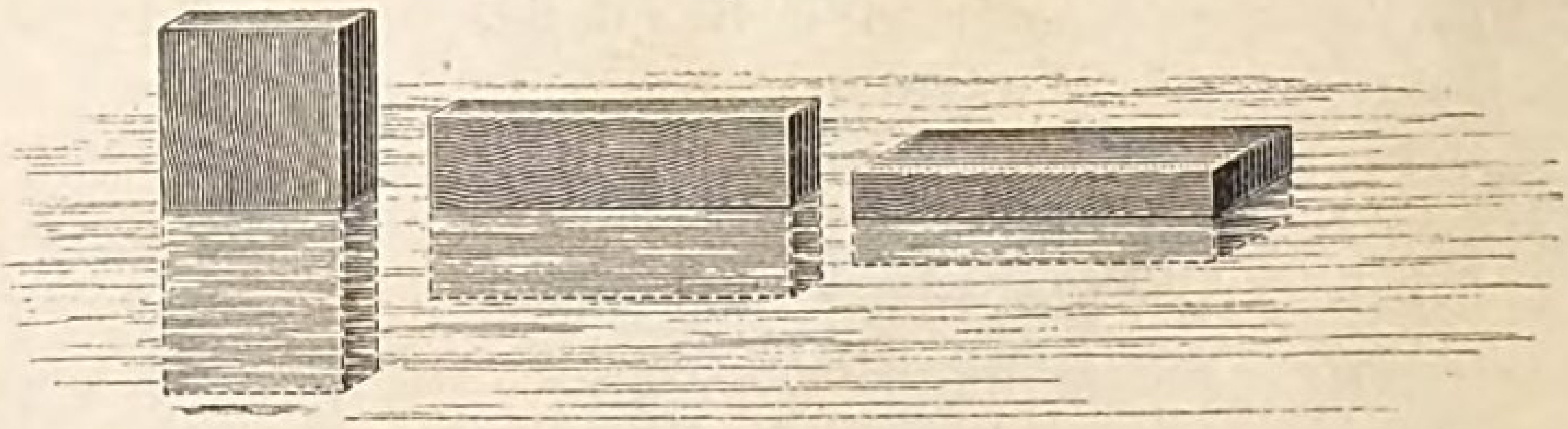


als der eingetauchte Theil allein, welch letzterer mit dem der verdrängten Flüssigkeit zusammenfällt. Dennoch können auch solche Körper stabil schwimmen.

Für ein stabiles Schwimmen ist es nämlich nicht unbedingt nöthig, dass der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt als der Angriffspunkt des Auftriebs, es genügt, dass der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers tiefer liegt als ein anderer Punkt, welcher den Namen des Metacentrums führt.

Die Lage des Metacentrums ist in folgender Weise bestimmt: Denken wir uns den Schwerpunkt *s* eines Körpers und den Punkt *m*,

Fig. 380.



welcher den Angriffspunkt des Auftriebs in dem Falle bildet, dass der Körper in seiner Gleichgewichtslage schwimmt, wie Fig. 378, durch eine gerade Linie verbunden, so können wir diese Linie *ab* als Mittellinie des Körpers bezeichnen. Wird der schwimmende Körper aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht, Fig. 379, so nimmt die Mittellinie *ab* eine schräge Stellung an, zugleich aber nimmt der Angriffspunkt des Auftriebs eine andere Stelle ein, er rückt in unserem Beispiel in den Punkt

m, Fig. 379. Ein durch den neuen Angriffspunkt des Auftriebs gelegtes Perpendikel schneidet nun die Mittellinie *ab* in einem Punkte *q*, und dieser Punkt *q* ist das Metacentrum.

Das Metacentrum *q*, Fig. 379, bildet den Drehpunkt, um welchen das in *s* angreifende Gewicht des schwimmenden Körpers denselben zu drehen strebt; und jedenfalls wird er in seine Gleichgewichtslage zurückgedreht, wenn *s* tiefer als *q* liegt. Ein Körper schwimmt also stabil, so lange sein Schwerpunkt unter dem Metacentrum liegt; er schwimmt nicht stabil, er muss umschlagen, wenn sein Schwerpunkt über dem Metacentrum liegt.

Fig. 380 zeigt ein schwimmendes Prisma in drei verschiedenen Stellungen. Die Dimensionen dieses Prismas sind nach irgend einer Einheit gemessen: 4, 2 und 1. Ist das specifische Gewicht dieses homogenen Prismas beispielsweise = 0,5, so sinkt es unter allen Umständen genau zur Hälfte seines Volumens ein, stabil schwimmt es aber erst, wenn es die dritte der abgebildeten Lagen eingenommen hat. Achten wir auf den Verticalabstand des Schwerpunkts des Prismas (welcher hier in allen drei Lagen ins Niveau der Flüssigkeit zu liegen kommt) vom Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, so werden wir finden, dass dieser Abstand der Reihe nach die Werthe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ annimmt. Die stabile Lage ist jene, für welche bei allen benachbarten Stellungen mit gleichem eintauchendem Volumen der Körperschwerpunkt am wenigsten hoch über dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt.

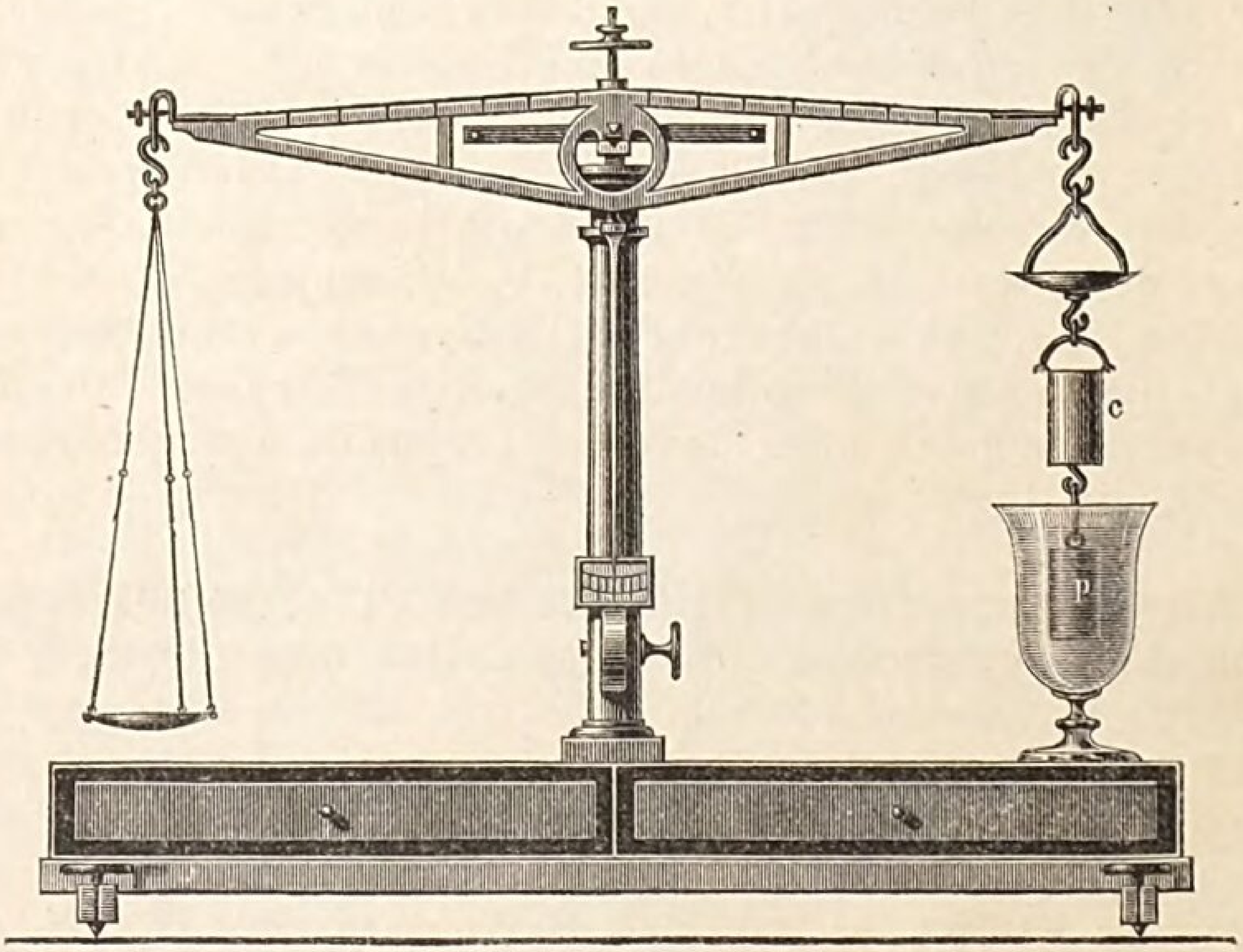
Anwendung des Archimedischen Princips zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester und flüssiger Körper. 95 Das Archimedische Princip liefert uns treffliche Mittel, das specifische Gewicht fester und flüssiger Körper zu bestimmen. Um das specifische Gewicht eines festen Körpers zu berechnen, muss man sein absolutes Gewicht und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser kennen. In den meisten Fällen aber lässt sich das Volumen eines Körpers durch Ausmessung seiner Dimensionen entweder nur höchst schwierig oder gar nicht ausmitteln. Nach dem Archimedischen Princip giebt uns ein einziger Versuch ohne Weiteres das Gewicht einer Wassermasse, welche mit dem zu bestimmenden Körper gleiches Volumen hat, wir haben nur seinen scheinbaren Gewichtsverlust beim Eintauchen in Wasser zu bestimmen.

Um diese Bestimmung mittelst einer Wage leicht ausführen zu können, wird an derselben eine kleine Veränderung angebracht, wodurch sie in eine sogenannte hydrostatische Wage umgewandelt wird, Fig. 381 (a. f. S.). Man hängt nämlich statt der einen Wagschale eine andere an, welche nicht so weit herabreicht und an welcher sich unten ein Häkchen befindet, an welches der zu bestimmende Körper mittelst eines möglichst feinen Drahtes angehängt werden kann. Ist dies gesche-

hen, so kann man durch Auflegen von Gewichten auf die andere Wagschale das absolute Gewicht g des Körpers bestimmen. Taucht man ihn nun in Wasser ein, so muss man auf der kurz herabhängenden Wagschale ein Gewicht a auflegen, um das Gleichgewicht der Wage wieder herzustellen, a ist also der Gewichtsverlust, welchen der Körper beim Eintauchen in das Wasser erleidet, folglich $\frac{g}{a}$ sein specifisches Gewicht.

Der Gewichtsverlust, welchen ein und derselbe Körper in verschiedenen Flüssigkeiten erleidet, ist dem specifischen Gewichte derselben proportional. Darauf gründet sich die Mohr'sche Wage, Fig. 382, mittelst deren sich das specifische Gewicht von Flüssigkeiten sehr schnell und genau bestimmen lässt. — An dem einen

Fig. 381.



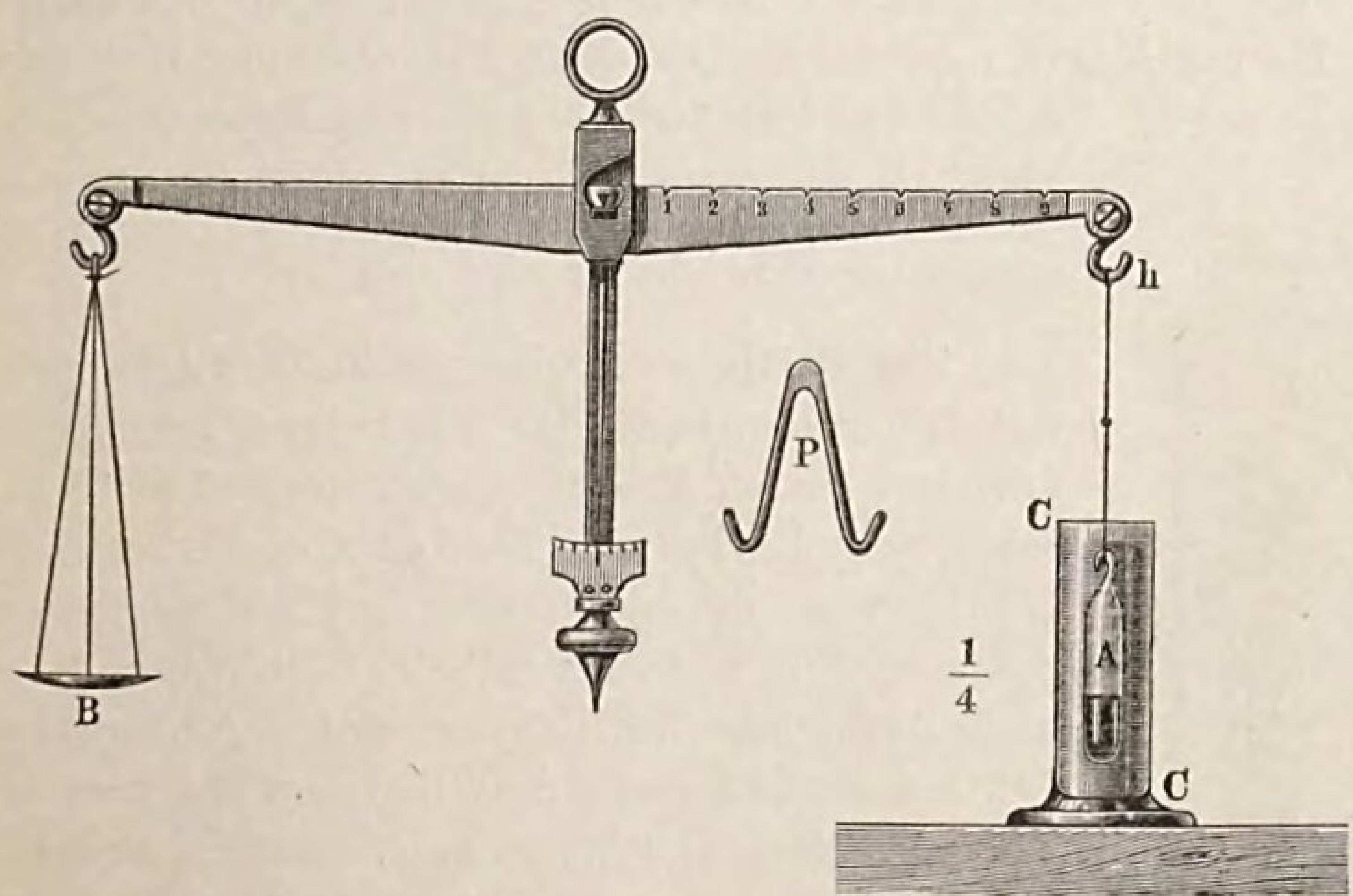
Arm der Wage hängt mittelst eines feinen Platindrahtes das Senkgläschen A, ein oben und unten geschlossenes, zum Theil mit Quecksilber gefülltes Glasröhrchen, welches durch die Wagschale B genau äquilibrirt ist. Der Arm der Wage, an welchem A hängt, ist in zehn gleiche Theile getheilt. Bei P, Fig. 382, ist die Form der zu dieser Wage gehörigen, aus Messingdraht verfertigten Gewichte dargestellt, nämlich zwei, die wir mit P bezeichnen wollen und deren jedes genau so viel wiegt, wie der Gewichtsverlust v des Senkgläschens A in Wasser beträgt, und zwei kleinere Häkchen p und p', welche $^1/_{10}\ v$ und $^1/_{100}\ v$ wiegen.

Soll nun das specifische Gewicht irgend einer Flüssigkeit ermittelt werden, so wird dieselbe in das Glasgefäss C eingegossen, in welches das

Senkgläschen A herabhängt, und dann die Gewichtshaken so angehängt, dass der Wagbalken bei ganz untergetauchtem Senkgläschen vollkommen horizontal steht.

Bei einem derartigen Versuche mit Aether musste man z. B. den grossen Haken P bei 7, den Haken p bei 2 und den Haken p' bei 4 anhängen; das Gewicht des Aethers, welcher durch das Senkgläschen verdrängt wird, beträgt also $0{,}7\,v + 0{,}02\,v + 0{,}004\,v$ oder $0{,}724\,v$; das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist v, also 0,724 das specifische Gewicht des Aethers.

Fig. 382.



Als englische Schwefelsäure in das Glas C eingegossen war, musste man zur Herstellung des Gleichgewichts anhängen: eines der Gewichte P bei h, eines bei 8, das Gewicht p bei 4, das Gewicht p' bei 7, das specifische Gewicht der Flüssigkeit war also gleich 1,847.

Eine recht bequeme Form wurde der Mohr'schen Wage von Georg Westphal in Celle gegeben.

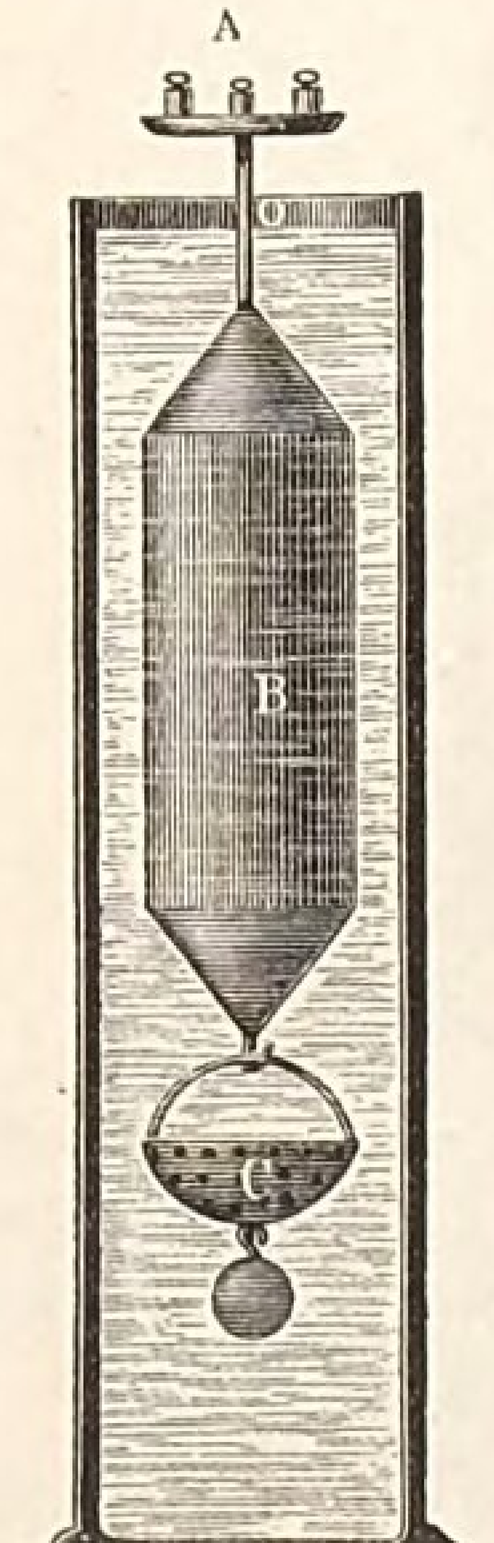
Gewichtsaräometer. Zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester Körper kann statt der Wage das Nicholson'sche Aräometer angewendet werden, welches in Fig. 383 (a. f. S.) abgebildet ist. 96

An einem hohlen Körper B von Messingblech ist unten ein Sieb C angehängt, oben aber ein feines Stäbchen angebracht, welches einen Teller trägt, auf den man kleinere Körper und Gewichte legen kann. In Wasser eingetaucht, schwimmt das Instrument, und zwar aufrecht, weil dafür gesorgt ist, dass sein Schwerpunkt möglichst tief liegt. Das Instrument ist so eingerichtet, dass der oberste Theil des Körpers B noch aus dem Wasser herausragt. Legt man nun den Körper, dessen specifisches Gewicht man bestimmen will, etwa einen Krystall, auf den Teller, so sinkt das Instrument weiter ein, und durch ferneres Auflegen

von Tarirgewichten kann man es leicht dahin bringen, dass es genau bis zu einem Punkte O eingesenkt ist, welchen man auf irgend eine Weise (gewöhnlich durch einen Feilstrich) auf dem Stäbchen markirt hat. Man nimmt nun den Krystall weg und legt statt dessen so viel Gewichte auf, bis das Instrument wieder genau bis O einsinkt. Auf diese Weise erhält man das absolute Gewicht des Körpers. Es betrage n Milligramme.

Nun werden die n Milligramme wieder weggenommen und der Krystall in das Sieb gelegt. Das Instrument würde nun wieder bis O einsinken, wenn der in das Sieb C gelegte Körper nicht durch das Eintauchen in Wasser an Gewicht verlöre. Man wird also auf den Teller noch Gewichte, m Milligramme, auflegen müssen, damit das Instrument wieder bis zur Marke eingetaucht ist. Man hat auf diese Weise das absolute Gewicht des Körpers n und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser m ermittelt; das gesuchte specifische Gewicht ist also $\frac{n}{m}$.

Fig. 383.



Zur Bestimmung des specifischen Gewichts kleiner Mineralien kann das Nicholson'sche Aräometer mit dem besten Erfolge durch die auf Seite 340 beschriebene Jolly'sche Federwage ersetzt werden. Man hat an derselben nur drei Ablesungen vorzunehmen. Die erste bei unbelasteter Wage, die zweite nach Auflegung des Körpers auf die obere und die dritte nach Auflegung desselben auf die untere unter Wasser befindliche Wagschale. Bezeichnen wir den zuerst abgelesenen Theilstrich mit a, den zweiten mit b, den zuletzt abgelesenen mit c, so ist $b - a$ dem absoluten Gewicht des Minerals, $b - c$ aber dem Gewichtsverlust desselben in Wasser proportional, das gesuchte specifische Gewicht ist also $\frac{b-a}{b-c}$.

Auch das specifische Gewicht von Flüssigkeiten kann man mit dem Nicholson'schen Aräometer bestimmen. Da das Instrument stets so weit einsinkt, dass das Gewicht desselben sammt den Gewichten auf dem Teller dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmasse gleich ist, so kann man mit Hülfe dieses Instruments ausmitteln, wie viel ein bestimmtes Volumen der Flüssigkeit wiegt. Dazu ist aber nöthig, dass man das Gewicht des Instruments selbst kennt; wir wollen es mit n bezeichnen. Wenn es, in Wasser eingetaucht, bis O einsinken soll, so muss noch Gewicht zugelegt werden. Bezeichnen wir dies Zulaggewicht mit a, so ist $n + a$ das Gewicht der verdrängten Wassermasse.

Taucht man nun das Instrument in eine andere Flüssigkeit, so wird man irgend ein anderes Gewicht b anstatt a auflegen müssen, um ein Einsinken bis O zu bewerkstelligen; b wird grösser sein als a, wenn die Flüssigkeit schwerer, kleiner als a, wenn sie leichter ist als Wasser. Das

Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist $n + b$, während $n + a$ das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist, das specifische Gewicht der fraglichen Flüssigkeit ist also $\frac{n + b}{n + a}$.

Dieses Aräometer ist um so empfindlicher, je dünner das Stäbchen im Vergleich zum Volumen des Körpers B ist.

Mit diesem Aräometer das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, ist immer etwas umständlich. Man könnte mit Hülfe der Wage nach dem oben angegebenen Verfahren eben so schnell und mit weit grösserer Genauigkeit zum Ziele kommen. In vielen Fällen des praktischen Lebens aber kommt es darauf an, schnell durch ein möglichst einfaches Verfahren das specifische Gewicht einer Flüssigkeit auszumitteln, um daraus auf die Qualität derselben zu schliessen. In solchen Fällen reicht es aber vollkommen hin, das specifische Gewicht bis auf zwei Decimalstellen genau zu finden; man erreicht dies am schnellsten durch die Scalenaräometer, die wir sogleich näher betrachten wollen.

Fig. 384.



Scalenaräometer. Mit Hülfe des Nicholson'- 97
schen Aräometers kann man das specifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung der absoluten Gewichte gleicher Volumina ableiten. Der Gebrauch der Scalenaräometer aber gründet sich darauf, dass bei gleichem Gewichte zweier Flüssigkeitsmassen ihre Volumina sich umgekehrt verhalten wie die specifischen Gewichte.

Es stellt Fig. 384 ein Scalenaräometer dar. In der Regel besteht dasselbe aus einer cylindrischen Glasröhre, welche unten erweitert ist, wie man in der Abbildung sieht. In der unteren Kugel befindet sich etwas Blei oder Quecksilber, wodurch nur bezweckt wird, dass das Instrument aufrecht schwimmt. Denken wir uns das Instrument in Wasser schwimmend, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewichte des Instruments gleich. Senken wir es nun in eine andere Flüssigkeit, so wird es tiefer oder weniger tief einsinken, je nachdem die Flüssigkeit leichter oder schwerer ist als Wasser.

Man begreift nun wohl, dass, wenn die Röhre zweckmässig getheilt ist, man aus einer einzigen Ablesung das specifische Gewicht einer Flüssigkeit ermitteln kann. Unter allen Scalen, welche man auf Aräometern angebracht hat, ist unstreitig die von Gay-Lussac angegebene die einfachste und zweckmässigste; wir wollen deshalb diese zuerst betrachten.

Denken wir uns an einem Aräometer denjenigen Punkt x der Röhre bezeichnet, bis zu welchem das Instrument in Wasser einsinkt, alsdann

auf der Röhre, von diesem Punkte ausgehend, eine Reihe von Theilstrichen so angebracht, dass das Volumen eines Röhrenstücks, welches zwischen je zwei solcher Theilstriche fällt, $^1/_{100}$ von dem in Wasser einsinkenden Volumen ist. Nehmen wir z. B. an, das Volumen desjenigen Theils des Aräometers, welcher im Wasser untergetaucht ist, betrüge gerade 10 ccm, so müsste das Volumen des Röhrenstücks, welches zwischen je zwei Theilstrichen fällt, 0,1 ccm betragen.

Der Wasserpunkt x wird mit 100 bezeichnet und die Theilung von unten nach oben gezählt. Die auf diese Weise getheilten Aräometer werden mit dem besonderen Namen Volumeter bezeichnet.

Gesetzt, das Aräometer sänke in irgend einer Flüssigkeit bis zum Theilstrich 80 der Volumeterscala ein, so weiss man dadurch, dass 80 Volumtheile dieser Flüssigkeit so viel wiegen wie 100 Volumtheile Wasser; das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit ist also $\frac{100}{80}$ oder 1,25.

Wäre das Volumeter in einer anderen Flüssigkeit bis zum Theilstrich 116 der Volumeterscala eingesunken, so fänden wir nach derselben Schlussweise, dass das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit $\frac{100}{116} = 0{,}862$ sei. Kurz, wenn das Volumeter in einer Flüssigkeit bis zu einem bestimmten Punkte y der Scala einsinkt, so findet man das specifische Gewicht s der Flüssigkeit, wenn man die Zahl des beobachteten Scalenpunktes in 100 dividirt, d. h. es ist $s = \frac{100}{y}$.

Die Genauigkeit eines solchen Instruments ist um so grösser, je grösser die Entfernung eines Theilstriches von dem andern, je dünner also die Röhre im Vergleich zu dem Volumen des ganzen Instruments ist. Damit jedoch die Röhre nicht gar zu lang wird, macht man kein Volumeter, welches für alle Flüssigkeiten anwendbar ist, sondern solche, welche entweder nur für leichtere oder nur für schwerere Flüssigkeiten gebraucht werden können. Bei den ersteren findet sich der mit 100 bezeichnete Wasserpunkt nahe am unteren, bei den letzteren aber nahe am oberen Ende der Röhre.

Bevor man die Theilung aufträgt, hat man erst durch Vermehrung oder Verminderung der Quecksilbermasse in der Kugel das Instrument so zu reguliren, dass es in Wasser bis zu einem entweder nahe am unteren oder oberen Ende der Röhre gelegenen Punkte einsinkt. Ist dies geschehen, so hat man einen zweiten Punkt der Scala zu bestimmen, und dies geschieht auf folgende Art:

Das Instrument sei für schwere Flüssigkeiten bestimmt, also der Wasserpunkt am oberen Ende der Röhre. Man verschafft sich eine Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht genau 1,25 ist; eine solche Flüssigkeit lässt sich leicht durch Mischen von Wasser und Schwefelsäure er-

halten und ihr specifisches Gewicht mit Hülfe der Wage prüfen. In diese Flüssigkeit taucht man nun das Instrument und merkt sich den Punkt, bis zu welchem es einsinkt. Das specifische Gewicht 1,25 entspricht aber dem Theilstrich 80 der Volumeterscala; dieser zuletzt markirte Punkt ist also mit 80 zu bezeichnen, der Zwischenraum zwischen ihm und dem Wasserpunkt in 20 gleiche Theile zu theilen und diese Theilung auch noch unterhalb des Punktes 80 fortzusetzen.

Ist das Volumeter für leichtere Flüssigkeiten bestimmt, also der Punkt 100 am unteren Ende der Röhre, so findet man einen zweiten Punkt der Scala, indem man das Instrument in eine Mischung von Wasser und Weingeist taucht, deren specifisches Gewicht genau 0,8 ist. Das specifische Gewicht 0,8 entspricht dem Theilstrich 125, man hat also den Raum zwischen diesem Theilstrich und dem Wasserpunkt in 25 gleiche Theile zu theilen.

In der Regel ist die Theilung auf einem Papierstreifen gemacht und in dem Innern der Röhre befestigt.

Eine zweite rationelle Theilungsart der Aräometerscala, welche ebenfalls von Gay-Lussac angegeben, früher aber schon von Brisson und G. G. Schmidt ausgeführt wurde, ist diejenige, welche unmittelbar die specifischen Gewichte angiebt. Aräometer, welche mit einer solchen Scala versehen sind, werden Densimeter genannt.

Die folgende Tabelle giebt an, welche Volumetergrade den daneben stehenden specifischen Gewichten entsprechen.

Specif. Gewicht.	Entsprechende Volumetergrade.	Specif. Gewicht.	Entsprechende Volumetergrade.
2,0	50,00	1,1	90,90
1,9	52,63	1,0	100
1,8	55,55	0,95	105,26
1,7	58,82	0,90	111,11
1,6	62,50	0,85	117,64
1,5	66,66	0,80	125,00
1,4	71,43	0,75	133,33
1,3	76,92	0,70	142,85
1,2	83,33		

Fig. 385 (a. f. S.) stellt die Volumeterscala für schwere Flüssigkeiten, also von den Theilstrichen 50 bis 100, die Fig. 386 (a. f. S.) stellt eine solche für leichtere Flüssigkeiten, also von 100 bis 150 dar. In Fig. 385 findet man aber neben der Volumeterscala noch die Punkte markirt, welche den specifischen Gewichten 2,0 — 1,9 — 1,8 etc. bis 1, und in

Fig. 386 diejenigen, welche den specifischen Gewichten 1 — 0,9 — 0,8 und 0,7 entsprechen. In der letzteren Figur findet man ausserdem noch die Punkte für die specifischen Gewichte 0,95 — 0,85 und 0,75 markirt.

Fig. 385.

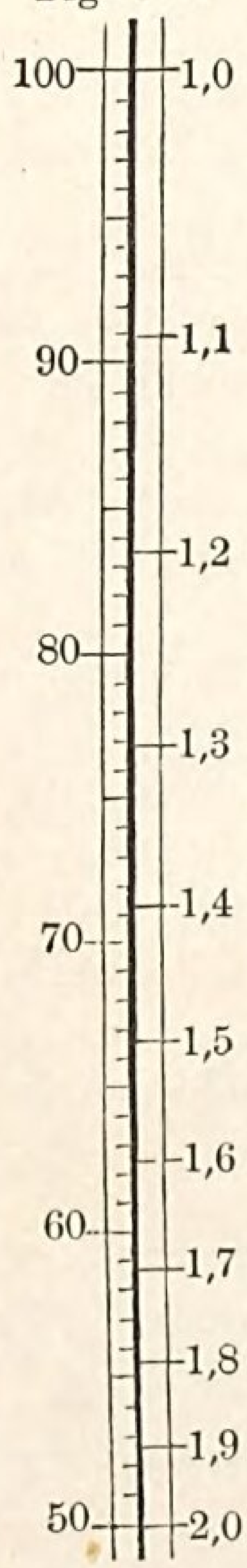
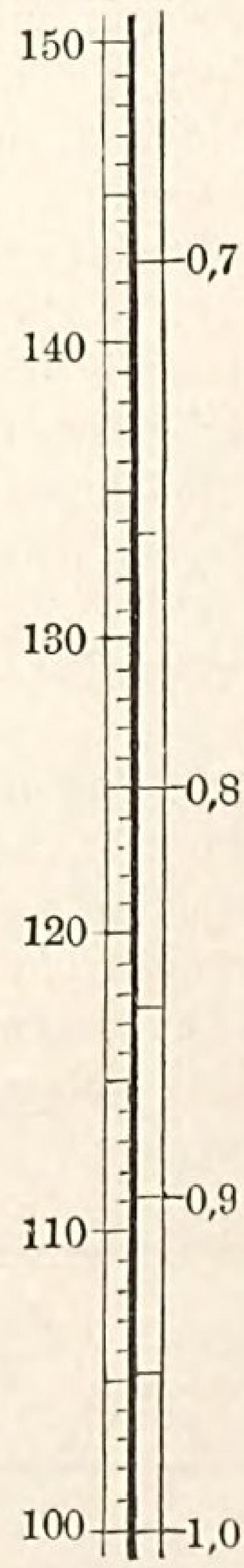


Fig. 386.



Theilt man den Abstand je zweier auf einander folgender Theilstriche auf der rechten Seite der Fig. 385 in 10 gleiche Theile, den Abstand je zweier auf einander folgender Theilstriche auf der rechten Seite der Fig. 386 aber in fünf gleiche Theile, so erhält man eine Densimeter-scala, für welche der Abstand je zweier auf einander folgender Theilstriche einer Differenz von $^1/_{100}$ im specifischen Gewicht entspricht, man kann also mit so getheilten Aräometern das specifische Gewicht unmittelbar bis auf die zweite Decimalstelle ablesen. Die obige Tabelle sowohl, wie die beiden Figuren 385 und 386 zeigen, dass für gleiche Differenzen des specifischen Gewichts die Theilstriche am unteren Ende der Scala näher aneinanderrücken als am oberen.

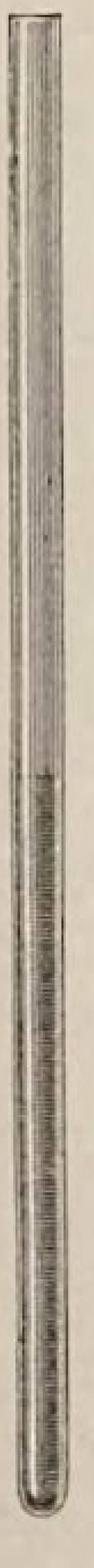
98 **Aräometer für besondere Flüssigkeiten.** Im praktischen Leben ist es nicht direct der Zweck, das specifische Gewicht einer Flüssigkeit zu erfahren, sondern man will den Concentrationsgrad einer Salzlösung, die Mischungsverhältnisse einer Flüssigkeit kennen lernen. Diese stehen nun freilich mit dem specifischen Gewicht in genauer Beziehung, so dass, wenn man mit Hülfe des Aräometers das specifische Gewicht einer Flüssigkeit ausgemittelt hat, man daraus auch auf die Natur der Flüssigkeit schliessen kann. Man hat jedoch für solche Flüssigkeiten, welche in der Praxis häufig vorkommen, besondere Aräometer construirt, welche unmittelbar die Mischungsverhältnisse angeben; wir wollen hier nur eines der wichtigsten, nämlich das Alkoholometer, näher betrachten.

Das Alkoholometer dient zur Bestimmung des Alkoholgehalts einer Mischung von Wasser und Alkohol (Weingeist).

Das specifische Gewicht des reinen Alkohols ist 0,794, wenn man das

des Wassers als Einheit annimmt; eine Mischung von Wasser und absolutem Alkohol wird also ein specifisches Gewicht haben, welches zwischen 1 und 0,794 fällt und sich mehr der einen oder der anderen Grenze nähert, je nachdem die Mischung mehr Wasser oder mehr Alkohol enthält. Das specifische Gewicht der Mischung weicht jedoch von dem arithmetischen Mittel ab, welches man aus den Mischungsverhältnissen berechnet.

Fig. 387.



Der Grund dieser Abweichung liegt darin, dass, wenn man Wasser und Alkohol mischt, eine Contraction stattfindet, die wir erst durch einen Versuch anschaulich machen wollen.

Man giesse eine Glasröhre, Fig. 387, welche ungefähr eine Länge von 80 cm hat, halb voll Wasser und fülle die andere Hälfte mit hochgradigem Weingeist (für Vorlesungen ist gefärbter Weingeist zu empfehlen), so werden sich die Flüssigkeiten nicht mischen; der Weingeist schwimmt auf dem Wasser. Nachdem das offene Ende durch einen Korkstöpsel fest verschlossen worden ist, so dass durchaus keine Flüssigkeit entweichen kann, kehrt man die Röhre um, und nun wird durch das Sinken des Wassers alsbald eine Mischung der Flüssigkeiten vor sich gehen. Hat die Mischung vollständig stattgefunden, so sieht man, dass die vorher ganz volle Röhre nicht mehr ganz angefüllt ist, es hat sich ein leerer Raum gebildet, der in der Röhre eine Länge von etwas über 1 cm einnimmt.

100	Maassthle.	Wasser +	0	Maassthle.	Alkohol	geben	100	Maassthle.
90	"	"	10	"	"	"	99,4	"
80	"	"	20	"	"	"	98,2	"
70	"	"	30	"	"	"	97,2	"
60	"	"	40	"	"	"	96,6	"
50	"	"	50	"	"	"	96,3	"
40	"	"	60	"	"	"	96,5	"
30	"	"	70	"	"	"	96,9	"
20	"	"	80	"	"	"	97,4	"
10	"	"	90	"	"	"	98,3	"
0	"	"	100	"	"	"	100	"

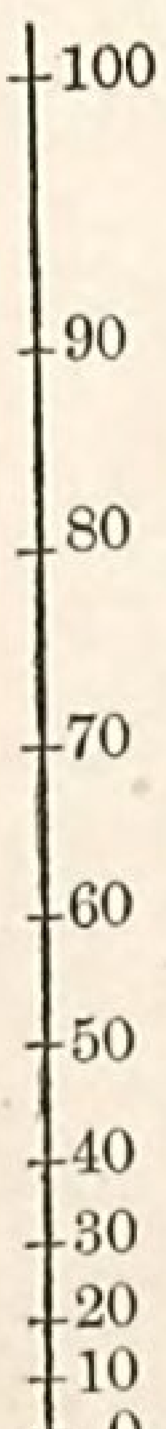
Aus diesen Angaben folgt, dass das specifische Gewicht einer Mischung von Wasser und Weingeist stets grösser sein muss als das berechnete arithmetische Mittel.

Aus der folgenden Tabelle ersieht man, wie viel Maasstheile Wasser man zu den in der ersten Columne angegebenen Maasstheilen Alkohol schütten muss, um 100 Maasstheile Mischung zu erhalten. Das specifische Gewicht der so erhaltenen Mischungen ist in der letzten Columne angegeben.

Maasstheile Alkohol.	Maasstheile Wasser.	Specif. Gew. der Mischung.
100	0,00	0,794
90	11,94	0,834
80	22,87	0,864
70	33,14	0,891
60	43,73	0,914
50	53,745	0,935
40	63,44	0,952
30	72,72	0,966
20	81,72	0,976
10	90,72	0,987
0	100	1,000

Wenn man nun an einer Aräometerröhre diejenigen Punkte markirt, welche den specifischen Gewichten 0,794, 0,834 . . . 0,976, 0,987 und 1 entsprechen, und sie mit den Zahlen 100, 90, 80 . . . 20, 10, 0 bezeichnet, wenn man ferner, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, den Raum zwischen je zweien dieser Punkte in 10 gleiche Theile theilt, so erhält man ein Procent-Aräometer für Weingeist, d. h. ein Aräometer, an welchem man unmittelbar ablesen kann, wie viel Volumprocente Alkohol in einer Mischung von Wasser und Weingeist sich befinden. Solche Alkoholometer wurden in Frankreich nach Gay-Lussac's, in Deutschland nach Tralles' Angaben ausgeführt und es ist gesetzlich bestimmt, dass der Alkoholgehalt des der Besteuerung unterworfenen Branntweins, Weingeistes etc. mit Hülfe dieses Instruments ermittelt werden soll. Beistehende Scala, Fig. 388, zeigt die Hauptabtheilungen eines solchen Alkoholometers in ihrem richtigen Verhältniss. Man sieht, wie sich erwarten liess, dass die Abtheilungen ungleiche Grösse haben. Die Scala des Alkoholometers von Tralles bezieht sich auf eine Temperatur von 15° C. Da sich nun das specifische Gewicht des Weingeistes mit der Temperatur bedeutend ändert, so bedürfen die Angaben des Alkoholometers einer Correction, wenn der zu untersuchende Weingeist eine andere Temperatur hat. (Ausführliches über Alkoholometrie im Handwörterbuch der Chemie von Liebig und Poggendorff.)

Fig. 388.

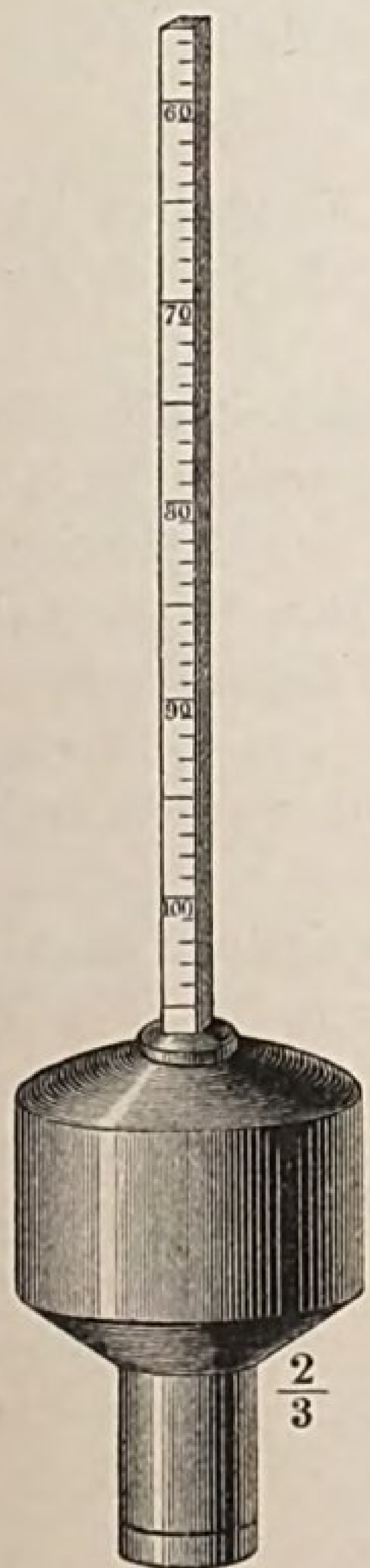


Das Volumeter oder Densimeter kann das Alkoholometer recht gut ersetzen, wenn man nur eine Tabelle zur Hand hat, in welcher der

Alkoholgehalt angegeben ist, welcher den verschiedenen specifischen Gewichten entspricht.

Begreiflicher Weise kann man das Alkoholometer einzig und allein zu dem angegebenen Zwecke verwenden, für jede andere Flüssigkeit ist es völlig unbrauchbar. Auf ähnliche Weise, wie das Alkoholometer, hat man auch Aräometer construirt, welche den Gehalt einer Säure, einer Salzlösung etc. angeben sollen. Weil jedoch ein solches Instrument nur für eine einzige specielle Flüssigkeit brauchbar ist, so wendet man besser ein- für allemal das Volumeter oder ein Densimeter an und sucht den Gehalt, welcher dem beobachteten specifischen Gewichte entspricht, in Tabellen, welche eigens zu diesem Zwecke berechnet worden sind.

Fig. 389.



So giebt z. B. die folgende Tabelle an, welches das specifische Gewicht einer Mischung

Procent von SO_4H_2.	Specif. Gew.	Gehalt an wasserfreier Säure.
100	1,843	81,63 Proc.
90	1,822	73,47 „
80	1,734	65,30 „
70	1,615	57,14 „
60	1,501	48,98 „
50	1,398	40,81 „
40	1,306	32,65 „
30	1,223	25,49 „
20	1,144	16,32 „
10	1,068	8,16 „
0	1,000	0,00 „

ist, welche die in der ersten Columne angegebene Anzahl von Volumprocenten Schwefelsäurehydrat (SO_4H_2) in 100 Theilen der Mischung enthält.

Hat man nun z. B. mit Hülfe des Volumeters oder des Densimeters gefunden, dass das specifische Gewicht eines Gemisches von Wasser und Schwefelsäure 1,223 ist, so ersehen wir aus obiger Tabelle (welche übrigens nur für eine Temperatur von 15° C. genau richtig ist), dass es 30 Proc. Schwefelsäurehydrat und 25,49 Proc. wasserfreie Schwefelsäure enthält.

In die Classe der Procentaräometer gehört auch die sogenannte Mostwage, welche dazu dient, den Zuckergehalt des Traubenmostes zu ermitteln. Das specifische Gewicht des Mostes nimmt mit seinem Gehalt an (Trauben-)Zucker zu. Der Punkt der Scala, bis zu welchem das

Instrument in einer Lösung einsinkt, welche 20 Proc. Traubenzucker (d. h. 20 g Zucker in 100 g Most) enthält, ist mit 100, der Punkt, welcher einer Lösung von 12 Proc. Zucker entspricht, ist mit 60 bezeichnet. Der Zwischenraum zwischen diesen beiden Punkten, von welchen der eine nahe am oberen, der andere nahe am unteren Ende der Scala liegt, ist in 40 Grade getheilt. Je 5^0 der Mostwage entsprechen also einem Zuckergehalt von 1 Proc. Ein Most, in welchem das Instrument bis zu 80^0 einsinkt, enthält also $\frac{80}{5} = 16$ Proc. Traubenzucker.

Die von Oechsle in Pforzheim construirten Mostwagen sind von Silberblech verfertigt und haben die Fig. 389 (a. v. S.) abgebildete Gestalt. Die Scala ist an einem hohlen quadratischen Silberstäbchen angebracht.

99 **Aräometer mit willkürlicher Scala.** Es bleiben jetzt nur noch die älteren Aräometerscalen zu erwähnen, welche jedoch durchaus keinen wissenschaftlichen Werth haben.

Baumé*) ermittelte an den für leichtere Flüssigkeiten bestimmten Aräometern ausser dem Wasserpunkte noch einen zweiten fixen Punkt dadurch, dass er das Instrument in eine Lösung von 1 Gewichtstheil Kochsalz in 9 Gewichtstheilen Wasser tauchte. Den Raum zwischen diesen beiden Punkten theilte er in 10 gleiche Theile, die er Grade nannte; die Theilung ist noch über den Wasserpunkt hinaus um 40^0 fortgesetzt. Der Wasserpunkt ist mit 10 bezeichnet, und die Grade werden nach oben gezählt.

Für schwere Flüssigkeiten wurde der zweite feste Punkt durch Eintauchen in eine Lösung von 15 Thln. Kochsalz in 85 Thln. Wasser bestimmt, der Zwischenraum zwischen diesem und dem mit Null bezeichneten Wasserpunkte in 15^0 getheilt und die Theilung nach unten fortgesetzt. Man sieht wohl, dass man durch ein solches Instrument direct weder das specifische Gewicht, noch den Gehalt einer Flüssigkeit erfährt.

Es wäre daher wohl zu wünschen, dass diese und die unten noch aufgeführten willkürlichen Aräometerscalen ausser Gebrauch gesetzt und an Stelle der Angabe in Graden immer die Angabe der specifischen Gewichte selbst treten möchte.

Cartier brachte an der Baumé'schen Scala eine unwesentliche Veränderung an, er machte nämlich die Grade etwas grösser, so dass 15 seiner Grade gleich 16 Baumé'schen sind. Wenn er dadurch auch nichts genützt hat, so hat er doch wenigstens seinen Namen verewigt, denn so werthlos seine Scala auch ist, so ist sie doch ungemein verbreitet.

Das Aräometer von Beck hat den Wasserpunkt zu seinem Nullpunkte, den nach oben gezählten 30. Grad beim specif. Gew. 0,85.

*) Eléments de Pharmacie 8. edition pag. 341 (1797). Die Angaben dieses Instruments wurden 1873 von Berthelot, Coulier und Almeida verificirt.

Die folgende Tabelle giebt an, welche specifischen Gewichte den in der ersten Columne angegebenen Gradzahlen der Baumé'schen, Cartier'schen und Beck'schen Scala entsprechen.

Aräometer für leichtere Flüssigkeiten.

Grade.	Baumé.	Cartier.	Beck.
0	—	—	1,000
10	1,000	—	0,944
20	0,933	0,934	0,895
30	0,875	0,871	0,850
40	0,824	0,815	0,809
50	0,778	—	0,773

Aräometer für schwerere Flüssigkeiten.

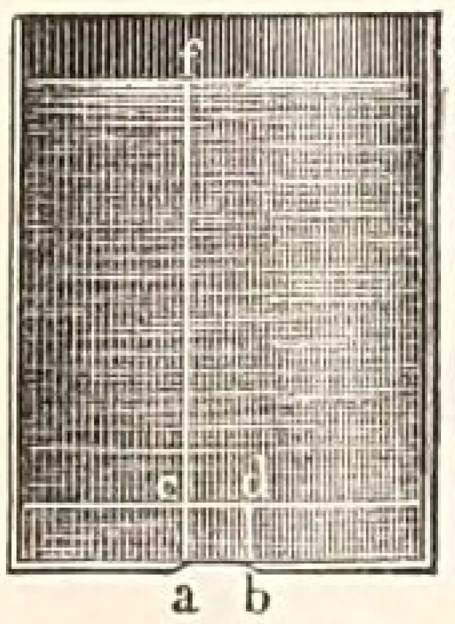
Grade.	Baumé.	Beck.
0	1,000	1,000
10	1,077	1,062
20	1,167	1,133
30	1,273	1,214
40	1,400	1,308
50	1,555	1,417
60	1,750	1,545
70	2,000	1,700

Toricelli's Theorem. Wenn man in die Seitenwand oder in 100
den Boden eines mit einer Flüssigkeit gefüllten, oben offenen Gefässes ein Loch macht, welches im Vergleich mit den Dimensionen des Gefässes klein ist, so strömt die Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit aus, welche um so grösser ist, je tiefer sich die Oeffnung unter dem Spiegel der Flüssigkeit befindet. Der Zusammenhang zwischen Ausflussgeschwindigkeit und Druckhöhe lässt sich am einfachsten auf folgende Weise ausdrücken: Die Ausflussgeschwindigkeit ist gerade so gross wie die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper erlangen würde, wenn er von dem Spiegel der Flüssigkeit bis zur Ausflussöffnung herabfiele.

Dieser Satz ist unter dem Namen des Toricelli'schen Theorems bekannt. Er lässt sich durch folgende Schlussweise ableiten.

Wenn die Flüssigkeitsschicht *abcd*, Fig. 390, welche sich unmittelbar über der Oeffnung *ab* befindet, frei herabfiele, ohne durch die über ihr lastende Flüssigkeit beschleunigt zu sein, so würde sie die Oeffnung mit derjenigen Geschwindigkeit verlassen, welche der Höhe *ac* entspricht, die wir mit h bezeichnen wollen. Diese Geschwindigkeit ist $v = \sqrt{2gh}$ (S. 81). Nun aber ist die ausströmende Schicht nicht bloss durch ihre eigene Schwere beschleunigt, sondern durch die Schwere der ganzen auf ihr lastenden Flüssigkeit. Die beschleunigende Kraft der Schwere g verhält sich demnach zur beschleunigenden Kraft g', welche die flüssigen Theilchen wirklich austreibt, wie *ac* zu *af* oder wie h zu s, wenn die Druckhöhe mit s bezeichnet wird, d. h.

Fig. 390.



$$h : s = g : g',$$

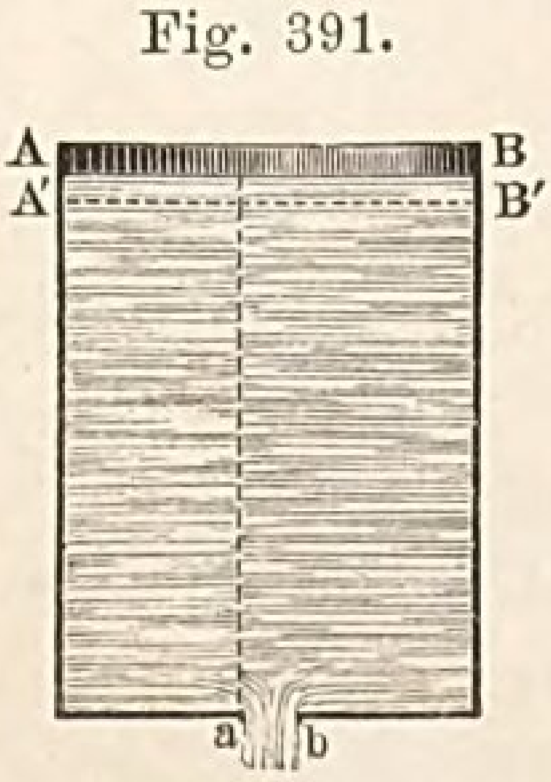
also ist die auf die ausfliessende flüssige Schicht wirkende beschleunigende Kraft $g' = \frac{g}{h}\, s$. Wenn aber die beschleunigende Kraft, welche auf die ausfliessende Schicht wirkt, nicht g, sondern g' ist, so ist auch die Ausflussgeschwindigkeit $v' = \sqrt{2g'h}$, und wenn wir in diesen Werth von v' den eben abgeleiteten Werth von g' setzen, so erhalten wir für die Ausflussgeschwindigkeit den Werth

$$v' = \sqrt{2gs} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Dies ist aber dieselbe Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er eine Höhe s durchfällt.

Wir wollen diesen Satz auch noch aus dem Gesetze der Erhaltung der Energie ableiten. Das Gefäss, Fig. 391, habe den Querschnitt Q, die Oeffnung am Boden den Querschnitt q, die Höhe der Flüssigkeit betrage H. Während des Ausfliessens müssen sich offenbar die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit verkehrt verhalten, wie ihre Querschnitte. Ist also die Geschwindigkeit durch die Oeffnung am Boden gleich v, so ist die Geschwindigkeit innerhalb des Gefässes $v' = v\,\frac{q}{Q}$. Ist nun ein kleiner Theil der Flüssigkeit von der Masse m, entsprechend der in dem Raume $A'B'BA$ enthaltenen, ausgeflossen, so ist es ebenso, als wäre die Masse m um die Höhe H gesunken, was einer Arbeit (Energie) von der Grösse mgH entspricht. Andererseits ist lebendige Kraft erzeugt worden, nämlich die des ausfliessenden Strahles und die der Bewegung der Flüssigkeit im Gefässe. Die letztere ist nun sehr klein, wenn v' sehr klein ist, also wenn die Oeffnung q sehr klein ist im Verhältniss zu Q.

Fig. 391.



In diesem Falle ist die lebendige Kraft des ausgeflossenen Theils

allein in Rechnung zu ziehen. Dieselbe beträgt $\frac{mv^2}{2}$. Soll keine Energie verloren gehen, so muss $mgH = \frac{mv^2}{2}$, also $v = \sqrt{2gH}$ sein.

Aus dem Toricelli'schen Theorem folgt unmittelbar:

1) Die Ausflussgeschwindigkeit hängt nur von der Tiefe der Oeffnung unter dem Niveau, aber nicht von der Natur der Flüssigkeit ab, da in Gleichung 1) der Werth des specifischen Gewichts der Flüssigkeit gar nicht vorkommt. Bei gleichen Druckhöhen muss also Wasser und Quecksilber gleich schnell ausfliessen. Jede Quecksilberschicht wird zwar durch einen Druck ausgetrieben, welcher 13,6 mal so gross ist als beim Wasser, dagegen ist aber auch die Masse eines Quecksilbervolumens, welches ausfliesst, 13,6 mal grösser als die eines gleich grossen Wasservolumens.

2) Die Ausflussgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen. Aus einer Oeffnung, welche 100 cm unter dem Wasserspiegel liegt, muss also die Flüssigkeit mit 10 mal grösserer Geschwindigkeit ausfliessen, als aus einer anderen, welche nur 1 cm unter dem Niveau liegt.

Ist die Oeffnung nicht sehr klein im Verhältniss zum Querschnitt des Gefässes, so gilt das Toricelli'sche Theorem nicht mehr.

**Apparate zu Versuchen über die Ausflussgeschwindig- 101
keit.** Um das Toricelli'sche Gesetz durch das Experiment zu prüfen, wendet man Gefässe an, deren Rauminhalt bedeutend ist im Vergleich zu der Grösse der Oeffnung. Die Oeffnungen selbst müssen in ganz dünne Metallblättchen gemacht sein, welche man in die Seitenwand oder in den Boden des Gefässes einsetzen kann; denn wenn die Oeffnungen sich in einer dicken Wand befänden, so würde die Ausflussgeschwindigkeit zu sehr durch die Reibung an den Wänden der Oeffnung vermindert werden.

Besonders zweckmässig zu Versuchen über den Ausfluss von Flüssigkeiten ist der Fig. 392 (a. f. S.) abgebildete, im Wesentlichen nach Weisbach construirte Apparat. Die drei Ausflussöffnungen 1, 4 und 9 dcm unter einem im oberen Theile des Gefässes angebrachten Merkzeichen, bis zu welchem es mit Wasser gefüllt wird. Der Verschluss der Ausflussöffnungen wird durch kleine mit vulcanisirtem Kautschuk besetzte Kolben bewerkstelligt, welche man nach Belieben auf die Oeffnung aufdrücken, wie es die mittlere Oeffnung darstellt, oder von derselben zurückziehen kann, wie man es bei der obersten Oeffnung sieht. Den Oeffnungen gegenüber sind Stopfbüchsen angebracht, durch welche die Stangen hindurchgehen, mittelst deren man jene Kolben vor- und rückwärts schieben kann.

Statt der in unserer Figur dargestellten Ausflussöffnungen, aus welchen der Wasserstrahl in horizontaler Richtung hervorspringt, kann

man auch kurze Röhren anschrauben, welche mit einer nach oben gerichteten Oeffnung versehen sind, so dass man auch Versuche mit dem aufsteigenden Wasserstrahl anstellen kann.

Wenn man Ausflussversuche bei unveränderter Druckhöhe anstellen will, so muss man dafür sorgen, dass oben stets so viel Wasser in das Reservoir zufliessen kann, als durch die Ausflussöffnung abfliesst.

Ein anderer Apparat, welcher zu Versuchen über die Ausflussgeschwindigkeit dienen kann, ist das in Fig. 393 abgebildete Mariotte'sche Gefäss (Mariotte'sche Flasche). An einer grossen Glasflasche mit verticalen Wänden ist unten seitlich ein Loch gemacht und auf dieses

Fig. 392.

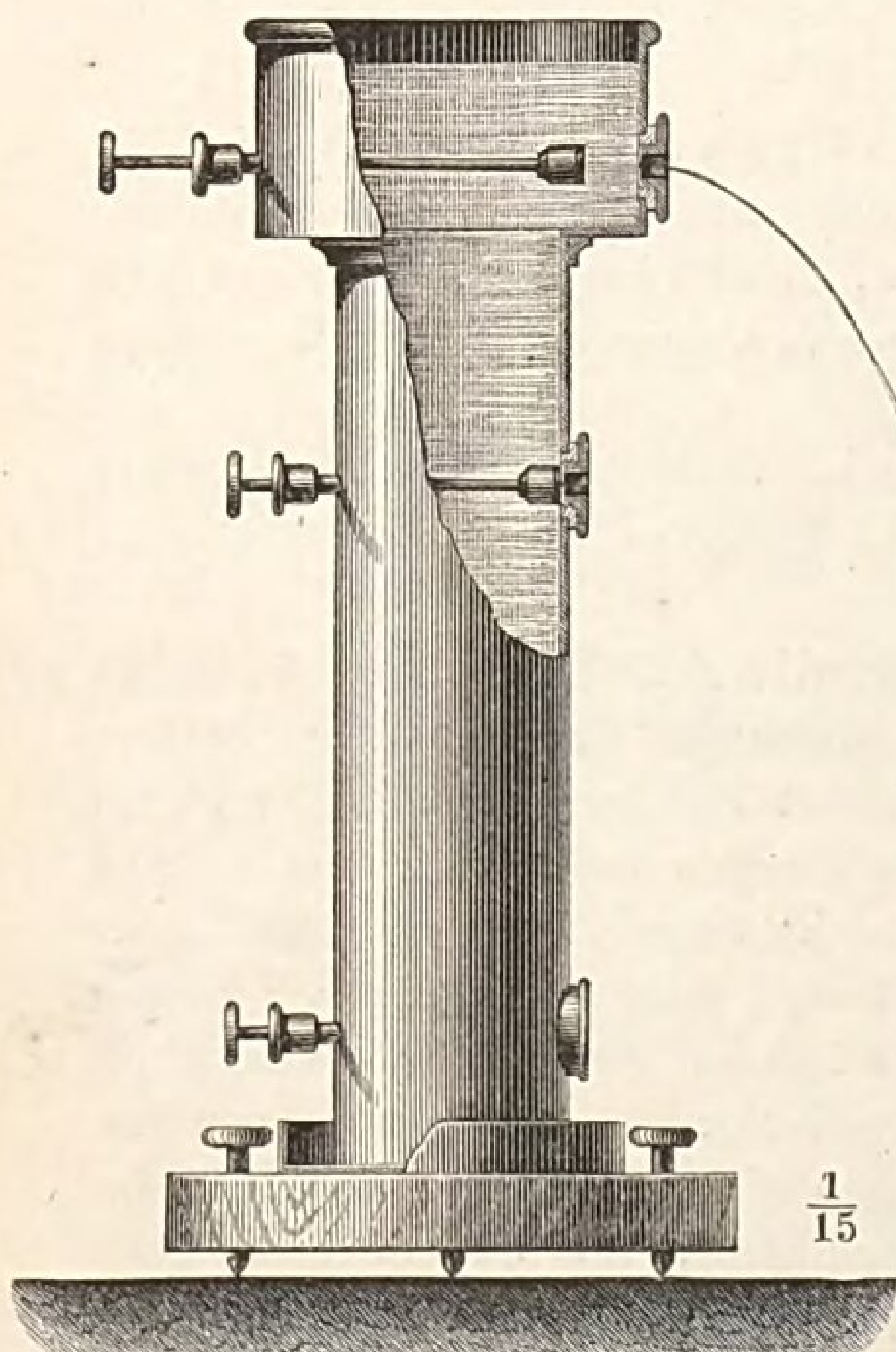
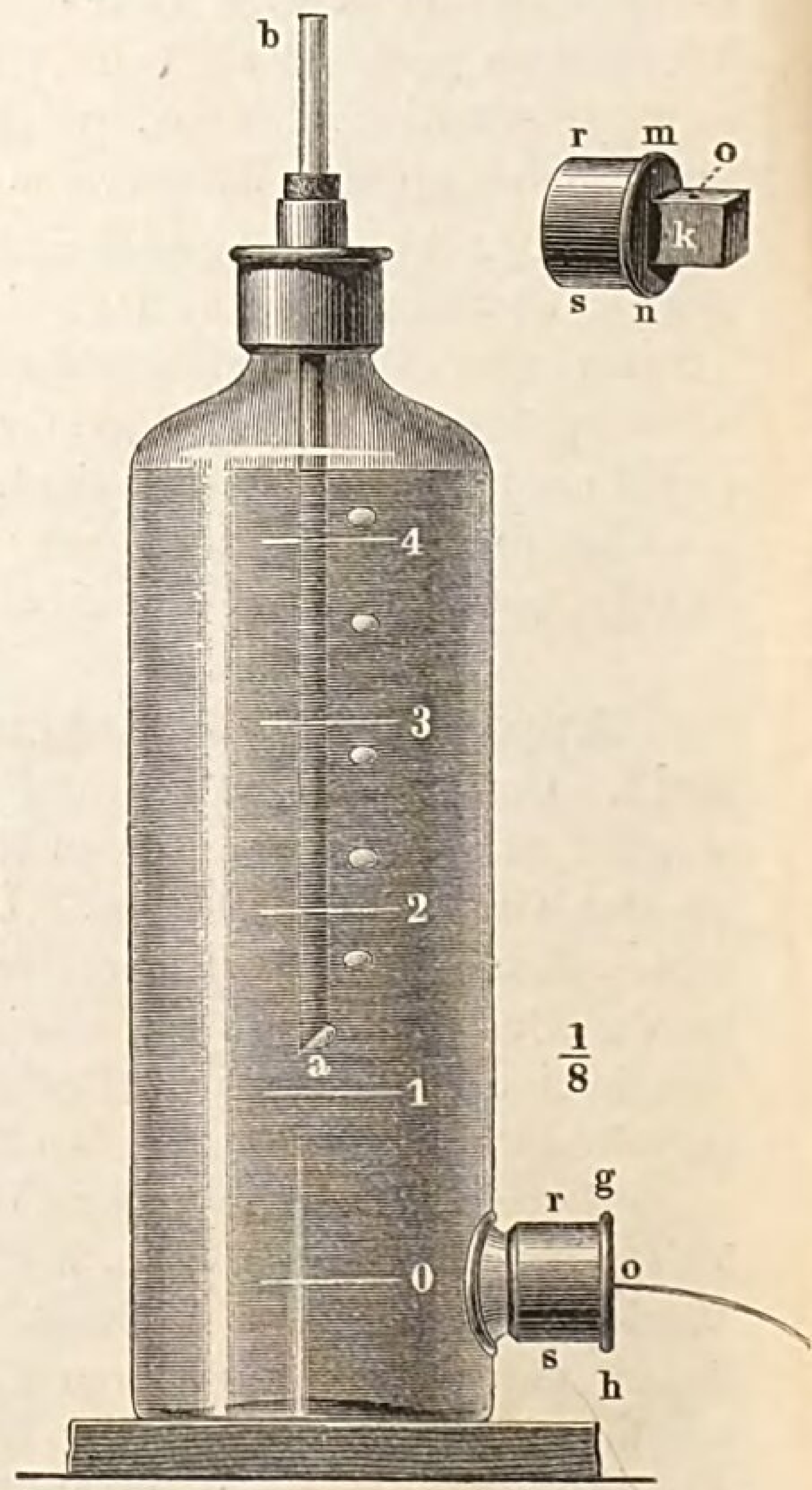


Fig. 393.



eine Messingfassung mit einer kurzen, weiten Messingröhre *r* aufgekittet. Die Röhre *r* dient zur Aufnahme der Ausflussöffnungen.

Damit der Ausfluss längere Zeit unter unverändertem Druck stattfinde, wird der Hals der Flasche mittelst eines Korkes verschlossen, durch welchen eine oben und unten offene Glasröhre hindurchgeht, deren untere Oeffnung *a* sich unter dem Wasserspiegel befindet. In dem Maasse nun, als unten Wasser ausfliesst, dringt die Luft durch die Glasröhre *ba* ein, indem fortwährend Luftblasen von *a* in den oberen Theil der Flasche

aufsteigen; auf diese Weise ist aber, wie im VI. Capitel gezeigt werden wird, die ganze Wassermasse von *a* aufwärts durch den Luftdruck äquilibrirt, so dass nur die Höhe der Flüssigkeitssäule von *a* bis zur Ausflussöffnung herunter die Ausflussgeschwindigkeit bedingt.

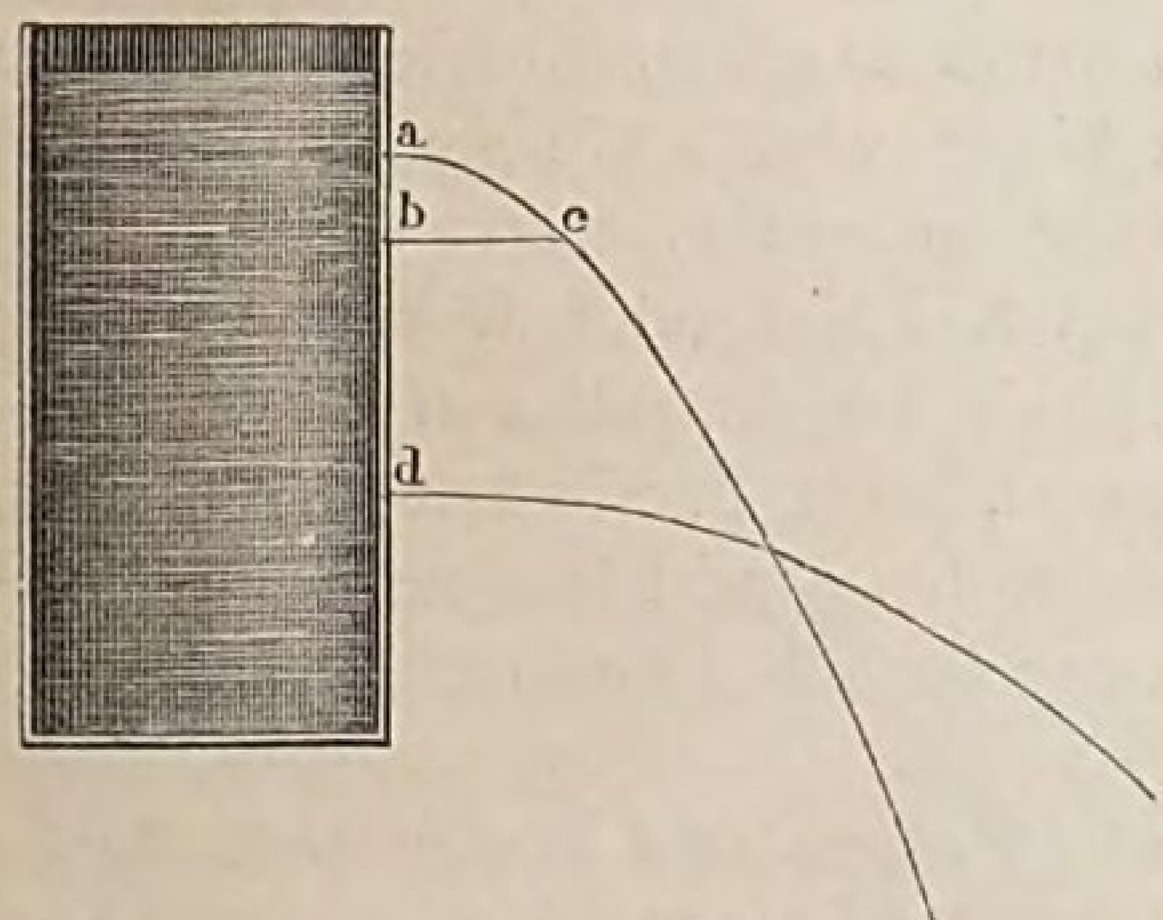
Es ist nun auf der Flasche eine Theilung angebracht, deren Nullpunkt in der Höhe der Ausflussöffnung liegt, während die folgenden Theilstriche 1, 2, 3 etc. Decimeter über demselben angebracht sind. Der Ausfluss wird nun mit einer Geschwindigkeit stattfinden, welche einer Druckhöhe von 1, 2, 3 oder 4 dcm entspricht, wenn man die Röhre so stellt, dass ihr unteres Ende sich in der Höhe des Theilstriches 1, 2, 3 oder 4 befindet.

Um einen Wasserstrahl vertical in die Höhe springen zu lassen, kann man ein gebogenes kurzes Glasröhrchen mittelst eines Korkes in *r* einsetzen, wie es die Figur zeigt, oder, wenn die Reibung im engen Rohr vermieden werden soll, ein weiteres gebogenes Metallrohr anschrauben, welches oben mit horizontaler dünner Platte endigt, in welcher die Oeffnung angebracht ist.

Versuche über Ausflussgeschwindigkeit. Um das oben im §. 100 entwickelte Gesetz durch den Versuch zu prüfen, scheint es am einfachsten, einen Wasserstrahl vertical in die Höhe steigen zu lassen; denn wenn man das Wasser aus der Oeffnung in dünner Wand vertical nach oben ausströmen lässt, so sollte man erwarten, dass der Wasserstrahl vollkommen die Druckhöhe erreichen würde; hat man also in dem Apparate Fig. 393 die Röhre *ab* so hoch in die Höhe gezogen, dass ihr unteres Ende sich in der Höhe des Theilstriches 4 befindet, so müsste der verticale Wasserstrahl bis zur Höhe dieses Theilstriches 4, also bis *d* steigen. 102

Der Versuch aber zeigt, dass der verticale Wasserstrahl die theoretische Höhe nicht erreicht, woran jedoch nur die Bewegungshindernisse Schuld sind; den wesentlichsten Einfluss übt aber das vom Gipfel wieder herabfallende Wasser aus, indem es das freie Aufsteigen des nachfolgenden Wassers hindert; deshalb steigt auch der Strahl augenblicklich höher, sobald man die Ausflussöffnung so wendet, dass der ausfliessende Strahl einen ganz kleinen Winkel mit der Verticalen macht, dass also das Wasser neben dem aufsteigenden Strahle herabfällt. In diesem Falle kann unter günstigen Umständen, das heisst wenn möglichst wenig Reibung stattfindet, der Strahl eine Höhe erreichen, welche 0,9 der Druckhöhe ist.

Fig. 394.

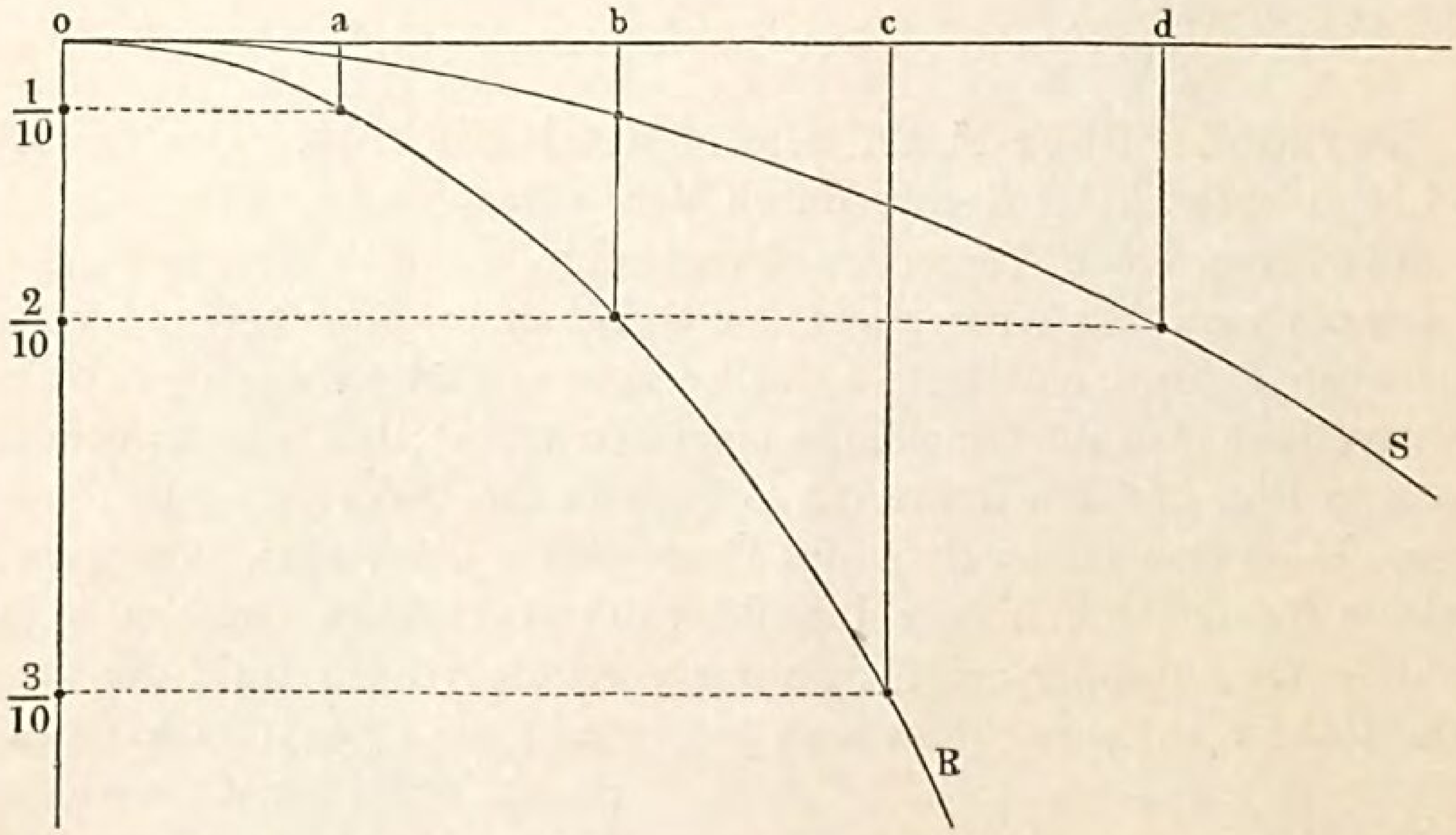


Eine bessere und in der That vollkommen genügende Uebereinstimmung mit dem Gesetz erhält man, wenn man mit horizontal ausfliessenden Wasserstrahlen experimentirt. Ein in horizontaler Richtung ausfliessender Wasserstrahl beschreibt eine Parabel, deren Gestalt von der Ausflussgeschwindigkeit abhängt. Gesetzt die Oeffnung *a*, Fig. 394 (a. v. S.), befände sich 1 dcm unter dem Wasserspiegel, so ist nach dem Toricelli'schen Gesetz die Ausflussgeschwindigkeit

$$\sqrt{2 \,.\, 9{,}8 \,.\, 0{,}1} = 1{,}4 \text{ m}.$$

Wenn also ein Wassertheilchen in einem bestimmten Momente die Oeffnung verlässt, so wird es nach einer Secunde in horizontaler Richtung 1,4 m von derselben entfernt sein. Ein eben ausströmendes Wassertheilchen wird also nach $^2/_{10}$ Secunde in horizontaler Richtung 0,28 m von der Oeffnung entfernt sein; in $^2/_{10}$ Secunde fällt es aber um 0,196 m herab. Wenn man demnach von der Oeffnung *a*, Fig. 394, in verticaler

Fig. 395.



Richtung die Länge *ab* = 0,196 m herab misst, so muss eine von *b* aus in horizontaler Richtung nach dem Wasserstrahle hin gezogene Linie *bc* denselben in einer Entfernung von 0,28 m treffen.

Aus einer Oeffnung *d*, welche 4 mal so tief unter dem Wasserspiegel liegt als *a*, strömt der Wasserstrahl mit der doppelten Geschwindigkeit hervor. Wenn man also von *d* aus 0,196 m herabmisst und dann in horizontaler Richtung eine Linie gegen den Strahl hingezogen denkt, so muss sie denselben in einer Entfernung 2 . 0,28, also in einer Entfernung von 0,56 m treffen.

Dass der horizontal ausfliessende Wasserstrahl in der That die dem Gesetz entsprechende Parabel beschreibt, davon überzeugt man sich am besten, wenn man die Parabel auf Papier oder auf einem Brette construirt und sie dann dicht hinter den ausfliessenden Strahl hält. (Siehe Seite 152, Fig. 129). In Fig. 395 sind die Parabeln des hori-

zontal ausfliessenden Wasserstrahls für eine Druckhöhe von 1 bis 4 dcm in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse construirt.

Ausflussmenge. Die Wassermenge, welche aus einer Oeffnung 103
in einer gegebenen Zeit hervorspringt, hängt offenbar von der Grösse der Oeffnung und der Ausflussgeschwindigkeit ab. Wenn alle Wassertheilchen die Oeffnung mit der Geschwindigkeit passirten, welche, nach dem Toricelli'schen Theorem, der Druckhöhe entspricht, so würde die in einer Secunde ausfliessende Wassermenge einen Cylinder bilden, dessen Basis gleich der Oeffnung und dessen Höhe gleich dem Wege ist, den ein Wassertheilchen vermöge seiner Geschwindigkeit in einer Secunde zurücklegt. Dieser Weg ist nun aber die Ausflussgeschwindigkeit selbst, also $\sqrt{2gs}$, und wenn wir also den Flächeninhalt der Oeffnung mit f bezeichnen, so ist die Ausflussmenge in einer Secunde

$$m = f.\sqrt{2gs.}$$

Für eine Druckhöhe von 0,1 m, welcher eine Ausflussgeschwindigkeit von 140 cm entspricht, und eine Oeffnung von 2 mm Durchmesser, welche also 0,0314 qcm Querschnitt hat, giebt die Rechnung eine Ausflussmenge von 4,4 ccm per Secunde, also 264 ccm per Minute.

Stellt man den Versuch an, so findet man nur eine Ausflussmenge von 169 ccm.

Diese Differenz zwischen der sogenannten theoretischen und der beobachteten Ausflussmenge beweist unwiderleglich, dass nicht alle Wassertheilchen die Oeffnung mit der Geschwindigkeit passiren, welche der Druckhöhe entspricht. In der That haben im Querschnitt der Oeffnung nur die in der Mitte sich befindenden Wasserfäden diese Geschwindigkeit, während sie für die mehr nach dem Rande der Oeffnung hin ausfliessenden geringer ist, wie dies auch nothwendig nach der folgenden Betrachtung sein muss.

In einem weiten Gefässe mit enger Oeffnung kann die ganze flüssige Masse, mit Ausnahme der in der Nähe der Oeffnung befindlichen Theile, als ruhend betrachtet werden. Die nach einander ausströmenden Schichten beginnen also ihre Bewegung nicht zu gleicher Zeit, die vordersten haben bereits das Maximum der Geschwindigkeit erreicht, während die hintersten erst ihre Bewegung beginnen. Es würde dies ein Zerreissen der auf einander folgenden Schichten zur Folge haben, wenn sich leere Räume bilden könnten. Weil dies aber nicht möglich ist, so ziehen sich die einzelnen Schichten mehr in die Länge, während ihr Durchmesser abnimmt; in dem Maasse nun, als der Querschnitt der Schichten sich vermindert, müssen andere Wassertheilchen von den Seiten zufliessen; da diese aber ihre Bewegung rechtwinklig gegen die Oeffnung erst später beginnen, so ist klar, dass sie mit einer geringeren Geschwindigkeit in der Oeffnung selbst ankommen als die centralen Wasserfäden.

Während also der Kern des ausfliessenden Strahls in dem Momente, in welchem er die Oeffnung verlässt, die der Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeit hat, ist er von Wasserfäden umgeben, deren Geschwindigkeit um so geringer ist, je näher sie dem Rande der Oeffnung sind, und daraus folgt denn, dass die Ausflussmenge geringer sein muss, als wenn alle Theilchen die Oeffnung mit der Geschwindigkeit des Kernstrahls verliessen.

Die wahre Ausflussmenge beträgt ungefähr 64 Proc. der sogenannten theoretischen. Die wahre Ausflussmenge ist also

$$M = c . f . \sqrt{2 g s},$$

wo man für den constanten Factor c den Zahlenwerth 0,64 zu setzen hat. Mit wachsender Druckhöhe nimmt der Zahlenwerth des constanten Factors c etwas ab.

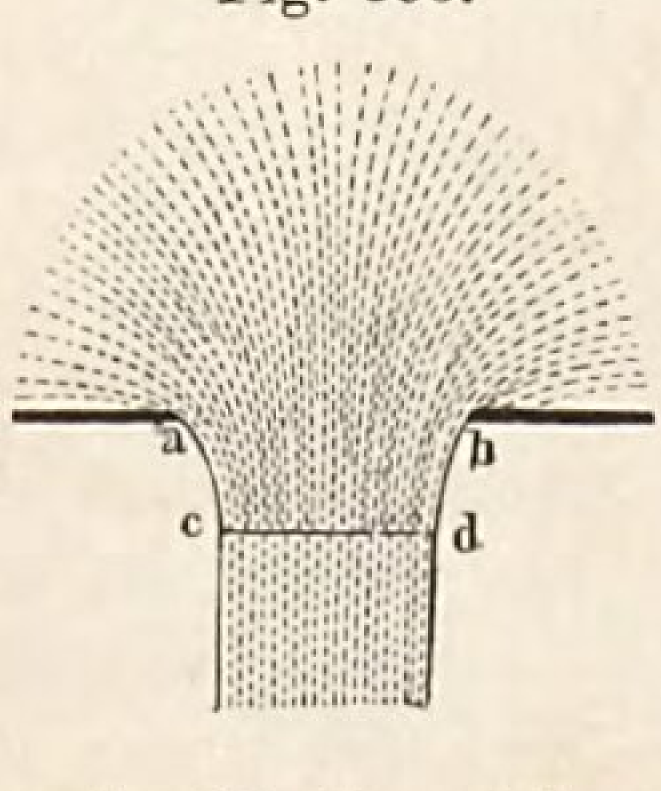
104 **Beschaffenheit des ausfliessenden Strahles.** Gleich nachdem der flüssige Strahl die Oeffnung verlassen hat, beobachtet man eine auffallende Veränderung desselben; er zieht sich rasch zusammen; in einer Entfernung von der Oeffnung, welche dem Halbmesser der Oeffnung gleich ist, beträgt der Flächeninhalt der Querschnitte des Strahles nur noch $^2/_3$ vom Flächeninhalte der Oeffnung selbst, so dass also an dieser Stelle der Durchmesser des Strahles ungefähr 0,8 vom Durchmesser der Oeffnung ist.

Dieses Zusammenziehen des Strahles wird mit dem Namen der *Contractio venae* bezeichnet.

Man glaubte früher, dass von der bezeichneten Stelle an der Strahl sich wieder ausbreitete; Savart hat aber gezeigt, dass ein solches Contractionsmaximum nur bei aufwärts gerichteten Strahlen stattfinde; bei anderen Strahlen nimmt die Zusammenziehung fortwährend, wenn auch kaum merklich, zu.

Die Fig. 396 stellt diese Contraction des Strahles dar; die Entfernung von der Oeffnung *ab* bis zu der Stelle *cd*, von welcher an die fernere Zusammenziehung fast unmerklich wird, ist etwas grösser als der Halbmesser der Oeffnung selbst. *cd* ist ungefähr $^8/_{10}$ der Länge *ab*.

Fig. 396.



Die Ursache der *Contractio venae* ist wohl keine andere als die, welche schon im Innern des Gefässes den Seitenzufluss der Wassertheilchen veranlasst.

Verfolgen wir den flüssigen Strahl auf seinem Laufe weiter, so finden wir, dass er aus zwei wohl zu unterscheidenden Theilen besteht; der eine Theil, welcher der Oeffnung zunächst liegt, ist ruhig und durchsichtig wie ein massiver Glasstab, der andere entferntere Theil erscheint zerrissen und aus einer Reihe getrennter Tropfen bestehend.

Fig. 397 stellt einen flüssigen, von oben nach unten gerichteten Strahl dar, wie er dem Auge erscheint: *an* ist der klare Theil; in *n* beginnt der gestörte Theil des Strahles, welcher abwechselnd aus Bäuchen und Knoten besteht. Fig. 398 stellt den Strahl dar, wie er nach S a v a r t's Untersuchungen wirklich ist. Der ganze gestörte Theil ist

Fig. 397.



Fig. 398.



Fig. 399.

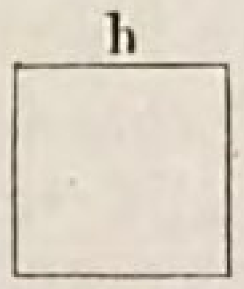
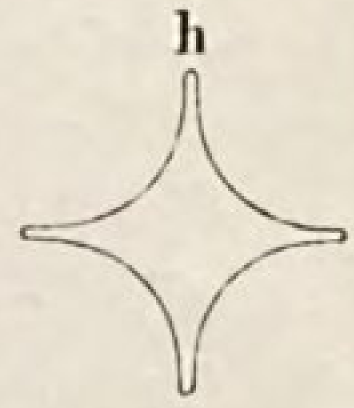


Fig. 400.



Fig. 401.



aus einer Reihe von Tropfen zusammengesetzt. Die Bäuche bestehen aus breiten, in horizontaler Richtung ausgedehnten Tropfen, die Knoten aber aus solchen, welche in verticaler Richtung verlängert sind. Da aber die Knoten und Bäuche eine fixe Stellung haben, so muss ein und derselbe Tropfen abwechselnd breit und lang werden, je nachdem er sich an der Stelle eines Bauches oder Knotens befindet; jeder Tropfen muss also in regelmässigen Perioden aus einer Gestalt in die andere übergehen. Alle Tropfen scheinen gleiche Grösse zu haben und denselben Veränderungen unterworfen zu sein. Zwischen je zweien dieser Tropfen scheint noch ein weit kleinerer sich zu befinden, wodurch die Bäuche ein röhrenartiges Ansehen erhalten.

Die Gegenwart der Luft hat auf die Form und die Dimensionen des Strahles keinen Einfluss.

Wenn die Oeffnungen nicht kreisförmig sind, so erleidet der Strahl sehr merkwürdige Formveränderungen. Ein Strahl z. B., welcher aus einer quadratischen Oeffnung in horizontaler Richtung hervorspringt, hat in verschiedenen Entfernungen von der Oeffnung die Querschnitte, Fig. 399, 400 und 401. Es rührt dies gewiss grösstentheils daher, dass die Stelle, bis zu welcher hin die starke Contraction stattfindet, nicht für alle Theilchen in gleicher Entfernung von der Oeffnung liegt, weil ja der Durchmesser der Oeffnung nicht nach allen Richtungen derselbe ist.

Einfluss der Ansatzröhren auf die Wassermenge. Wenn der Ausfluss nicht durch Oeffnungen geschieht, welche in eine dünne Wand gemacht sind, sondern durch k u r z e Röhren, so finden merkwürdige Modificationen statt, die wir jetzt näher betrachten wollen. 105

Wenn die kurze Ansatzröhre selbst die Gestalt des contrahirten Strahles hat, so übt sie weiter keinen Einfluss auf die Ausströmung des Wassers aus.

Durch kurze cylindrische und nach aussen konisch erweiterte Ansatzröhren fliesst der Strahl entweder frei durch, wie durch eine Oeffnung, welche gleichen Durchmesser mit dem inneren Ende der Röhre hat, Fig. 402, und in diesem Falle übt die Röhre keinen Einfluss aus; oder das Wasser hängt sich an die Wände der Röhre, so dass die Flüssigkeit die ganze Röhre ausfüllt und ein Strahl vom äusseren Durchmesser der Röhre ausfliesst, Fig. 403; in diesem Falle veranlasst die Ansatzröhre eine Verminderung der Ausflussgeschwindigkeit und eine Vermehrung der Ausflussmenge. Während eine Oeffnung in dünner Wand 0,64 der theoretischen Ausflussmenge giebt, erhält man durch eine cylindrische Ansatzröhre 84 Procent, vorausgesetzt, dass die Länge der Röhre ihrem vierfachen Durchmesser gleich ist. Bei geringer Druckhöhe ist der Strahl stets anhängend, bei grosser Druckhöhe hingegen ist er frei. Bei mittlerem Drucke kann man ihn nach Belieben bald frei, bald anhängend machen; ein geringes Hinderniss stellt das Anhängen her, und oft reicht ein ganz schwacher Stoss hin, um den Strahl wieder frei zu machen.

Fig. 402.

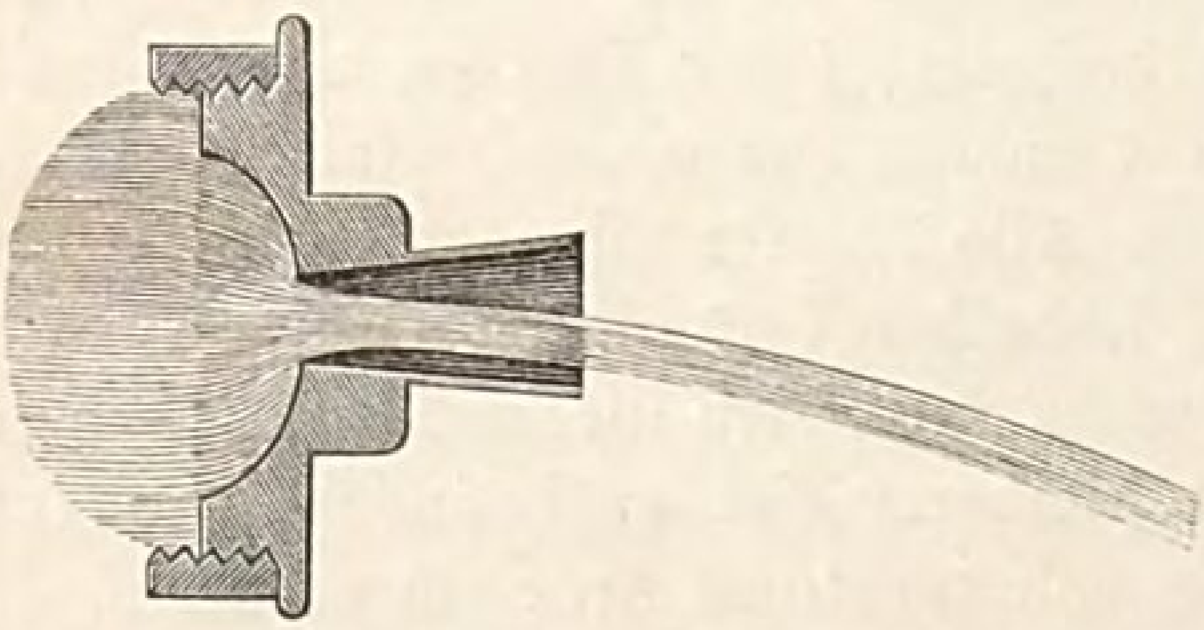
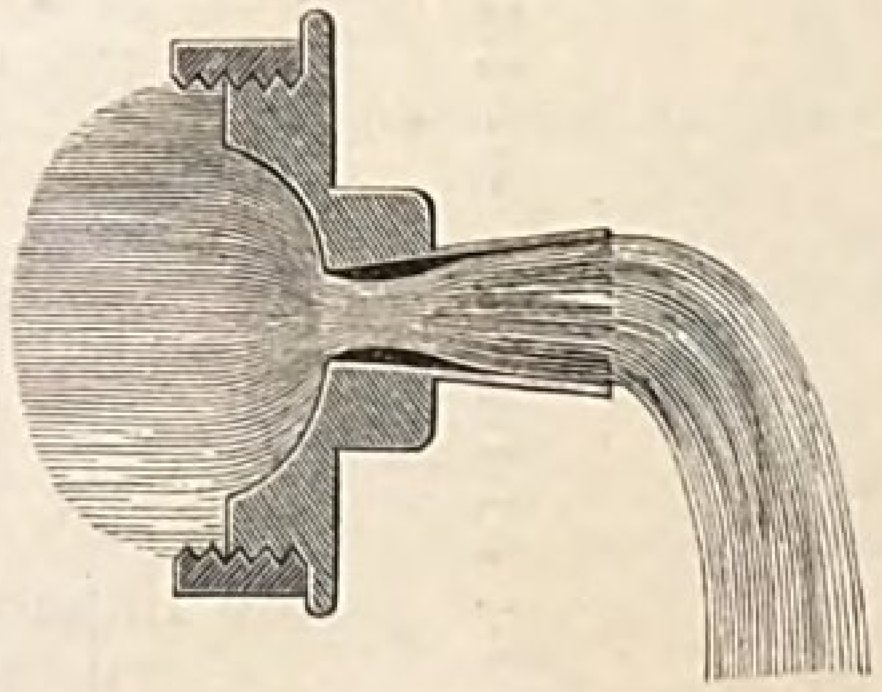


Fig. 403.



Ein konisches nach aussen erweitertes Ansatzrohr bewirkt, im Falle es voll ausfliesst, wie in Fig. 403, eine noch grössere Vermehrung der Ausflussmenge als ein cylindrisches.

Es ist bereits bemerkt worden, dass die Vermehrung der Ausflussmenge von einer Verminderung der Ausflussgeschwindigkeit begleitet ist. Der Grund davon ist leicht einzusehen. Die Adhäsion des Wassers an die Röhrenwände ist keine beschleunigende Kraft, sie kann die lebendige Kraft des ausfliessenden Strahles nicht vermehren. Bezeichnen wir mit M die Ausflussmenge durch eine Oeffnung in dünner Wand, durch v die entsprechende Geschwindigkeit, so ist $\frac{Mv^2}{2}$ die lebendige Kraft des Strahls. Wird nun die Ausflussmenge M vermehrt, indem sie M' wird, so muss doch die lebendige Kraft des ausfliessenden Strahles unverändert bleiben, es ist also:

$$M\frac{v^2}{2} = M'\frac{v'^2}{2}$$

oder:

$$v'^2 = v^2 \frac{M}{M'},$$

v' ist also kleiner als v.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, wie es kommt, dass Ansatzröhren die Ausflussmenge auf die erwähnte Weise vermehren und die Ausflussgeschwindigkeit dagegen vermindern.

Fig. 404.



Indem das Wasser in das Ansatzrohr einströmt, erleidet es eine Contraction, wie wenn es aus einer Oeffnung in dünner Wand ausflösse; weiterhin aber, sobald einmal die Röhrenwände benetzt sind, bewirkt die Adhäsion an die Röhrenwände, dass sich die Ansatzröhre vollständig ausfüllt, und somit ist der Querschnitt des Strahles durch das Ansatzrohr vergrössert, er ist beim Austritte aus dem Rohre grösser als an der Stelle der Contraction, wie man dies in Fig. 403 sieht.

Wenn nun die Wassertheilchen, den ganzen Querschnitt der Röhre ausfüllend, dieselbe mit der Geschwindigkeit verliessen, mit welcher sie die Stelle der grössten Contraction passiren, so müsste nothwendig ein Zerreissen der auf einander folgenden Wasserschichten eintreten. Die Trennung der Wassertheilchen, also die Bildung von leeren Räumen, wird aber durch den Druck der Luft verhindert, welche den Eintritt der Wassertheilchen in das Rohr beschleunigt, dagegen aber auch den Ausfluss aus demselben verzögert. Durch den Druck der Luft werden die ausfliessenden Wassertheilchen so viel zurückgehalten, dass dadurch ein voller Ausfluss möglich wird.

Dass der Luftdruck hier wirklich diese Rolle spielt, geht vorzüglich daraus hervor, dass, wenn das Wasser in einen luftleeren Raum ausfliesst, der Ausfluss stets in der Fig. 402 dargestellten Weise stattfindet, also die Ausflussmenge nicht vermehrt wird.

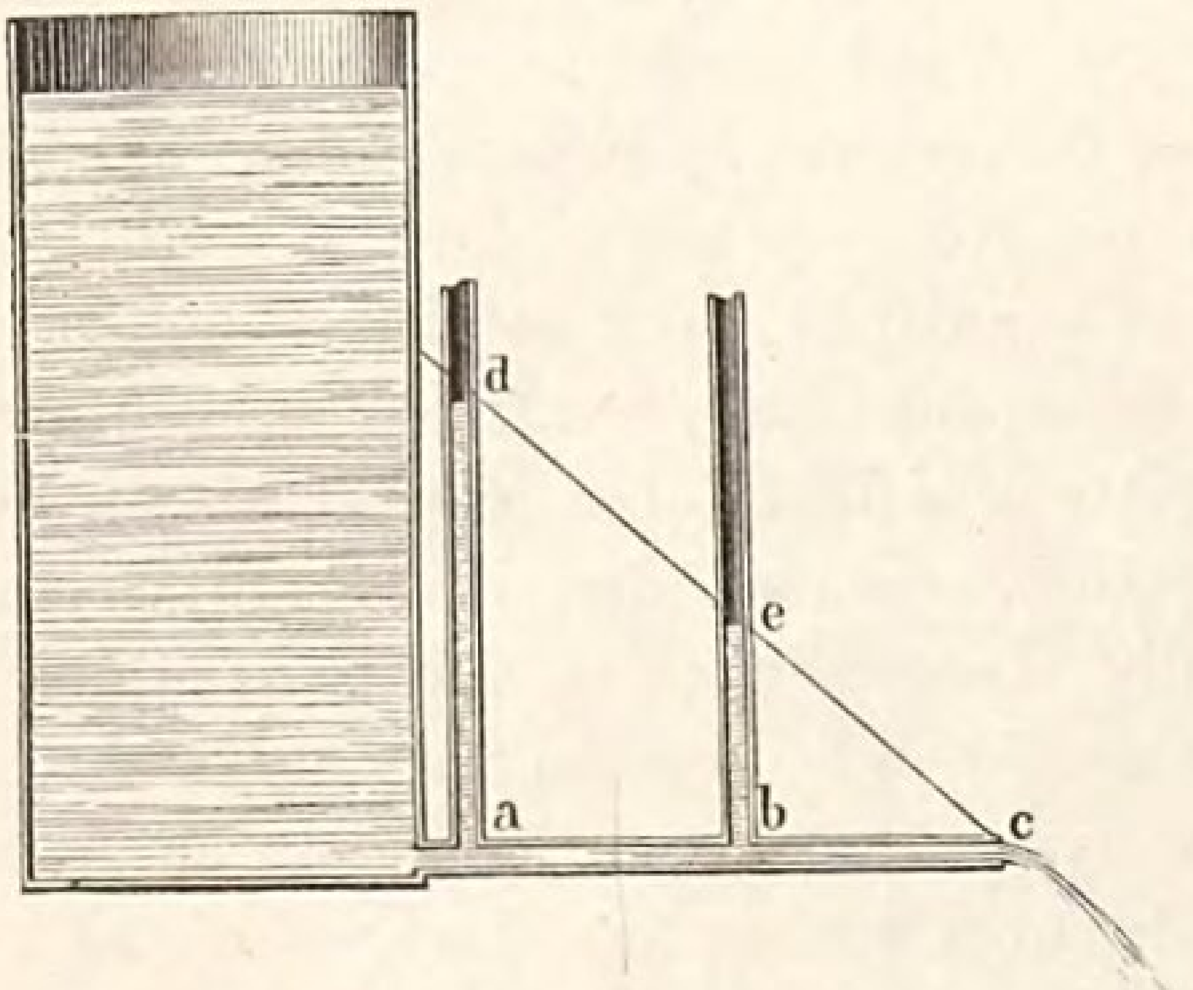
Macht man in die Seitenwand der Ansatzröhre da, wo die grösste Contraction stattfindet, ein Loch, so wird durch diese Oeffnung Luft eingesaugt, und der Strahl hört auf continuirlich zu sein.

Wenn in eine solche von obenher gemachte Seitenöffnung eine heberförmig gebogene Röhre xy, Fig. 404, eingesetzt wird, deren unteres Ende in ein Gefäss mit Wasser oder Quecksilber mündet, so wird durch das Bestreben des Wassers, in der Ansatzröhre einen luftleeren Raum zu bilden, die Flüssigkeit in der Röhre xy in die Höhe gesaugt. Dieses **Phänomen des Saugens** beweist ebenfalls den Einfluss des Luftdrucks auf die soeben betrachteten Erscheinungen. Da eine konische Ansatzröhre eine noch grössere Ausflussmenge giebt als eine cylindrische, so muss sie auch ein stärkeres Saugen erzeugen, d. h. es wird in der Röhre xy unter übrigens gleichen Umständen durch ein konisches Ansatzrohr die aufgesaugte Flüssigkeitssäule zu einer grösseren Höhe gehoben als durch ein cylindrisches.

Wir werden an späterer Stelle bei Beschreibung der Luftpumpen und der Gebläse Apparate kennen lernen, welche auf einem verwandten Principe beruhen.

106 **Reibungswiderstand in langen Röhren.** Mit der nach der Gleichung $v = \sqrt{2gs}$ berechneten Geschwindigkeit fliesst eine Flüssigkeit nur durch eine in dünner Wand angebrachte Oeffnung aus; wenn dagegen der Ausfluss durch lange und verhältnissmässig enge Röhren geschieht, so findet ein Reibungswiderstand statt, welcher die Ausflussgeschwindigkeit erheblich vermindert. Aus diesbezüglichen Versuchen ergiebt sich für dieselbe annähernd die Formel:

Fig. 405.



$$v = \sqrt{\frac{2gs}{1 + b\frac{l}{d}}}$$

worin l die Länge, d den Durchmesser der Röhre und b eine mit der Geschwindigkeit v selbst veränderliche Grösse bedeutet. Es ist nämlich

$$b = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{v}}.$$

Diese Formel für die Ausflussgeschwindigkeit gilt aber auch nur für den Fall, dass die Röhrenleitung überall gleich weit und ziemlich gerade, namentlich, dass kein besonderer Widerstand beim Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre zu überwinden ist.

Wenn das aus dem Gefässe, Fig. 405, durch die Röhre *ac* ausfliessende Wasser auf seinem Wege keine Reibung zu überwinden hätte, wenn es bei *c* mit der Geschwindigkeit ausflösse, welche der vollen Druckhöhe entspricht, so hätten die Röhrenwände keinerlei Druck auszuhalten. In Folge des zu überwindenden Reibungswiderstandes aber hat jede Stelle der Röhre einen Druck auszuhalten, welche dem Reibungswiderstande proportional ist, der auf dem Wege von der fraglichen Stelle bis zur Mündung *c* der Röhre noch zu überwinden ist.

Wird in die Ausflussröhre bei *a* ein verticales Glasrohr eingesetzt, so wird das Wasser in ihm bis zu einer Höhe *ad* aufsteigen. Der Druck der Wassersäule *ad* hält dem Reibungswiderstande das Gleichgewicht, welchen das durch die Röhre strömende Wasser auf dem Wege von *a* bis *c* noch zu überwinden hat.

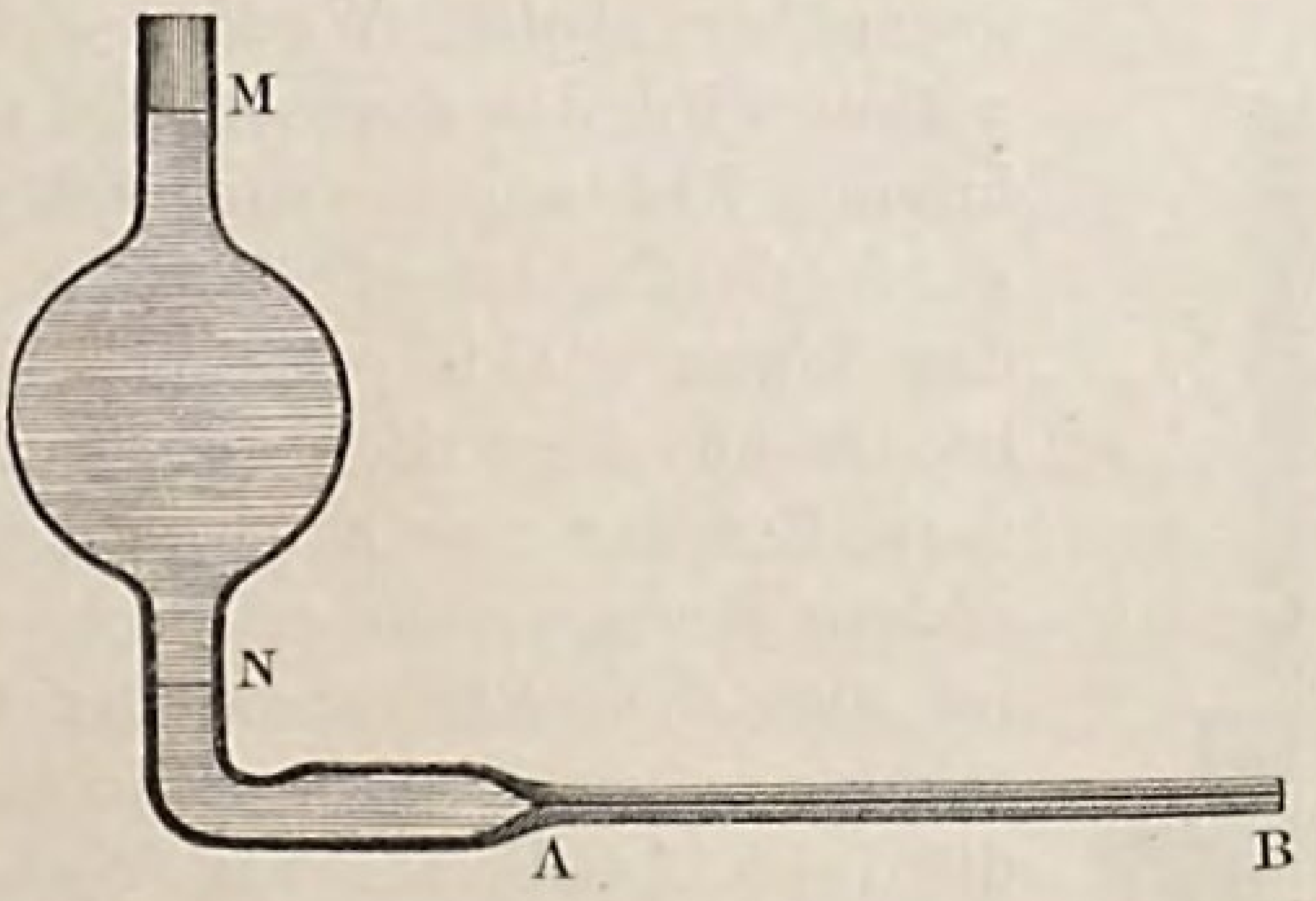
Wird in der Mitte zwischen *a* und *c*, also bei *b*, eine verticale Glasröhre eingesetzt, so wird in ihr das Wasser nur bis zu einer Höhe *bc*

steigen, welche nur $\frac{1}{2}$ *ad* ist, weil der auf dem Wege von *b* bis *c* zu überwindende Widerstand nur die Hälfte von dem von *a* bis *c* zu überwindenden ist.

Wenn man überhaupt an irgend einer Stelle der Röhre *ac* eine verticale Glasröhre einsetzt, so wird das Wasser in derselben so hoch steigen, dass der Gipfel der Wassersäule auf die gerade Linie *dc* fällt.

Ausfluss durch Capillarröhren. Um die Gesetze des Ausflusses von Flüssigkeiten durch Capillarröhren zu untersuchen, wandte Poisseuille den Fig. 406 abgebildeten Apparat an. Die Capillarröhre *AB* ist an eine weitere, mit einer kugelförmigen Erweiterung versehene Glasröhre angesetzt. Ueber und unter der Kugel sind die Marken *M* und *N* angebracht; das Volumen des Gefässes zwischen *M* und *N* ist genau bestimmt. Nachdem der Apparat durch Saugen mit der Flüssigkeit gefüllt ist, wird das obere Ende desselben mit einem Reservoir verbunden, welches comprimirte Luft enthält, deren Druck durch ein Quecksilbermanometer gemessen wird. 107

Fig. 406.



Man beobachtet die Zeit, welche erforderlich ist, damit unter constantem Druck der Spiegel der Flüssigkeit von *M* bis *N* sinkt; wird alsdann der Versuch bei verschiedenem Druck wiederholt, so findet man, dass die Ausflusszeit für dieselbe Flüssigkeitsmenge dem Drucke umgekehrt proportional ist.

Aus seinen Versuchen mit diesem Apparate fand Poisseuille (Pogg. Ann. LVIII), dass die in einer gegebenen Zeit ausströmende Flüssigkeitsmenge *Q* direct proportional dem Drucke *S* und der vierten Potenz des Durchmessers *D*, dagegen verkehrt proportional der Länge *L* der Capillarröhre sei. Sie lässt sich also durch die Formel

$$Q = N \frac{S \, . \, D^4}{L}$$

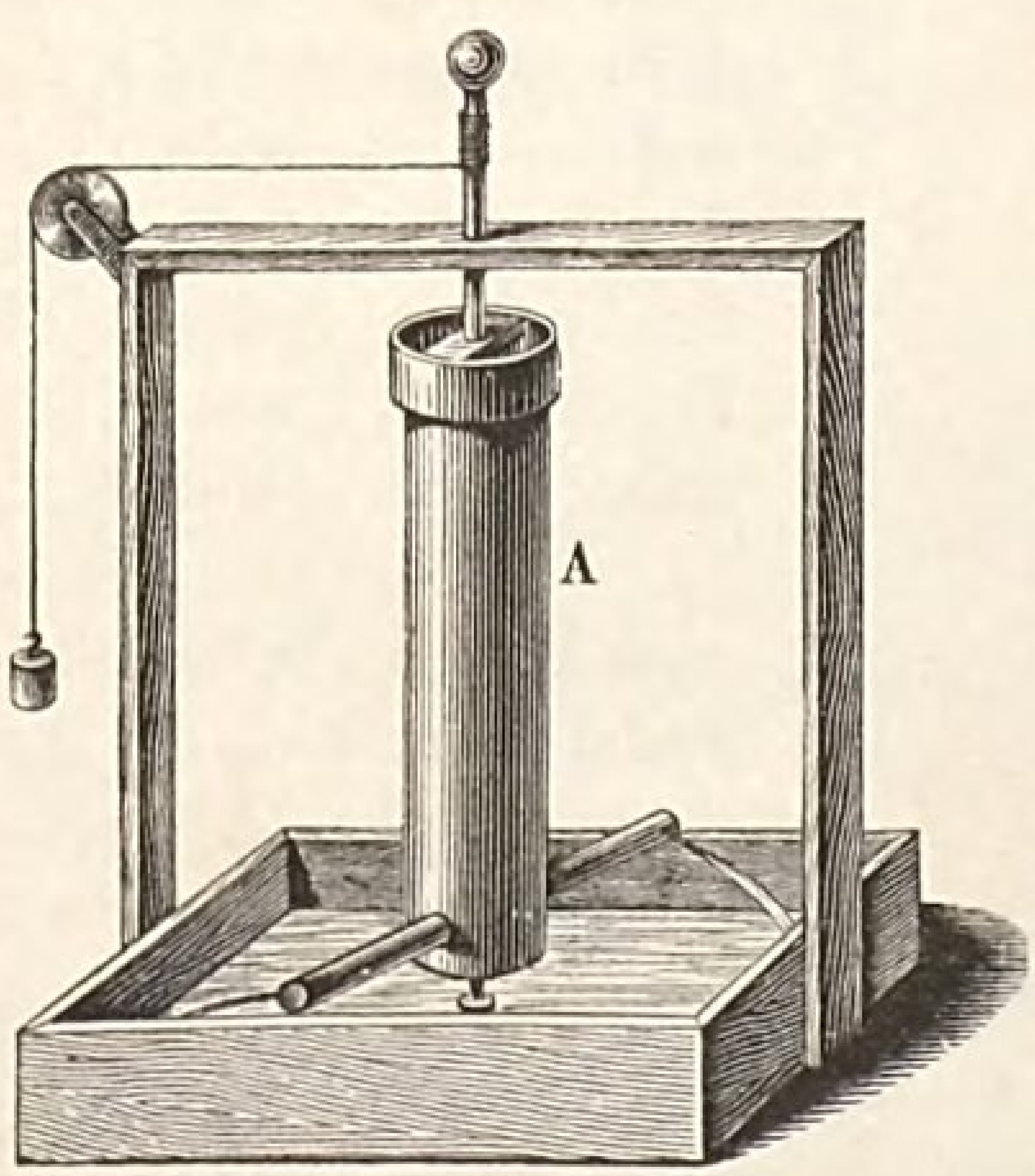
ausdrücken, worin *N* einen constanten Factor bezeichnet, dessen Grösse sich von einer Flüssigkeit zur andern, sowie auch insbesondere mit der Temperatur ändert. Erhöhung der letzteren von 0^0 bis 60^0 steigert z. B. die Ausflussmenge des Wassers (nach Girard's Versuchen) um mehr als das Dreifache.

Während die Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünnen Wänden nach dem Toricelli'schen Gesetze lediglich

eine Function des Druckes ist, erscheint dieses Gesetz beim Ausfluss durch Capillarröhren vollständig umgewandelt, indem hier die Molekularwirkungen zwischen den Theilchen der Flüssigkeit und denen der Röhrenwand einen Einfluss gewinnen, welcher bei den Fällen, auf welche das Toricelli'sche Gesetz passt, völlig verschwindet. Wir werden auf diesen Gegenstand an späterer Stelle zurückkommen.

108 **Reaction, welche durch das Ausströmen der Flüssigkeiten erzeugt wird.** Denken wir uns ein Gefäss, welches mit Wasser gefüllt ist, so bleibt Alles in Ruhe, weil jeder Seitendruck durch einen vollkommen gleichen, aber entgegengesetzten aufgehoben wird. Wenn man aber die Wand an irgend einer Stelle durchbohrt, so dass das Wasser hervorspringt, so ist der Druck an dieser Stelle offenbar weggenommen, während das der Oeffnung diametral gegenüberliegende Wandstück noch gerade so stark gedrückt wird als vorher. Der Druck auf diejenige Gefässwand, in welcher sich die Oeffnung befindet, ist also gringer als der Druck, welchen die gegenüberstehende Wand aushält; mithin wird das ganze Gefäss sich in einer Richtung bewegen müssen, welche der Richtung des ausfliessenden Wasserstrahls entgegengesetzt ist, wenn diese Bewegung nicht durch Reibung oder auf irgend eine andere Weise verhindert wird. Es ist dies dem Rückstosse der Geschütze zu vergleichen. Man kann die beim Ausfliessen des Wassers wirkende Reaction durch einen Apparat anschaulich machen, welcher unter dem Namen des Segner'schen Wasserrades, Fig. 407, bekannt ist. Es besteht aus einem um eine verticale Achse leicht drehbaren Gefässe A, an dessen unterem Ende sich zwei oder mehrere horizontale Röhren befinden, die alle (von der Mitte aus gesehen) auf derselben Seite mit kleinen Oeffnungen versehen sind. Das Gefäss dreht sich nach der den ausströmenden Wasserstrahlen entgegengesetzten Richtung.

Fig. 407.



Mit Erfolg hat man in neuerer Zeit dieses Princip zur Construction hydraulischer Motoren benutzt, welche den Namen der Reactionsräder, der Reactionsturbinen oder der schottischen Turbinen führen.

109 **Energie der Wassergefälle.** Wenn eine Wassermasse M von der Höhe H herabsinkt, so wird dabei eine Energie verfügbar, deren Grösse im absoluten Maasse durch MHg, im praktischen Maasse durch

MH ausgedrückt wird. Im letzteren Falle wird M in Kilogrammen, H in Metern gemessen, das Product in Kilogrammetern. Da man ferner die Arbeit eines Pferdes per Secunde auf 75 kgm veranschlagt, so ist ein Wassergefälle, welches per Secunde 75 kgm liefert, als äquivalent mit einer Pferdekraft anzusehen.

Diese Arbeit oder Energie kann man auf zweierlei Weise auf eine Maschine übertragen.

1) Indem man das Wasser die der Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit erlangen lässt und dann seine lebendige Kraft auf einen anderen Körper durch Stoss überträgt, wie dies z. B. bei den unterschlächtigen Wasserrädern der Fall ist, oder

2) indem man das Wasser schon während seines Falles durch sein Gewicht einen Druck auf den zu bewegenden Körper ausüben lässt, so dass es die seiner Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit gar nicht erreicht und überhaupt mit bedeutend verminderter Beschleunigung niedergeht, wie dies z. B. bei oberschlächtigen Wasserrädern und bei Wassersäulenmaschinen der Fall ist. Auch die oben erwähnten Turbinen gehören in diese Classe. Hier wird die lebendige Kraft der fallenden Wassermasse gewissermaassen gleich im Moment ihrer Entstehung consumirt.

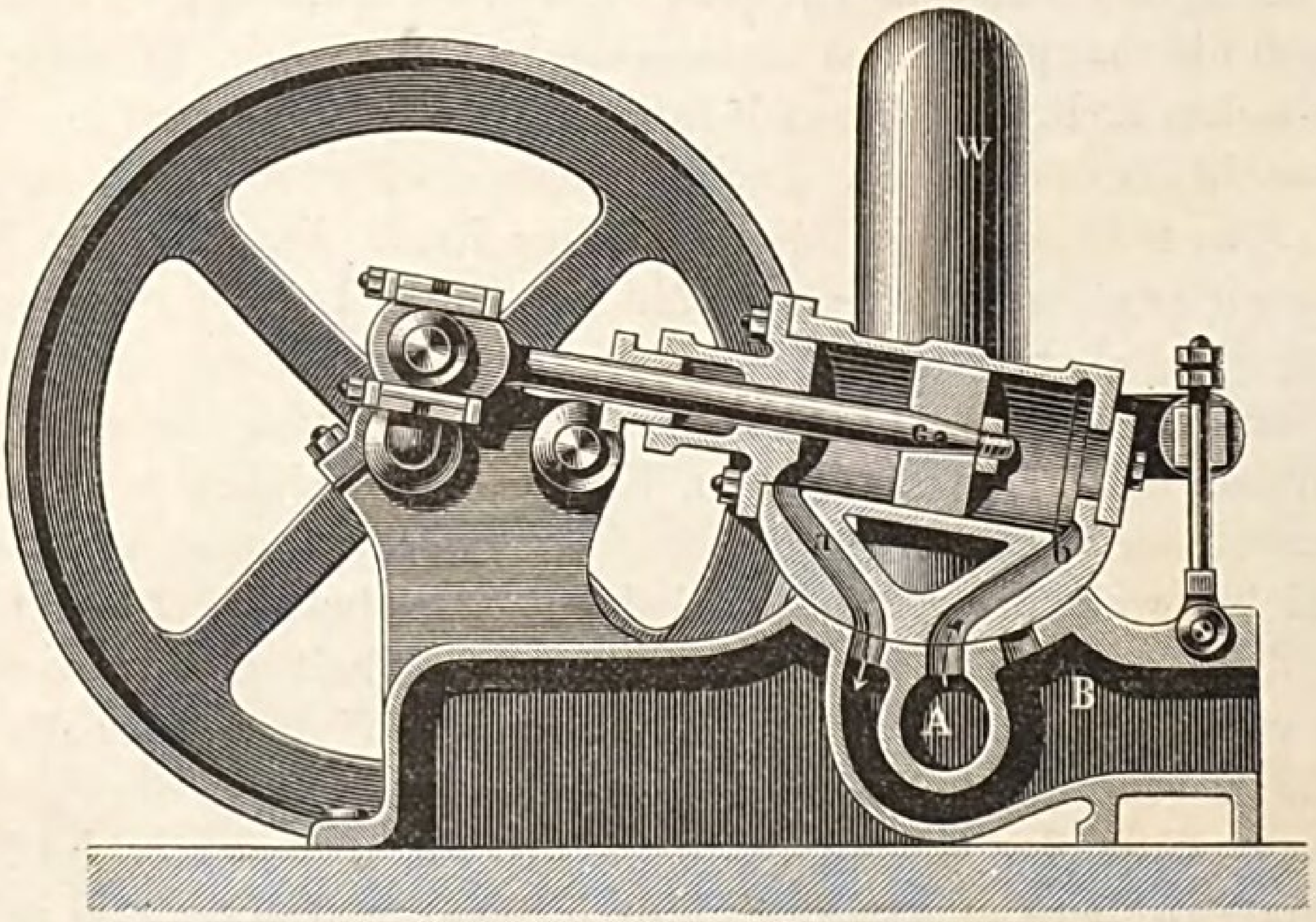
Mag nun aber die Benutzung der lebendigen Kraft eines Wassergefälles auf die eine oder die andere Weise stattfinden, so wird es doch nie gelingen, den theoretischen Effect, als welchen wir die Arbeit MH bezeichnen wollen, vollständig zu verwerthen, und zwar deshalb schon nicht, weil im ersten der beiden oben betrachteten Fälle dem Wasser doch noch eine bestimmte Geschwindigkeit bleiben muss, mit welcher es abfliesst, im zweiten Falle aber das Wasser dann doch nicht ohne alle Beschleunigung niedergehen kann. Ausserdem aber geht noch ein grosser Theil der lebendigen Kraft des Gefälles durch die Reibung des Wassers in den Canälen sowie durch Reibungswiderstände in den zu bewegenden Maschinen verloren, so dass selbst mit den besten hydraulischen Maschinen kaum ein Nutzeffect erzielt werden kann, welcher mehr als 70 Proc. des theoretischen Effectes beträgt.

Indem wir auf eine Beschreibung der übrigen Wassermotoren verzichten müssen, wollen wir als Repräsentanten derselben die Wassersäulenmaschine von A. Schmidt in Zürich, welche sich als Motor für das Kleingewerbe in Städten, wo Wasserleitungen mit hohem Drucke zur Verfügung stehen, insbesondere auch in physikalischen Laboratorien bewährt hat, in Kürze beschreiben.

Die Maschine, Fig. 408 (a. f. S.), besteht aus einem oscillirenden Cylinder, dessen Kolben vom Druckwasser hin und her getrieben wird. Die Kolbenstange geht durch eine Stopfbüchse und steht mit der Kurbel in directer Verbindung. Vermöge der rotirenden Bewegung der Kurbel wird der Cylinder durch die Kolbenstange in eine oscillirende Bewegung versetzt, deren Achse durch den Punkt c geht. An dem Cylinder ist unterhalb ein Bauch mit Zuführungscanälen und cylindrischer Schieberfläche

angegossen, welche letztere sich in der Figur als ein von c aus beschriebenes Kreissegment darstellt. Die hohl gegossene Grundplatte B legt sich dicht schliessend an die auf ihr hin und her gleitende Schieberfläche des Cylinders; sie enthält drei Canäle, wovon der mittlere A das Druckwasser abwechselnd dem Canal a oder b zuführt, während seine beiden Seitencanäle dasselbe bei B abströmen lassen. Man ersieht leicht aus der Figur, in welcher Weise durch die Bewegung des Kolbens das Oscilliren des Cylinders und hierdurch eine den jeweiligen Kolbenstellungen entsprechende Communication der Canäle hervorgebracht wird, durch welche dann das Druckwasser abwechselnd durch a und b zu- und abgeführt werden muss. Bei jeder Umdrehung des Schwungrades findet zweimal, und zwar in den Momenten, wo der Kolben eine der äussersten

Fig. 408.



Lagen angenommen, eine Absperrung sämmtlicher Canäle statt. Die Stösse, welche hierdurch entstehen würden, werden durch den Windkasten W unschädlich gemacht, indem die in seinem oberen Theile enthaltene Luft bei jeder Absperrung durch das eindringende Wasser comprimirt wird, um sich dann wieder auszudehnen.

Der Schmidt'sche Wassermotor wird gegenwärtig in 21 verschiedenen Grössen ausgeführt, wovon bei einem Wasserdrucke von 20 m der kleinste bei einem Durchmesser des Cylinders = 4 cm und einem Wasserverbrauch von 40 Liter per Minute circa $^1/_5$ Pferdekraft entwickelt, während der grösste von 30 cm Durchmesser und 2150 Liter Wasserverbrauch per Minute eine Kraft von $7^1/_5$ Pferden liefert.

110 **Stoss des Wassers, hydraulischer Widder.** Wenn eine in einem geschlossenen Canale fliessende Wassermenge durch plötzliches Verschliessen der Ausflussmündung abgesperrt wird, so wird durch die

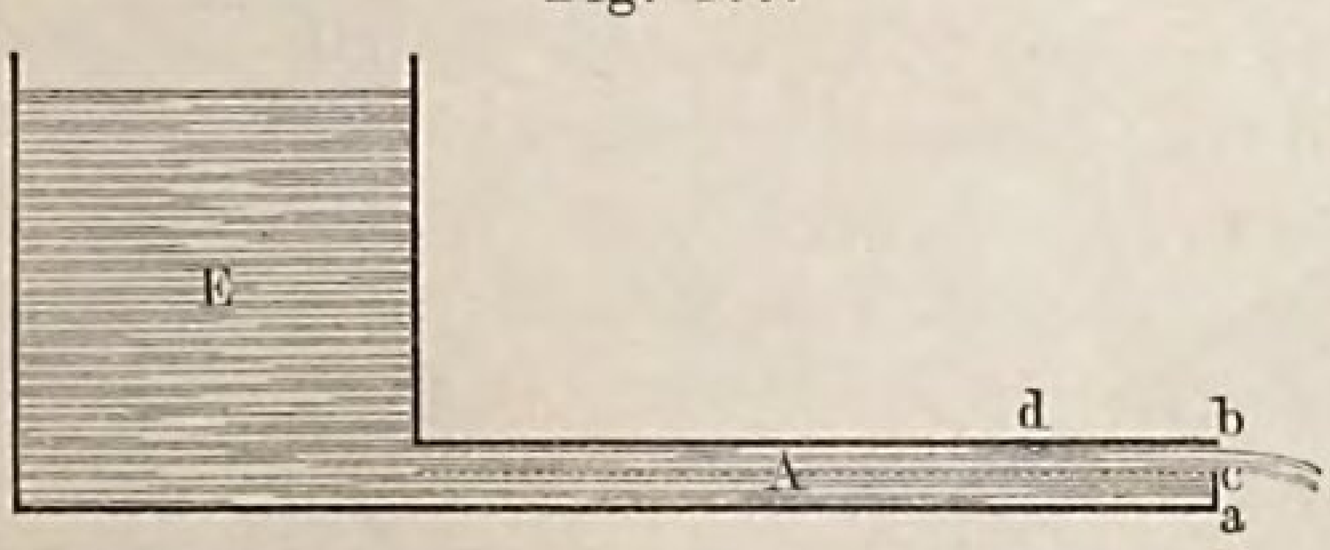
lebendige Kraft der Wassermenge ein Stoss auf die Verschlussfläche sowie auch auf die übrigen Wandungen des Canals ausgeübt. Die Energie des bewegten Wassers wird dabei in Wärme verwandelt oder auch oft unliebsamer Weise zur Zerstörung der Wasserleitung verwendet, welche Wirkung man durch Verlangsamung des Absperrens oder durch elastische Luftmassen zu verhindern sucht.

Montgolfier hat einen Apparat construirt, den er hydraulischen Widder oder Stossheber nannte, bei welchem die Energie des stossenden Wassers in sinnreicher Weise dazu benutzt wird, einen Bruchtheil desselben auf eine grössere Höhe zu heben, als die Höhe des Wasserspiegels in dem Gefässe ist, aus welchem der Canal gespeist wird.

Bevor wir diesen Apparat selbst beschreiben, wollen wir einen einfachen Versuch angeben, welcher das jenem zu Grunde liegende Princip zu demonstriren gestattet.

Aus einem Wasserreservoir *E*, Fig. 409, ströme das Wasser durch den entsprechend langen Canal *A* und fliesse an der Mündung *ab* mit einer gewissen Geschwindigkeit aus. Schliesst man nun plötzlich einen Theil der Mündung *ab*, z. B. die untere Hälfte *ac*, durch eine vorgehaltene Platte oder durch Daraufdrücken des Fingers ab, so kann man sich vorstellen, dass dadurch die untere Hälfte des im Canal fliessenden Wassers gehemmt, die obere Hälfte dagegen nicht behindert werde, auszufliessen. Die lebendige Kraft der unteren Wasserhälfte geht aber nun auf die obere Hälfte über, diese wird daher im Momente der Hemmung mit grösserer Geschwindigkeit herausgeschleudert.

Fig. 409.



Diese grössere Geschwindigkeit dauert aber nur so lange, bis die Energie des stossenden Wassers übertragen ist; von da an stellt sich (nahezu) die ursprüngliche Ausflussgeschwindigkeit wieder ein, während natürlich die Stromgeschwindigkeit im Querschnitt des Canals (ungefähr) auf die Hälfte gesunken ist. Oeffnet man nun wiederum die Mündung *ab* vollständig, so erlangt bald das Wasser im Canal die frühere Geschwindigkeit wieder und der Versuch kann wiederholt werden.

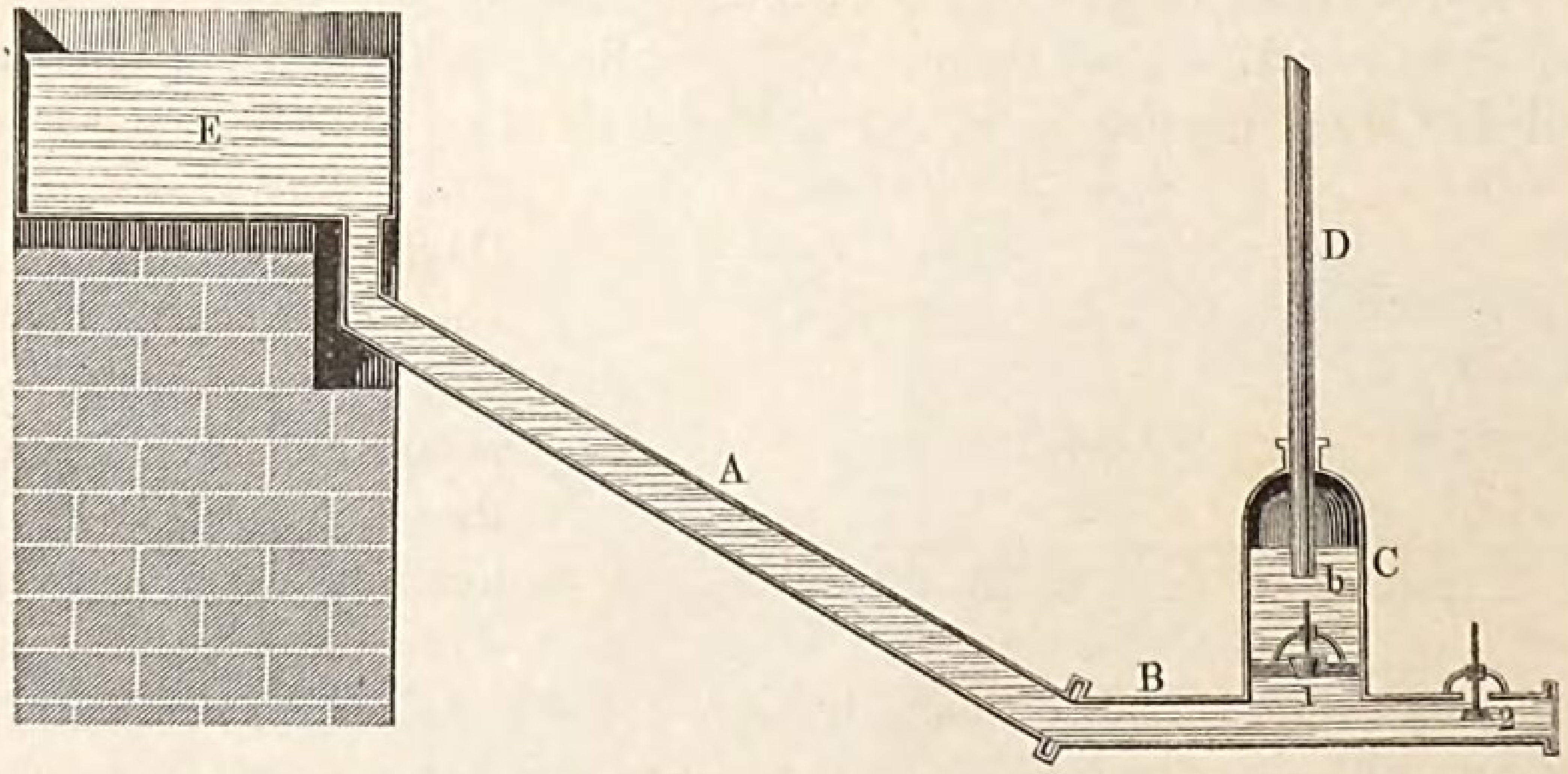
Wenn man überdies noch eine Oeffnung an der Oberseite des Canals etwa bei *d* anbringt, so wird im Momente des vollständigen Verschlusses der Mündung *ab* die lebendige Kraft des Wassers dazu verwendet, einen Theil desselben durch die Oeffnung bei *d* hinauszustossen und es wird dadurch ein Wasserstrahl hervorgebracht, der kurze Zeit hindurch weit über das Niveau von *E* emporreicht, welcher aber nachher, nachdem die Stosswirkung vorüber ist, unter diese Höhe herabsinkt.

Bei dem Apparate von Montgolfier handelt es sich nun darum, dieses abwechselnde Oeffnen und Verschliessen der Mündung *ab* selbst-

thätig zu veranlassen, und dann noch den intermittirenden Wasserstrahl durch Anwendung eines sogenannten Windkessels in einen continuirlich wirkenden umzuwandeln.

Fig. 410 zeigt einen solchen Stossheber. Man beachte daran folgende Bestandtheile: Das Reservoir *E*, die Fallröhre *A*, den Canal *B*, welcher möglichst gerade und lang sein soll, die Ventile 1 und 2, den Windkessel *C* mit der Steigröhre *D*. Das Wasser strömt zuerst durch die Oeffnung des Ventils 2 massenhaft aus, und hebt, sobald es eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat, die Ventilklappe empor, wodurch die Oeffnung abgesperrt wird. Der dadurch erzeugte Stoss auf die Röhrenwände trifft die Klappe des Ventils 1, hebt dieselbe und drängt eine Quantität Wasser in den Kessel, in welchem oberhalb der Mündung *b* des Rohres *D* ein Luftquantum abgesperrt wird, welches seinerseits auf das Wasser rückwärts einen elastischen Druck ausübt, durch welchen

Fig. 410.



das Ventil 1 geschlossen und das eingedrungene Wasser in das Rohr *D* gehoben wird.

Sobald die Stosswirkung vorüber und das Wasser im Canal *AB* zur Ruhe gekommen ist, fällt die Ventilklappe 2 wieder herab, der Ausfluss daselbst beginnt und so wiederholt sich der frühere Vorgang. Unter fortwährend abwechselndem Spiele der beiden Ventile wird durch das Rohr ein Wasserstrahl auf eine Höhe emporgetrieben, welche das Gefälle vom Wasserspiegel in *E* bis zur Mündung bei 2 vielmal übersteigen kann. Würde keine Energie zur Bewegung der Klappen, zur Reibung etc. nebenbei nutzlos verbraucht werden, so würde sich die Steighöhe des Wassers zu seiner Fallhöhe verhalten, wie die bei 2 ausfliessende Menge desselben zu der emporgehobenen. Es könnte also beispielsweise $^1/_5$ der durch den Canal fliessenden Wassermenge um die fünffache Höhe des verfügbaren Gefälles gehoben werden. Dieser theoretische Effect wird begreiflicher Weise in der Praxis nie erreicht.

Fünftes Capitel.

Von den Molekularkräften in flüssigen Körpern.

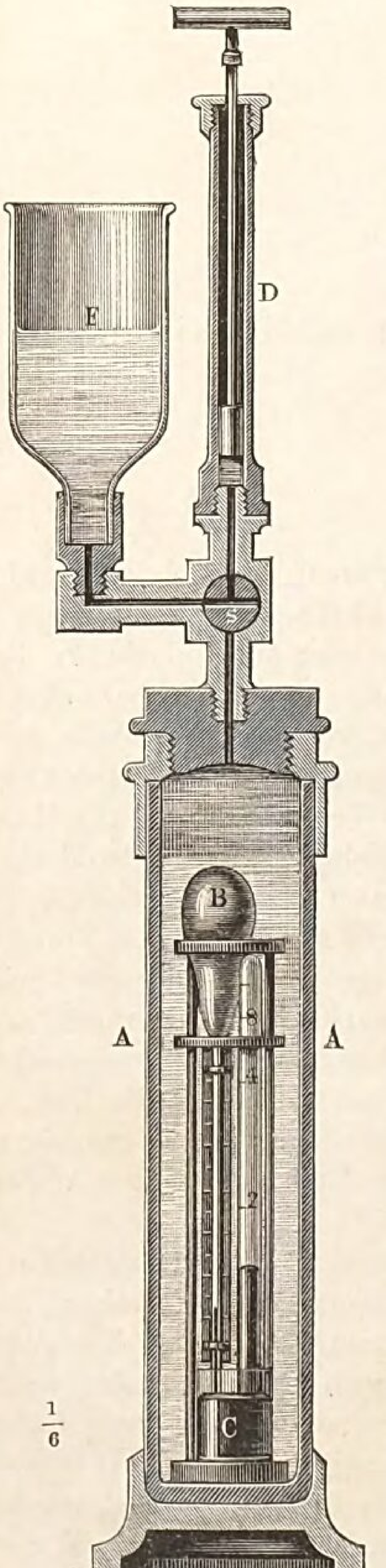
Elasticität der Flüssigkeiten. Während die Molekularkräfte 111
bei festen Körpern sich im Zustande eines stabilen Gleichgewichts befinden, können wir den Gleichgewichtszustand der Molekularkräfte bei flüssigen Körpern gewissermaassen als einen indifferenten bezeichnen, denn wie man auch die Theilchen einer Flüssigkeit gegen einander verschieben mag, so kommen sie doch in dieser neuen gegenseitigen Lage alsbald wieder ins Gleichgewicht. Gegen eine Verschiebung der Moleküle einer Flüssigkeit reagirt also keine merkliche Elasticität, wohl aber macht sich eine solche gegen eine Compression derselben geltend.

Expansionskraft und Cohäsionskraft stehen bei den Flüssigkeiten in der Art im Gleichgewicht, dass bei einer Annäherung der Theilchen die Expansionskraft, bedeutend stärker wachsend als die Cohäsionskraft, so sehr das Uebergewicht erlangt, dass sie einer Compression kräftigen Widerstand entgegensetzt, während bei wachsender Entfernung der Moleküle der Ueberschuss der Cohäsionskraft nur unbedeutend zunimmt, so dass einer Trennung der Theilchen nur ein geringer Widerstand entgegenwirkt.

Die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten lässt sich mit Hülfe des Fig. 411 (a. f. S.) abgebildeten Apparates nachweisen und messen. Ein birnförmiges Gefäss B, das Piezometer, ist an dem einen Ende einer Thermometerröhre angesetzt, deren unteres Ende, nachdem B mit Wasser gefüllt worden ist, in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss C gesetzt wird. Dadurch ist nun ein bestimmtes Quantum Wasser im Piezometer abgesperrt. Durch eine geringe Temperaturerhöhung bewirkt man, dass ein wenig Wasser aus dem Piezometer austritt und dass alsdann beim Wiedererkalten das Quecksilber im Piezometerrohre um einige Millimeter über den Spiegel des Quecksilbers in C steigt. Das Rohr des Piezometers ist mit einer Scala versehen, und es muss zum Voraus

mit Genauigkeit ermittelt sein, wie sich der Rauminhalt eines zwischen zwei Theilstrichen befindlichen Röhrenstücks zum Rauminhalte des ganzen Gefässes verhält.

Fig. 411.



Neben das Piezometer wird ein mit Luft gefülltes Rohr, ein Luftmanometer, in das Quecksilbergefäss eingesetzt, welches dient, um die Stärke des Druckes zu messen, welchem das Piezometer ausgesetzt wird.

Um zu verhindern, dass durch Einpressen des Quecksilbers in das Rohr des Piezometers das Gefäss *B* selbst eine Erweiterung erfährt, muss dasselbe von aussen dem gleichen Druck ausgesetzt sein wie von innen. Deshalb wird das Quecksilbergefäss *C* sammt dem Piezometer *B* und der Luftröhre in das Glasgefäss *A* des Compressionsapparates gesetzt, dieses voll Wasser gegossen, welches mit dem Wasser in *B* gleiche Temperatur haben muss, und dann das Wasser in *A* mit Hülfe der oben aufgeschraubten Druckpumpe *D* comprimirt.

Bei der Stellung des Hahns *s*, wie ihn die Figur zeigt, wird der Kolben der Druckpumpe aufgezogen und dadurch Wasser aus *F* aufgesaugt; ist der Kolben oben angekommen, so wird der Hahn *s* um eine Viertelumdrehung nach der Rechten gedreht, so dass nun der Pumpenstiefel mit dem Gefässe *A* in Verbindung steht, und dann der Kolben niedergedrückt. Dadurch wird die ganze Wassermasse in *A*, in *B* und die Luft im Manometerrohre comprimirt; das Quecksilber steigt im Piezometerrohre, und aus der Anzahl der Theilstriche, um welche es steigt, kann man auf die Compression schliessen, welche das Wasser in *B* erlitten hat; aus dem Steigen des Quecksilbers im Manometerrohre aber ergiebt sich, wie gross der Druck ist, dem das Wasser ausgesetzt war.

Sobald man den Hahn *s* so stellt, dass das Gefäss *A* mit *F* in Verbindung kommt, dass also der Druck in *A* aufhört, sinkt das Quecksilber in der Röhre des Piezometers wieder

auf seinen ursprünglichen Stand, die Flüssigkeit in *B* ist also gegen Compression vollkommen elastisch.

Es versteht sich von selbst, dass das Wasser in *B* vor dem Einfüllen durch Kochen luftfrei gemacht werden muss.

Statt Wasser kann man auch andere Flüssigkeiten in das Piezometer bringen und auf gleiche Weise ihre Zusammendrückbarkeit ermitteln.

Eine ausführliche Darstellung der Versuche, welche Colladon und Sturm über die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten anstellten, findet man im 12. Bande von Poggendorff's Annalen; Oersted's Abhandlungen über denselben Gegenstand findet man im 9., 12. und 31. Bande desselben Journals. In der folgenden Tabelle sind die Resultate der genannten Naturforscher zusammengestellt.

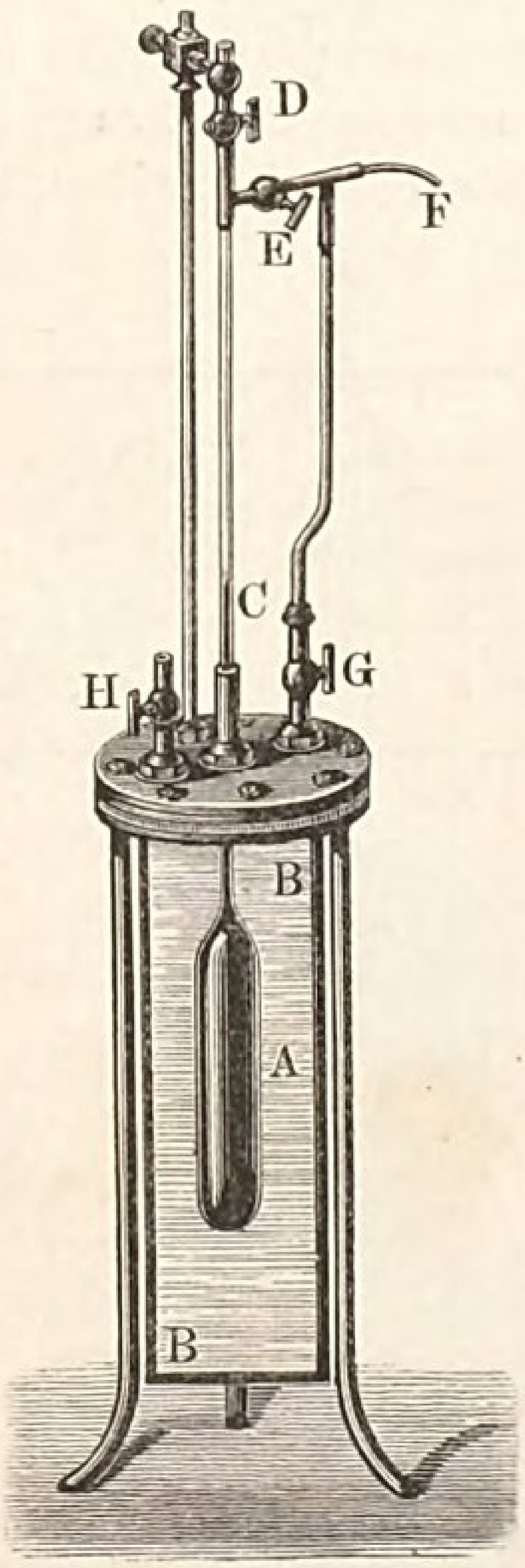
Namen der Flüssigkeiten.	Zusammendrückbarkeit für den Druck einer Atmosphäre in Millionentheilen des ursprünglichen Volumens.	
	Colladon und Sturm.	Oersted.
Quecksilber	3,38	2,65
Schwefelsäure	30,35	
Salpetersäure	30,55	
Schwefelkohlenstoff		31,65
Essigsäure	40,55	
Luftfreies Wasser	49,65	46,65
Salpeteräther	69	
Terpentinöl	71,35	
Salzsäureäther	84,25 für die 1. Atm.	
„	80,60 „ „ 9. „	
Alkohol	94,95 „ „ 1. „	21,65
„	91,85 „ „ 9. „	
„	87,35 „ „ 24. „	
Schwefeläther bei 0°	131,35 „ „ 1. „	61,65
„ „ „	120,45 „ „ 24. „	
„ „ 11°	148,35 „ „ 1. „	
„ „ „	139,35 „ „ 24. „	

Man sieht, dass die Zahlen von Colladon und Sturm immer grösser sind als die von Oersted. Beim Quecksilber und dem Wasser ist der Unterschied gering, beim Schwefeläther und dem Alkohol ist er jedoch sehr bedeutend. Diese beiden letzten Flüssigkeiten und der Salzsäureäther zeigen, dass die Zusammendrückbarkeit mit wachsendem Druck

abnimmt. Endlich sieht man auch aus der Tabelle, dass der Schwefeläther bei 11^0 weit stärker zusammendrückbar ist als bei 0^0.

Bei genauer Untersuchung ergiebt sich, dass bei gleichem Druck von innen und aussen das Volumen des Piezometergefässes *B* doch nicht vollkommen unveränderlich bleibt, weil auch die Masse des Glases, aus welchem die Gefässwände bestehen, durch starken Druck auf ein kleineres Volumen gebracht wird. Régnault hat diese Fehlerquellen auf folgende Weise eliminirt*).

Fig. 412.



Das Piezometer *A*, Fig. 412, befindet sich in dem Compressionsgefäss *B*. Das Innere des Gefässes *B* kann durch Oeffnen des Hahnes *H* mit der äusseren Luft, durch Oeffnen des Hahnes *G* mit einem Recipienten verbunden werden, zu welchem das Rohr *F* führt und welcher mit comprimirter Luft gefüllt ist. Ebenso kann das Innere des Piezometers *A* durch den Hahn *D* mit der äusseren Luft, durch den Hahn *E* mit jenem Recipienten in Verbindung gesetzt werden.

Sind *H* und *E* geschlossen, *D* und *G* offen, so wird das Piezometer nur von aussen comprimirt, der Gipfel der Flüssigkeitssäule im Piezometerrohr steigt um eine Grösse w. — Sind *D* und *G* geschlossen, *H* und *E* aber offen, so ist bloss das Innere des Piezometers einem Druck ausgesetzt, der Gipfel der Flüssigkeitssäule im Piezometerrohr sinkt um eine Grösse w' unter seine ursprüngliche Stellung. — Werden endlich *H* und *D* geschlossen, *E* und *G* aber geöffnet, so ist das Piezometer innen und aussen dem gleichen Druck ausgesetzt; der Gipfel der Flüssigkeitssäule erleidet nun eine Depression, die wir mit w'' bezeichnen wollen. — Durch Combination dieser drei Beobachtungen kann man nun ermitteln, wie gross im letzteren Falle die Depression hätte sein müssen, wenn das Gefäss *A* gar keine Aenderung des Volumens erfahren hätte. Nach dieser Methode fand Grassi**) folgende Werthe für die Compression durch den Druck einer Atmosphäre:

*) Mémoires de l'Acad. des sciences 1847.

**) Ann. de chim. et de phys. III. Ser. T. 31.

Quecksilber	bei	0	Grad	3	Millionstel
Wasser	„	0	„	50	„
„	„	53	„	44	„
Aether	„	0	„	111	„
„	„	14	„	140	„
Alkohol	„	7	„	84	„
„	„	13	„	95	„
Chloroform	„	12	„	65	„

Cohäsion der Flüssigkeiten. Wenn die Flüssigkeiten auch 112
keine selbständige Gestalt haben, wenn sich auch die einzelnen Theilchen ungemein leicht an einander verschieben lassen, so hört deshalb doch noch nicht jeder Zusammenhang zwischen ihnen auf, wie dies schon aus der Tropfenbildung hervorgeht. Giesst man etwas Wasser auf eine mit Bärlappsamen (*Semen lycopodii*) bestäubte Fläche oder etwas Quecksilber auf eine Porcellanfläche, so bilden sich fast kugelförmige Tröpfchen. Wenn gar kein Zusammenhang zwischen den einzelnen Theilchen des Wassers, zwischen denen des Quecksilbers bestände, so müssten die Theilchen gleichsam wie Staub auseinanderfallen; bei langsamem Ausgiessen von Flüssigkeiten aus irgend einem Gefässe würden sie nicht in einzelnen Tropfen herabfallen; ein solcher Tropfen fällt erst, wenn sein Gewicht gross genug ist, um die Cohäsion zwischen dem fallenden Tropfen und der zurückbleibenden Flüssigkeit zu überwinden.

Fig. 413.

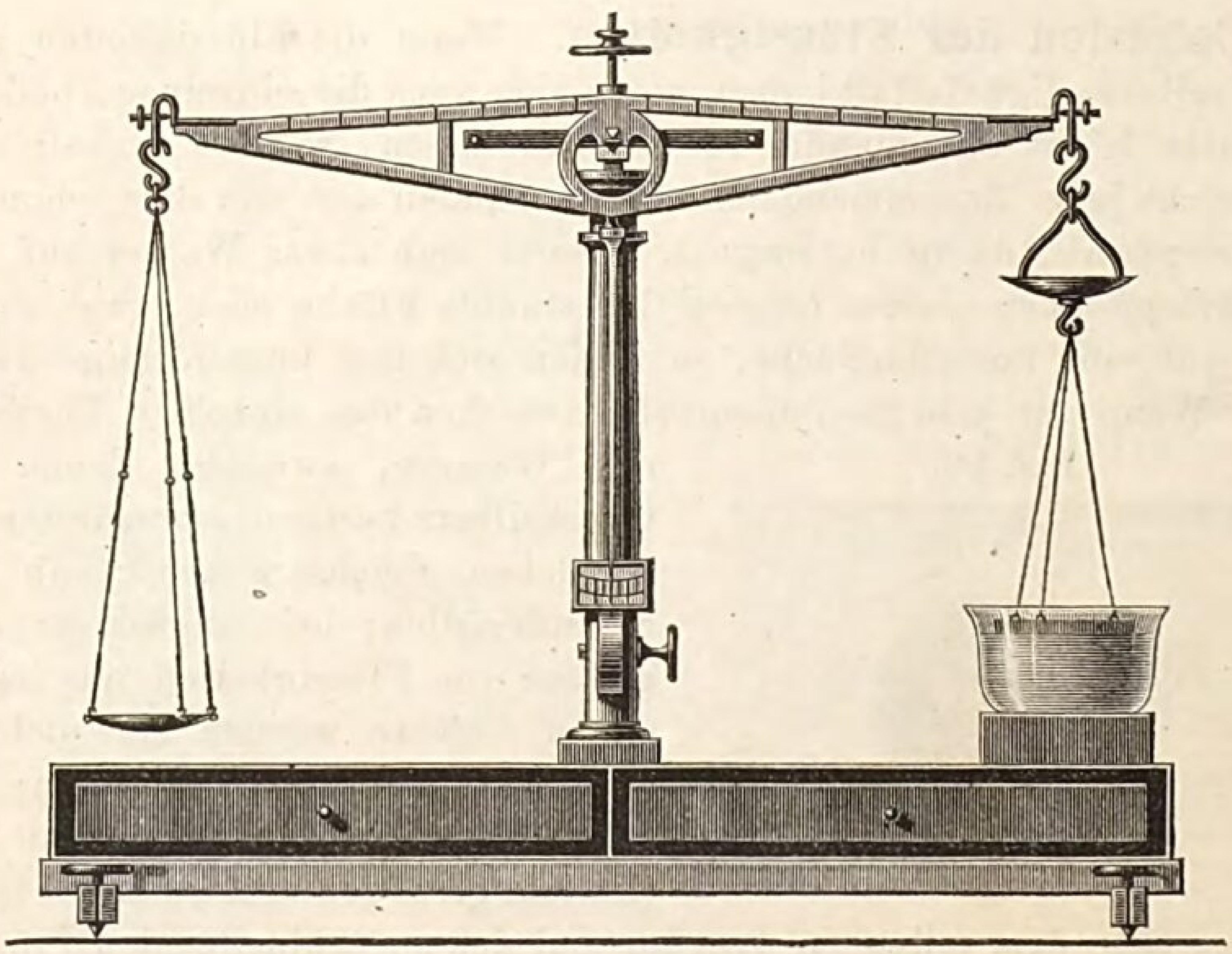


Jede sich selbst überlassene, dem Einfluss äusserer Kräfte entzogene Flüssigkeitmasse muss eine Kugel bilden, wie wir dies z. B. an den herabfallenden Regentropfen beobachten. Selbst grössere Flüssigkeitsmassen runden sich zur Kugel ab, wenn es gelingt, sie dem Einfluss der Schwere zu entziehen. Es geschieht dies dadurch, dass man eine gewisse Menge einer Flüssigkeit mitten in eine andere Flüssigkeit bringt, mit welcher sie sich nicht mischt, mit welcher sie aber vollkommen gleiches specifisches Gewicht hat; z. B. Olivenöl (specif. Gew. 0,915) in eine entsprechende Mischung von Wasser und Weingeist. Wenn man das Oel mit Hülfe einer Pipette mitten in die Mischung hineinbringt, so kann man wallnussgrosse Oelkugeln erzeugen, welche in der umgebenden Flüssigkeit schweben, wie Fig. 413 andeutet.

Für die Cohäsion, mit welcher die einzelnen Theilchen einer Flüssigkeit zusammenhalten, lässt sich in folgender Weise ein Maass finden. Wenn eine feste Scheibe auf die Oberfläche einer Flüssigkeit gesetzt wird, so kann man sie in verticaler Richtung nicht mehr in die Höhe ziehen, wie wenn sie frei in der Luft hinge; es ist, um sie in die Höhe

zu ziehen, eine mehr oder minder grosse Kraft nöthig. Um diese Kraft zu messen, bedient man sich der Wage. An den einen Arm derselben hängt man eine horizontale Scheibe an, auf der anderen Seite legt man ein Gegengewicht auf, welches sie im Gleichgewicht hält. Wenn das Gleichgewicht hergestellt ist, nähert man der Scheibe von unten die Oberfläche einer Flüssigkeit, bis diese die untere Fläche der Scheibe gerade berührt, Fig. 414, legt dann, ohne zu stossen, auf der anderen

Fig. 414.



Seite Gewichte auf und bemerkt, wie viel nöthig ist, um die Scheibe von der Flüssigkeit abzureissen.

Um eine Glasscheibe von 118,366 mm Durchmesser abzureissen, waren nach Gay-Lussac's Versuchen je nach der Natur der Flüssigkeiten verschiedene Gewichte nöthig, wie die folgende Tabelle zeigt.

Namen der Substanz.	Specifisches Gewicht.	Temperatur.	Gewicht.
Wasser	1	8,5° C.	59,40 g
Alkohol	0,8196	8	31,08 „
„	0,8595	10	32,87 „
„	0,9415	8	37,15 „
Terpentinöl . . .	0,8695	8	34,10 „

Diese Resultate sind unabhängig vom Material der Platte, vorausgesetzt, dass dieselbe von der Flüssigkeit benetzt wird. Es ist dies leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass die Trennung beim Abreissen nicht zwischen den Theilchen der Flüssigkeit und denen der Platte, sondern zwischen den Flüssigkeitstheilchen selbst stattfindet, von denen eine Schichte an der Platte in Folge Adhäsion hängen bleibt.

Nach Poisson bestehen zwischen dem grössten Gewichte p im Augenblicke der Trennung, welches der grössten Höhe h der gehobenen Flüssigkeitssäule entspricht, dem Radius R der Platte und dem specif. Gew. der Platte die Beziehungen:

$$p = R^2 \pi h s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

und

$$h = a\sqrt{2} - \frac{a^2}{3R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Aus 1) ergiebt sich, dass die gehobene Flüssigkeitsmenge ebenso gross ist, wie wenn sie einen Cylinder von Radius R und der Höhe h ausfüllen würde, während ihre wirkliche Gestalt hiervon abweicht.

In 2) bedeutet a eine Constante, deren Bedeutung in den nächstfolgenden Paragraphen auseinandergesetzt werden soll. Je grösser die Platte wird, desto mehr nähert sich h dem Grenzwerthe $a\sqrt{2}$, welcher für Wasser 5,544 mm beträgt.

Adhäsion zwischen festen und flüssigen Körpern. 113

Zwischen festen und flüssigen Körpern finden ähnliche Adhäsionserscheinungen statt, wie zwischen festen Körpern unter einander, d. h. die Flüssigkeiten haften mehr oder weniger stark an den Oberflächen fester Körper. Spritzt man z. B. einige Wassertropfen gegen eine vertical stehende Glasscheibe, so werden sie zum Theil daran hängen bleiben und nicht herunterlaufen, wie es der Fall sein würde, wenn der Schwerkraft der Tropfen nicht durch eine andere Kraft, nämlich durch die Anziehung, welche zwischen den Theilchen der Flüssigkeit und der Oberfläche der Glaswand stattfindet, das Gleichgewicht gehalten würde.

Diese Adhäsion ist auch die Ursache, dass Flüssigkeiten, die man aus einem Gefässe ausgiessen will, so leicht an der äusseren Wand herablaufen. Um dies zu verhüten, bestreicht man den äusseren Rand der Gefässe mit Fett, oder man lässt die ausfliessende Flüssigkeit an einem benetzten Glasstäbchen herablaufen.

Bei den in §. 112 besprochenen Versuchen wurde die feste Scheibe von der Flüssigkeit benetzt; eine Adhäsion ist aber zwischen beiden auch dann noch vorhanden, wenn keine Benetzung stattfindet, wie z. B. zwischen Glas und Quecksilber.

Wiederholt man den §. 112 beschriebenen Versuch auf die Weise, dass man die Glasscheibe auf Quecksilber setzt, so ist bei den dort angegebenen Dimensionen ein Zulagegewicht von 158 g nöthig, um ein Ab-

reissen zu bewirken. Hier aber bleibt kein Quecksilber an dem Glase hängen, das Gewicht von 158 g war also nöthig, um die Adhäsion des Quecksilbers an die Glasplatte zu überwinden.

Die Adhäsion des Quecksilbers an das Glas erklärt einige Erscheinungen, welche für den ersten Anblick auffallend erscheinen. So bleibt z. B., wenn man wohl gereinigte, vollkommen von aller Luft befreite und etwas enge Röhren zum Toricelli'schen Versuch anwendet, manchmal die ganze Quecksilbersäule bis oben hin hängen, und es sind dann einige Stösse nöthig, um zu bewirken, dass die Quecksilbersäule bis zu der dem Luftdruck entsprechenden Höhe herabfällt.

Die Adhäsion und die Reibung des Quecksilbers am Glase hat bei allen Manometerröhren einen Einfluss, der um so störender wird, je enger die Röhren sind. Daher sind nicht allein für Barometer, sondern auch für alle Manometer weite Röhren vorzuziehen. Bei sehr engen Röhren kann der Einfluss der Wände sehr bedeutende Fehler veranlassen. Man fülle z. B. eine heberförmig gebogene Thermometerröhre halb mit Quecksilber, so dass es in beiden Schenkeln gleich hoch steht. Saugt man nun an dem oberen Ende des einen Schenkels, so wird in diesem Schenkel das Quecksilber steigen. Ueberlässt man nun die Röhre wieder sich selbst, so fällt das Quecksilber nicht wieder zurück, es bleibt in dem einen Schenkel mehrere Centimeter höher stehen als im anderen. Solche Röhren geben also, als Manometerröhren angewendet, immer sehr unzuverlässige Resultate.

Wenn das Quecksilber einer Barometerröhre längere Zeit im Kochen erhalten wird, so zeigt sich nachher der Meniscus weit flacher als sonst. Es rührt dies, wie Dulong gezeigt hat, daher, dass in Folge des langen Kochens sich etwas Quecksilberoxyd bildet, welches, in Quecksilber aufgelöst, dessen Dichtigkeit nicht merklich verändert, wohl aber seine Adhäsion an das Glas vermehrt.

114 **Oberflächenspannung, erstes Capillaritätsgesetz.** An der Oberfläche von Flüssigkeiten kommen Erscheinungen vor, welche den Eindruck hervorrufen, als wäre dieselbe mit einem dünnen, zähen Häutchen überzogen, dessen Spannung als Ursache der Abweichungen von den sonstigen hydrostatischen Gesetzen erscheint. So ist es z. B. möglich, feinen Sand auf die Oberfläche des Wassers zu streuen, welcher nicht sofort untersinkt, obwohl er ein viel grösseres specifisches Gewicht hat als die Flüssigkeit. Sogar grössere Körperchen, wie z. B. feine Nähnadeln, lassen sich, wenn sie durch fettige Oberfläche gegen das Benetztwerden geschützt sind, vorsichtig auf Wasser legen, ohne unterzusinken. Gewisse Insecten, Fig. 415, laufen über die Oberfläche des Wassers, ohne darin so weit unterzusinken, als man nach ihrem Gewichte erwarten müsste.

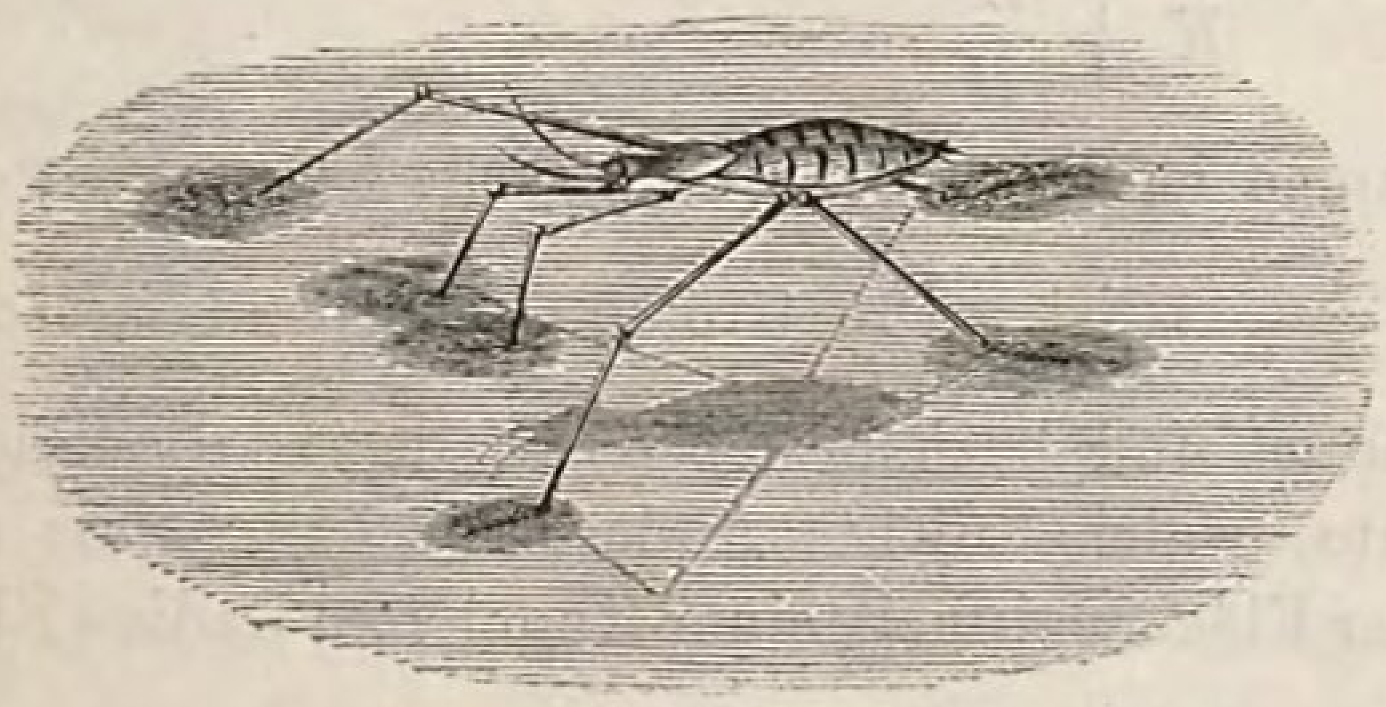
Mit diesen Thatsachen hängen jene an Seifenblasen, sowie die sämmtlichen an Haarröhrchen beobachteten Erscheinungen aufs Engste

zusammen und werden daher mit dem gemeinsamen Namen **Capillaritätserscheinungen** zusammengefasst.

Wir suchen zunächst eine Erklärung der Oberflächenspannung und ein Gesetz über die Grösse derselben.

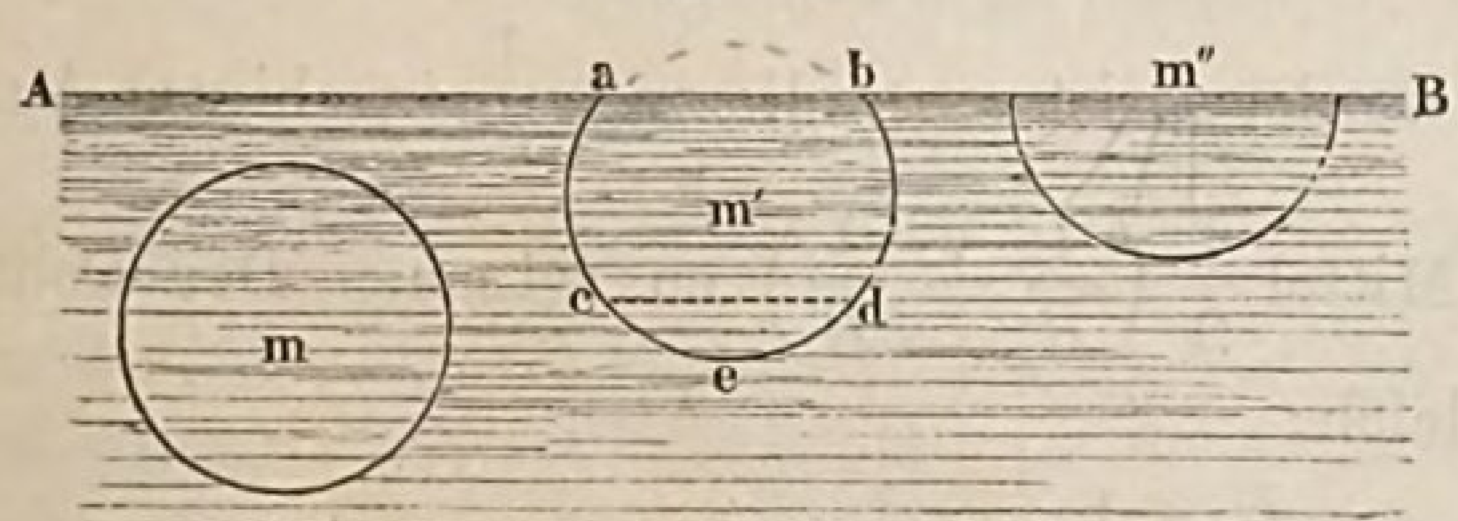
Die anziehenden Kräfte der Flüssigkeitsmoleküle wirken nur auf einen engen Umkreis in merklicher Stärke. Bezeichnen wir mit r den Radius dieses Umkreises, und betrachten zunächst ein Molekül m, Fig. 416, welches von der Oberfläche der Flüssigkeit um mehr als die Länge von r absteht. Offenbar halten sich da alle von dem Molekül m ausgehenden, beziehungsweise ringsum auf dasselbe einwirkenden Kräfte das Gleichgewicht.

Fig. 415.



Für ein Molekül m', welches von der Oberfläche um weniger als den Radius absteht, ist dies nicht mehr der Fall. Denken wir uns mit dem Radius r die Kugelfläche construirt, so sind nur diejenigen Kräfte mit einander im Gleichgewicht, welche von Molekülen innerhalb des Raumes $abdc$ ausgehen. Dagegen finden die Anziehungskräfte, welche von Molekülen innerhalb des Kugelabschnittes cde ausgehen, keine Compensation; sie werden sich zu einer Resultirenden vereinigen, welche senkrecht auf die Oberfläche ab gerichtet ist. Bei einem Molekül m'', welches auf der Oberfläche liegt, ist dies in noch höherem Grade der Fall, da alle Kräfte von Molekülen in der Halbkugel um m'' auf letzteres einwirken. Es werden also jedenfalls alle Moleküle, welche von der Oberfläche bis zu einer Tiefe r entfernt sind, eine normal auf die Oberfläche gerichtete Kraft erfahren, welche wir **Cohäsionsdruck** nennen und deren Stärke wir per Flächeneinheit mit dem Buchstaben K bezeichnen wollen.

Fig. 416.



Dieser Cohäsionsdruck wird um einen gewissen Betrag vermehrt oder vermindert, wenn die Oberfläche, statt eben zu sein, convex oder concav ist.

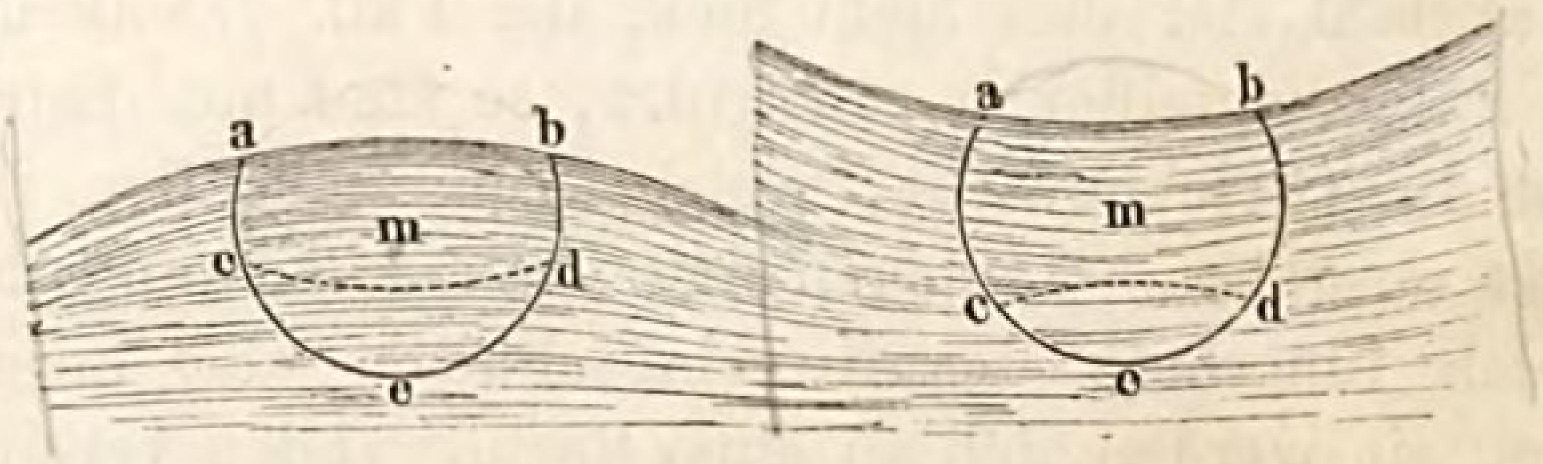
Um dies einzusehen, genügt ein Blick auf die Fig. 417 (a. f. S.). Man ersieht aus derselben unmittelbar, dass der Raum cde, welcher jene Moleküle enthält, deren Anziehung nicht compensirt ist, bei convexer

Oberfläche grösser ist als bei ebener, dagegen bei concaver Oberfläche kleiner als bei ebener. Es kommt daher zu der Kraft K in diesen Fällen noch eine positive oder negative Grösse dazu, welche der Theorie und der Erfahrung gemäss in demselben Verhältniss zunimmt, in welchem die Krümmung der Oberfläche zunimmt. Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser mit R, so ist demnach jene Grösse dem reciproken Werthe $\frac{1}{R}$ direct proportional. Der ganze Cohäsionsdruck kann daher ausgedrückt werden durch die Formel:

$$K + \frac{H}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

worin R als positiv zu nehmen ist, wenn die Oberfläche convex ist, dagegen negativ, wenn sie concav ist. Die Grösse $\frac{H}{R}$ wird als Oberflächenspannung bezeichnet und bezieht sich ebenfalls auf die Fläche Eins. H ist eine Constante, welche nichts Anderes bedeutet, als die Oberflächenspannung auf der Flächeneinheit einer Kugel vom Radius Eins.

Fig. 417.



Wenn die Oberfläche der Flüssigkeit nicht kugelförmig ist, sondern in verschiedenen auf ihr senkrechten Durchschnitten einen verschieden grossen Krümmungsradius besitzt, dessen grösster und kleinster Werth mit R und R' bezeichnet werde, so ist an Stelle von $\frac{1}{R}$ in obigem Ausdrucke das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ zu setzen. Der Cohäsionsdruck ist demnach gleich:

$$K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Auch hier kann wiederum das Zeichen von R oder R' positiv oder negativ sein.

Der Ausdruck 2) enthält das erste Gesetz der Capillarität. Die Constante $\frac{H}{2} = \alpha$ wird (nach Quincke) die Capillaritätsconstante (auch Cohäsionsconstante) genannt. Sie bedeutet eine Kraft und wird deshalb im praktischen Maasse durch eine Anzahl Milligramme ausgedrückt, deren Gewicht dieser Kraft gleich ist. Wir wollen gleich hier bemerken, dass (nach Poisson) auch eine andere Grösse, nämlich

$\frac{H}{s}$, worin s das specifische Gewicht bedeutet, unter der Bezeichnung a^2 mit dem Namen Capillaritätsconstante belegt wird. Um Verwechselungen zu vermeiden, wollen wir (ebenfalls nach Quincke) diese letztere Constante $a^2 = \frac{H}{s} = \frac{2\alpha}{s}$ unter dem Namen specifische Cohäsion gebrauchen. Die Grösse $a = \sqrt{\frac{H}{s}}$ ist, nebenbei bemerkt, identisch mit dem in §. 112 unter 2) gebrauchten a und hat zugleich die physikalische Bedeutung der Steighöhe einer Flüssigkeit an einer von ihr vollkommen benetzten verticalen Wand (in Millimetern).

Das vorgetragene erste Capillaritätsgesetz giebt uns bereits die Erklärung für einige Thatsachen. So z. B. erklärt es die in §. 112 besprochene Erscheinung, dass Flüssigkeiten, welche vor der Einwirkung äusseren Druckes geschützt sind, Kugelform annehmen. An jeder anderen Form kommen Stellen verschiedener Krümmung vor. Da nun aber an den Stellen stärkerer Krümmung der Cohäsionsdruck nach innen stärker ist, so wird sich die Gestalt so lange ändern müssen, bis endlich überall dieselbe Krümmung und damit allseitiges Gleichgewicht des Cohäsionsdruckes eingetreten ist.

Auch einige Erscheinungen an Seifenblasen können wir nun erklären. Ist der Radius einer Seifenblase $= R$, so hat die Aussenfläche des Häutchens den positiven Krümmungshalbmesser $+ R$, die Innenseite den negativen $- R$. Der Cohäsionsdruck ist daher:

$$\text{Von aussen nach innen} = K + \frac{H}{R},$$

$$\text{von innen nach aussen} = K - \frac{H}{R}.$$

Es muss daher von aussen nach innen ein Drucküberschuss $= \frac{2H}{R}$ herrschen. Mit diesem Ueberdrucke wird die Luft im Innern der Blase comprimirt; diesen Druck hat man beim Aufblasen zu überwinden und mit demselben Druck entweicht die Luft aus der Blasenöffnung, wenn man sie offen lässt.

In der That sieht man dann die Blase sich zusammenziehen.

Ein Gleichgewicht des Druckes auf beiden Seiten eines Häutchens von Seifenwasser ist nur möglich, wenn

$$K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

da nämlich jedem positiven Werth eines Krümmungshalbmessers auf der einen Seite des Häutchens ein gleich grosser, negativer auf der Gegenseite entspricht. Dies ist nur möglich, wenn

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = o$$

ist, und diese Bedingung wiederum ist auf zweierlei Weise erfüllbar. Einmal, indem $R = \infty$ und $R' = \infty$, d. h. das Häutchen eben ist, dann zweitens, indem

$$R = -R',$$

d. h. wenn auf jeder Seite in rechtwinkligen Normalebenen die beiden Krümmungen gleich gross aber entgegengesetzt, d. h. die eine convex, die andere concav sind.

Der erste Fall wird experimentell verwirklicht, indem man einen ebenen Drahtrahmen, Fig. 418, in Seifenwasser taucht und wieder herauszieht.

Der zweite Fall tritt ein, wenn man ein System zweier gleich grosser paralleler Drahtringe mit einem Seifenhäutchen überzieht, wie es Fig. 419 darstellt.

Ausser diesen Figuren kann man mit entsprechenden Drahtgestellen noch viele andere erhalten. Wird ein aus sechs gleich langen Draht-

Fig. 418.

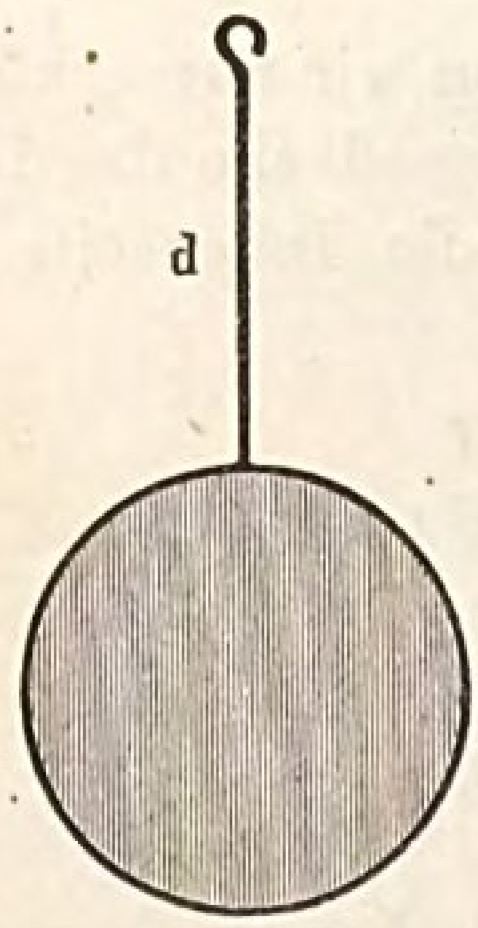
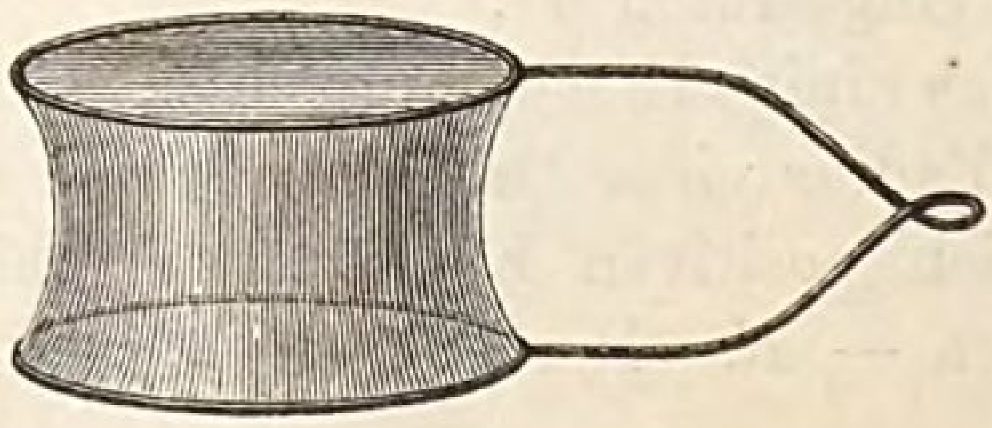


Fig. 419.



stücken gebildetes und mit einem Stiele versehenes Tetraëder *abcd*, Fig. 420, in die Seifenlösung getaucht und langsam wieder herausgezogen, so wird entweder jede der vier Tetraëderflächen mit einem zarten durchsichtigen Häutchen überzogen erscheinen, oder es bilden sich sechs feine nach dem Mittelpunkte *s*, Fig. 420, zusammenlaufende Flüssigkeitsflächen, deren jede an einer der sechs Tetraëderkanten anliegt.

Aehnliche Erscheinungen beobachtet man an einem Drahtgestell, welches die Kanten eines Würfels bildet. In das Seifenwasser eingetaucht und herausgezogen, werden entweder Würfelflächen mit einem Häutchen überzogen oder es bilden sich die in Fig. 421 dargestellten Häutchen etc. Wir müssen uns hier darauf beschränken, nur die einfachsten der zahlreichen und interessanten Gleichgewichtsfiguren zu erwähnen, welche Plateau eingehender untersucht hat und welche sämmtlich die mathematische Theorie bestätigen.

Zur Anstellung der eben besprochenen Versuche ist eine Lösung von Oelseife (Venetianische oder Marseiller Seife, auch medicinische

Seife genannt) besser als gewöhnliches Seifenwasser. Noch bessere Resultate erhält man mit Gemengen von Seifenwasser und Glycerin. Plateau giebt verschiedene Recepte an, unter denen er das folgende als das beste bezeichnet*). Ein beliebiges Quantum Marseiller Seife wird in kleine Stückchen geschnitten und in der 40fachen Gewichtsmenge destillirten Wassers bei mässiger Wärme gelöst. Die auf die Zimmertemperatur abgekühlte Lösung wird filtrirt und zu 30 Volumen des Filtrats 22 Volumina Glycerin zugesetzt. Die tüchtig geschüttelte Masse bleibt eine Woche lang stehen, wird endlich, mittelst Eiswassers auf ungefähr 3° C. erkaltet und durch sehr durchdringliches Papier an einem kühlen Orte filtrirt. Die ersten Portionen der durchgehenden Flüssigkeit sind trübe und werden auf das Filter zurückgegossen, bis das Filtrat ganz klar ist.

Auch das folgende Verfahren liefert eine für unsere Versuche sehr geeignete Flüssigkeit: 25 g Marseiller Seife werden in 1 Liter destillirten

Fig. 420.

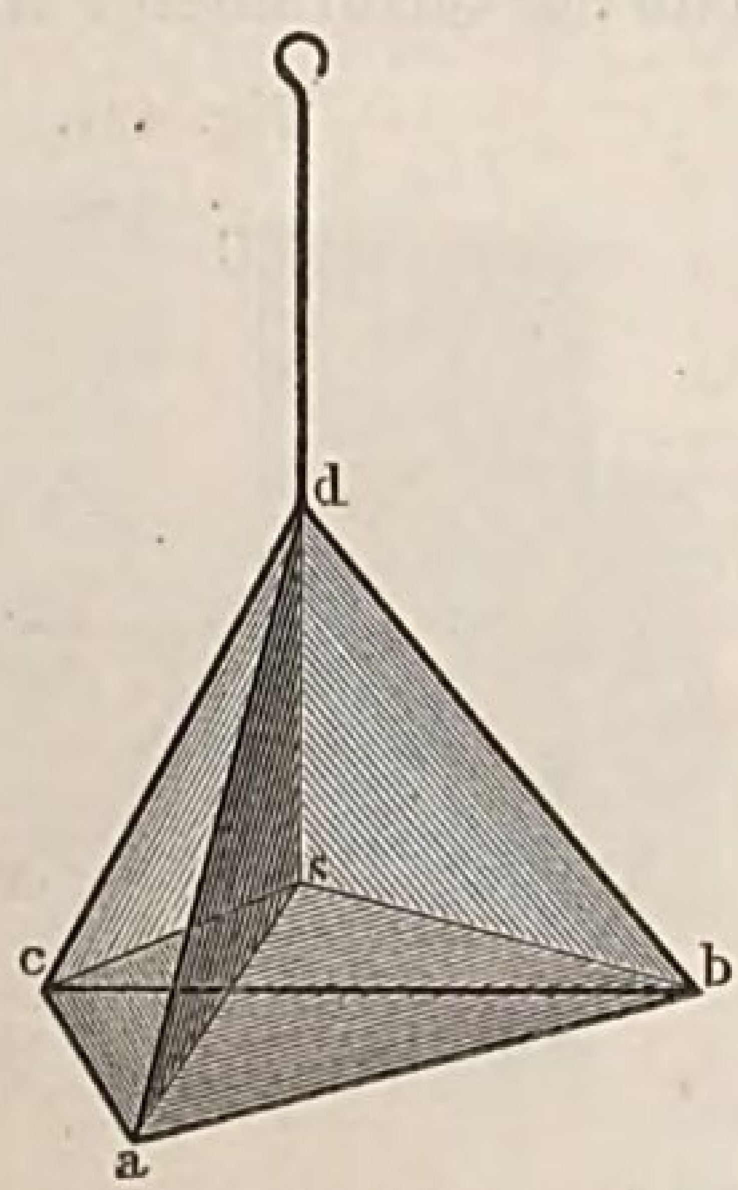
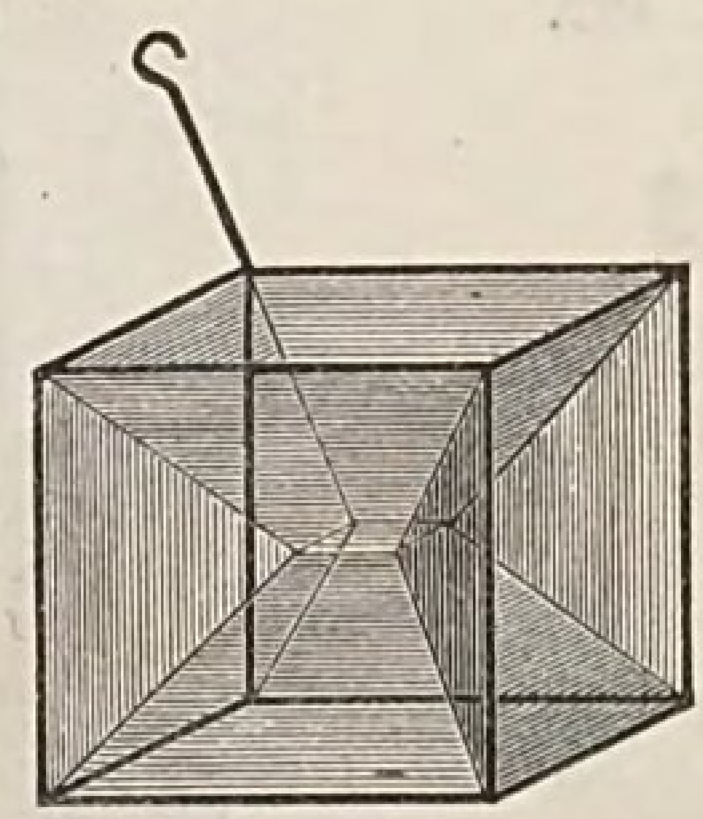


Fig. 421.



Wassers bei gelinder Wärme gelöst, die Lösung filtrirt und dem Filtrat 666 g Glycerin zugesetzt. Die anfangs klare Mischung trübt sich alsbald, nach 8 bis 12 Tagen ist der Niederschlag so weit in die Höhe gestiegen, dass er eine auf der Oberfläche schwimmende Schicht bildet. Die unter dieser Schicht befindliche klare Flüssigkeit wird mittelst eines Hebers abgezogen und kann längere Zeit aufbewahrt werden.

Wir haben die Bereitung einer guten Seifenlösung hier deshalb etwas eingehender besprochen, weil solche nicht nur zu den oben besprochenen Versuchen, sondern auch zu der später zu besprechenden Darstellung der Newton'schen Farbenringe gebraucht wird.

Der Randwinkel, zweites Capillaritätsgesetz. Ueberall, 115
wo ein fester Körper mit einer Flüssigkeit in Berührung kommt, tritt eine Störung der freien Oberfläche der letzteren auf. Taucht man z. B.

*) Pogg. Ann. CXXX.

eine Glasplatte vertical in Wasser, so findet ein Aufsteigen des Wassers an der Glasfläche statt, Fig. 422, taucht man dagegen die Glasplatte in Quecksilber, so findet eine Depression statt, Fig. 423.

Untersuchen wir diese Erscheinung etwas näher. In Fig. 424 stelle *CD* die verticale Wand eines festen Körpers dar, welcher in eine durch die horizontale Oberfläche *AB* begrenzte Flüssigkeit eingetaucht ist. Nehmen wir zunächst an, die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit erstrecke sich noch bis an die verticale Wand *CD*, und *A* sei ein Punkt der Kante, in welcher die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit mit der Wand zusammentrifft.

Betrachten wir nun die Kräfte, welche auf *A* wirken. Die Molekularanziehungen aller innerhalb des Quadranten *BAD* liegenden Flüssigkeitspartikelchen, welche auf das Theilchen *A* wirken, vereinigen sich zu einer Resultirenden, deren Richtung den Winkel *BAD* halbirt und deren Grösse wir mit *P* bezeichnen wollen. Ebenso vereinigen sich die Molekularanziehungen, welche die innerhalb des Quadranten *FAD* liegen-

Fig. 422.

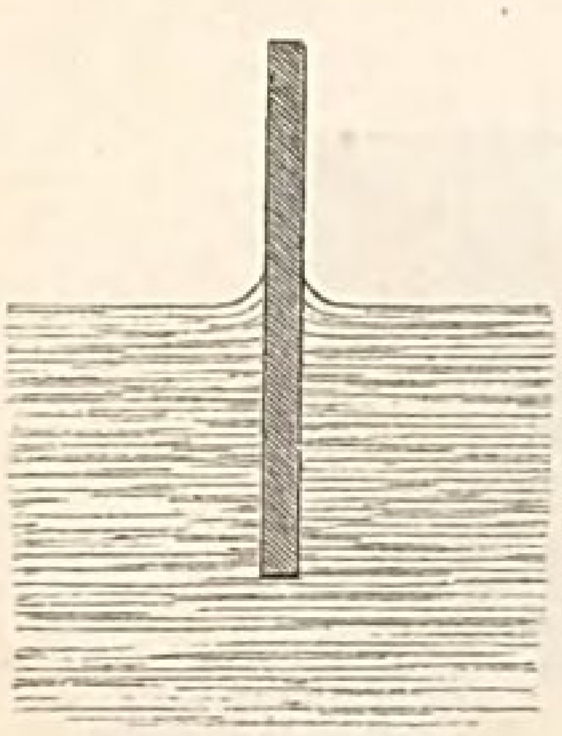


Fig. 423.

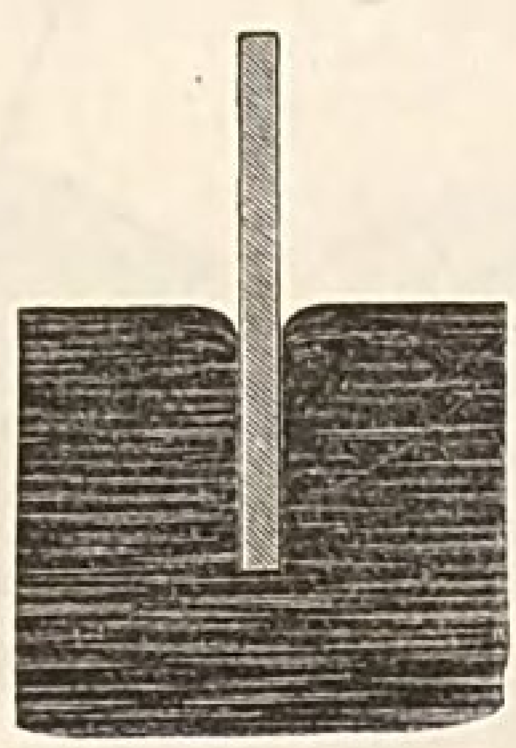
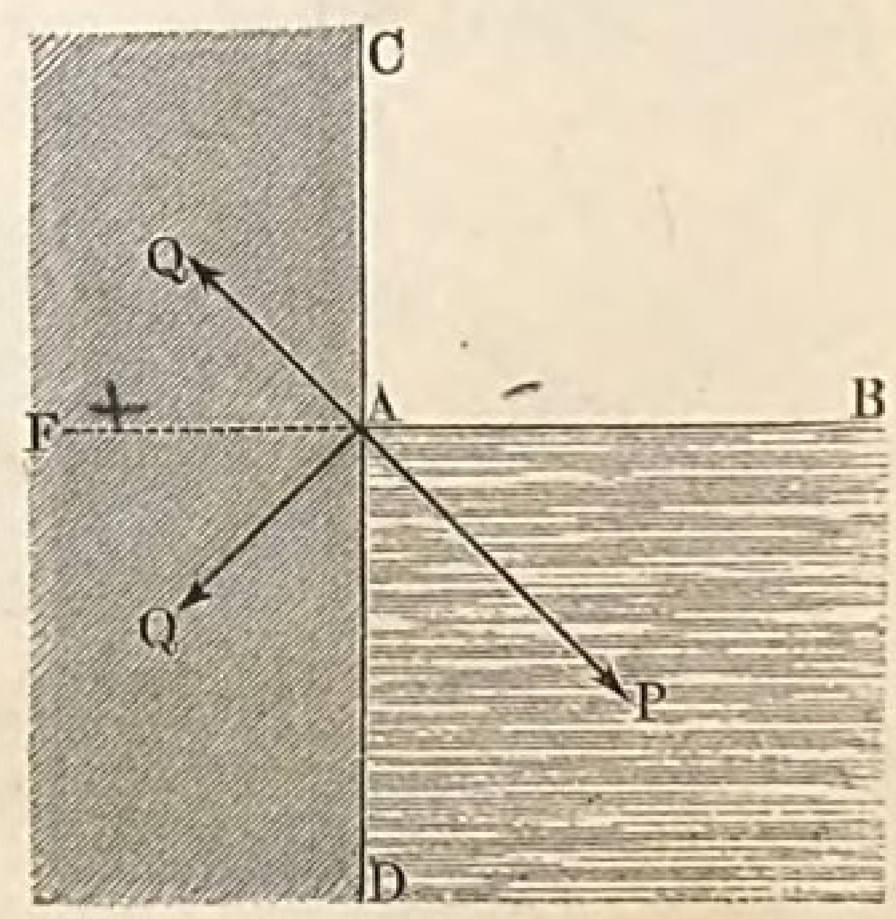


Fig. 424.



den Partikelchen der festen Wand auf das Flüssigkeitstheilchen *A* ausüben, zu einer Resultirenden *Q*, deren Richtung den Winkel *FAD* halbirt. Eine den Winkel *FAC* halbirende Kraft *Q* endlich ist die Resultirende der Molekularanziehungen, welche von den innerhalb des Quadranten *FAC* liegenden Partikelchen der festen Wand auf *A* ausgeübt werden.

Die verticalen Composanten der beiden Kräfte *Q* heben einander auf, die verticale Composante der Kraft *P* ist $P \cos 45^0$. Sie ist nach abwärts gerichtet und summirt sich zu der auf *A* wirkenden Schwerkraft. Wir wollen die Summe aller auf *A* vertical nach abwärts wirkenden Kräfte mit *H* bezeichnen.

Die horizontale Composante der Kraft *P* ist $P \cos 45^0$; sie wirkt in der Richtung von *A* nach *B*. Die Summe der horizontalen Composanten der beiden Kräfte *Q* ist $2\, Q \cos 45^0$; sie wirkt in der Richtung von *A* nach *F*. Bezeichnen wir die Richtung von *A* nach *F* als die positive, die von *A* nach *B* also als die negative, so ist die Summe aller horizontalen Kräfte, welche auf das Partikelchen *A* wirken:

$$K = (2\,Q - P)\cos 45^0.$$

Wenn $P > 2\,Q$, so wird K negativ, K ist also eine in der Richtung von A nach B wirkende Kraft, welche sich mit der verticalen Kraft H zu einer Resultirenden R verbindet, deren Richtung innerhalb des Quadranten DAB liegt. Auf dieser Resultirenden R, Fig. 425, muss aber die freie Oberfläche der Flüssigkeit in A rechtwinklig stehen, die Oberfläche der Flüssigkeit wird also die in Fig. 425 abgebildete Gestalt annehmen müssen, es wird eine Depression der Flüssigkeit an der Wand stattfinden.

Wenn $P < 2\,Q$, so ist K positiv, also eine von A nach F hin wirkende Kraft, welche sich mit H zu einer Resultirenden R verbindet, deren Richtung innerhalb des Winkels FAD, Fig. 424, liegt. In A muss die Oberfläche der Flüssigkeit rechtwinklig auf dieser Resultirenden R stehen, und da sie mit wachsender Entfernung von der Wand allmälig in die Horizontale übergehen muss, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit in

Fig. 425.

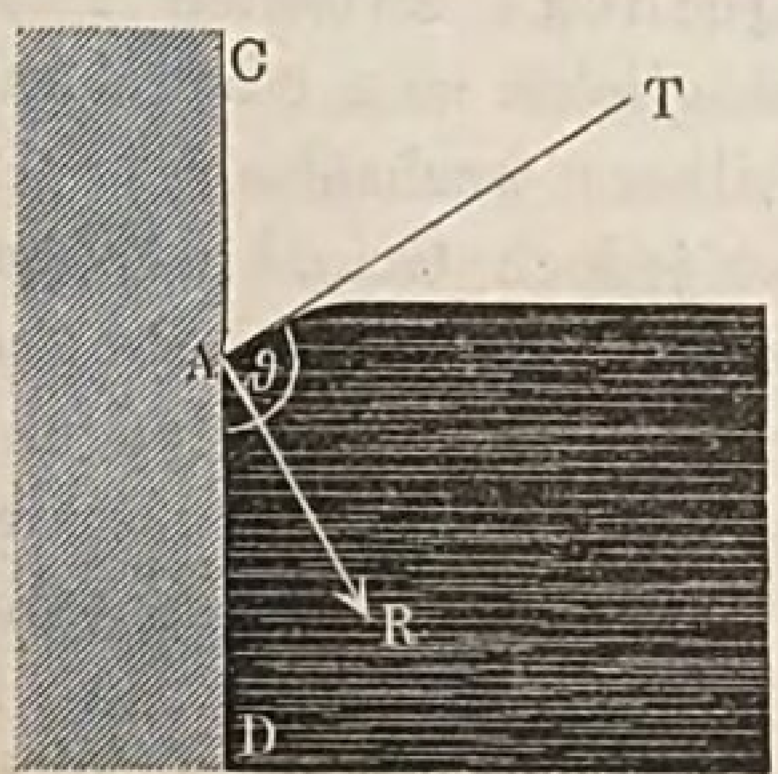
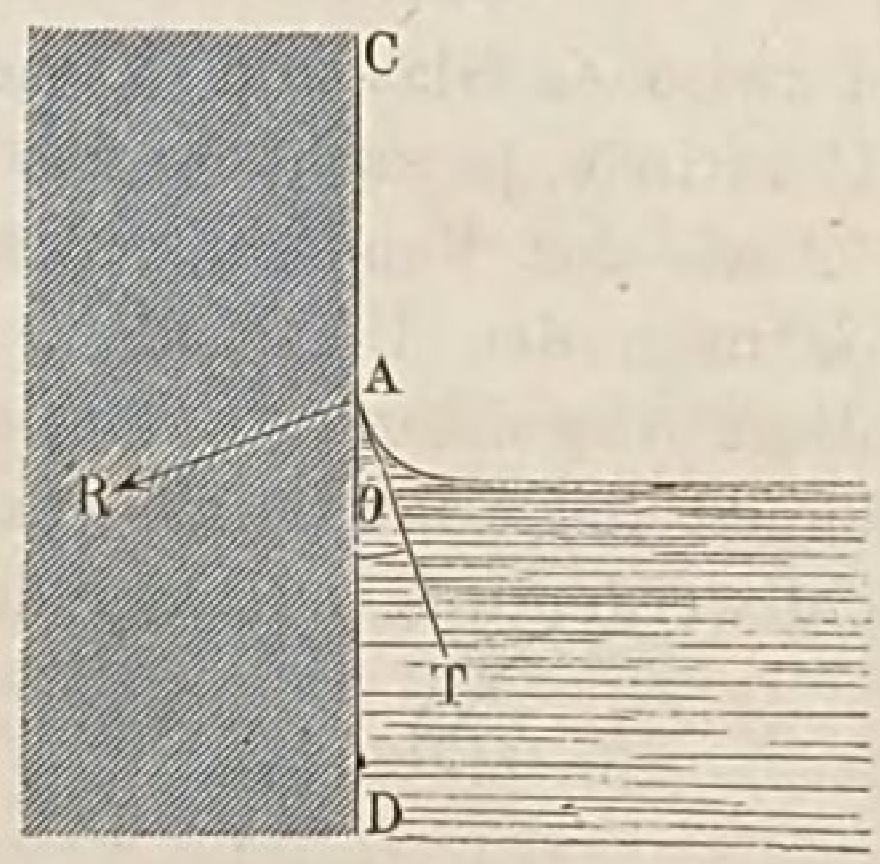


Fig. 426.



der Nähe der Wand die in Fig. 426 dargestellte Form annehmen, es findet ein Aufsteigen der Flüssigkeit an der Wand statt.

Wenn also $P < 2\,Q$, wenn ein Ueberwiegen der Adhäsion über die Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen stattfindet, so wird der feste Körper durch die Flüssigkeit benetzt. Eine Benetzung tritt nicht ein, wenn die Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen überwiegt, wenn $P > 2\,Q$.

Da die Resultirende R, Fig. 425 und Fig. 426, einen bestimmten Winkel mit der Wand CD macht, dessen Grösse von dem Verhältniss der Kräfte P und Q abhängt, so muss auch die in A an die Oberfläche der Flüssigkeit gelegte, auf R senkrechte Tangente AT stets denselben Randwinkel $DAT = \vartheta$ mit der Wand CD machen, so oft dieselbe Flüssigkeit mit demselben festen Körper in Berührung kommt *). So z. B. ist der Winkel ϑ, Fig. 427 (a. f. S.), welchen ein auf einer Glasplatte befindlicher Quecksilbertropfen bildet, gleich dem Winkel ϑ in

*) In der vorigen Auflage wurde, wie auch anderwärts vorkommt, statt des Winkels ϑ sein Supplement zu 180^0 mit dem Namen Randwinkel belegt.

Fig. 425. Ebenso ist für einen Tropfen Wasser auf einer Glasplatte, Fig. 428, der Winkel ϑ gerade so gross, wie für einen unterhalb der Glasplatte hängenden Tropfen. Auch in dem Falle, dass eine Luftblase zwischen Wasser und Glas abgesperrt ist, erscheint der Winkel ϑ, Fig. 429, von derselben Grösse.

Dieser Satz von der Constanz des Randwinkels gilt als das zweite Capillaritätsgesetz. Es muss jedoch bemerkt werden, dass die Versuche diese Constanz nicht immer bestätigen, dass z. B. der Rand-

Fig. 427.

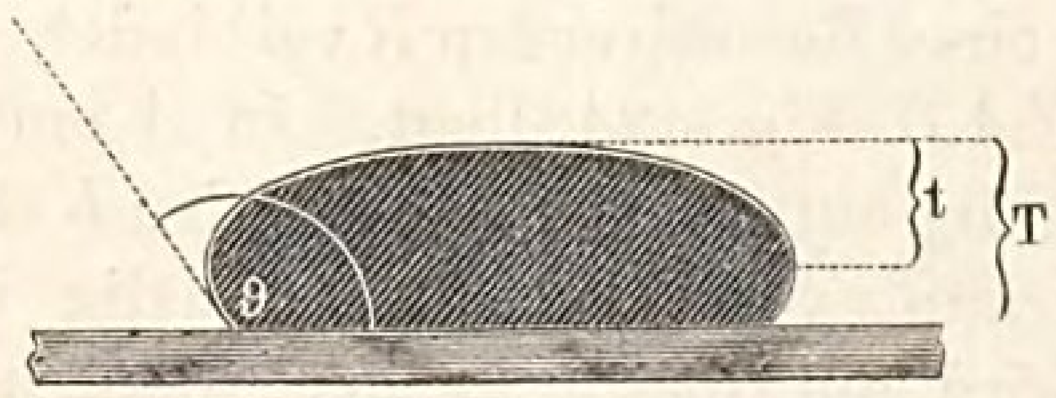
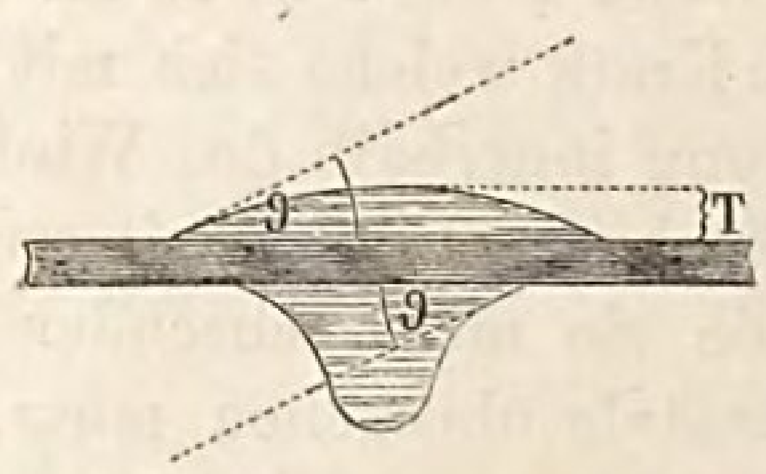


Fig. 428.



winkel zwischen Glas und Wasser nach Quincke zwischen $4^0\ 40'$ und $40^0\ 31'$ variirte, je nachdem das erstere möglichst rein oder etwas fettig war. Auch der Randwinkel des Quecksilbers wechselte von 129^0 bis 143^0 je nach den Umständen. Man hat jedoch Grund zur Annahme, dass diese Abweichungen durch sehr geringfügige Aenderung der Beschaffenheit der Materialien insbesondere an ihrer Oberfläche hervorgebracht werden und verschwinden würden, wenn es möglich wäre, Oberflächen von ganz constanter Beschaffenheit in Anwendung zu bringen. Wenn eine Flüssigkeit einen festen Körper vollkommen benetzen würde, so würde der Randwinkel ϑ den Werth Null haben.

Fig. 429.



Der Randwinkel ϑ ist nicht allein von der Cohäsion der Flüssigkeit, sondern auch von der Adhäsion zwischen dieser und der Wand abhängig. Dieser Zusammenhang ist ausdrückbar durch die Gleichung:

$$\cos\vartheta = \frac{\beta}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

worin α die Capillaritätsconstante $= \frac{H}{2}$, β eine dieser analoge Adhäsionsconstante bedeutet. Haben α und β dasselbe Zeichen, so ist $\cos\vartheta$ positiv, also der Winkel ϑ spitz (Fall der Fig. 426). Andererseits ist ϑ stumpf (Fall der Fig. 426). Die Adhäsionsconstante β kann nie grösser als α, höchstens diesem gleich sein, in welch letzterem Falle $\cos\vartheta = 1$, also $\vartheta = o$ folgt, was bei vollkommener Benetzung eintritt.

Erscheinungen in Haarröhrchen. Wenn man das eine Ende 116
eines engen Glasröhrchens in eine Flüssigkeit eintaucht, so steht das Niveau der Flüssigkeit im Röhrchen nie in gleicher Höhe mit dem Spiegel der Flüssigkeit ausserhalb. In Wasser z. B. eingetaucht, erhebt sich die Flüssigkeitssäule im Röhrchen, Fig. 430; wenn man hingegen das Glasröhrchen in Quecksilber eintaucht, so steht der Gipfel der Quecksilbersäule im Röhrchen tiefer, Fig. 431.

Fig. 430.

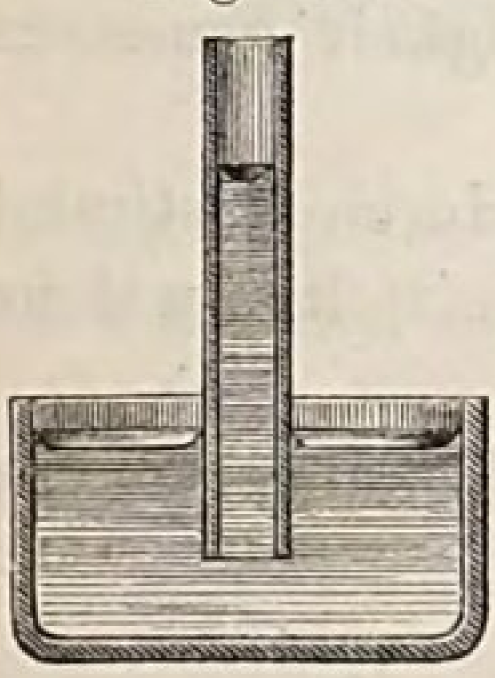
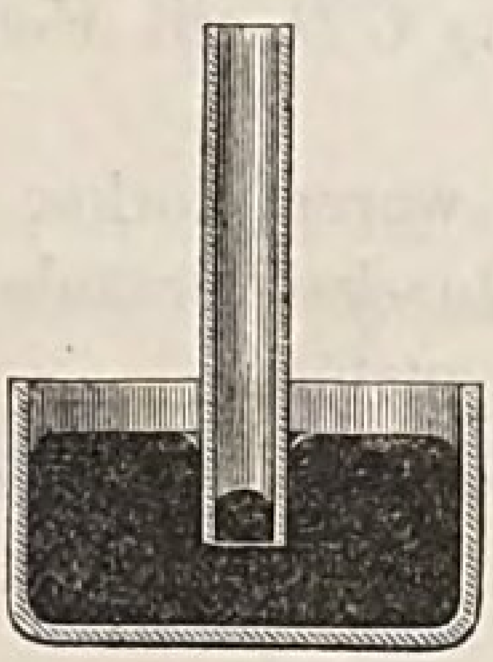


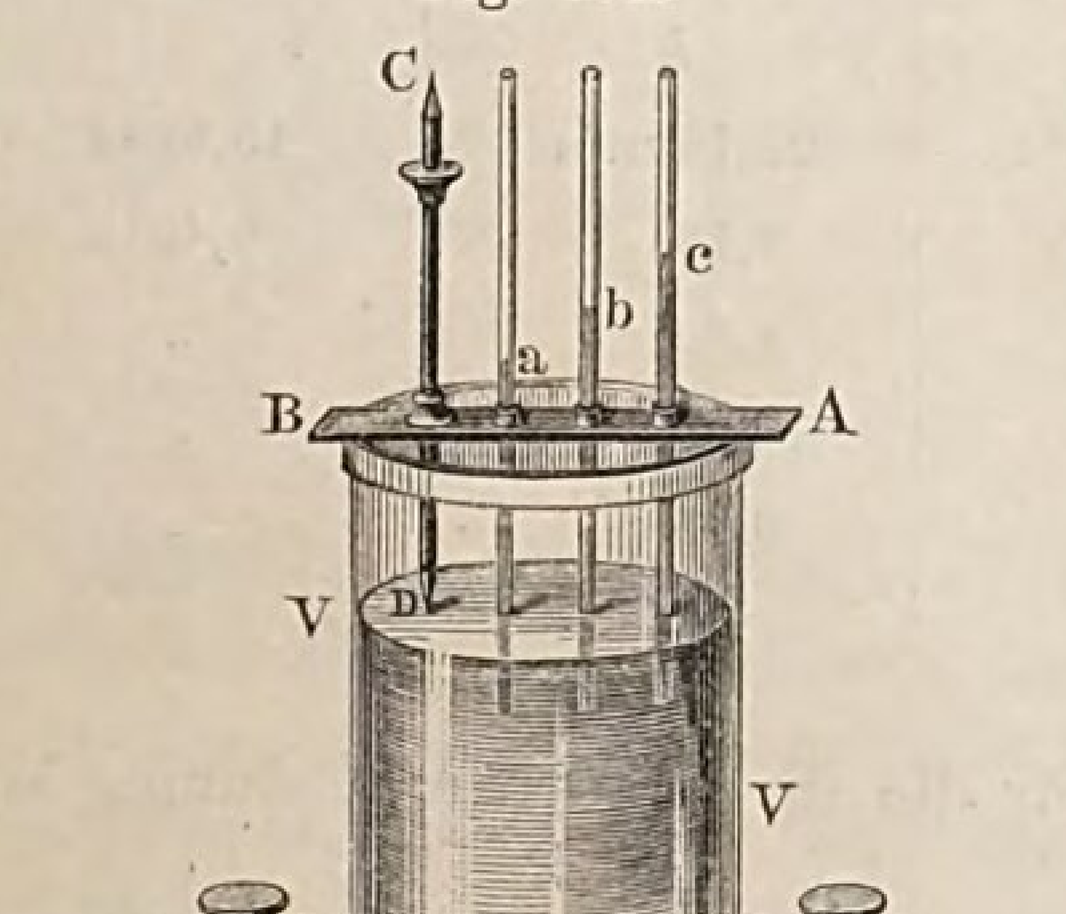
Fig. 431.



Diese Erscheinungen der Hebung und Senkung werden mit dem Namen Haarröhrchenerscheinungen (Capillarerscheinungen) bezeichnet und haben der ganzen Gruppe verwandter Thatsachen den Namen gegeben.

Es ist leicht, sich durch den Versuch davon zu überzeugen, dass die Höhendifferenz der Spiegel der Flüssigkeit in und ausser der Röhre um so grösser ist, je enger die Röhren sind. Taucht man zwei Röhrchen, von denen das eine einen doppelt so grossen Durchmesser hat als das andere, in Wasser, so wird das Wasser im engeren doppelt so hoch steigen; taucht man sie in Quecksilber, so wird im engeren die Flüssigkeit doppelt so viel niedergedrückt.

Fig. 432.



Um die Höhe genau zu messen, bis zu welcher die Flüssigkeiten im Haarröhrchen aufsteigen, brachte Gay-Lussac folgendes Verfahren in Anwendung. Ein weiteres Gefäss *V*, Fig. 432, welches die Flüssigkeit enthält, ruht auf einer mit drei Stellschrauben versehenen Platte, mittelst deren man den Rand des Gefässes *V* genau horizontal stellen kann. Auf diesem Rande liegt der Metallstreifen *BA*, in welchem mehrere Haarröhrchen von verschiedenem Durchmesser befestigt sind, dessen unteres Ende in der Flüssigkeit des Gefässes *V* eingetaucht ist.

Die Höhe der Punkte *a*, *b* und *c*, bis zu welcher die Flüssigkeit in den verschiedenen Röhrchen über dem Spiegel der Flüssigkeit im Gefäss *V* aufsteigt, lässt sich nun aber deshalb nicht unmittelbar mit Genauigkeit messen, weil die Flüssigkeit nicht allein an der Wand des Gefässes *V*, sondern auch an der äusseren Wand der eingetauchten Röhrchen etwas über den Flüssigkeitsspiegel sich erhebt. Gay-Lussac hat diese Schwierigkeit dadurch umgangen, dass er in der Metallplatte *BA* ein Metallstäbchen *CD* anbrachte, auf welchem

ein feines Schraubengewinde eingeschnitten und welches oben und unten mit einer Spitze versehen ist. Dieses Stäbchen wird nun so weit heruntergeschraubt, dass seine untere Spitze D eben den Flüssigkeitsspiegel berührt. — Nachdem diese Einstellung gehörig ausgeführt worden ist, wird der Höhenunterschied zwischen der oberen Spitze C und den Punkten a, b und c mit Hülfe eines Kathetometers gemessen, und daraus ergiebt sich dann, wie hoch die Punkte a, b und c über D liegen, wenn zum Voraus die Länge des Stäbchens CD mit Genauigkeit gemessen worden ist.

Die Durchmesser der Röhrchen waren vorher dadurch bestimmt worden, dass man das Gewicht der Quecksilbersäule ermittelte, welche eine gemessene Länge des Röhrchens ausfüllt.

Die folgende Tabelle enthält einige auf diesem Wege gefundene Resultate.

Namen der Flüssigkeit.	Specif. Gewicht.	Temperatur.	Erhebung in einer Röhre, deren Durchmesser war: $d = 1{,}29$ mm	Erhebung in einer Röhre, deren Durchmesser war: $d = 1{,}90$ mm
			h	
Wasser	1	8,5° C.	23,16 mm	15,5861
Alkohol	0,82	8	9,18	6,4012
„	0,86	10	9,30	„
„	0,94	8	10,00	„
Terpentinöl . . .	0,87	8	9,85	„

Die specifischen Gewichte sind für die in der dritten Columne angegebenen Temperaturen genommen.

Aus obiger Tabelle ergiebt sich, dass für eine und dieselbe Flüssigkeit die gehobenen Säulen sich umgekehrt verhalten wie die Durchmesser der Röhren, dass also:

$$h = \frac{n}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

wenn h die Höhe der Säule und d den Durchmesser der Röhre bezeichnet. Aus Gleichung 1) folgt:

$$h \,.\, d = n \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

n aber ist nichts Anderes als die Höhe, bis zu welcher die Flüssigkeit in einer 1 mm weiten Röhre aufsteigt. Für einige der in der vorigen Tabelle aufgeführten Flüssigkeiten ergeben sich folgende Werthe von hd:

	d = 1,29 mm	d = 1,90 mm	
	$h\,d$	$h\,d$	n
Wasser	29,87 mm	30,71 mm	30,26
Alkohol (0,82) . .	11,84	12,16	12,18
Terpentinöl . . .	12,70	„	12,72

Unter n stehen die Mittelwerthe von dh, wie sie sich für die genannten Flüssigkeiten aus grösseren Beobachtungsreihen ergeben.

Auch die Temperatur hat einen wesentlichen Einfluss auf die Steighöhe von Flüssigkeiten in Capillarröhren. So fand Brunner für n folgende Werthe:

	Wasser.	Aether.	Olivenöl.
0° C.	0,66 mm	10,66 mm	
25	29,28	9,22	14,49 mm
35	28,64	8,74	14,16
50	27,76	—	13,82
80	25,98	—	13,26
100	—	—	12,81
150	—	—	11,89

Statt des Kathetometers kann man mit meist genügender Genauigkeit zur Beobachtung der Capillarerhebungen den von J. Müller construirten einfachen Apparat benutzen, welcher in Fig. 433 abgebildet ist. Das Haarröhrchen ist mittelst Bindedraht auf einem mit einer eingebrannten Millimeterscala versehenen Beinglasstreifen befestigt. Da man das äussere Niveau der Flüssigkeit weder an dem äusseren Rande des Haarröhrchens noch an dem Beinglasstreifen ablesen kann, so ist auf eine aus der Figur leicht verständliche Weise ein Stahldraht angebracht, den man beliebig höher oder tiefer stellen kann und dessen untere Spitze s um 4 bis 5 mm von der Milchglasplatte absteht. Zunächst wird die Spitze s genau auf einen der Haupttheilstriche der Scala eingestellt, also entweder auf 0 oder auf 1, auf 2 etc. Ist die Spitze s fest eingestellt, so wird die ganze Vorrichtung, von einem passenden Stativ getragen, in verticaler Stellung in das 3 bis 4 cm weite Glasgefäss hinabgesenkt, bis die Spitze s sich nur noch wenig über dem Spiegel der Flüssigkeit befindet und dann die Flüssigkeit im Gefäss durch vorsichtiges tropfenweises Zugiessen vermehrt, bis ihr Spiegel eben die Spitze s erreicht hat. Um das Haar-

röhrchen gehörig zu netzen, kann man oben an demselben ein kurzes Kautschukröhrchen anbringen und vor dem Versuch mittelst desselben die Flüssigkeit im Glasröhrchen etwas aufsaugen.

Die Ablesung des Meniskenstandes kann entweder unmittelbar oder besser mit Hülfe einer Brügge'schen Loupe ausgeführt werden.

Auf diese Weise fand z. B. J. Müller bei 24° C.:

für Wasser bei 24° C.	$n =$	29,16 mm
„ Schwefelkohlenstoff	$n =$	10,0 „
„ Petroleum . . .	$n =$	13,4 „
„ Rüböl	$n =$	12,0 „

Ehe man die Röhrchen zum Versuche anwendet, müssen die inneren Wände vollständig mit der Flüssigkeit benetzt und von allen Unreinig-

Fig. 433.

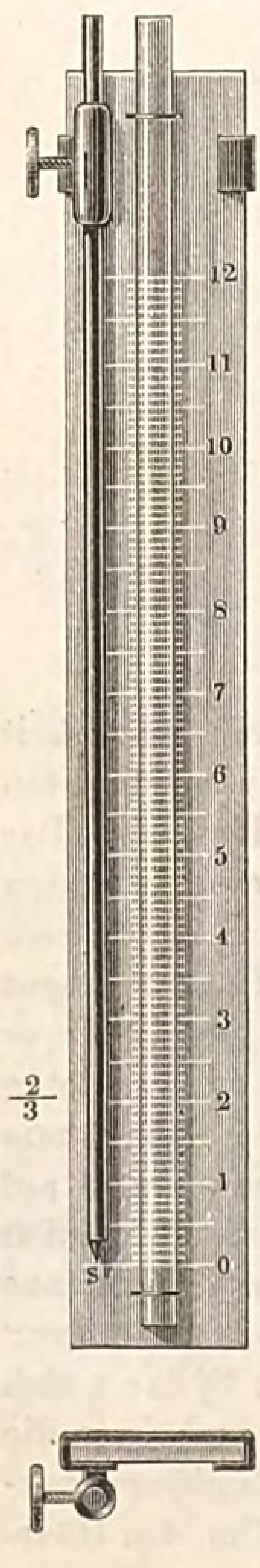


Fig. 434.

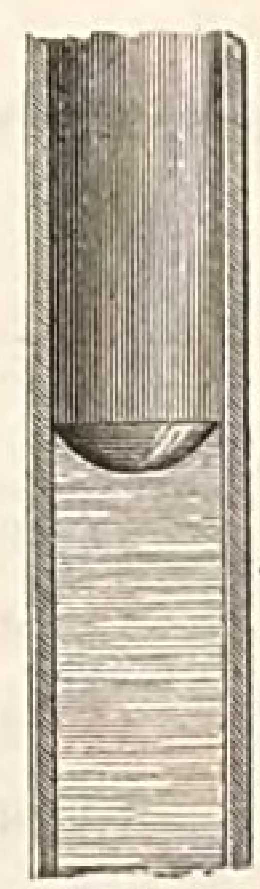
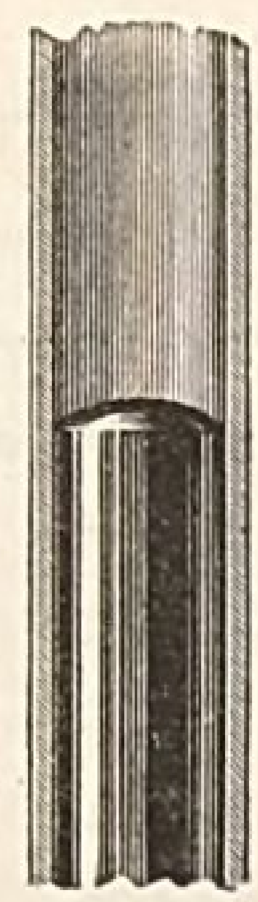


Fig. 435.



keiten befreit werden. Es ist auch wesentlich, dass man die flüssige Säule mehrmals oscilliren lässt, damit man die wahre Höhe beobachtet.

Die Erhebung der Flüssigkeiten in engen Röhrchen, sowie die Senkungen derselben sind aber auf das Innigste mit der Gestaltung ihrer Oberfläche verknüpft. Eine Erhebung findet statt, wenn der Gipfel der Flüssigkeitssäule in der Röhre einen concaven Meniscus bildet, wie Fig. 434, während sich stets eine Depression einstellt, wenn der Gipfel der Flüssigkeit einen convexen Meniscus bildet, wie Fig. 435.

Die Vorrichtung Fig. 433 kann man auch anwenden, um wenigstens annähernd den Werth des Randwinkels zu ermitteln. Fig. 436 oder Fig. 437 stelle den durch die Brügge'sche Loupe beobachteten Meniscus dar. Hat man Alles so justirt, dass ein Theilstrich der Millimeterscala gerade durch den obersten Rand a des Meniscus geht, so kann man leicht schätzen, um den wievielten Theil eines Millimeters der tiefste Punkt b des Meniscus unter dem Rande desselben steht. In einer Röhre von 1,2 mm Durchmesser (also $ad = 0{,}6$ mm) fand J. Müller für Wasser $db = {}^1/_2\, do$, also $db = 0{,}5$ mm, und daraus ergiebt sich:

$$tang\ x = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

$$x = 39^0\ 40'.$$

Denken wir uns nun die Linie ab gezogen und in ihrem Mittelpunkte ein Perpendikel errichtet, so schneidet dasselbe die Achse der Röhre in m, dem Krümmungsmittelpunkte des Meniscus. Zieht man ferner den Radius am und rechtwinklig darauf die Tangente ac, so ist $180 - nac$ der gesuchte Randwinkel. Wir haben aber:

$$y + bac = 90^0$$
$$y + x \doteq 90^0$$

also:

$$bac = x$$
$$dac = 2x$$
$$nac = 90^0 + 2x$$

und da für Wasser $x = 39^0\ 40'$ ist, so ergiebt sich:

$$nac = 90^0 + 79^0\ 20' = 169^0\ 20',$$

also der Randwinkel $= 180 - 169^0\ 20' = 10^0\ 40'$.

Für Schwefelkohlenstoff fand J. Müller bei Anwendung derselben Röhre $db = 0{,}15$ mm, Fig. 437, also $tang\ x = \frac{0{,}15}{0{,}60} = 0{,}25$, wonach sich $x = 14^0$, $dac = 28^0$ und endlich der Randwinkel $= 180 - nac = 62^0$ ergiebt.

Nun lässt sich auch leicht der Werth des Krümmungshalbmessers am des Meniscus bestimmen, den wir mit R bezeichnen wollen, während

Fig. 436.

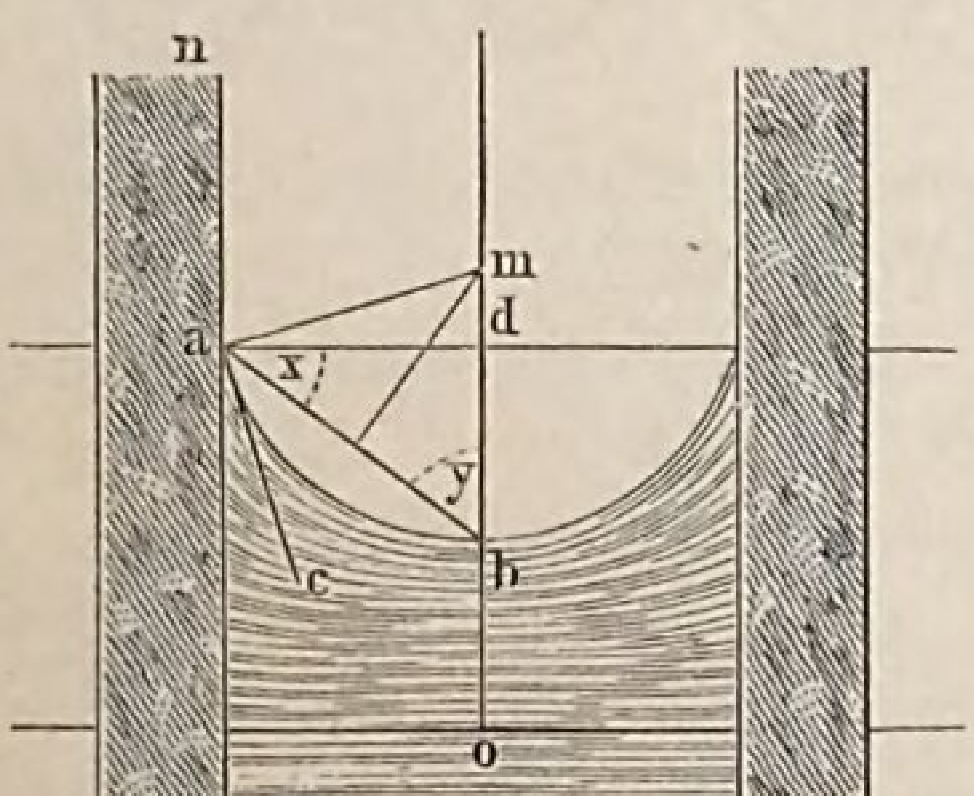
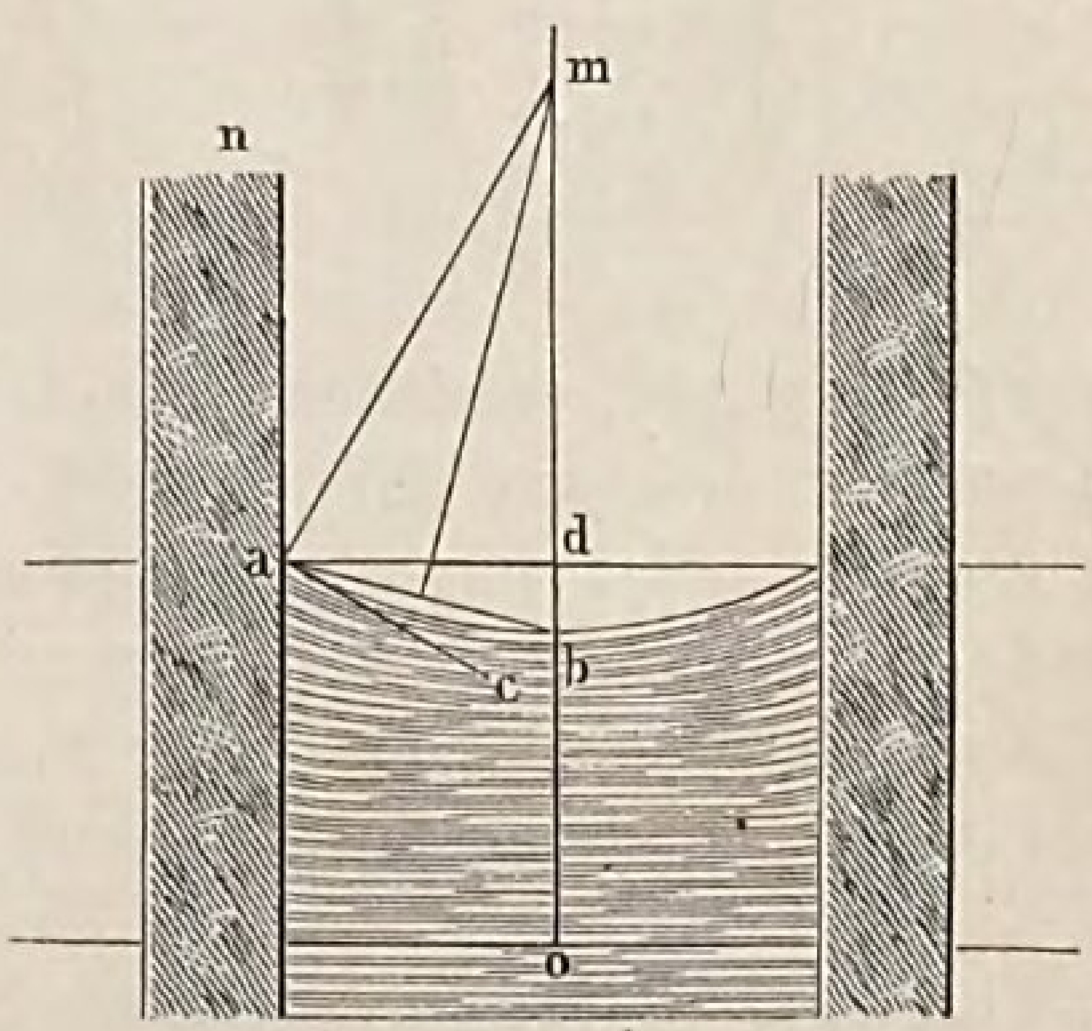


Fig. 437.



der Halbmesser ad der Röhre mit r bezeichet sein mag. Es ist nämlich:

$$r = R \,.\, cos\ mad$$

oder:

$$r = R \,.\, cos\ (90^0 - 2x)$$

da $mad = 90^0 - 2x$ ist, also endlich:

$$R = \frac{r}{cos\ (90^0 - 2x)}.$$

Setzen wir $r = 0{,}6$ und für x seinen bei Wasser beobachteten Werth $39^0\ 40'$, so kommt:

$$R = 0{,}61\,\text{mm},$$

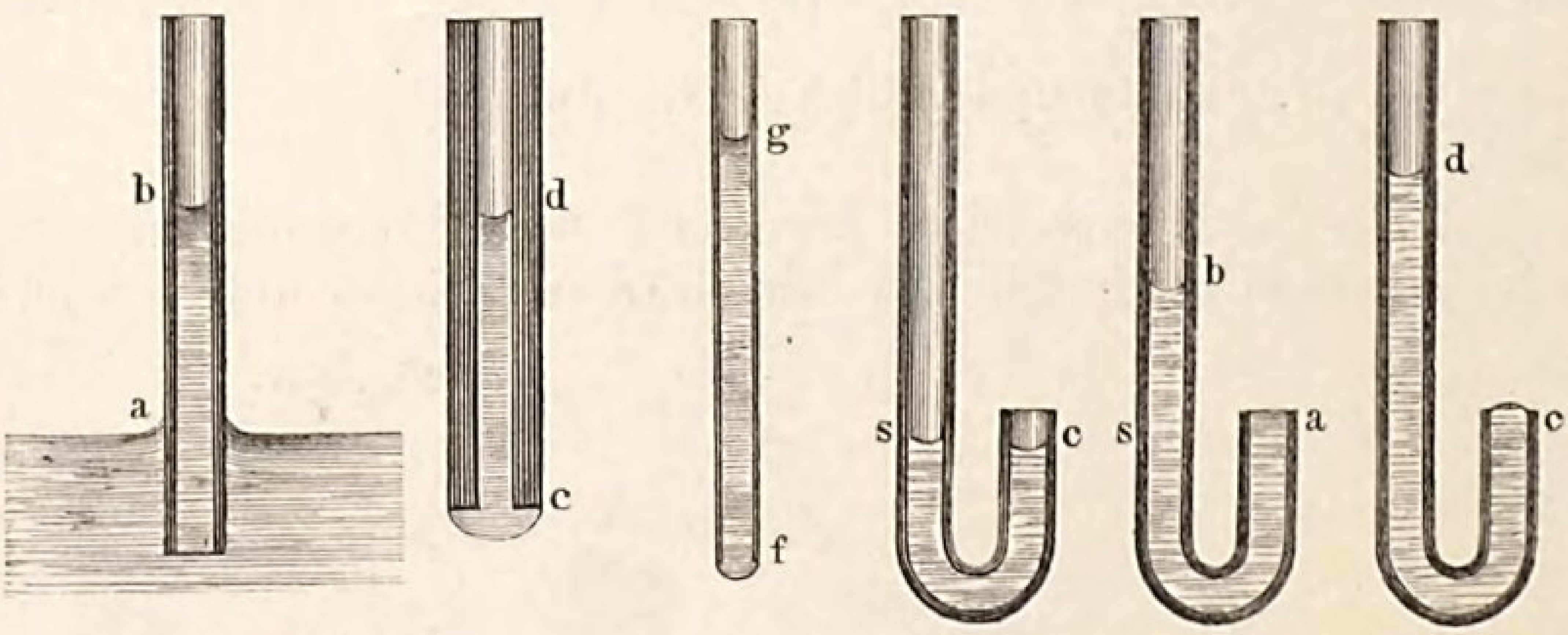
während sich für Schwefelkohlenstoff

$$R = 1{,}27\,\text{mm}$$

ergiebt, wenn man $x = 14^0$ setzt.

117 **Abhängigkeit der Steighöhen in derselben Röhre von verschiedenen Umständen.** Wenn man eine Röhre, welche zum Versuche gedient hat, mit Vorsicht aus der Flüssigkeit herausnimmt, so beobachtet man, dass die flüssige Säule, welche im Inneren der Röhre hängen bleibt, immer grösser ist als sie vorher war, da die Röhre noch in die Flüssigkeit eingetaucht war. Es sei z. B. *ab*, Fig. 438, die Säule, welche in der Röhre aufsteigt, während sie in die Flüssigkeit eingetaucht ist, so kann die Säule, welche in der Röhre hängen bleibt, wenn man sie aus der Flüssigkeit herausnimmt, die Höhe *cd*, Fig. 439, oder gar die

Fig. 438. Fig. 439. Fig. 440. Fig. 441. Fig. 442. Fig. 443.



Höhe *fg*, Fig. 440, erreichen. Dieser Unterschied hängt von dem Tropfen ab, welcher sich am unteren Ende der Röhre bildet, und welcher ein mehr oder minder convexer Meniscus ist. In der That, wenn die Röhrenwände sehr dick sind, so breitet sich der Tropfen aus, und in diesem Falle ist die Erhebung geringer; wenn aber die Wände dünn sind, so ist der convexe Meniscus des Tropfens fast gleich dem concaven Meniscus am oberen Ende der Säule, und in diesem Falle ist die Höhe der Säule *fg*, Fig. 440, welche in der Röhre hängen bleibt, fast doppelt so gross, als die Höhe *ab*, Fig. 438, der Säule, welche man beobachtet, wenn dieselbe Röhre noch in die Flüssigkeit eingetaucht ist.

Heberförmig gekrümmte Röhren bieten ähnliche Erscheinungen dar und sind zugleich für die Versuche bequemer. In einer heberförmigen Röhre, Fig. 441, deren Durchmesser überall gleich weit ist, steht die Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch, so lange die Flüssigkeit noch nicht das Ende des kürzeren Schenkels erreicht. Lässt man ganz allmälig in den längeren Schenkel Flüssigkeit zufliessen, so steigt das Niveau bald bis zum oberen Rande des kürzeren Schenkels. Von nun an steigt bei fernerem Zufliessen im längeren Schenkel die Flüssigkeit in

demselben, während der concave Meniscus am oberen Ende des kürzeren Schenkels immer flacher wird. In dem Moment, in welchem der Meniscus ganz verschwunden, in welchem also die Oberfläche der Flüssigkeit im kürzeren Schenkel ganz eben geworden ist, wie Fig. 442, ist die Höhendifferenz von *a* bis *b* gleich der Höhe der Flüssigkeitssäule, welche in demselben Rohre aufgestiegen wäre, wenn man es in die Flüssigkeit eingetaucht hätte. Bei fernerem Zufluss in den längeren Schenkel steigt die flüssige Säule noch höher, während die Oberfläche der Flüssigkeit im kürzeren Schenkel convex wird, wie Fig. 443. Das Steigen dauert fort, bis die Höhendifferenz *cd*, Fig. 443, doppelt so gross ist als die Höhendifferenz *ab*, Fig. 442. In diesem Augenblick ist der Meniscus auf dem kürzeren Schenkel eine Halbkugel. Wenn nun noch Flüssigkeit im längeren Schenkel zufliesst, so reisst die gewölbte Oberfläche, und die Säule fällt mehr oder weniger weit herab, je nachdem der abfliessende Tropfen grösser oder kleiner ist.

Diese Erscheinungen können in umgekehrter Ordnung hervorgebracht werden, wenn man in den längeren Schenkel eine Flüssigkeitssäule bringt, welche so hoch ist, als sie eben noch getragen werden kann, und dann nach und nach am Gipfel des kürzeren Schenkels etwas Flüssigkeit wegnimmt.

Haarröhrchen von verschieden gestaltetem Querschnitt. 118 Wenn der enge Raum nicht cylindrisch ist, wie wir bisher angenommen haben, so sind die Erscheinungen etwas verwickelter, jedoch lassen sie sich oft auf ziemlich einfache Gesetze zurückführen.

Denken wir uns eine Röhre, deren innerer Durchmesser 10 mm beträgt, in diese eine zweite Röhre geschoben, deren äusserer Durchmesser 9 mm ist, und zwar so, dass die Achsen beider Röhren zusammenfallen, so bleibt zwischen beiden ein ringförmiger Raum von $^1/_2$ mm Dicke. In diesem Raume nun finden Capillarerscheinungen statt, und zwar hat man durch den Versuch gefunden, dass die Höhendifferenz hier gerade ebenso gross ist, wie bei einem Röhrchen, dessen Durchmesser 1 mm beträgt. Dieses Resultat lässt sich allgemein so ausdrücken: in einem ringförmigen Raume von beliebiger Dicke ist die Hebung oder Senkung gerade ebenso gross wie in einer cylindrischen Röhre, deren Durchmesser doppelt so gross ist als die Dicke dieses ringförmigen Raumes.

Wenn der innere Cylinder selbst eine hohle Röhre ist, so finden in dieser Röhre und in dem ringförmigen Raume die Capillarerscheinungen gerade so statt, als ob jeder derselben für sich allein da wäre. Wäre also der Durchmesser der Röhre gerade doppelt so gross als die Dicke des Ringes, so würden die Gipfel der Säulen in beiden gleich hoch stehen. Wenn die Röhre enger ist, so ist der Gipfel ihrer Säule höher, wenn es sich um eine Hebung, tiefer, wenn es sich um eine Senkung handelt; das Gegentheil findet statt, wenn die Röhre weiter ist.

Der zwischen zwei parallelen Platten befindliche Raum ist nichts als ein Stück eines ringförmigen Raumes von unendlich grossem Halbmesser,

die Höhen der gehobenen oder gesenkten Säulen müssen also denselben Gesetzen folgen, wie dies der Versuch in der That bestätigt. Welches auch die Entfernung zweier paralleler Platten sein mag, sie bringen dieselbe Wirkung hervor, wie eine cylindrische Röhre, deren Durchmesser doppelt so gross ist als die Entfernung der Platten.

Die Fig. 444 stellt zwei Glasplatten dar, die mit ihren verticalen Kanten auf der einen (linken) Seite zusammenstossen und einen Winkel mit einander machen, indem sie auf der entgegengesetzten (rechten) Seite mehr oder weniger von einander entfernt werden. Wenn man nun diese Platten in Wasser taucht, so muss es an der engeren Stelle auf der linken Seite höher steigen als da, wo die Platten weiter von einander abstehen. An allen Stellen zwischen den beiden Platten wird die Flüssigkeit um

Fig. 444.

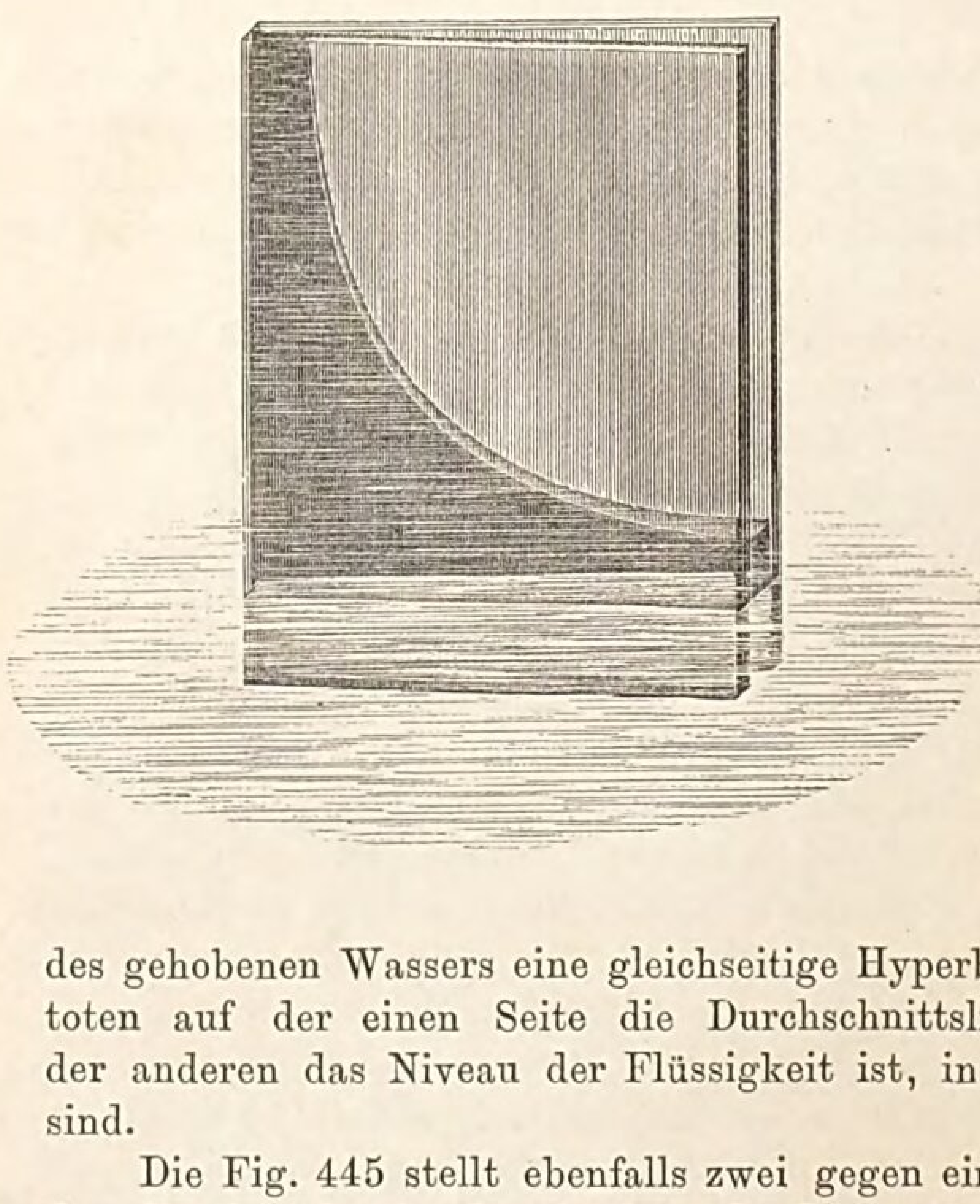
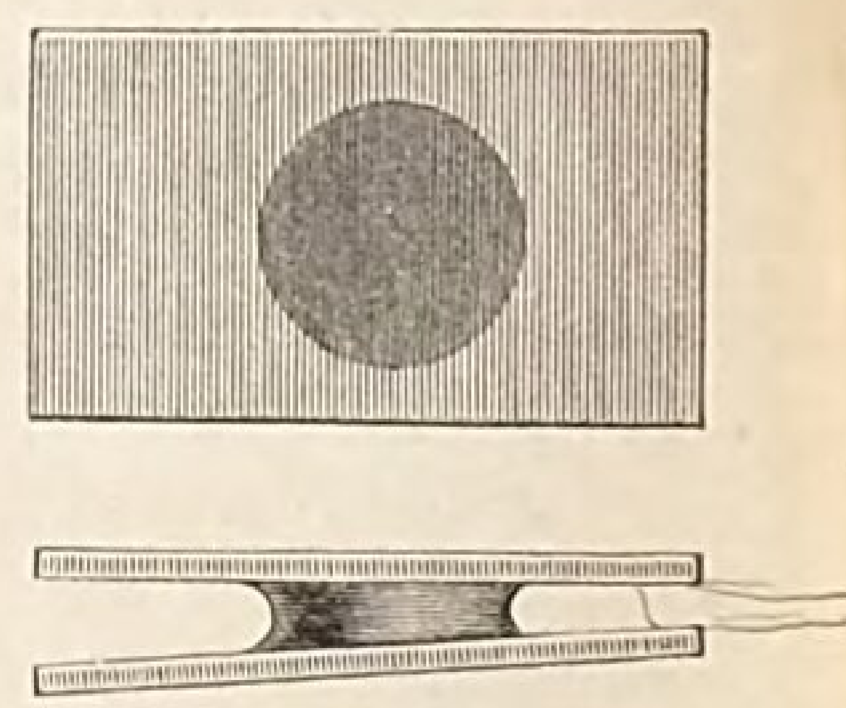


Fig. 445.



so höher steigen, je mehr man sich der Kante nähert, in welcher beide Platten zusammenstossen. Die mathematische Betrachtung der Sache zeigt, dass der Gipfel des gehobenen Wassers eine gleichseitige Hyperbel bildet, deren Asymptoten auf der einen Seite die Durchschnittslinie der Platten, auf der anderen das Niveau der Flüssigkeit ist, in welche sie eingetaucht sind.

Die Fig. 445 stellt ebenfalls zwei gegen einander geneigte Platten dar, die sich aber in einer horizontalen Linie schneiden; die geometrische Ebene, welche ihren Winkel halbirt, kann selbst horizontal oder auch mehr oder weniger geneigt sein. Wenn man zwischen die beiden Platten einen Wassertropfen bringt, welcher beide Platten berührt, so sieht man, dass er sich augenblicklich kreisförmig abrundet und gegen den Scheitel des Winkels hineilt. Seine Geschwindigkeit ist grösser oder kleiner, je nachdem der Winkel der Platten grösser oder kleiner ist. Hält man die obere Platte stets wagerecht, so kann man es durch gehöriges Neigen

der unteren Platte dahin bringen, dass die Attractivkraft, welche den Tropfen gegen den Scheitel des Winkels zieht, gerade seiner Schwere, die ihn zur schiefen Ebene heruntertreibt, das Gleichgewicht hält.

Die Erscheinungen, von denen wir eben gesprochen haben, wiederholen sich bei konischen Röhren. Die kleine Flüssigkeitssäule bewegt sich gegen die Spitze des Kegels, wie in Fig. 446, oder gegen die weitere Oeffnung, Fig. 447, je nachdem sie durch zwei concave oder durch zwei convexe Menisceen begrenzt ist. In allen Fällen kann man den Tropfen

Fig. 446.

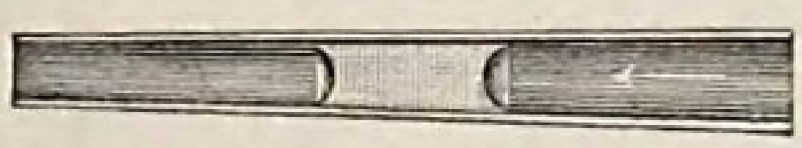


Fig. 447.



an einer bestimmten Stelle der Röhre festhalten, wenn man der Röhre eine entsprechende Neigung giebt.

Das Vorangehende zeigt, dass feste Körper und Flüssigkeiten nicht in Berührung kommen können, ohne dass die Oberfläche der beweglichen Flüssigkeit eine mehr oder weniger merkliche Formveränderung erleidet.

Anziehung und Abstossung, durch Capillarität hervor- 119
gebracht. Körper, welche in Flüssigkeiten eingetaucht sind oder auf ihnen schwimmen, bieten so merkwürdige Erscheinungen von Anziehung und Abstossung dar, dass es nöthig ist, hier einige Beispiele auszuführen.

Fig. 448.

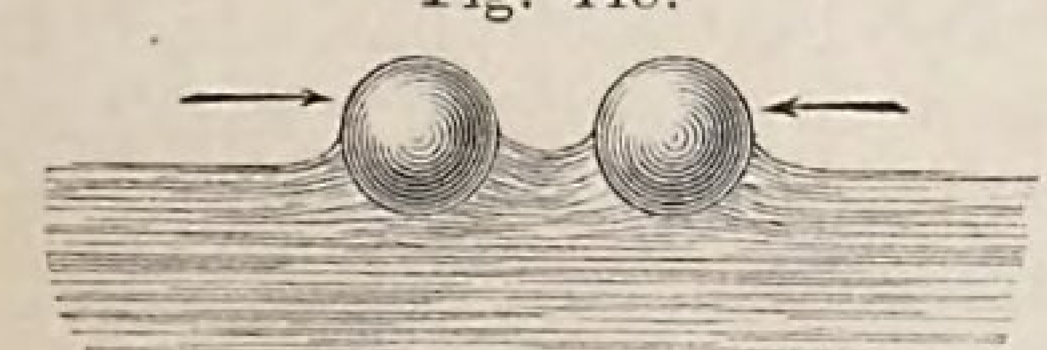


Fig. 449.

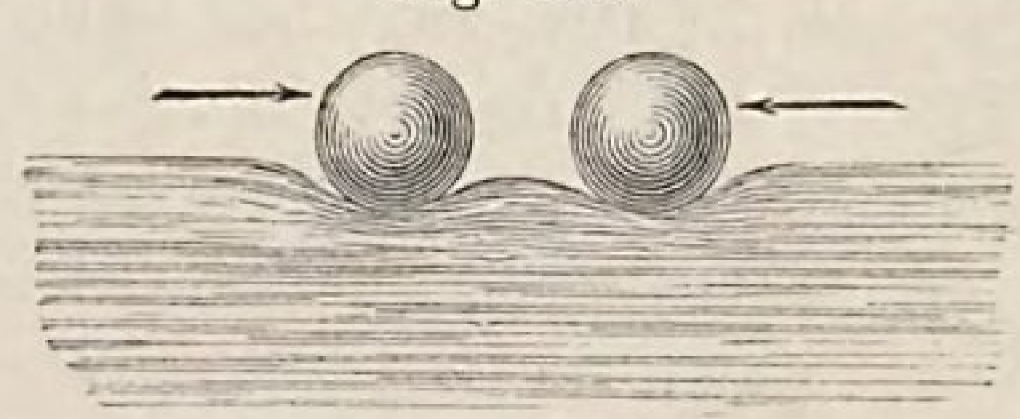
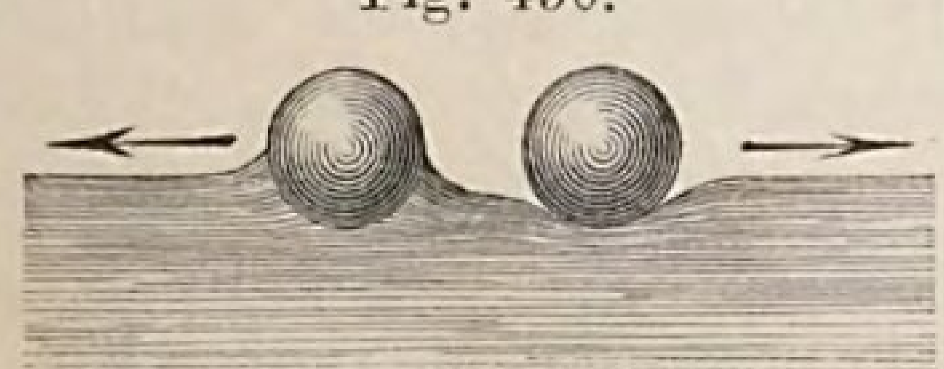


Fig. 450.



Zwei Korkkugeln, welche auf Wasser schwimmen und von demselben benetzt werden, üben gar keine Einwirkung auf einander aus, wenn sie einigermaassen weit von einander entfernt sind; wenn man sie aber so weit nähert, dass das Wasser zwischen beiden keine Ebene mehr bildet, wie Fig. 448, so erfolgt eine lebhafte Anziehung.

Zwei Kugeln, welche nicht benetzt werden, wie Glaskugeln, welche auf Quecksilber schwimmen, üben unter gleichen Umständen gleichfalls eine Anziehung aus (Fig. 449).

Zwei Kugeln endlich, von denen die eine benetzt wird, die andere nicht, stossen einander ab, wenn sie in die gehörige Nähe gebracht werden (Fig. 450).

Verticale Platten bieten ähnliche Erscheinungen dar (Fig. 451, Fig. 452, Fig. 453, a. f. S.).

Man glaubte früher, dass diese Bewegungen von einer directen Einwirkung der Materie herrührten; es ist aber leicht einzusehen, dass sie von der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche abhängen, weil dieselben Körper, die sich auf Wasser anziehen oder abstossen, bei gleicher Ent-

Fig. 451.

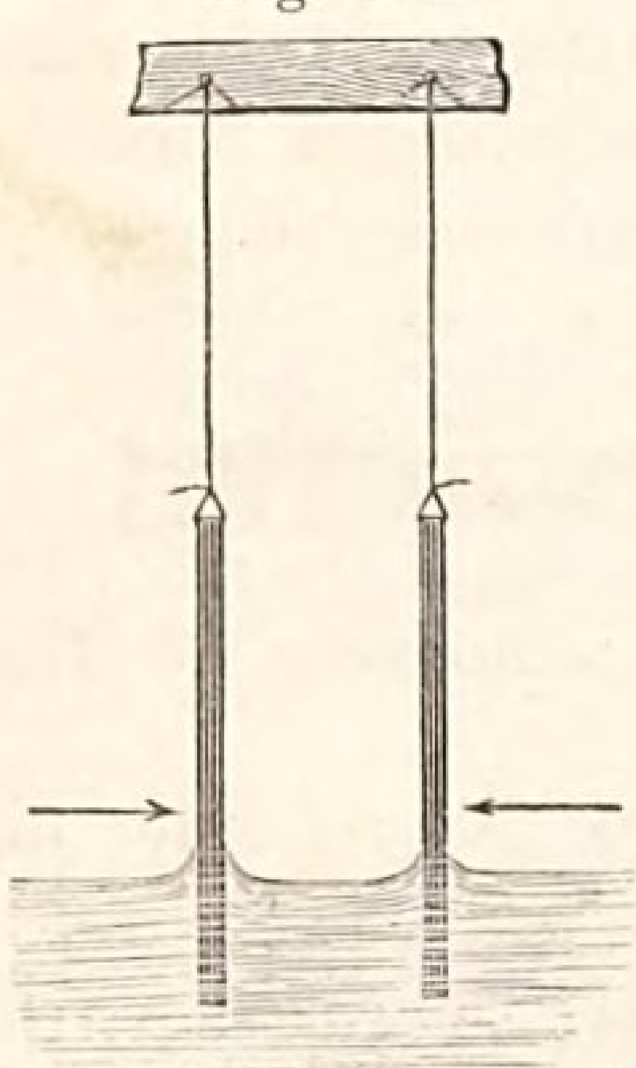


Fig. 452.

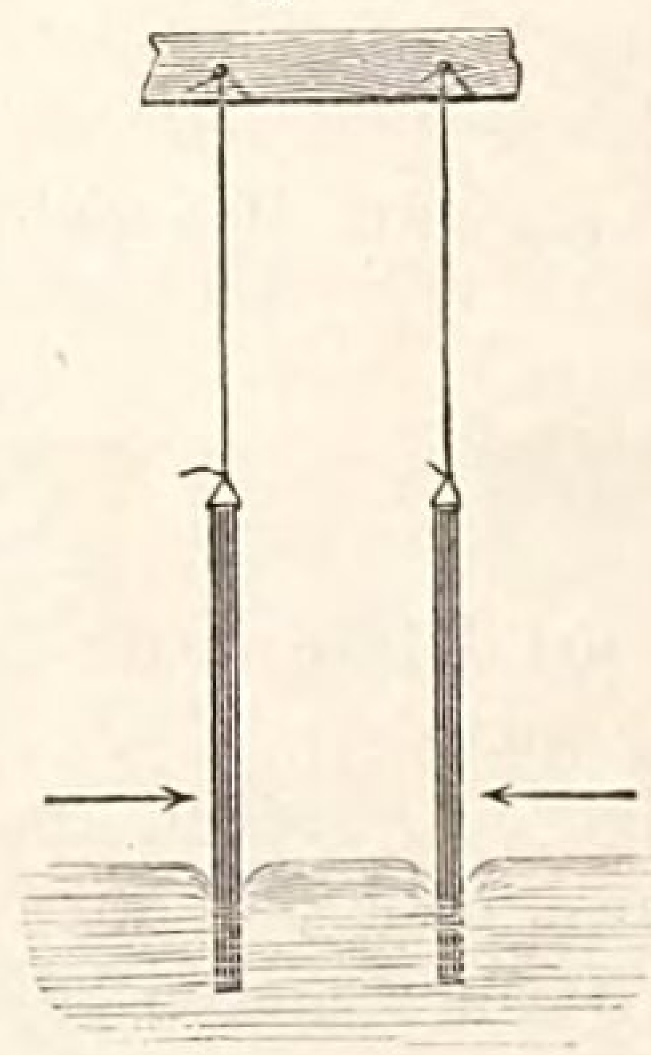
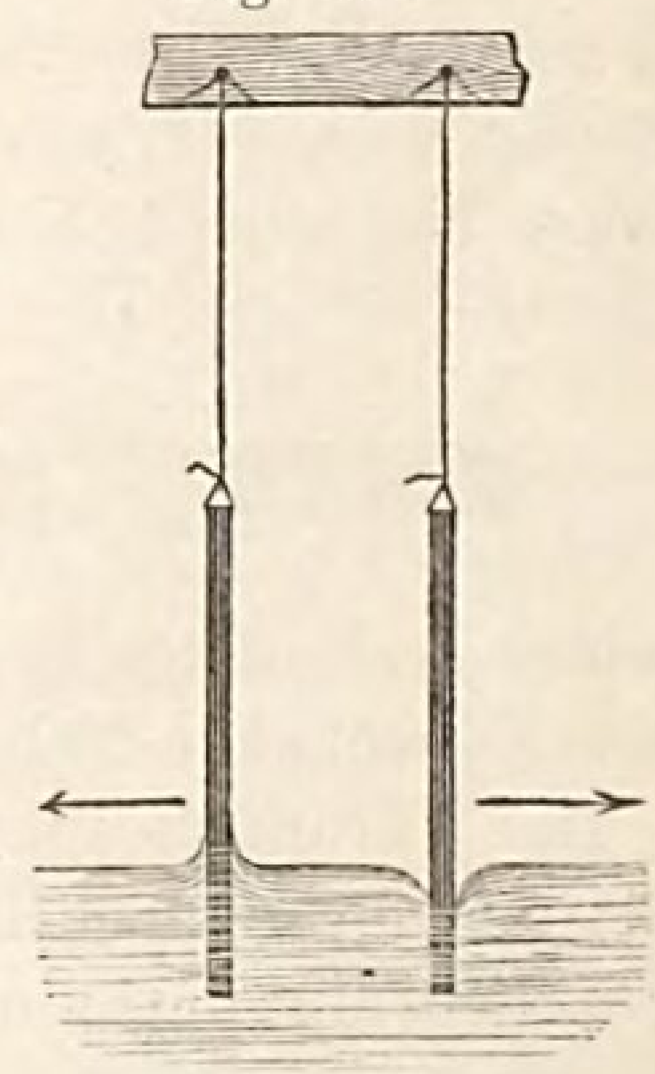


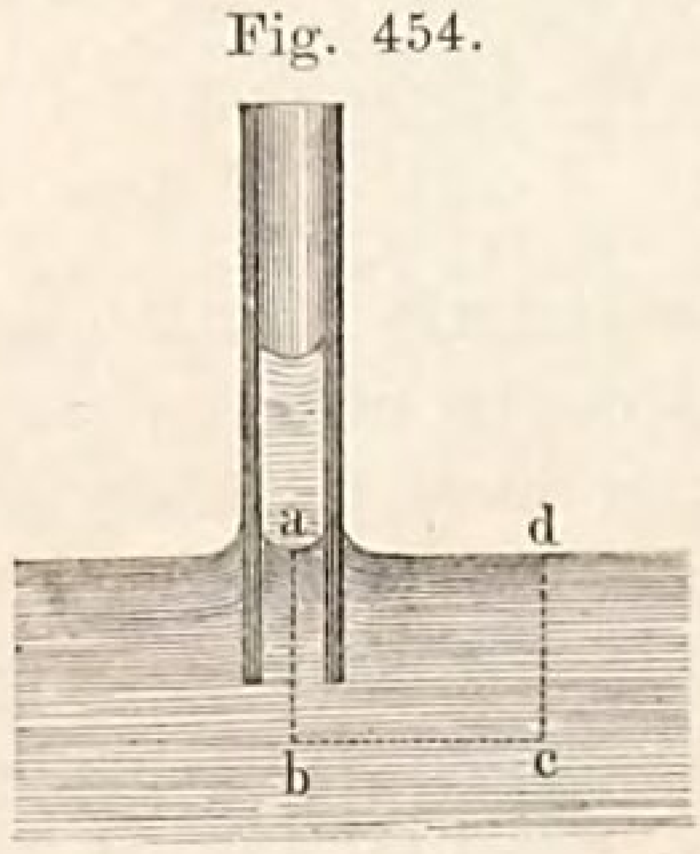
Fig. 453.



fernung im leeren Raume, in Luft oder in irgend einer Flüssigkeit vollständig eingetaucht, gar keine Wirkung auf einander ausüben.

120 **Erklärung der Erscheinungen in Haarröhrchen, drittes Capillaritätsgesetz*).** Die Hebung oder Senkung von Flüssigkeiten in engen Röhrchen, zwischen nahe gestellten Platten etc. findet nach den in §. 114 und 115 entwickelten Gesetzen ihre vollständige Erklärung. Was die Höhe des Anstieges oder der Depression betrifft, so ist es zunächst leicht, für einen speciellen Fall dieselbe zu berechnen. Wir wollen annehmen, dass das Röhrchen vollkommen benetzt werde und sehr eng sei. In diesem Falle bildet die Flüssigkeit im Röhrchen einen concaven Meniscus, entsprechend einer Halbkugel vom Radius ϱ des Röhrchens. Die gehobene Flüssigkeitssäule, Fig. 454, übt nun einen hydrostatischen Druck aus, welcher dem Ueberschuss des Cohäsionsdruckes von aussen gegenüber dem im Innern der Röhre das Gleichgewicht halten muss.

Fig. 454.



Ist das specifische Gewicht der Flüssigkeit $= s$, die Steighöhe $= h$, so ist hs der hydrostatische Druck auf die Flächeneinheit.

Der Cohäsionsdruck ist laut §. 114 1) ausserhalb auf die ebene Oberfläche $= K$, innerhalb auf die concave Fläche vom Radius $\varrho = K - \frac{H}{\varrho}$,

*) Eine annähernd vollständige mathematische Theorie der Capillarerscheinungen würde den Rahmen dieses Buches weit überschreiten; wir müssen uns daher auf die Angabe der wichtigsten Ergebnisse beschränken.

der Ueberdruck von Aussen beträgt also $\frac{H}{\varrho}$. Setzen wir diesen dem hydrostatischen Drucke gleich, so kommt aus:

$$h\,s = \frac{H}{\varrho}$$

$$h = \frac{H}{s\,\varrho}$$

oder auch da nach §. 114 $H = 2\,\alpha = a^2 s$:

$$h = \frac{2\,\alpha}{s\,\varrho} = \frac{a^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Im Falle die Flüssigkeit die Röhre nicht vollkommen benetzt, also der Randwinkel ϑ nicht gleich Null ist, ändert sich, wie Quincke nachgewiesen, der obige Ausdruck für h in:

$$h = \frac{a^2}{\varrho} \cos \varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Ist die Röhre nicht so eng, dass der Meniscus eine Halbkugel vom Radius ϱ bildet, so führt die Rechnung auf den Näherungsausdruck:

$$h = \frac{a^2}{\varrho} - \frac{\varrho}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Da $\frac{\varrho}{3}$ meistens gegen h sehr klein ist, so kann man für nicht zu weite Röhren bei guter Benetzung mit meist genügender Annäherung die Formel 1) anwenden. Dieselbe sagt mit Worten:

Die Steighöhe oder Depression in Capillarröhren ist verkehrt proportional dem Radius der Röhre.

In einer Röhre vom Radius $\varrho = 1$ mm ist nach 1) $h = \frac{2\,\alpha}{s} = a^2$. Man kann daher sagen, die specifische Cohäsion a^2 einer Flüssigkeit ist gleich der Steighöhe in einer Röhre von 1 mm Radius, wenn letztere gut benetzt wird. Die Capillaritätsconstante α ist dann gleich dieser Steighöhe multiplicirt mit dem halben specifischen Gewichte der Flüssigkeit.

Für den Fall, dass zwei parallele senkrechte Platten in geringer Entfernung in die Flüssigkeit tauchen, bildet sich bei vollkommener Benetzung zwischen ihnen eine krumme Fläche, deren einer Krümmungsradius R gleich dem halben Abstande der Platten δ, deren anderer Krümmungsradius $R' = \infty$ ist.

Analog der früheren Rechnung für die Röhren haben wir demnach:

$$h\,s = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{H}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{H}{\delta}$$

also:

$$h = \frac{H}{s\delta} = \frac{2\,\alpha}{s\,\delta} = \frac{a^2}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Daraus folgt also, dass zwischen parallelen Platten die Flüssigkeit ebenso hoch steigt, wie in einer Röhre, deren Radius gleich dem Abstande der Platten (also halb so hoch als in einer Röhre, deren Durchmesser gleich dem Abstande der Platten).

Für den Fall, dass nur eine Platte senkrecht in die Flüssigkeit taucht, führt eine Berechnung, von der wir nur das Resultat bekannt geben können, zu dem allgemeinen Ausdrucke über die Steighöhe:

$$h = \sqrt{\frac{H}{s}(1 - \sin\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

für den Fall der vollkommenen Benetzung, wo $\vartheta = o$, ist demnach die Steighöhe:

$$h = \sqrt{\frac{H}{s}} = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

womit also auch eine einfache physikalische Definition dieser Constanten a gegeben ist. a ist die Steighöhe einer Flüssigkeit an einer von ihr vollkommen benetzten alleinstehenden Wand.

Zum Schlusse haben wir noch eine ebenso einfache physikalische Bedeutung der Constanten $\frac{H}{2} = \alpha$ hervorzuheben. Taucht man einen festen Körper mit verticalen Wänden in eine Flüssigkeit, so wird an der Berührungslinie der letzteren durch die Capillarwirkung eine Masse Flüssigkeit emporgehoben, deren Gewicht offenbar proportional der Länge der Berührungslinie sein muss. Ausser von dieser Länge hängt aber dieses Gewicht noch von der Capillaritätsconstante und der Adhäsionsconstante (beziehungsweise dem Randwinkel) ab. Die Rechnung ergiebt für das Gewicht G der an der Längeneinheit des Flüssigkeitsrandes emporgehobenen Flüssigkeitsmasse den Ausdruck:

$$G = \frac{H}{2} \cos\vartheta = \alpha \cos\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

Bei vollkommener Benetzung, wo $\vartheta = o$, ist also α gleich diesem Gewichte. Die in 7) ausgedrückte Beziehung wird als drittes Capillaritätsgesetz bezeichnet.

V. v. Lang hat unter dem Namen Capillarwage einen Apparat beschrieben *), dessen vollständige Theorie allerdings zu complicirt ist, als dass wir sie hier mittheilen könnten, welcher aber doch geeignet scheint, den Satz 7) zu demonstriren. Dieser Apparat gleicht einem Aräometer, an dessen Spindel oben eine Kugel angeblasen ist, Fig. 455.

Das Gewicht des Apparates ist so regulirt, dass es in Wasser nur bis zum unteren Ende der Spindel einsinkt; taucht man es aber bis etwa zur Mitte der oberen Kugel ein, so kehrt es, langsam losgelassen, nicht

*) Sitzungsber. der Wiener Akademie, Bd. 87, 1883.

mehr in seine ursprüngliche Lage zurück, sondern nimmt die in Fig. 456 angedeutete Stellung ein. Der Apparat hat also zwei stabile Gleichgewichtslagen. In der ersten, Fig. 455, ist die Länge des Flüssigkeitsrandes nur klein, weil der Umfang der Spindel gering ist; in Folge dessen ist das Gewicht der durch die Capillarwirkung gehobenen Flüssigkeitsmasse nur klein. In der Stellung Fig. 456 ist dagegen die Länge des Flüssigkeitsrandes nahezu gleich dem Umfange der Kugel, das Gewicht des gehobenen Flüssigkeitsquantums ist daher gross genug, um dem vermehrten Auftrieb das Gleichgewicht zu halten. Träufelt man hierauf ein wenig Alkohol auf die Oberfläche des Wassers, dessen Capillaritätsconstante α erheblich kleiner ist als beim Wasser, so vermindert

Fig. 455.

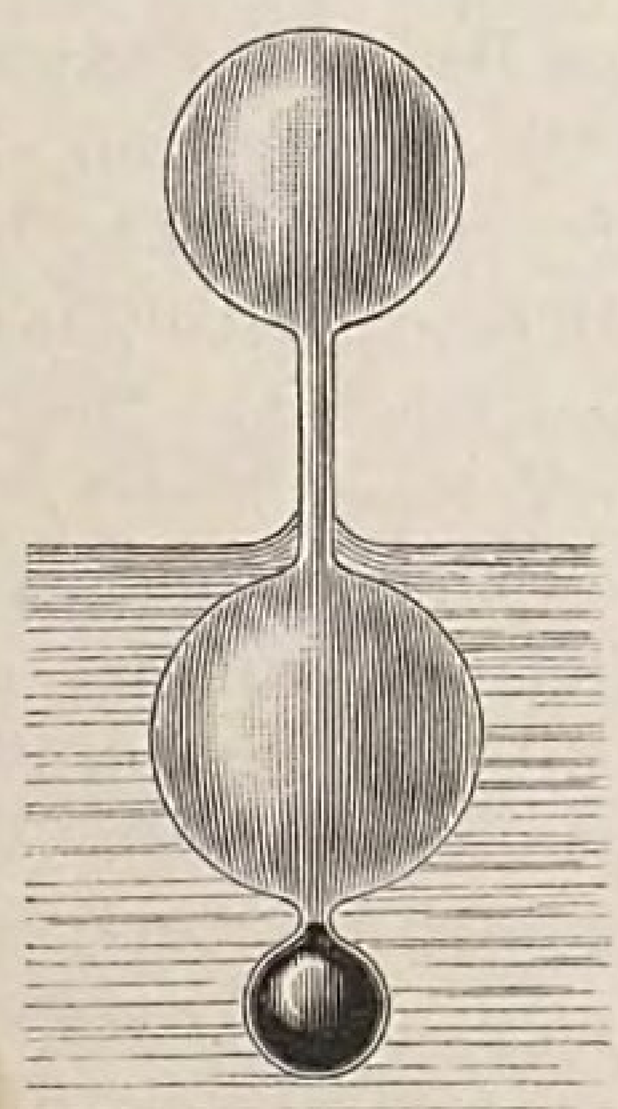
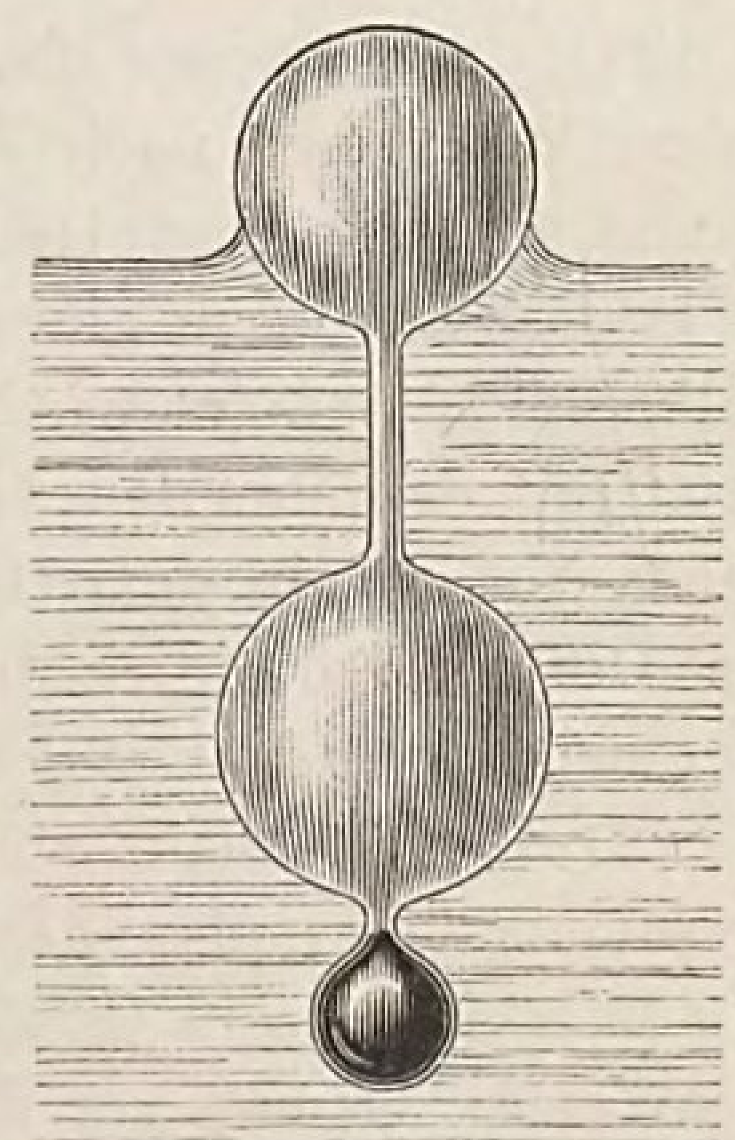


Fig. 456.



sich sofort das Gewicht der capillar gehobenen Flüssigkeit und der Auftrieb bekommt das Uebergewicht. Das Instrument erhebt sich in Folge dessen und kehrt in die Lage Fig. 455 zurück. Der Auftrieb selbst bleibt dabei fast ganz unverändert, weil nur die oberste dünne Schicht des Wassers durch Alkohol ersetzt wird.

Die Bestimmung der Capillaritätsconstanten. In den 121
vorangehenden Paragraphen wurde gezeigt, dass für die Capillarerscheinungen die Grössen α, H, a, a^2, β, ϑ und s maassgebend sind, deren gegenseitige Beziehungen und physikalische Bedeutungen wir nochmals übersichtlich zusammenstellen wollen.

α, Capillaritätsconstante nach Quincke ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeitsmasse, welche an der Längeneinheit der Berührungslinie einer vollkommen benetzten Wand emporgehoben wird. (Für den Fall der unvollkommenen Benetzung ist dieses Gewicht $= \alpha \cos \vartheta$.)

H, Oberflächenspannung per Flächeneinheit auf einer Kugel vom Radius Eins.

α, Steighöhe einer Flüssigkeit an einer von ihr vollkommen benetzten Wand. (Bei unvollkommener Benetzung ist diese Steighöhe $= a\sqrt{1 - \sin\vartheta}$.)

a^2, Capillaritätsconstante nach Poisson, (specifische Cohäsion nach Quincke) gleich der Steighöhe einer Flüssigkeit in einer von ihr vollkommen benetzten Röhre vom Radius Eins *).

β, Adhäsionsconstante.

ϑ, Randwinkel.

s, specifisches Gewicht.

Die gegenseitigen Beziehungen sind:

$$\alpha = \frac{H}{2} = \frac{a^2 s}{2} = \frac{\beta}{\cos\vartheta}.$$

Um α direct nach seiner oben gegebenen Bedeutung experimentell zu bestimmen, kann man nach Wilhelmy **) so vorgehen. Man bestimmt mittelst einer hydrostatischen Wage den wirklichen Auftrieb, den ein in die Flüssigkeit bis zu einer gewissen Höhe eingesenkter Cylinder, welcher vollkommen benetzt wird, erleidet und vergleicht diesen gefundenen Auftrieb mit dem aus dem eingetauchten Volumen berechneten. Die Differenz muss gleich sein dem Gewicht der capillar erhobenen Flüssigkeit. Diese Differenz dividirt durch den Umfang giebt das gehobene Flüssigkeitsgewicht per Längeneinheit, und dieses sollte identisch sein mit α. Diese Methode scheint aber nicht genau zu sein ***).

Viel bequemer und genauer ist die Methode der directen Bestimmung von a^2 aus der Steighöhe in Capillarröhren. Quincke †) verfuhr dabei in folgender Weise. Er zog vor der Glasbläserlampe von einer gereinigten dickeren Glasröhre hohle Fäden von einer inneren Weite zwischen 0,1 und 0,9 mm, befestigte einen solchen auf einem Spiegelglasstreifen von 10 mm Breite und 100 bis 300 mm Länge, welcher eine eingeätzte Millimetertheilung trug und tauchte Streifen mit Faden in die zu untersuchende Flüssigkeit. Mittelst eines Fernrohres wurde dann die Steighöhe der Flüssigkeit bis auf $^1/_{10}$ mm abgelesen, das Röhrchen an der Stelle des Meniscus durchschnitten und unter dem Mikroskop mittelst Mikrometers der Durchmesser gemessen. Die Correction wegen des Meniscus, sowie wegen des Randwinkels konnte vernachlässigt und die einfache Formel $a^2 = hr$ angewendet werden. So erhielt z. B. Quincke:

*) Abgesehen von den im §. 120 unter 2) und 3) angegebenen Verbesserungen; ist der Radius der Röhre $= r$, die Steighöhe $= h$, so ist genauer zu setzen $a^2 = r\left(h + \frac{r}{3}\right)$; bei sehr engen Röhren wird $\frac{r}{3}$ vernachlässigt.

**) Poggend. Ann. Bd. 119, 121, 122.

***) Wilhelmy glaubte die Abweichungen durch die Verdichtung der Flüssigkeit erklären zu können. Nach Röntgen's Untersuchungen, Wiedem. Ann. Bd. 3, S. 321, ist dies nicht zulässig.

†) Poggend. Ann. Bd. 139, S. 8.

für Wasser bei 16,2°:

	$2r$ in Millim.	h in Millim.	$a^2 = hr$
Versuch Nr. 1:	0,252	115,2	14,19
„ „ 2:	0,287	101,7	14,57
„ „ 3:	0,358	81,2	14,44
„ „ 4:	0,529	55,7	14,74
„ „ 5:	0,840	34,3	14,41
		Mittel	14,47

für Alkohol bei 21,8°:

	$2r$ in Millim.	hr in Millim.	$a^2 = hr$
Versuch Nr. 1:	0,086	132,9	5,720
„ „ 2:	0,331	33,6	5,562
„ „ 3:	0,606	18,8	5,696
		Mittel	5,659

Das specifische Gewicht des Alkohols ergab sich zu 0,7906, folglich berechnet sich für Alkohol:

$$\alpha = \frac{a^2 s}{2} = \frac{5,659 \,.\, 0,7906}{2} = 2,277, \text{ für Wasser } \alpha = \frac{a^2}{2} = \frac{14,47}{2} = 7,235.$$

Im Wesentlichen dieselbe Methode liegt auch den Bestimmungen von Frankenheim, Mendéléjeff, Bède und R. Schiff zu Grunde. Der letztere Physiker ersetzt die Formel $a^2 = r\left(h + \frac{r}{2}\right)$ durch die folgende: $a^2 = r\left(h + \frac{r+f}{6}\right)$, worin f die Höhe des Meniscus bedeutet, indem er bemerkt, dass die Correction $\frac{r}{3}$ zu gross, $\frac{f}{3}$ (welche Frankenheim anwendete) zu klein sei, daher das arithmetische Mittel beider der Wahrheit näher komme. Ueberdies ermittelte R. Schiff*) statt der Steighöhe in einer Röhre die Differenz der Steighöhen in zwei communicirenden Röhren ungleicher Weite, was mehrfache Vortheile bietet. Taucht man zwei Röhren von den Radien r und r', wobei $r > r'$, in dieselbe Flüssigkeit, so sind die zugehörigen Steighöhen h und h', wenn wir von der Meniscuscorrection absehen, gegeben durch die Gleichungen:

$$a^2 = rh$$
$$a^2 = r'h',$$

woraus

$$h' - h = \frac{a^2}{r'} - \frac{a^2}{r} = a^2 \frac{r - r'}{rr'}$$

und

$$a^2 = \frac{rr'}{r - r'}(h' - h)$$

folgt. Diese selbe Formel muss daher auch für communicirende Röhren gelten, in welchen man die Höhendifferenz $h' - h = H$ direct beobachtet. Nach Anbringung der Meniscuscorrection lautet die Formel:

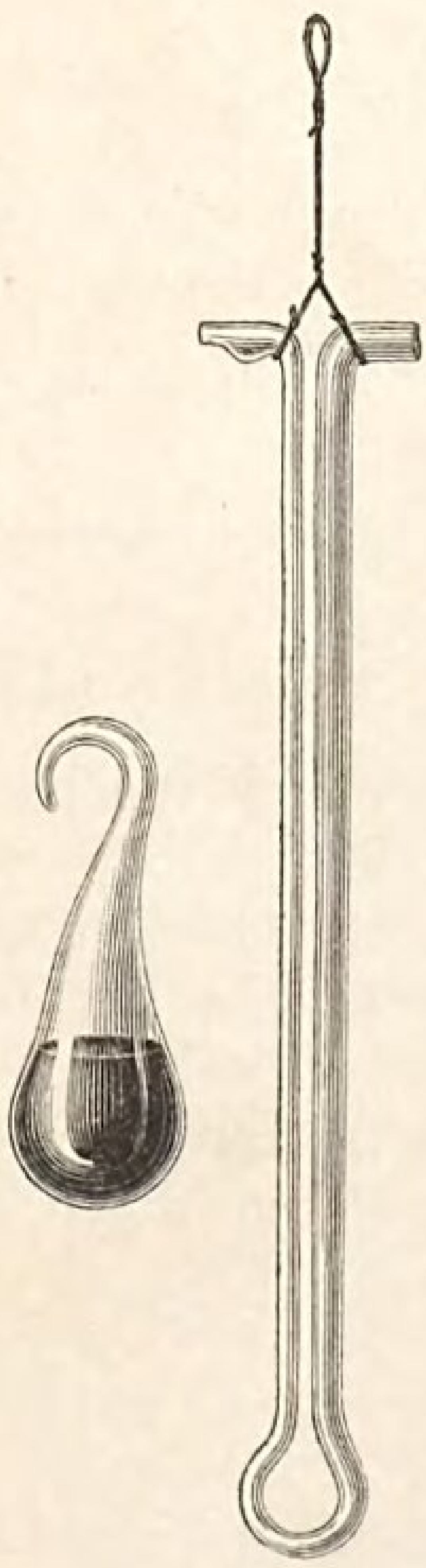
*) R. Schiff, Ueber die Capillaritätsconstanten der Flüssigkeiten bei ihrem Siedepunkte, Ber. d. chem. Ges., Bd. 15, S. 2965.

$$a^2 = \frac{r\,r'}{r - r'}\left(H + \frac{f' + r' - f - r}{6}\right).$$

Der von R. Schiff benutzte Apparat ist in Fig. 457 abgebildet, das beigegebene mit Quecksilber beschwerte Anhängegefäss bewirkt ein ruhigeres Hängen der Doppelröhre, wenn dieselbe, wie bei den Versuchen Schiff's geschah, in den Dampf siedender Flüssigkeiten eingehängt war. Wegen der so erlangten Zahlenwerthe müssen wir auf die citirte Abhandlung verweisen.

Wir haben der Vollständigkeit wegen noch zwei von Quincke angewendete Methoden zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten anzuführen, wenn wir auch zum Theil auf die Ableitung der Theorie dieser Methoden hier verzichten müssen.

Fig. 457.



Die erste ist die Methode mittelst des Tropfengewichts.

Fällt von einem vollkommen benetzten festen Körper ein Tropfen ab, so stellt das Gewicht desselben zugleich das Gewicht vor, welches von der dem Umfange des Tropfens gleichkommenden Berührungslinie zwischen dem festen Körper und der Flüssigkeit eben nicht mehr getragen wird. Nach dem dritten Capillaritätsgesetze, §. 120 7), ist aber die Capillaritätsconstante α identisch mit dem von der Längeneinheit der Berührungslinie getragenen Flüssigkeitsgewichte, also auch gleich dem Quotienten aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten Umfange. Fällt der Tropfen von einer kleinen, vollkommen benetzten Scheibe ab, so ist deren Umfang gleich dem Umfange des hängenden Tropfens. Handelt es sich nur um ralative Werthe von α, so benutzt man den Umstand, dass unter sonst gleichen Umständen das Tropfengewicht proportional der Grösse α ist. Auf diese Weise bestimmte Quincke unter Anderem auch den Werth von α für geschmolzene Metalle (Gold, Silber) in der Nähe der Schmelztemperatur, indem er Drähte von höchstens 3 mm Durchmesser in einer kleinen Flamme so lange am unteren Ende erhitzte, bis ein Tropfen abfiel.

Beispiel:

Silber

Durchmesser des Drahtes	Gewicht des Tropfens	α
mm	g	mg
0,2318	0,0299	41,13
0,0993	0,0130	41,66
0,0775	0,0110	41,02

Für andere Metalle, wie auch für Phosphor, Selen etc., benutzte Quincke Tropfen, die sich von der unteren Oeffnung von Glasröhren losgelöst hatten, in denen diese Materialien geschmolzen wurden. Je nachdem dabei der Tropfen von der inneren oder äusseren Peripherie der Röhre sich gebildet hatte, wie dies Fig. 458 und 459 im vergrösserten Maassstabe zeigt, wurde die eine oder die andere der Berechnung zu Grunde gelegt. Tropfen von der Anordnung wie in Fig. 460 oder 461 wurden von der Berechnung ausgeschlossen. Bei Substanzen, welche sich an der Luft oxydirt hätten, liess Quincke die Tropfen in einer Umgebung von kohlensaurem Gas ausfliessen. Tropfen schmelzbarer Salze endlich liess Quincke an einem vertical gehaltenen Platindraht sich bilden und abfallen.

Die Tropfengewichtmethode ist nicht so genau, wie die auf Messung der Steighöhe beruhende, aber, wie ersichtlich, allgemeiner anwendbar.

Die andere noch zu erwähnende Methode beruht auf der Beobachtung der Dimensionen von grösseren Tropfen, welche auf horizontaler, nicht benetzter Unterlage aufruhen, sowie auf Beobachtung von Luftblasen, welche sich zwischen einer benetzten, horizontalen Platte und der darunter liegenden Flüssigkeit befinden. Fig. 462 stellt den ersten Fall für eine nicht benetzende, Fig. 463, den zweiten Fall für eine benetzende Flüssigkeit dar. Sowohl der Tropfen, Fig. 462, als die Luftblase, Fig. 463, haben eine Stelle, wo sie den grössten Umfang besitzen. Bezeichnen wir die ganze Höhe des Tropfens (der Blase) mit T, den Höhenabstand von der Stelle des grössten Umfangs bis zur Kuppe mit t, so gilt für diese Grössen die Beziehung:

$$t = a = \sqrt{\frac{H}{s}}$$

$$T = a\sqrt{1 - \cos\vartheta}.$$

Da man mittelst des Kathetometers die Grössen t und T leicht genau messen kann, so liefert die darauf beruhende Methode ziemlich genaue Resultate.

Fig. 458. Fig. 459. Fig. 460. Fig. 461.

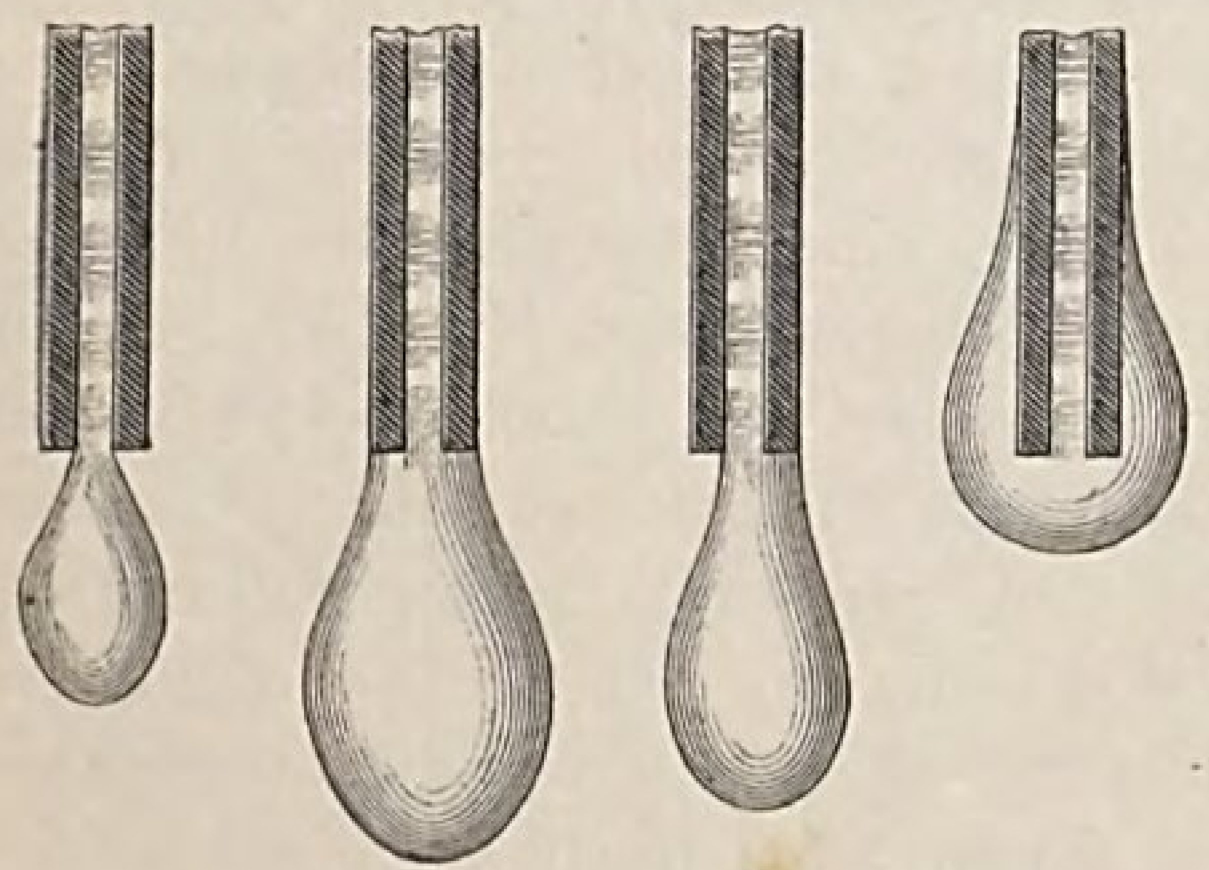


Fig. 462.

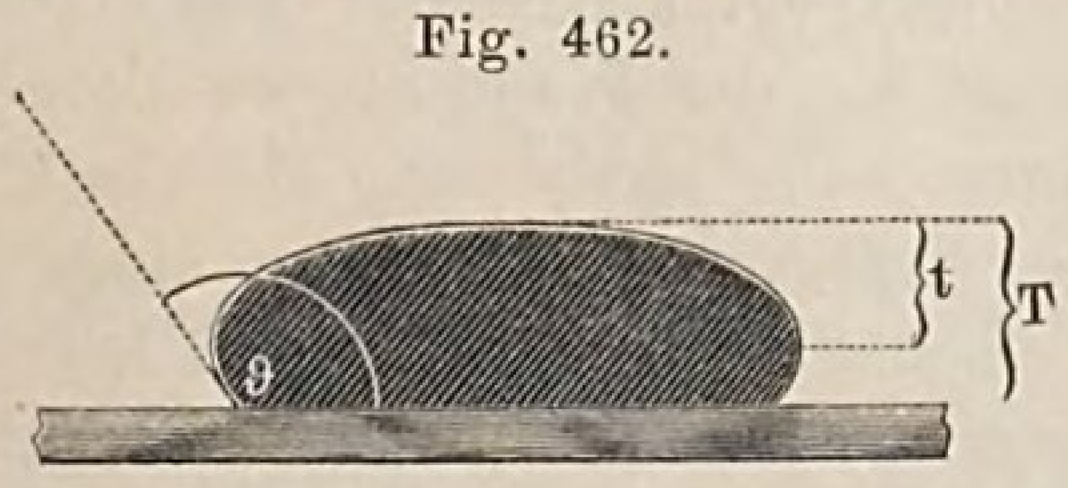
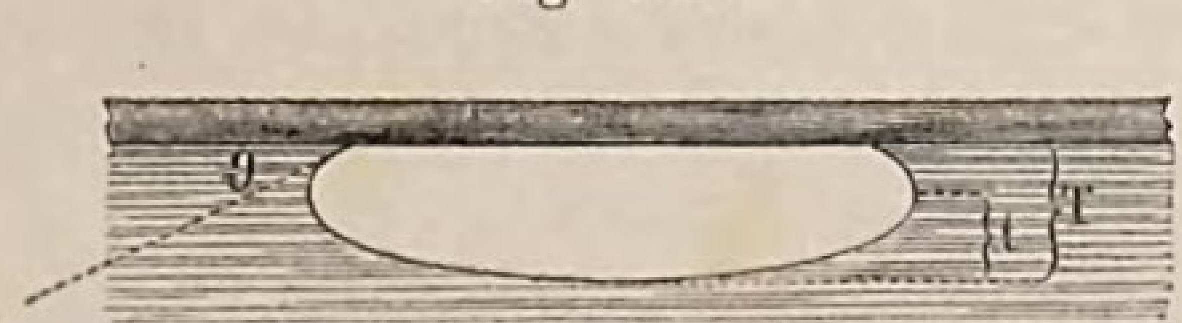


Fig. 463.



122 **Reibung der Flüssigkeiten.** Die Annahme, dass die Theilchen einer Flüssigkeit an einander und an den Wänden der Gefässe ohne allen Widerstand verschiebbar seien, ist nicht richtig. Dieser Widerstand ist, wenn auch gering, doch vorhanden und übt seinen Einfluss auf die Erscheinungen bei der Bewegung der Flüssigkeiten in Form einer Verzögerung der Bewegung.

Wenn an einer festen Wand vom Flächeninhalte f eine Flüssigkeitsschichte mit der relativen Geschwindigkeit v vorbei bewegt wird, so ist die verzögernde Kraft φ proportional diesen Grössen f und v, kann also durch eine Gleichung:

$$\varphi = \varepsilon \,.\, f \,.\, v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

ausgedrückt werden, in welcher ε eine für die Beschaffenheit der Wand und der Flüssigkeit charakteristische Constante ist, welche Coefficient der äusseren Reibung genannt wird. Bei benetzenden Flüssigkeiten scheint dieser Coefficient unendlich gross zu sein, d. h. die unmittelbar anliegende Flüssigkeitsschicht bleibt auch bei grösster Stromgeschwindigkeit haftend.

Bezüglich der Reibung der Flüssigkeitstheilchen an einander gelangen wir auf nachfolgende Weise zu einer analogen Aufstellung.

Denken wir uns einen Canal mit glatten Wänden, in welchem Wasser fliesst. Unmittelbar an der Wand haftet eine Wasserschichte in Folge Adhäsion so fest, dass sie die Geschwindigkeit gleich Null hat. In der Mitte des strömenden Wassers dagegen ist die Geschwindigkeit am grössten. Während nun die adhärirende Schichte auf ihre Nachbarschichte verzögernd einwirkt, wirkt diese wiederum verzögernd auf die nächste Schichte ein. Dagegen wirkt die in der Mitte befindliche, schnellst fliessende Schichte beschleunigend auf ihre Nachbarschichte, welche Wirkung sich wiederum auf die weiteren Nachbarschichten fortpflanzen muss. Sobald demnach einmal ein stationärer Zustand eingetreten ist, muss die Geschwindigkeit von der Wand ab, wo sie gleich Null ist, bis zur Mitte stetig ansteigen. Die analytische Mechanik gestattet das Gesetz dieser Geschwindigkeitszunahme zu berechnen und führt dann zu einer Beziehung zwischen folgenden Grössen: Ist d die kleine Distanz zweier der Bewegungsrichtung paralleler Flüssigkeitsschichten vom Flächeninhalt f, deren Geschwindigkeitsdifferenz (relative Geschwindigkeit gegen einander) durch v bezeichnet wird, so ergiebt sich für die Kraft ψ, mit welcher diese Schichten durch die Reibung auf einander beschleunigend, beziehungsweise verzögernd einwirken, die Relation:

$$\psi = \eta f \frac{v}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Dabei ist η eine nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängige Constante und heisst der Coefficient der inneren Reibung oder die Reibungsconstante der Flüssigkeit. Wählen wir, wie es üblich

ist, für die Längeneinheit das Millimeter, für die Kraft (nach praktischem Maasssystem) das Milligrammgewicht zur Einheit, so können wir also die Reibungsconstante definiren als die in Milligrammgewicht ausgedrückte Zugkraft, mit welcher eine Flüssigkeitsschichte vom Flächenraum gleich 1 qmm auf eine ebenso grosse, ihr in 1 mm Entfernung parallel gegenüber befindliche Schichte beschleunigend einwirkt, wenn sie mit der relativen Geschwindigkeit von 1 mm per Secunde daran vorbei bewegt wird.

Flüssigkeiten, deren innere Reibung sehr gross ist, heisst man zähflüssig. Der Grad der Zähflüssigkeit oder Viscosität*) wird durch den Werth der Reibungsconstante zum Ausdrucke gebracht.

Die Flüssigkeiten: Aether, Wasser, Schwefelsäure, Leinöl, venetianischer Terpentin bilden beispielsweise eine Reihe mit zunehmender Viscosität. Mit zunehmender Temperatur nimmt in der Regel die Viscosität ab, doch kommt, wie z. B. beim geschmolzenen Schwefel, auch der umgekehrte Fall vor.

Zur experimentellen Bestimmung der Reibungsconstante kann die theoretische Definition derselben nicht unmittelbar benutzt werden. Es sind hierzu folgende zwei Methoden angewendet worden.

Die eine zuerst von Coulomb und neuerdings von O. E. Meyer angewendete Methode beruht auf der Beobachtung der Verzögerung (Dämpfung), welche horizontale, in der Mitte an elastischen Fäden innerhalb der Flüssigkeit aufgehängte Scheiben in ihrer um die verticale Achse stattfindenden schwingenden Bewegung erleiden.

Die andere, viel leichter ausführbare Methode beruht auf der Beobachtung der Ausflussgeschwindigkeit durch Capillarröhren.

Im §. 107 wurde bereits mitgetheilt, dass nach Untersuchungen von Poisseuille die in einer gegebenen Zeit durch eine Capillarröhre abfliessende Flüssigkeitsmenge Q gegeben ist durch die Formel:

$$Q = N\frac{SD^4}{L},$$

worin D den Röhrendurchmesser, L die Röhrenlänge, S die Druckdifferenz an den Röhrenenden und N eine Constante bedeutet, welche von einer Flüssigkeit zur anderen, sowie auch mit der Temperatur sich ändert. Poisseuille maass den Druck durch eine Quecksilbersäule. Führt man statt dessen den Druck, in Höhen der ausfliessenden Flüssigkeit gemessen, in Millimetern gleich H ein, ebenso den Radius der Röhre R und die Länge in Millimetern, so ist das in Cubikmillimetern angegebene Volumen V der per Secunde ausfliessenden Flüssigkeit (vom specifischen Gewichte s) ausgedrückt durch:

$$V = K\frac{HR^4 s}{L} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 3)$$

*) Dieser Ausdruck stammt von *viscum*, die Mistel, aus welcher der Vogelleim bereitet wird.

worin K die neue Constante ist, welche beispielsweise für Wasser von 0^0 den Werth $K = 2162$ besitzt.

Mit Hülfe der höheren Analysis, deren Rechnungen wir hier nicht wiedergeben können, ist nun zwischen den obigen Grössen und dem Reibungscoefficienten η folgender Zusammenhang ermittelt worden:

$$V = \frac{\pi H R^4 s}{8 \eta L} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Aus 3) und 4) folgt nun:

$$\eta = \frac{\pi}{8K} = \frac{0{,}3927}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

also beispielsweise für Wasser von 0^0:

$$\eta = \frac{0{,}3927}{2162} = 0{,}0001817.$$

Hätte man statt des Millimeters den Centimeter und statt des Milligramms das Gramm zu Grunde gelegt, so hätte man für η den zehnmal kleineren Werth 0,00001817 erhalten, und würde man vom praktischen Maasssystem zum absoluten (Centimeter-, Gramm-, Sekunden-) System übergehen, so erhielte man unter Annahme von $g = 981^0$ $\eta = 0{,}017825$.

Mit steigender Temperatur wächst K und nimmt daher η ab. So z. B. fand Poiseuille für Wasser bei t^0 C.:

$$K = 2162{,}4\,[1 + 0{,}0336793\, t + 0{,}0002209936\, t^2].$$

Es ergiebt sich daraus, dass der Werth von η schon bei einer Temperaturerhöhung auf 30^0 C. unter die Hälfte jenes für 0^0 fällt. Das Wasser erleidet also im warmen Zustande bedeutend weniger Reibung als im kalten.

Die angegebene Formel für den Reibungscoefficienten sollte der Theorie nach nur unter der Bedingung gelten, dass die Flüssigkeit die Röhrenwände benetzt, d. h. daran haftet. Wie die Versuche ergeben haben, scheint sie aber auch für Quecksilber gültig zu sein.

Nachträglich wollen wir noch einen von W. C. Röntgen angegebenen Vorlesungsapparat beschreiben, welcher geeignet ist, das Poiseuille'sche Gesetz und den Einfluss der Temperatur auf die Reibung der Flüssigkeiten zu demonstriren.

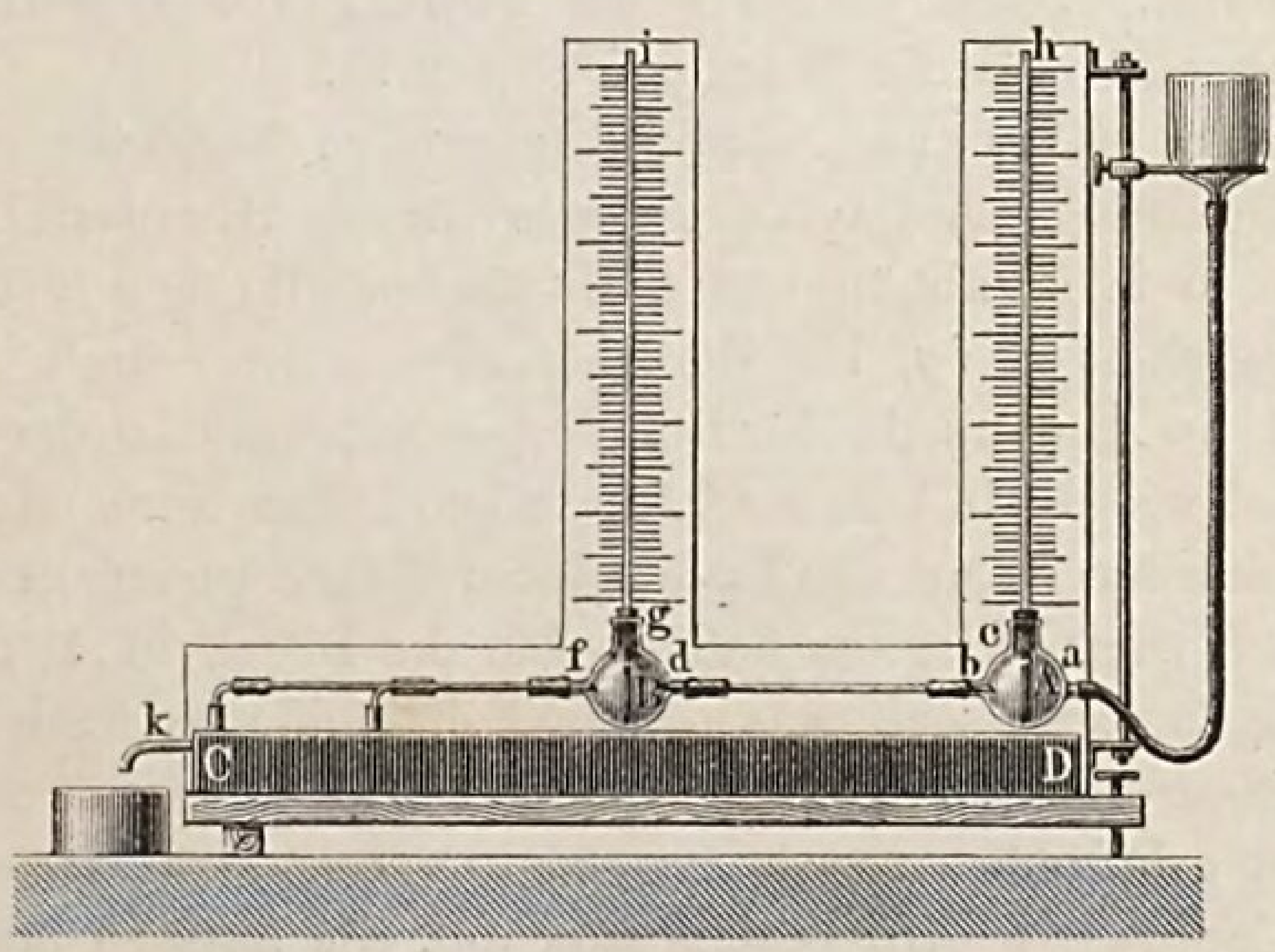
Derselbe ist in Fig. 464 in $^1/_{20}$ der natürlichen Grösse abgebildet. A und B sind zwei Glaskugeln von 9 cm Durchmesser; die eine, A, besitzt bei a und b zwei diametral einander gegenüberliegende Ansatzröhrchen von 0,8 cm Weite und bei c einen Hals; die zweite, B, besitzt bei d ein und bei f drei in einer horizontalen Ebene liegende, parallele Ansatzröhrchen von ebenfalls 0,8 cm Weite und bei g einen Hals. bd ist eine Capillare von 38 cm Länge und 0,08 cm Durchmesser, welche in die Ansätze b und d eingesetzt ist und durch übergeschobene Kautschukröhrchen luftdicht mit den beiden Kugeln verbunden wird. In die drei Ansätze bei f wird je eine Capillare gesteckt, welche ebenfalls durch

Kautschukröhrchen luftdicht mit der Kugel B verbunden sind. Die freien Enden dieser Capillaren sind durch Kautschukröhrchen mit knieförmig gebogenen Glasröhrchen von ungefähr 0,6 cm Weite verbunden, und von letzteren hängen Kautschukröhrchen in die rinnenförmige Wanne GD herab.

Die Capillaren haben folgende Dimensionen: von der ersten (I) beträgt die Länge 38 cm und der Durchmesser 0,08 cm, von der zweiten (II) 19 cm, resp. 0,08 cm, von der dritten (III) 38 cm, resp. 0,04 cm. Die erste ist auf einer möglichst grossen Länge von einem durch Kautschukstöpsel aufgesetzten, gläsernen Dampfmantel umgeben. Derselbe ist in Fig. 464 nicht gezeichnet.

Durch die Hälse c und g gehen an beiden Seiten offene verticale Glasröhren, die bis auf den Boden der Kugeln reichen, und die durch Kautschukstöpsel eingesetzt sind. Dieselben dienen als Manometer, ihre

Fig. 464.



Länge beträgt 75 cm und ihr lichter Durchmesser 0,3 cm; beide sind sehr dickwandig, damit die in denselben stehende Flüssigkeitssäule möglichst dick erscheine.

Von a führt ein Kautschukschlauch bei den Versuchen mit Flüssigkeiten zu einem weiten Reservoir E, welches an einer Stange auf- und abwärts geschoben und befestigt werden kann.

Der beschriebene Apparat ist in passender Weise auf einem weiss angestrichenen hözernen Gestell befestigt, dessen Einrichtung zur Genüge aus der Zeichnung hervorgeht.

Die hinter jedem Manometer befindliche verticale Centimeterscala hat ihren Nullpunkt in dem Niveau der Flüssigkeit in der Wanne, wenn dafür gesorgt ist, dass diese bis zur Höhe von einigen auf der Innenfläche der Wanne angebrachten Marken gefüllt ist; dieses Niveau bleibt während der Versuche constant, da die aus den Capillaren ausströmende Flüssigkeit durch das Röhrchen k wieder abfliesst. Die an den Scalen

abgelesenen Manometerstände geben folglich in Centimetern Flüssigkeit die in *A* und *B* vorhandenen Ueberdrucke über den am Ende der Capillaren *f* existirenden Druck, wenn der ganze Apparat vollständig mit Flüssigkeit gefüllt ist.

Als Versuchsflüssigkeit dient am besten gefärbtes, reines Wasser; mit demselben wird der Apparat zunächst gefüllt, was in folgender Weise geschieht. Nachdem das Reservoir *E* möglichst tief herunter gelassen ist, werden die Manometerröhren abgenommen und in *E* soviel Wasser eingegossen, bis dasselbe in dem Halse *c* steht, dann wird das Manometer *ch* eingesetzt und *E* gehoben. Um auch *B* und die Capillaren *f* mit ihren Ansätzen so zu füllen, dass nirgends Luft zurückbleibt, müssen die von den Enden der Capillaren herabhängenden Kautschukröhrchen nach oben gedreht werden; darauf wird mittelst eines Trichters in *B* soviel Wasser eingegossen, bis dasselbe aus den drei Kautschukröhrchen auszufliessen beginnt; diese werden dann durch Glasstäbchen geschlossen und wieder abwärts gerichtet. Nach vollständiger Füllung von *B* wird das Manometer *gi* eingesetzt und die Wanne *CD* gefüllt.

Der Apparat ist nunmehr für die folgenden Versuche fertig:

1) Die Mündung der Capillare I wird durch Herausziehen des Glasstäbchens aus dem herabhängenden Kautschukröhrchen geöffnet, sofort fällt die Flüssigkeit in *ig*, bis der Ueberdruck in *B* halb so gross geworden ist als in *A*, denn da der Reibungswiderstand in der Capillare *bd* ebenso gross ist wie der in I, da beide dieselben Dimensionen haben, so muss auch die Druckdifferenz an den Enden jeder Röhre gleich gross sein. Ist das Reservoir *E* weit genug, so ändert sich der Druck in *A*, folglich auch in *B* während längerer Zeit kaum merklich; anderen Falles muss man durch Aufgiessen von Wasser oder durch Heben des Gefässes das Niveau in *E* constant erhalten.

2) Die Capillare I wird geschlossen und die halb so lange Capillare II geöffnet. Der Ueberdruck in *B* sinkt bis auf ein Drittel des Ueberdruckes in *A*, als Beweis dafür, dass der Reibungswiderstand in einer Röhre von der halben Länge nur halb so gross ist als in einer Röhre von der einfachen Länge.

3) Die Capillare II wird geschlossen und die engere Capillare III geöffnet. Das Wasser steigt in *gi*, bis in *B* ein Ueberdruck vorhanden ist, der sich zur Druckdifferenz zwischen *A* und *B* umgekehrt verhält wie die vierten Potenzen der Durchmesser der Capillaren I und III.

4) Die Capillare III wird geschlossen und I wieder geöffnet; das Manometer *gi* zeigt dann selbstverständlich denselben Stand wie beim ersten Versuch. Wird nun Dampf von siedendem Wasser durch den Mantel, welcher die Röhre I umgiebt, geleitet, so bemerkt man sofort ein starkes Sinken des Druckes in *B*, welches der Abnahme der Reibung des Wassers mit der Temperatur entspricht*).

*) Apparate zur wissenschaftlichen Untersuchung der Reibungscoefficienten sind beschrieben von G. Wiedemann, Pogg. Ann. 99, S. 221; A. Sprung,

Die Endosmose. Wenn man Wasser und Oel in einer Flasche zusammenschüttelt, so werden sich, der Ruhe überlassen, die beiden Flüssigkeiten doch alsbald wieder trennen und nach ihrem specifischen Gewichte über einander lagern. Es rührt dies unstreitig daher, dass die Anziehung zwischen zwei Wassermolekülen ebenso wie die Anziehung zwischen zwei Oelmolekülen grösser ist, als die Anziehung zwischen einem Wassertheilchen und einem Oeltheilchen. 123

Ganz anders verhalten sich Weingeist und Wasser. Die Anziehung zwischen einem Weingeist- und einem Wassermolekül ist grösser als die Kraft, mit welcher zwei Wassermoleküle oder zwei Weingeistmoleküle einander anziehen, weshalb sich auch aus Wasser und Weingeist eine Mischung herstellen lässt, in welcher jede der beiden Flüssigkeiten vollkommen gleichförmig verbreitet ist. Ja selbst wenn die beiden Flüssigkeiten anfänglich nach ihrem specifischen Gewichte geschichtet sind, d. h. wenn der Weingeist anfänglich auf dem Wasser schwimmt, so wird durch die erwähnte stärkere Anziehung zwischen Wasser und Weingeist nach einiger Zeit doch eine gleichförmige Mischung der beiden Flüssigkeiten erfolgen. Ganz ähnlich verhalten sich Wasser und Schwefelsäure, Wasser und eine concentrirte Salzlösung etc.

Diese Erscheinung der nach und nach eintretenden gleichförmigen Mischung zweier Flüssigkeiten wird mit dem Namen der Diffusion bezeichnet. Wasser und Weingeist diffundiren in einander, während zwischen Wasser und Oel keine Diffusion stattfindet.

Wenn nun zwei Flüssigkeiten, welche sich in der erwähnten Weise zu mischen oder gar chemisch zu verbinden streben, wie Wasser und Weingeist, Wasser und Schwefelsäure etc., nicht in unmittelbarer Berührung, sondern durch irgend einen porösen Körper getrennt sind, so müssen die Flüssigkeiten durch diese Wand zu einander übergehen, und da nun diese poröse Wand meistens die eine Flüssigkeit leichter durchlässt als die andere, so muss die Menge der Flüssigkeit auf der einen oder der anderen Seite zunehmen. Füllt man z. B. eine unten mit Schweinsblase zugebundene Glasröhre zum Theil mit einer concentrirten Lösung von Kupfervitriol, taucht man dann die durch die Blase verschlossene Oeffnung in ein Gefäss mit Wasser, so dringt das Wasser allmälig durch die Blase in die Röhre, so dass in derselben die Flüssigkeit steigt, während sie aussen sinkt. Umgekehrt sinkt die Flüssigkeit in der Röhre, wenn das Wasser innen, die Lösung des Kupfervitriols aussen ist. Etwas von der Lösung des Kupfervitriols dringt freilich auch durch die Blase zum Wasser, wie man bald an der Färbung erkennt.

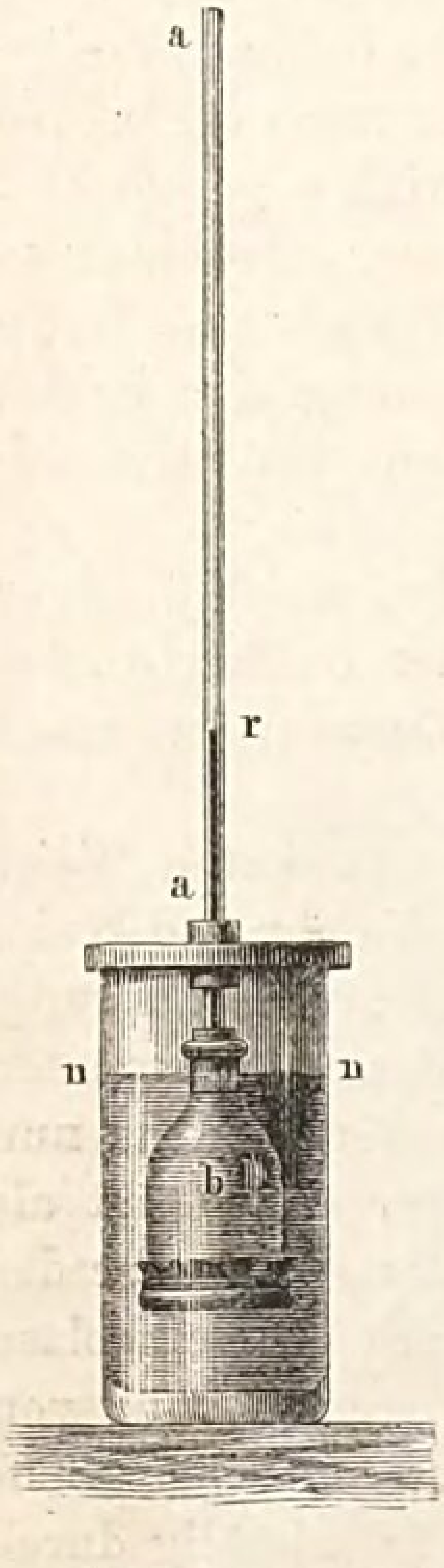
Aehnliche Erscheinungen beobachtet man, wenn man in die Röhre Alkohol giesst und sie in Wasser taucht. Nach einiger Zeit sieht man, dass das Niveau der Flüssigkeit in der Röhre gestiegen ist.

Pogg. Ann. 159, S. 94; Přibram und Handl, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 78, S. 136; Slotte, Wiedem. Ann. 14, S. 13.

Man nennt diesen Austausch von Flüssigkeiten durch eine poröse Scheidewand hindurch Endosmose oder richtiger Diosmose.

Um die Zunahme der Flüssigkeit auf der einen Seite recht auffallend zu machen, dient das von Dutrochet construirte Endosmometer, Fig. 465; *a* ist eine Glasröhre, deren innerer Durchmesser 1 bis 2 mm beträgt und die durch einen sehr wohl schliessenden Kork in dem Halse eines weiteren Glasgefässes *b* befestigt ist. Das Gefäss *b* ist unten durch eine Thierblase verschlossen. Dieser mit der einen Flüssigkeit gefüllte Apparat wird nun in ein weiteres Gefäss, welches die andere Flüssigkeit enthält, eingesetzt, ohne dass jedoch die Blase auf dem Boden des äusseren Gefässes aufsitzt.

Fig. 465.



Das Gefäss *b* mit der Röhre *a* sei z. B. mit Weingeist gefüllt, das äussere Gefäss enthalte Wasser. Sobald das Gefäss *b* eingesetzt ist, wird sich alsbald ein mechanisches Gleichgewicht zwischen der inneren und äusseren Flüssigkeit und der Spannung der Blase herstellen. Es sei *n n* das Niveau des äusseren Wassers und *r* der Gipfel der Weingeistsäule in der Röhre. Nach einer Viertelstunde beobachtet man schon eine bedeutende Veränderung; die Flüssigkeit ist nämlich schon um einige Millimeter über *r* hinaus gestiegen, und dieses Steigen dauert fort. Selbst wenn die Röhre 4 bis 5 dcm hoch ist, lässt sich erwarten, dass die Flüssigkeit nach einigen Stunden den Gipfel erreicht hat, um oben auszufliessen. Das Wasser ist also trotz des Druckes, welchen der Alkohol in Folge seiner Schwere auf die Blase ausübt, durch die Poren derselben in das Gefäss *b* eingedrungen; es hat also eine Endosmose des Wassers zum Alkohol durch die Blase hindurch stattgefunden. Macht man den Versuch in umgekehrter Ordnung, indem man das Wasser innen, den Alkohol aussen hinbringt, so sinkt das Niveau in der Röhre, während es von aussen steigt.

Wenn man in ein Gefäss von ungebranntem Thon (etwa eine poröse Thonzelle, wie sie zu Grove's und Bunsen's galvanischen Batterien gebraucht werden) Schwefelsäure giesst und es dann in ein anderes Gefäss mit Wasser stellt, so findet eine ähnliche Erscheinung statt; das Wasser sickert durch den Thon durch, das Niveau der Flüssigkeit im Inneren der Thonzelle steigt, während es aussen sinkt.

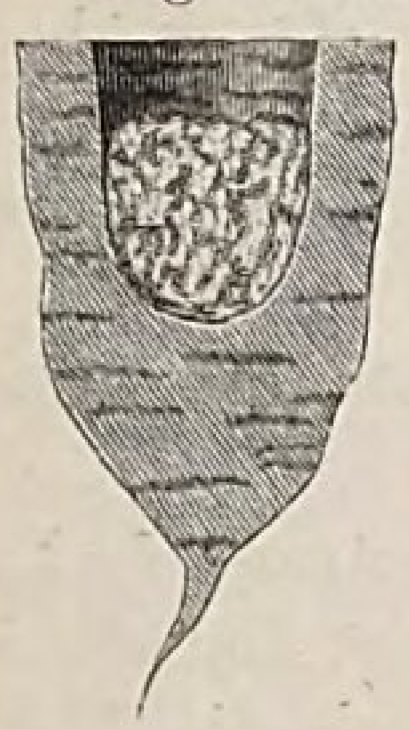
Die Wirkung der Endosmose dauert fort, wenn auch allmälig immer schwächer, bis die Flüssigkeiten zu beiden Seiten der Scheidewand ganz gleichartig sind.

Dass der Spiegel der Flüssigkeit auf der einen Seite so hoch über das Niveau der anderen Seite steigen kann, rührt daher, dass die Poren

der Scheidewand zu fein sind, als dass ein hydrostatischer Druck sich durch dieselben fortpflanzen könnte. Wenn man Wasser in eine poröse Thonzelle giesst, so werden die Wände zwar feucht, aber das Wasser tropft nicht durch, und eine Thierblase, welche gleichfalls vom Wasser befeuchtet wird, kann nicht zum Filtriren des Wassers gebraucht werden.

Welche der getrennten Flüssigkeiten an Volumen zunimmt, hängt wesentlich von der Natur der trennenden Scheidewand ab; wenn Wasser und Weingeist durch eine Kautschukplatte getrennt sind, so nimmt das Wasser an Volumen zu, indem der Weingeist leichter durch den Kautschuk wandert als Wasser.

Fig. 466.



Das alltägliche Leben bietet uns mancherlei Beispiele endosmotischer Erscheinungen, wohin unter anderen auch das Aufquellen von Erbsen, Bohnen etc. zu rechnen ist, welche man in Wasser legt. — Wird eine etwas dicke gelbe Rübe oben abgeschnitten und ausgehöhlt, wie Fig. 466 zeigt, so dass noch eine 4 bis 6 mm dicke Wand übrig bleibt, und dann die Höhlung mit gestossenem Zucker gefüllt, so findet man denselben nach einiger Zeit in eine concentrirte Lösung verwandelt, während die umgebende Wurzelwand sichtlich zusammenschrumpft. Hier wird offenbar durch einen endosmotischen Process das Wasser aus den Zellen der Wurzel ausgezogen.

Das endosmotische Aequivalent. Jolly hat gezeigt, dass 124
Dutrochet's Endosmometer kein richtiges Maass für die Grösse des durch die Scheidewand stattfindenden Austausches von Flüssigkeiten sein kann, indem keineswegs bloss die eine Flüssigkeit durch die Scheidewand hindurchgeht. Untersucht man mit einem Aräometer das Wasser und den Weingeist, bevor man sie in den Apparat Fig. 465 einfüllt, und nachher, nachdem man den Versuch abgebrochen hat, so findet man, dass das specifische Gewicht des Wassers abgenommen hat, während das des Weingeistes stieg; es ist also nicht bloss Wasser zum Weingeist, sondern auch umgekehrt Weingeist zum Wasser übergegangen; die Volumenvermehrung des Weingeistes rührt also nur von der Differenz der beiden entgegengesetzten Strömungen her. Es könnte ein sehr bedeutender Austausch der beiden Flüssigkeiten stattfinden, ohne dass das Endosmometer die geringste Anzeige davon giebt, wenn nämlich beide Flüssigkeiten in gleichem Maasse durch die Scheidewand hindurchdringen.

Um zu ermitteln, in welchem Verhältniss die Wanderung der Substanzen nach entgegengesetzter Richtung geht, wandte Jolly folgendes Verfahren an:

Das eine Ende einer Glasröhre wurde mit einem Stück Schweinsblase zugebunden, in dieselbe Substanz gebracht, deren endosmotisches Verhalten gegen Wasser untersucht werden sollte, z. B. Weingeist. — Das untere Ende dieser Röhre wurde nun, nachdem sie gewogen worden

war, in ein grösseres Gefäss mit Wasser eingetaucht; nach einiger Zeit, etwa nach einem Tage, wurde die in Folge der Endosmose eingetretene Gewichtszunahme des Inhalts der Glasröhre ermittelt (natürlich mit Beachtung aller nöthigen Vorsichtsmaassregeln, deren Besprechung nicht hierher gehört) und das äussere Wasser durch frisches ersetzt.

So wurde nun fortgefahren, bis die Röhre keine Gewichtszunahme mehr zeigte; es ergab sich nun, dass der Röhreninhalt reines Wasser war; die vorher in der Röhre befindlich gewesene Substanz ist allmälig zu dem immer wieder weggegossenen Wasser des äusseren Gefässes übergegangen.

Hier lässt sich nun ausmitteln, wie viel Wasser gegen die ausgetretene Substanz in die Röhre eingetreten ist.

Um den Gang der Untersuchung besser übersehen zu können, wollen wir einen solchen Versuch genauer verfolgen.

Das Gewicht der Röhre, leer, aber mit feuchter Blase, betrug 37,81 g.

In dieselbe wurden 2,4 g trockenen Kochsalzes gebracht und sie in das Wassergefäss eingesetzt. Allmälig ging Wasser durch die Blase zum Kochsalz, welches gelöst wurde; das Volumen dieser Lösung, welche natürlich immer verdünnter wurde, nahm mehr und mehr zu, bis sich endlich nach vier Tagen keine Gewichtszunahme mehr zeigte. Das Gewicht der Röhre betrug nun 48,17 g, der Inhalt derselben, welcher aus reinem Wasser bestand, wog 48,17 — 37,81 = 10,36 g. Während diese 10,36 g Wasser durch die Blase in die Röhre eintraten, sind aber die 2,4 g Kochsalz in entgegengesetzter Richtung hindurchgegangen oder auf 1 g Kochsalz 4,3 g Wasser.

Jolly nennt das endosmotische Aequivalent einer Substanz die Zahl, welche angiebt, wie viele Gewichtstheile Wasser gegen einen Gewichtstheil der fraglichen Substanz durch die Blase hindurchgehen, es ist also 4,3 das endosmotische Aequivalent des Kochsalzes.

Auf diese Weise ermittelte Jolly das endosmotische Aequivalent folgender Substanzen:

Kochsalz	4,3
Glaubersalz	11,6
Schwefelsaures Kali	12
Schwefelsaure Magnesia	11,7
Schwefelsaures Kupferoxyd	9,5
Kalihydrat	215
Schwefelsäurehydrat	0,39
Saures schwefelsaures Kali	2,3
Alkohol	4,2
Zucker	7,1

Im Allgemeinen nimmt das endosmotische Aequivalent mit der Temperatur zu.

Die Menge der in gleichen Zeiten durch die Blase zum Wasser übertretenden Stoffe ist dem Concentrationsgrade der Lösung proportional.

Ludwig *) hat durch eine sehr genaue Versuchsreihe dargethan, dass das endosmotische Aequivalent für denselben Stoff keineswegs eine constante, sondern dass es eine von dem Concentrationsgrade der Flüssigkeiten abhängige Grösse ist.

Theorie der Endosmose. Alle zu endosmotischen Versuchen 125
brauchbaren Scheidewände sind von unzählig vielen ausnehmend feinen Poren durchzogen, welche zu fein sind, als dass sich durch dieselben ein hydrostatischer Druck fortpflanzen könnte. — Wird eine solche Zwischenwand in eine Flüssigkeit getaucht, so wird, je nach der Molekularanziehung, welche zwischen der Membran und der Flüssigkeit besteht, eine grössere oder kleinere Menge der Flüssigkeit resorbirt und zurückgehalten werden.

Ueber die Resorption von Flüssigkeiten durch thierische Blasen hat Liebig Versuche angestellt, welche den Vorgang bei den endosmotischen Erscheinungen sehr schön erläutern.

100 Gewichtstheile trockener Ochsenblase nehmen in 24 Stunden auf:

268	Gewichtstheile	Wasser
133	„	Kochsalzlösung (1,204 specif. Gewicht)
38	„	Weingeist (84 Proc.)
17	„	Knochenöl.

Das Absorptionsvermögen der thierischen Membranen für verschiedenartige Flüssigkeiten ist also sehr ungleich. In Wasser gelegt, quillt die Blase auf und wird weich, in Alkohol bleibt sie hart.

Durch Druck lässt sich die resorbirte Flüssigkeit aus den Poren der Membran nach und nach entfernen, durch Druck kann man die Flüssigkeiten durch die Poren der Membranen hindurchtreiben.

Wenn eine Blase, welche irgend eine Flüssigkeit resorbirt hat, mit einer Substanz in Berührung gebracht wird, welche gleichfalls eine Anziehung auf die Theilchen der resorbirten Flüssigkeit äussert, so wird ein Theil dieser Flüssigkeit der Blase entzogen.

Wenn eine mit Wasser gesättigte Blase mit Kochsalz bestreut wird, so entsteht überall da, wo das Salz mit dem Wasser in Berührung kommt, welches die offenen Poren erfüllt, eine gesättigte Salzlösung, da aber die Resorptionsfähigkeit der Blase für die Salzlösung geringer ist als für reines Wasser, so tritt ein Theil der Flüssigkeit aus und fliesst in Tropfen ab; dabei schrumpft die Blase zusammen.

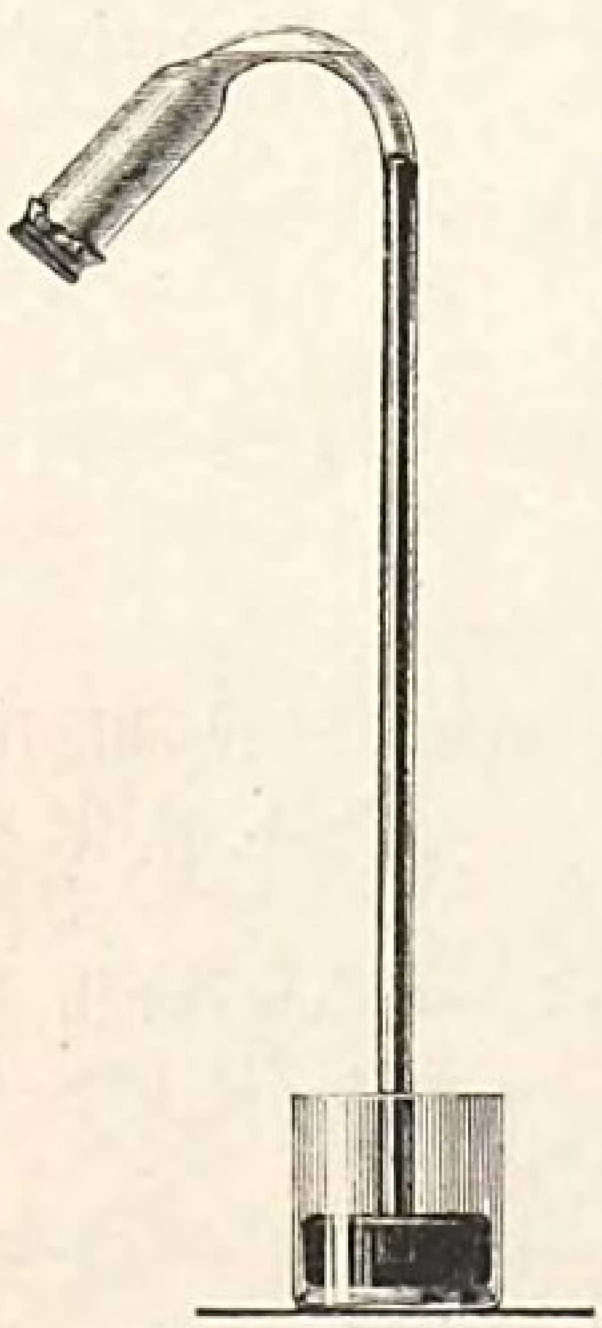
Wird ein Stück mit Wasser gesättigter Blase in Alkohol gelegt, so verliert sie in 24 Stunden ungefähr die Hälfte ihres Gewichts, was von einem Zusammenschrumpfen und Hartwerden der Blase begleitet ist.

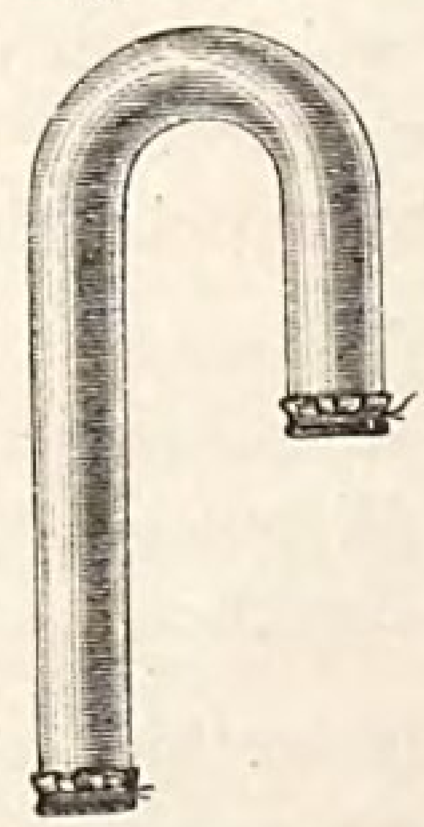
*) Pogg. Ann. LXXVIII, 307.

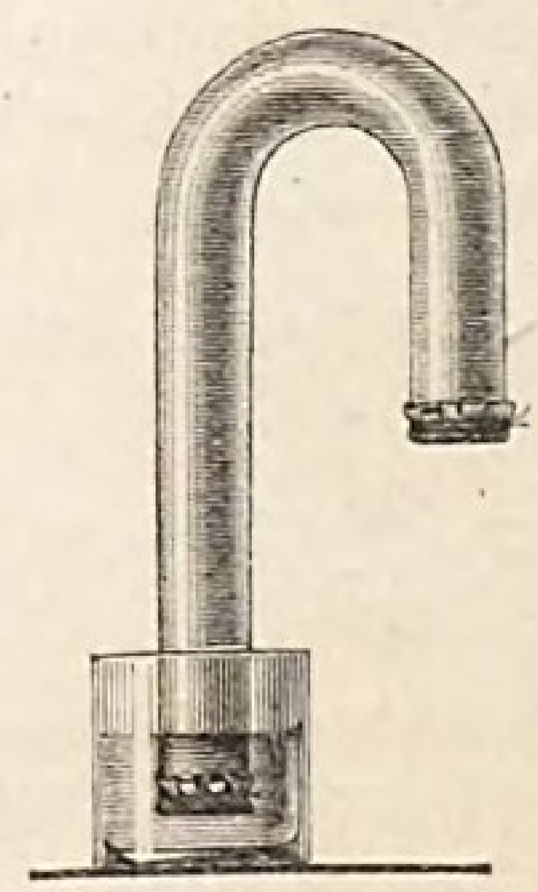
Diese Thatsachen erläutern nun den Vorgang der Endosmose ganz vortrefflich.

Wenn eine Membran zur Trennung zweier Flüssigkeiten dient, so wird sie von jedem der getrennten Stoffe durch Molekularanziehung, durch Resorption, in sich aufnehmen; die resorbirte Flüssigkeit wird aber nach der anderen Seite der Blase wieder austreten, weil sie von dort her durch eine chemische Anziehung den Poren der Blase entzogen wird. Dieser Process wird fortdauern, bis die auf beiden Seiten befindlichen Flüssigkeiten einander gleich geworden sind.

126 **Einfluss der Verdunstung auf die Endosmose.** Durch Verdunstung wird einer Blase in ähnlicher Weise das resorbirte Wasser entzogen, wie wenn man sie mit Salz bestreut oder in Alkohol legt. Wenn also ein Blasenstück fortwährend einerseits mit Wasser, andererseits mit trockener Luft in Berührung ist, so wird für das Wasser,


Fig. 467.


Fig. 468.


Fig. 469.

welches auf der einen Seite verdunstet, von der anderen Seite her frisches Wasser in die Poren eintreten.

Füllt man eine Röhre, welche auf einer Seite mit einer Blase zugebunden ist, ganz mit Wasser, stellt man sie mit dem offenen Ende in ein Gefäss mit Quecksilber, wie es Fig. 467 zeigt, so wird in dem Maasse, in welchem das Wasser an der Blase verdunstet, das Quecksilber in der Röhre steigen; für eine einfache Ochsenblase steigt es bis zu einer Höhe von 30 cm.

Wenn die Röhre, Fig. 468, ganz mit Wasser gefüllt und an beiden Enden mit Blase zugebunden ist, so kann in die Röhre keine neue Flüssigkeit als Ersatz für die verdunstete eintreten, wenn kein Röhrenende in eine Flüssigkeit eintaucht; in Folge dessen entsteht aber ein luftverdünnter Raum in der Röhre, welcher sich durch eine concave Wölbung der Blasen zu erkennen giebt; wird aber das eine Ende der Röhre in ein Gefäss mit Salzwasser gestellt, wie Fig. 469 zeigt, während der andere Schenkel der Luftverdunstung freigegeben bleibt, so ist ein-

leuchtend, dass, wenn die Verdunstung bis zu einem gewissen Grade fortgeschritten ist, der atmosphärische Luftdruck das Salzwasser durch die Poren der Blase hindurchdrückt.

Wenn das Salzwasser durch Indigotinctur blau gefärbt worden ist, so sieht man schon nach wenigen Stunden, dass sich innerhalb der Röhre eine blaue Schicht bildet, die sich beständig vermehrt.

Wenn man eine mit wasserhaltigem Weingeist gefüllte Schweinsblase in die Luft hängt, so findet eine Exosmose des Wassers durch die Poren der Blase und eine Verdunstung desselben an seiner Oberfläche statt, in Folge deren der zurückbleibende Weingeist mehr und mehr concentrirt wird.

Es ist klar, dass die Endosmose eine grosse Rolle bei der Verbreitung der Säfte im Pflanzen- und Thierkörper spielt, weshalb ihre Kenntniss für die Physiologie von grosser Wichtigkeit ist.

Diffusionsanalyse. Das Diffusionsvermögen verschiedener Substanzen ist, wie sich aus den vergleichenden Versuchen von Graham*) ergiebt, sehr verschieden. Unter einer Wassersäule von ungefähr 14 cm Höhe, welches sich in einem Glascylinder befand, breitete er mittelst einer dünnen, bis auf den Boden reichenden Pipette eine Schicht 10 procentiger verdünnter Salzsäure aus, welche gerade 10 g Salzsäure enthielt und deren Höhe ungefähr $^1/_7$ von der Höhe der Wassersäule betrug. Nachdem der Cylinder drei Tage lang ruhig stehen geblieben war, hatte sich die Salzsäure in der ganzen Flüssigkeitssäule verbreitet. Es wurden nun der Reihe nach Schichten von der Säule abgehoben, deren Höhe jeweils $^1/_{16}$ von der Gesammthöhe der Flüssigkeitssäule betrug, und jede dieser Schichten auf ihren Gehalt an Salzsäure untersucht; es ergab sich 127

der Salzsäuregehalt der obersten Schicht	0,003 g
„ „ „ fünften „	0,043 „
„ „ „ zehnten „	0,595 „
„ „ „ beiden untersten Schichten	3,699 „

Als der Versuch ganz in gleicher Weise mit einer 10 procentigen Lösung von Chlornatrium wiederholt wurde, ergab sich, dass für diese Substanz die Diffusion nach sieben Tagen ungefähr ebenso weit vorgeschritten war, wie für Salzsäure nach drei Tagen. Chlornatrium diffundirt also 2,33 mal langsamer als Salzsäure.

In diesem Sinne fand Graham ferner, dass

schwefelsaure Magnesia	ungefähr	7 mal
Zucker	„	7 „
Eiweiss	„	49 „
Caramel	„	98 „

langsamer diffundirt als Salzsäure.

*) Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. CXXI.

Caramel ist ein Zersetzungsproduct des Stärkezuckers, welches erhalten wird, wenn man denselben über 100⁰ erwärmt. Der Stärkezucker wird dadurch unter Bräunung und Wasserverlust in einen Körper verwandelt, welcher nicht mehr süss schmeckt, nicht mehr gährungsfähig ist und die Formel $C_{12}H_9O_9$ hat.

Der Unterschied im Diffusionsvermögen der beiden zuletzt genannten Substanzen zu den ersteren ist enorm. Andere Substanzen, welche gleichfalls sehr langsam diffundiren, sind: Kieselsäurehydrat, die Hydrate der Thonerde und analoger Metalloxyde, wenn sie in der löslichen Form existiren, ferner Stärkemehl, Dextrin, die Gummiarten, Albumin, Leim etc. Alle diese Substanzen sind durch die Unfähigkeit, den krystallinischen Zustand anzunehmen, und durch den gallertartigen Zustand ihrer Hydrate charakterisirt. — Den Leim als Typus dieser Substanzen betrachtend, schlug Graham vor, sie Colloïdsubstanzen zu nennen, im Gegensatz zu den ungleich leichter diffundirenden Krystalloïdsubstanzen.

Dieses ungleiche Verhalten der genannten Substanzen kann man zur Trennung derselben benutzen. Schichtet man vorsichtig eine Säule von Wasser über einer Schicht, welche aus gelösten Colloïd- und Krystalloïdsubstanzen besteht, so wird sich nach einiger Zeit eine Quantität der letzteren bis in die obersten Wasserschichten verbreiten, während die ersteren zurückbleiben.

Eine solche Trennung wird noch durch den Umstand befördert, dass die durch Stärkemehl, thierischen Schleim etc. gebildeten gallertartigen Massen dem Wasser sowohl wie den gelösten Krystalloïdsubstanzen den Durchgang gestatten, die Colloïdsubstanzen aber zurückhalten. Schon ein dünnes Häutchen einer solchen Gallerte bewirkt eine derartige Trennung, wie folgender Versuch zeigt.

Ein Blatt dünnen gut planirten Briefpapiers, welches keine porösen Stellen hatte, wurde durchgefeuchtet und dann auf die Oberfläche von Wasser gelegt, das sich in einem Gefässe befand, dessen Durchmesser kleiner war als der des Papiers. Das Papier wurde alsdann in der Mitte so herabgedrückt, dass sich eine Vertiefung bildete, in welche eine gemischte Lösung von Rohrzucker und arabischem Gummi gegossen wurde. Die Lösung enthielt 5 Proc. von jeder der beiden Substanzen. Nach 24 Stunden hatte das Volumen der oberen Flüssigkeit in Folge endosmotischer Wirkung bedeutend zugenommen; das Wasser unten aber enthielt nun $^3/_4$ der gesammten Zuckermasse und eine Spur von Gummi.

Das Papier war mit Stärkemehl planirt; das Häutchen von Stärkemehlgallerte in dem befeuchteten Papier liess den Zucker durch, aber nicht das Gummi.

Graham bezeichnet eine solche mittelst Diffusion durch eine Scheidewand von gallertartiger Substanz bewirkte Scheidung als Dialyse.

Das zweckmässigste Material zur Herstellung einer dialytischen Scheidewand ist das vegetabilische Pergament oder Pergament-

papier. Es ist nichtplanirtes Papier, welches durch kurzes Eintauchen in Schwefelsäure eine eigenthümliche Metamorphose erlitten hat, indem es bei pergamentähnlicher Consistenz eine grosse Festigkeit besitzt. Solches Pergamentpapier wird bereits fabrikmässig dargestellt und kann in vielen Fällen die thierische Blase ersetzen. Befeuchtet lässt sich das Pergamentpapier leicht über einen Ring von Guttapercha spannen, welcher ungefähr 5 cm hoch ist und 20 bis 25 cm im Durchmesser hat, und so ein Gefäss herstellen, dessen Boden durch Pergamentpapier gebildet ist. Die so erhaltene Vorrichtung (den Dialysator) lässt man dann in einem eine beträchtliche Menge Wasser enthaltenden Gefässe schwimmen, nachdem man die gemischte Lösung hineingegossen hat, welche dialysirt werden soll. Ein halbes Liter Urin gab, in den Dialysator gebracht, nach 24stündiger Dialyse die darin enthaltenen Krystalloïdsubstanzen an das Wasser ab; letzteres liess dann bei dem Verdampfen im Wasserbade eine weisse Salzmasse zurück, aus welcher durch Behandlung mit Alkohol Harnstoff in so reinem Zustande ausgezogen werden konnte, dass er sich beim Verdunsten des Alkohols in Krystallbüscheln ausschied.

Man begreift, welchen Vortheil dieses Verfahren gewährt, um die Gegenwart von arseniger Säure in organischen Gemengen, z. B. im Mageninhalt, nachzuweisen.

Ein weiteres Verfolgen dieses interessanten Gegenstandes würde uns zu tief in chemische Details führen.

Sechstes Capitel.

Von dem Gleichgewicht und den Bewegungen der gasförmigen Körper.

128 **Begriff der Gase und Verzeichniss der wichtigsten derselben.** Im §. 71 haben wir die gasförmigen Körper als diejenigen bezeichnet, welche im Gegensatz zu den festen Körpern keine selbständige Gestalt und im Gegensatze zu den festen und flüssigen Körpern auch kein selbständiges Volumen besitzen. Ihre Gestalt ist meist gegeben durch die Gestalt der Gefässe, in denen sie eingeschlossen, ihr Volumen ist abhängig vom Drucke, dem sie unterworfen sind.

So wie das Wasser als Hauptrepräsentant der flüssigen Körper, so erscheint die Luft als Hauptrepräsentant der gasförmigen Körper. Insofern wir die Luft als eine den ganzen Erdball umgebende Hülle ansehen, bezeichnen wir sie mit dem Namen Atmosphäre. Der chemischen Zusammensetzung nach ist diese Luft ein Gemisch von mehreren gasförmigen Körpern, wovon Stickstoff und Sauerstoff die Hauptmenge ausmachen, während Wasserdampf, Kohlensäure und Ammoniak in viel geringerer Quantität beigemengt sind. Die vom Wasserdampf, dessen Menge sehr stark wechselt, befreite, also trockene Luft enthält ungefähr 0,04 Volumprocente Kohlensäure. Die auch von dieser befreite Luft besteht nach Jolly*) aus 78,99 bis 79,47 Volumprocenten Stickstoff und 21,01 bis 20,53 Volumprocenten Sauerstoff.

Gasförmige Körper, welche nicht ein Gemenge darstellen, sondern nur ein Element oder eine chemische Verbindung von Elementen enthalten, heissen Gase.

Die bekannteren Gase sind sammt ihren chemischen Formeln, ihren theoretischen Dichten und ihrem Gewichte per Liter in nachstehender Tabelle in alphabetischer Ordnung angeführt, die wichtigsten derselben sind mittelst durchschossenen Satzes hervorgehoben.

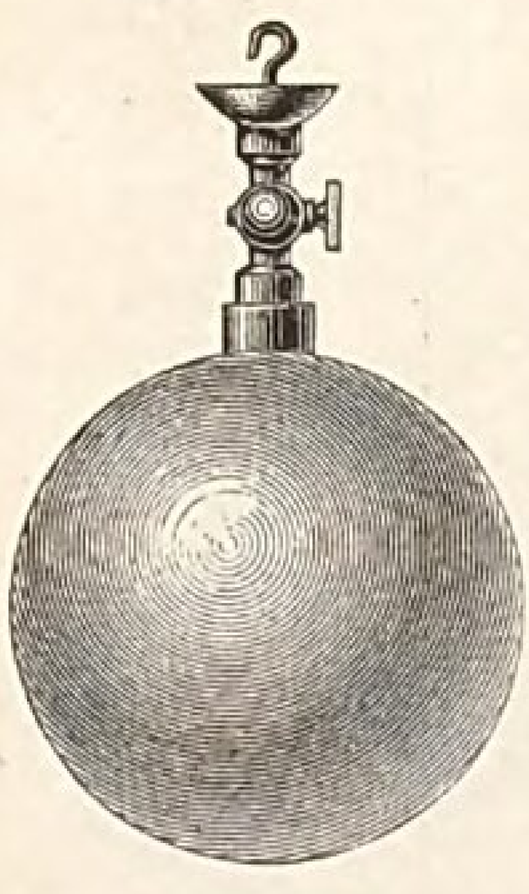
*) Wiedem. Ann. VI, S. 542 (1879).

Name des Gases	Formel des Moleküls	Dichte (Luft = 1)	Gewicht per Liter in Grammen (unter 45° Breite)
Acetylen	$C_2 H_2$	0,898	1,161
Aethan	$C_2 H_6$	1,037	1,340
Aethylen	$C_2 H_4$	0,967	1,251
Allylen	$C_3 H_4$	1,382	1,787
Ammoniak	$H_3 N$	0,589	0,761
Arsenwasserstoff	$H_3 As$	2,697	3,488
Brom	Br_2	5,523	7,141
Bromwasserstoff	$H Br$	2,796	3,615
Butan	$C_4 H_{10}$	2,004	2,591
Butylen	$C_4 H_8$	1,935	2,502
Chlor	Cl_2	2,449	3,167
Chlorkohlenoxyd	$C O Cl_2$	3,416	4,417
Chlorwasserstoff	$H Cl$	1,259	1,628
Cyan	$C_2 N_2$	1,799	2,326
Fluorwasserstoff	$H Fl$	0,692	0,894
Grubengas	$C H_4$	0,553	0,715
Jodwasserstoff	$H J$	4,416	5,710
Kohlenoxyd	$C O$	0,967	1,251
Kohlenoxysulfid	$C O S$	2,075	2,683
Kohlensäure	$C O_2$	1,51968	1,96503
Phosphorwasserstoff	$H_3 P$	1,175	1,520
Propan	$C_3 Hs$	1,520	1,966
Propylen	$C_3 H_6$	1,451	1,876
Sauerstoff	O_2	1,10521	1,42908
Schweflige Säure	$S O_2$	2,213	2,861
Schwefelwasserstoff	$H_2 S$	1,177	1,522
Selenwasserstoff	$H_2 Se$	2,797	3,617
Siliciumfluorid	$Si Fl_4$	3,605	4,661
Stickstoff	N_2	0,97010	1,25440
Stickstoffoxyd	$N O$	1,038	1,342
Stickstoffoxydul	$N_2 O$	1,523	1,969
Tellurwasserstoff	$H_2 Te$	4,499	5,817
Wasserdampf	$H_2 O$	0,62182	0,80405
Wasserstoff	H_2	0,069234	0,089523
(Luft)		1	1,293052

Die obige Tabelle setzt voraus, dass man den Ausdruck „Gas“ im weitesten Sinne nehme, nämlich auch solche Körper einbeziehe, welche unter gewöhnlichen Druck- und Temperaturverhältnissen bereits in tropfbarflüssigen Zustand übergehen, wie dies z. B. mit Wasserdampf der Fall ist. In diesem Falle hat die in der Tabelle aufgeführte Dichte nur eine theoretische Bedeutung, welche in der Wärmelehre näher erörtert werden soll. Ebendaselbst werden wir auch den Unterschied zwischen „Gas“ und „Dampf“, soweit derselbe noch festgehalten werden kann, besprechen. Im gewöhnlichen Sprachgebrauche versteht man unter Gas meist nur einen solchen Körper, der unter den gewöhnlich herrschenden Druck- und Temperaturverhältnissen noch nicht flüssig wird. Permanente Gase nannte man bis zu Ende des Jahres 1877 jene wenigen Gase, welche bis dahin noch nicht in tropfbarflüssigen Zustand übergeführt worden waren.

Schon sehr früh, ja selbst schon vor Aristoteles, vermuthete man, dass auch die Luft schwer sei. Diese Wahrheit wurde jedoch erst 1640 durch Galiläi bewiesen und später durch Toricelli's schöne Versuche bestätigt. Durch folgenden Versuch lässt sich die Schwere der Luft direct nachweisen: Auf den Hals eines Glasballons, Fig. 470, ist eine Messingfassung gekittet, die auf eine Luftpumpe (deren Einrichtung alsbald besprochen werden wird) aufgeschraubt werden kann. In dieser Fassung befindet sich ein Hahn, mittelst dessen man den Ballon nach Belieben öffnen oder schliessen kann. Ist der Ballon auf die Luftpumpe aufgeschraubt, so kann man ihn evacuiren und, nachdem der Hahn geschlossen worden ist, an den einen Arm einer Wage anhängen. Durch Auflegen von Gewicht auf der anderen Seite wird das Gleichgewicht hergestellt. Oeffnet man nun den Hahn, so füllt sich der Ballon wieder mit Luft, das Gleichgewicht wird gestört, und die Wage neigt sich nach der Seite des Ballons hin. Auf der anderen Seite muss man von Neuem Gewichte auflegen, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, und zwar gerade so viel, als die Luft im Ballon wiegt. Für einen Ballon von 1 Liter Inhalt beträgt die Differenz der Gewichte ungefähr 1,2 g (bei 0^0 und normalem Barometerstand, unter Voraussetzung, dass der Ballon ganz entleert worden, 1,293 g). 1 cbm Luft wiegt also ungefähr $1^1/_5$ kg. In einem Zimmer von 6 m Länge und Breite und 4 m Höhe sind demnach über 170 kg Luft enthalten.

Fig. 470.



Die übrigen Gase sind, wie obige Tabelle zeigt, theils von geringerem, theils von grösserem Gewichte als die Luft. Das leichteste Gas ist der Wasserstoff; er hat ungefähr $^1/_{14}$ des Gewichts der Luft.

129 **Elasticität der Gase.** Wie bereits erwähnt, nehmen die Gase jeden Raum ein, der sich ihnen darbietet und suchen denselben immer

noch zu vergrössern, indem sie auf die Gefässwände allseitig einen Druck oder eine Spannung ausüben. Soll daher ihr Volumen gleich bleiben, so müssen entweder die Wände durch ihre Festigkeit dem Drucke widerstehen, oder es muss durch einen Druck von aussen dem inneren Druck das Gleichgewicht gehalten werden.

Dieses Bestreben der Luft, sich auszudehnen, wird leicht durch folgenden Versuch nachgewiesen. Man legt unter die Glocke der Luftpumpe eine nur wenig Luft enthaltende und deshalb runzlige Thierblase, deren Oeffnung fest zugebunden ist. Nach einigen Kolbenzügen schon bläht sich die Blase auf, und ist endlich gerade so straff angespannt, als ob man mit aller Gewalt Luft hineingeblasen hätte. Lässt man die Luft wieder in den Recipienten hineintreten, so schrumpft die Blase wieder zusammen. Die in der Blase eingeschlossene Luft hat also wirklich ein Bestreben sich auszudehnen, nur wird demselben durch die umgebende Luft Widerstand geleistet. Dieser Druck, welchen die Luft gegen die Wände der sie einschliessenden Gefässe ausübt, wird ihre Spannkraft, ihre Tension oder ihre Expansionskraft genannt.

Eine Spiralfeder zeigt nur dann Elasticität, wenn man sie zusammendrückt, sie verliert ihre Spannkraft, sobald sie in ihren ursprünglichen Zustand zurückgekehrt ist. Die Luft hat aber immer eine Expansionskraft, es giebt für sie kein ursprüngliches Volumen, weil sie immer einen grösseren Raum einzunehmen strebt. Brächte man 1 Liter gewöhnlicher Luft in einen leeren Raum von mehreren Cubikmetern, so würde sie sich in dem ganzen Raume gleichförmig verbreiten, sie würde immer noch ein Bestreben haben, sich auszudehnen, und würde also auch noch einen Druck auf die Wände ausüben.

In Folge ihres Expansionsvermögens können die Gase keine freie Oberfläche haben, wie die tropfbar flüssigen Körper. — Selbst die Atmosphäre hat keine scharfe Grenze. Mit der Erhebung über die Erdoberfläche nimmt die Dichtigkeit und mit ihr auch die Expansionskraft der Luft allmälig ab, und die Grenze der Atmosphäre wird da zu suchen sein, wo die Expansionskraft, mit welcher die Lufttheilchen sich gegenseitig abstossen, der Schwerkraft gleich ist, mit welcher sie von der Erde angezogen werden. Bei der ausserordentlichen Verdünnung aber, welche die Luft in jenen Regionen darbietet, kann sie keine so scharfe Grenzfläche darbieten, wie wir sie an den Oberflächen der Gewässer wahrnehmen.

Druck der Luft. In Folge ihrer Schwere muss die Luft auf alle 130
Körper der Erdoberfläche einen Druck ausüben, wie das Wasser auf den Boden der Gefässe, in denen es enthalten ist. Von der Existenz dieses Druckes kann man sich durch folgenden Versuch überzeugen.

Man setze auf den Teller der Luftpumpe einen Glas- oder Metallcylinder mit etwas dicken Wänden, welcher oben mit einer Thierblase verschlossen ist, die stark angespannt und an dem Rande recht fest-

gebunden sein muss. Die Blase erleidet von beiden Seiten gleichen Druck und bildet deshalb eine Ebene. Zieht man nun mittelst der Luftpumpe die Luft aus dem Cylinder heraus, so gewinnt der äussere Luftdruck das Uebergewicht und drückt die Blase nach innen. Je mehr man auspumpt, desto mehr nimmt die Krümmung der Blase zu, bis sie endlich in Stücke reisst, wobei ein heftiger Knall gehört wird. Dieser Knall wird durch das rasche Eindringen der Luft hervorgebracht.

Auf den ersten Augenblick scheint dieser Versuch sehr auffallend, weil doch die Luftsäule im Zimmer unmöglich einen so enormen Druck ausüben kann. Von dem Gewichte der Luftsäule, welche auf der Blase ruht und sich von derselben bis zur Decke des Zimmers erstreckt, rührt freilich diese Wirkung nicht her, denn selbst eine Wassersäule von dieser Höhe könnte sie nicht hervorbringen. Hätte man den Versuch unter freiem Himmel angestellt, so hätte die Blase offenbar den Druck einer Luftsäule auszuhalten gehabt, deren Höhe gleich ist der Höhe der ganzen Atmosphäre. Derselbe Druck wirkt aber auch noch im Zimmer, denn die Luft des Zimmers ist ja durch den vollen Atmosphärendruck gepresst.

Fig. 471.



Wir wollen hier zunächst noch einige Erscheinungen betrachten, welche sich durch die Wirkung des Luftdrucks erklären lassen.

Taucht man das eine Ende einer Röhre in ein mit Wasser gefülltes Gefäss, so wird sich die Flüssigkeit in der Röhre, vorausgesetzt, dass dieselbe nicht zu eng ist, ebenso hoch stellen wie ausserhalb, weil der Luftdruck in der Röhre gerade so auf das Niveau der Flüssigkeit wirkt wie ausserhalb. Saugt man aber einen Theil der Luft aus der Röhre, so steigt die Flüssigkeit in ihr um so mehr, je länger man saugt. Durch dieses Saugen wird nämlich der Luftdruck im Inneren der Röhre vermindert, während der äussere Luftdruck unverändert bleibt. Der Ueberschuss des äusseren Luftdrucks nun presst die Flüssigkeit im Inneren der Röhre in die Höhe, bis das Gewicht der gehobenen Wassersäule diesem Ueberschuss das Gleichgewicht hält.

Wenn man eine mit Wasser gefüllte, mit einem Kork geschlossene Flasche umkehrt und den Hals in ein Becken mit Wasser taucht, so kann man nun unter dem Wasser diesen Kork herausziehen, ohne dass das Wasser aus der Flasche ausfliesst, weil es so zu sagen durch den Luftdruck getragen wird.

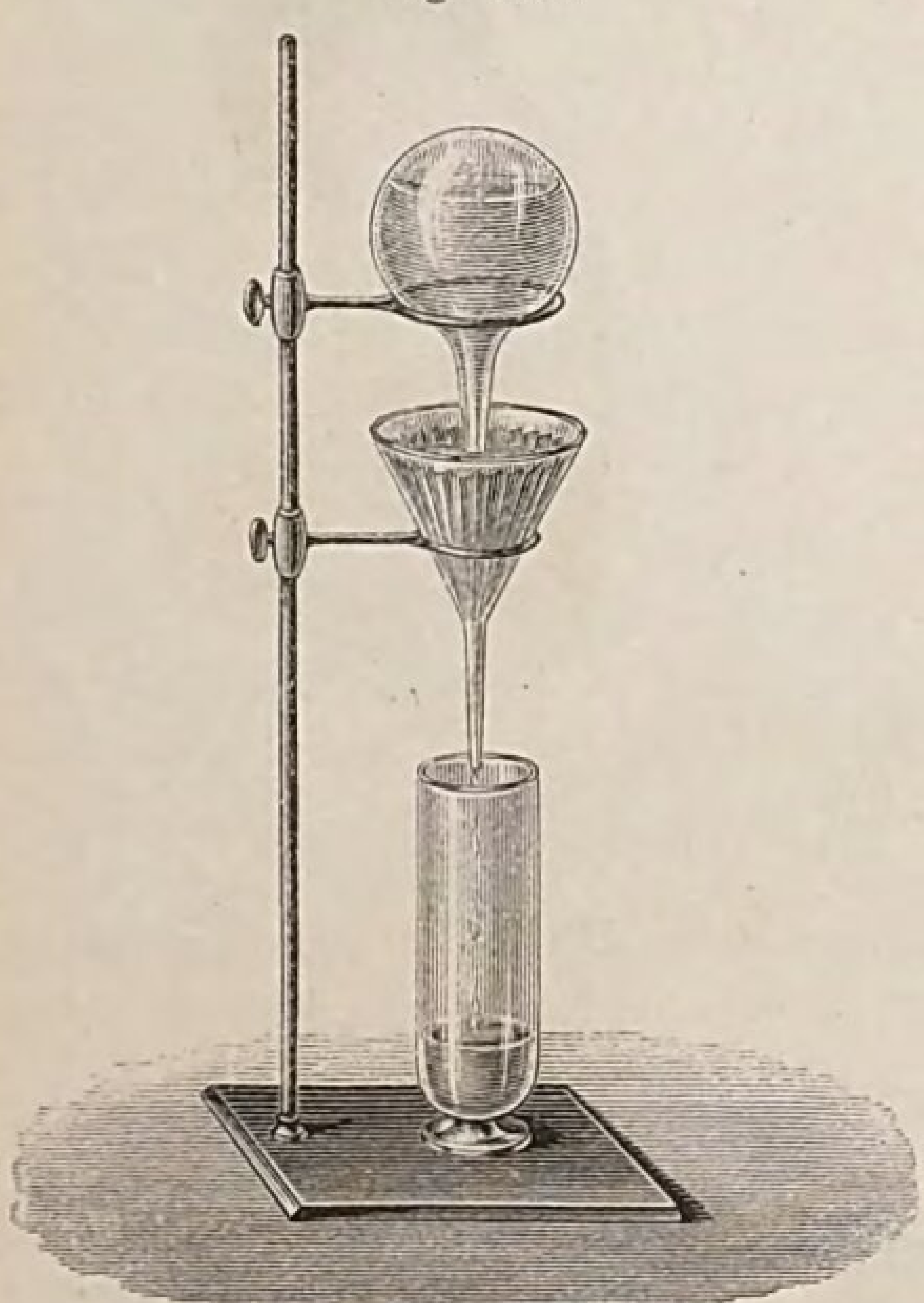
Hebt man die Flasche langsam in die Höhe, bis die Mündung des Halses über dem Spiegel des Wassers im Becken steht, so beginnt jetzt freilich das Wasser auszulaufen, aber nicht etwa weil der Luftdruck zu wirken aufhörte, sondern weil nun Luftblasen in die Flasche eindringen können. Darauf gründen sich einige Vorrichtungen, um in Gefässen, aus welchen ein gleichförmiger Wasserabfluss stattfindet, stets ein nahezu unveränderliches Niveau zu erhalten, wie dies z. B. bei dem Apparat

Fig. 472 der Fall ist. Durch das Filter des Trichters tropft beständig Wasser in das untergesetzte Gefäss, in Folge dessen sinkt der Spiegel der Flüssigkeit im Trichter. Dieses Sinken kann nur fortdauern, bis die untere Oeffnung des in das Wasser des Trichters eingetauchten und gleichfalls mit Wasser gefüllten Ballons frei wird, denn nun dringt eine Luftblase in den Ballon ein, eine ihr entsprechende Quantität Wasser fliesst aus, um die Oeffnung des Ballons wieder auf kurze Zeit zu schliessen.

Der intermittirende Brunnen ist eine auf demselben Principe beruhende Spielerei.

So kann aus dem unten offenen Oelgefäss *a* unserer Lampen, Fig. 473 (a. f. S.), erst dann Oel ausfliessen, wenn das äussere Niveau *b b* so weit gesunken ist, dass die untere Oeffnung des Oelgefässes *a* für einen Augenblick frei wird. Dahin gehört auch das Tintenfass, Fig. 474. Aus dem Hauptgefässe kann nur dann wieder etwas Tinte in das seitliche oben offene Eintauchrohr eintreten, wenn in demselben die Flüssigkeit so weit gesunken ist, dass eine Luftblase in das Hauptgefäss eindringen kann.

Fig. 472.



Wenn man ein Trinkglas, dessen Rand möglichst eben ist (am besten mit abgeschliffenem Rande) ganz mit Wasser füllt, ein Papier darauf deckt und dann das Glas umkehrt, Fig. 475, so läuft das Wasser nicht aus; der gegen die untere Fläche des Papiers wirkende Luftdruck hindert das Herabfallen der Wassermasse. Das Papier ist nur deshalb nöthig, um das Glas umkehren zu können, ohne dass das Wasser an den Seiten ausläuft und statt dessen Luft in das Gefäss eindringt. Wenn die untere Oeffnung klein genug ist, um ein solches Auslaufen nicht befürchten zu müssen, wie dies beim Stechheber der Fall ist, so ist das Papier nicht mehr nöthig. Der Stechheber ist ein gewöhnlich röhrenförmiges Gefäss, Fig. 476 und Fig. 477, welches oben und unten etwas enger und an beiden Enden offen ist. Taucht man es, wenn beide Oeffnungen frei sind, ganz in eine Flüssigkeit, so füllt es sich mit derselben, und wenn man nun die obere Oeffnung mit dem Daumen verschliesst, so kann man den Stechheber in die Höhe ziehen, ohne dass die in demselben enthaltene Flüssigkeit ausläuft.

Der Heber ist eine gekrümmte Röhre *b s a*, Fig. 478, deren Schenkel meistens ungleiche Länge haben. Wenn der eine Schenkel in eine Flüssig-

keit eingetaucht und die ganze Röhre mit derselben gefüllt ist, so läuft sie am Ende *a* des anderen Schenkels, so lange dasselbe tiefer liegt als

Fig. 473.

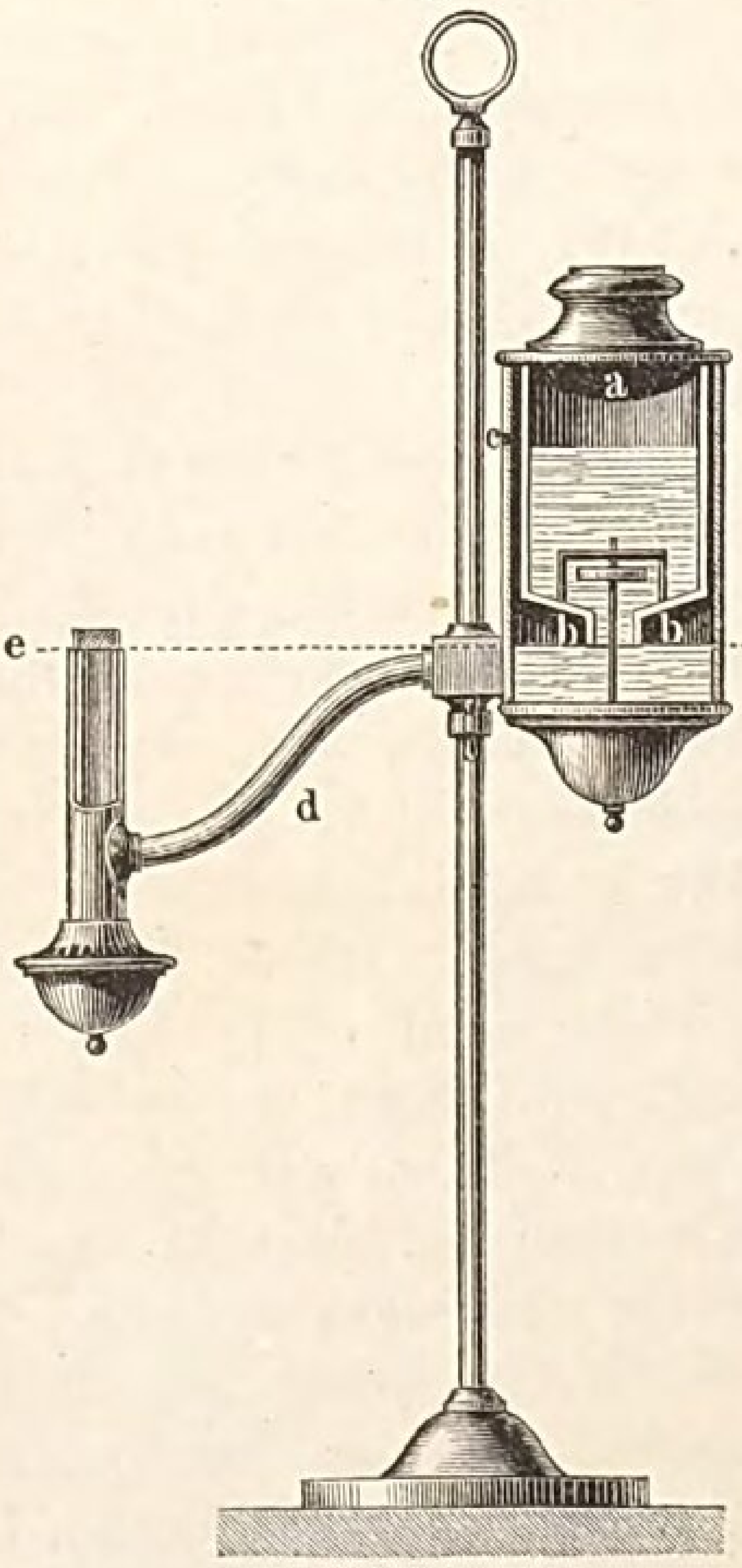


Fig. 474.



Fig. 475.



das Niveau *n*, fortwährend aus; man kann also mit Hülfe eines Hebers leicht ein Gefäss entleeren. Die Wirkung des Hebers ist leicht zu erklären. Auf

Fig. 476.

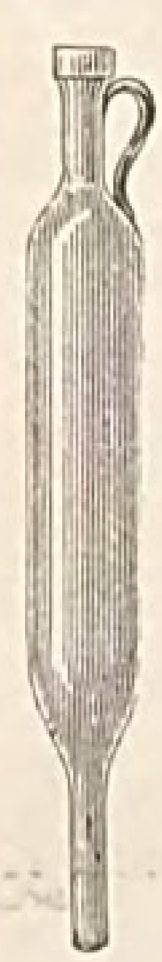


Fig. 477.

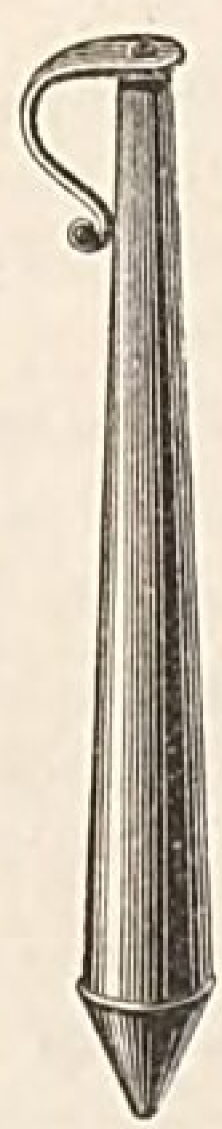


Fig. 478.

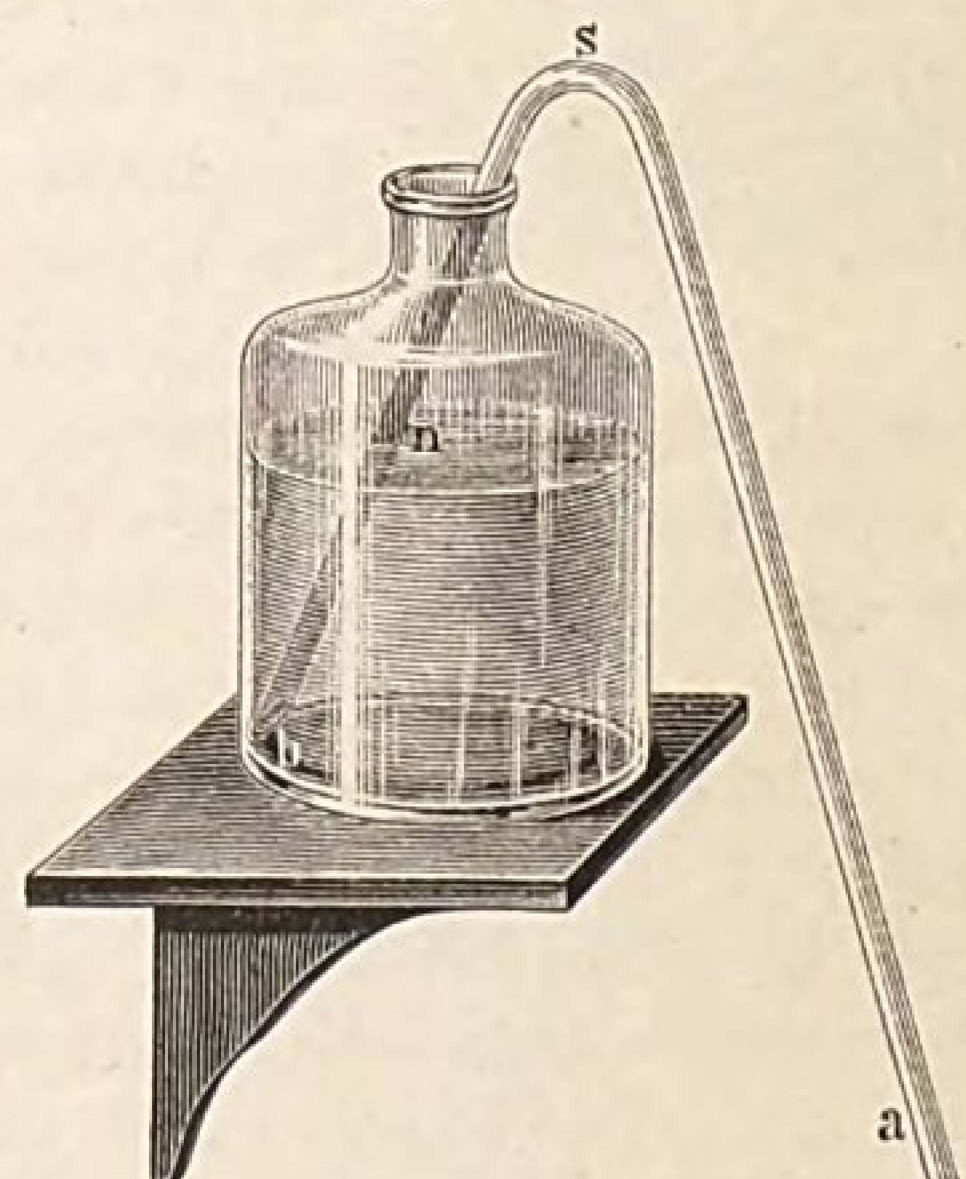
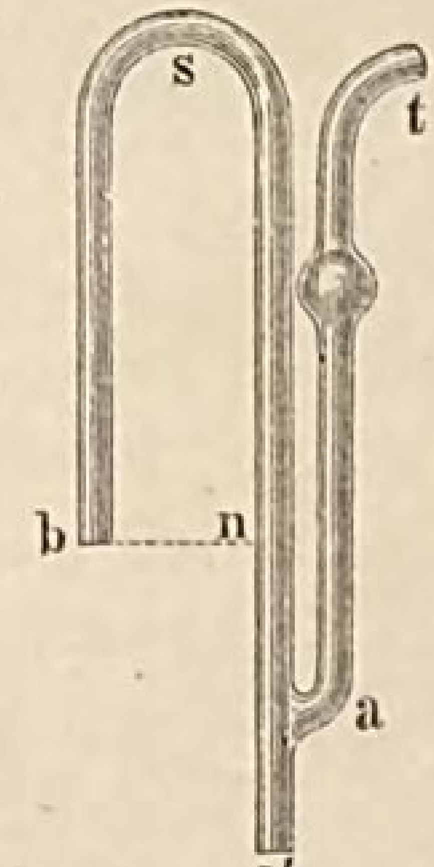


Fig. 479.



der einen Seite hat die Wassersäule *sa*, auf der anderen die Wassersäule von *s* bis zum Spiegel der Flüssigkeit im Gefässe ein Bestreben, vermöge

ihrer Schwere herabzufallen; der Schwere der in beiden Schenkeln befindlichen Wassersäulen wirkt aber auf beiden Seiten der Luftdruck entgegen, welcher auf der einen Seite gegen die Oeffnung *a*, auf der anderen Seite aber auf den Spiegel des Wassers im Gefässe wirkt, und dadurch die Bildung eines leeren Raumes im Inneren der Röhre verhindert, welcher sich nothwendiger Weise bei *s* bilden würde, wenn die Wassersäulen auf beiden Seiten herabliefen. Da der Luftdruck auf der einen Seite so stark wirkt wie auf der anderen, so würde vollkommenes Gleichgewicht stattfinden, wenn die Wassersäulen in beiden Schenkeln gleich hoch wären, wenn sich also die Oeffnung *a* in der Höhe des Wasserspiegels im Gefässe befände; sobald aber *a* tiefer liegt, erhält die Wassersäule im Schenkel *sa* das Uebergewicht, und in dem Maasse, als hier das Wasser ausläuft, wird auf der anderen Seite durch den Luftdruck von neuem Wasser in die Röhre hineingetrieben, so dass das Ausfliessen bei *a*

Fig. 480.



Fig. 481.

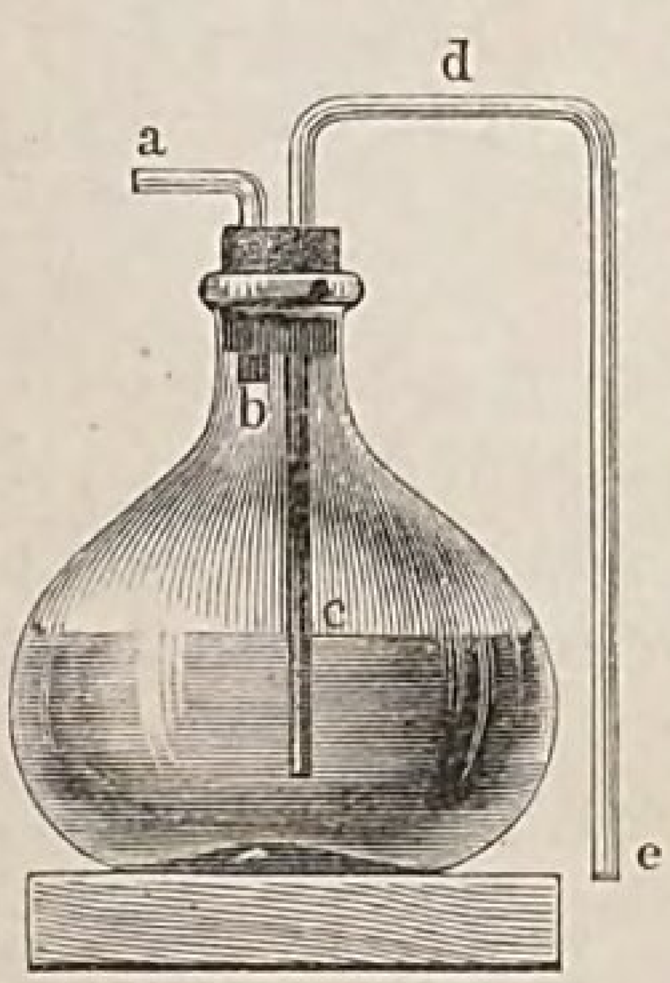
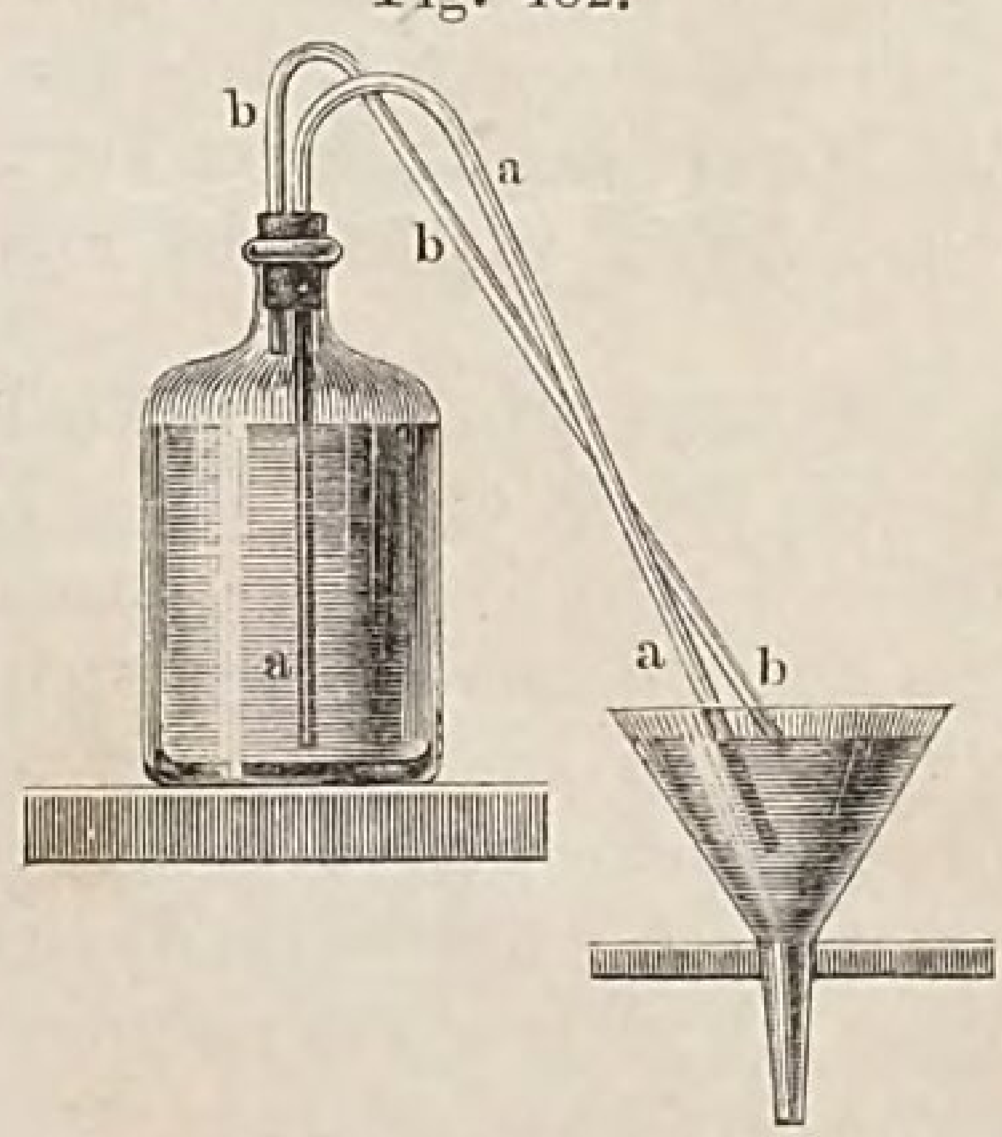


Fig. 482.



fortdauert, bis der Spiegel der Flüssigkeit im Gefässe so weit gefallen ist, dass die Oeffnung *b* frei wird.

Um den Heber bequem füllen und in Wirksamkeit setzen zu können, wird manchmal eine Saugröhre *at*, Fig. 479, angebracht (Giftheber). Einen gewöhnlichen Heber füllt man nämlich dadurch, dass man bei *a*, Fig. 478, saugt; dabei ist aber leicht möglich, dass man etwas von der Flüssigkeit in den Mund bekommt, was in manchen Fällen unangenehm, oft sogar gefährlich sein kann, wie z. B. wenn man den Heber anwenden will, um ein Gefäss mit Schwefelsäure zu entleeren. In einem solchen Falle ist das Saugrohr unentbehrlich; denn wenn man die Röhre bei *b'*, Fig. 479, verschliesst, so kann man durch Saugen bei *t* den ganzen Schenkel *sb* füllen, ohne dass die Flüssigkeit an den Mund kommt. Das Auslaufen beginnt alsdann, sobald man das Röhrenende *b'* wieder öffnet.

Eine auf die Wirkung des Hebers gegründete Spielerei ist der Zauberbecher, Fig. 480.

Dass beim Heber wirklich der Luftdruck die eben bezeichnete Rolle spielt, lässt sich mit Hülfe des einfachen Apparates, Fig. 481, zeigen.

Der Hals eines zum Theil mit Wasser gefüllten Glasballons ist mit einem wohlschliessenden Kork verschlossen, welcher doppelt durchbohrt ist. In dem einen Loche steckt das kurze Röhrchen *ab*, im anderen der fast bis auf den Boden reichende Heber *cde*. Wenn man den Heber durch Einblasen bei *a* zum Fliessen gebracht hat, so hört dieses Fliessen alsbald auf, sobald man auf irgend eine Weise die Oeffnung bei *a* verschliesst, weil nun die äussere Luft nicht mehr auf den Spiegel des Wassers im Ballon drücken kann.

Durch den Heber *a*, Fig. 482 (a. v. S.), kann nur so lange Wasser aus der Flasche ausfliessen, als der obere Theil derselben durch das Rohr *b* mit der äusseren Luft in Verbindung steht. Wenn das aus *a* ausfliessende Wasser auf ein Filter gelangt, durch welches es nur tropfenweise abfliesst, so wird das Niveau des Wassers im Trichter bald steigen, bis die freie Oeffnung von *b* verschlossen ist. Nun hört der Heber *a* zu fliessen auf und fängt erst wieder zu fliessen an, wenn so viel Wasser durch das Filter abgeflossen ist, dass das untere Ende des Rohres *b* nicht mehr in das Wasser des Trichters eintaucht. Die Vorrichtung erfüllt also denselben Zweck wie jene der Fig. 472.

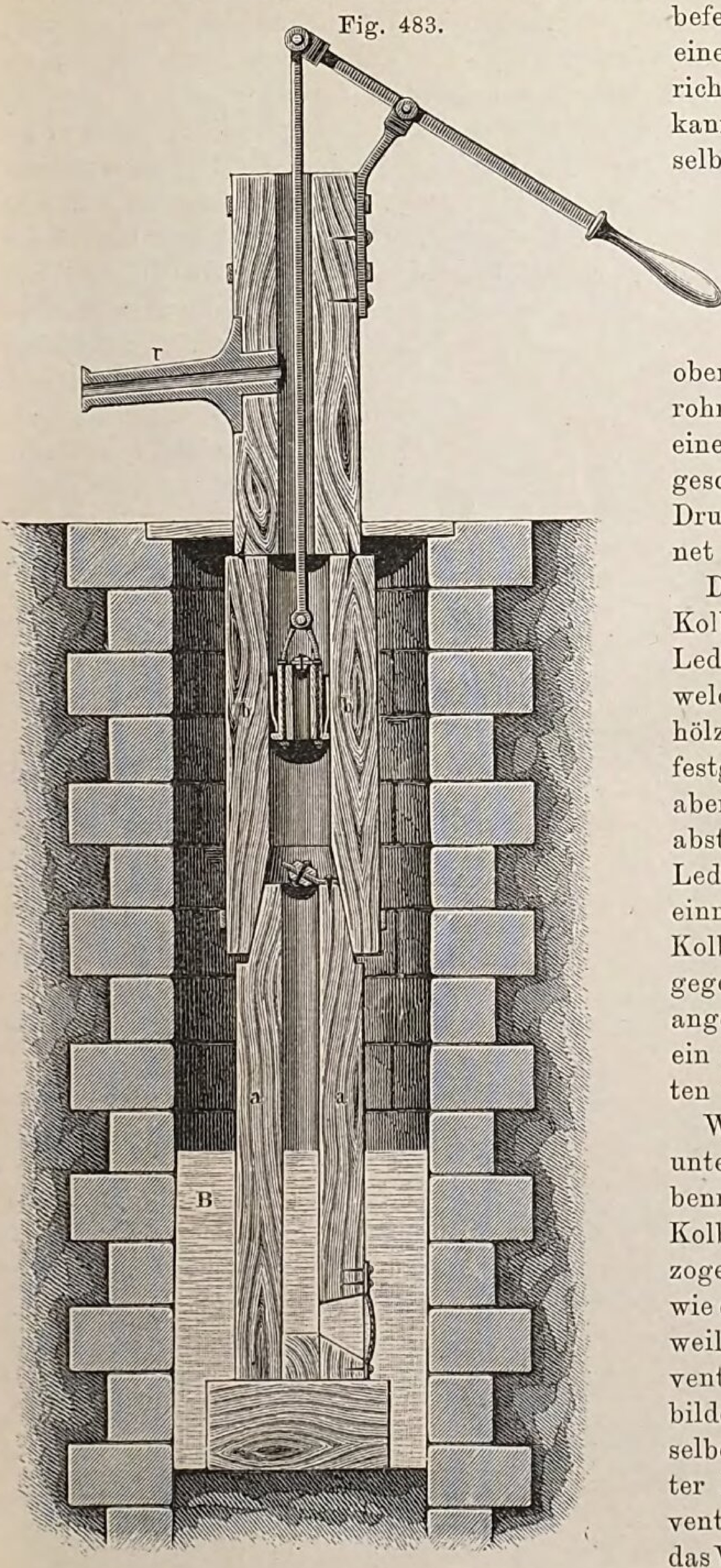
131 **Wasserpumpen.** Wir haben bereits in §. 130 gesehen, wie man in einer Röhre, deren unteres Ende in Wasser getaucht ist, dasselbe dadurch in die Höhe steigen macht, dass man an dem oberen Ende saugt. Den luftverdünnten Raum, welcher in diesem Falle durch den Mund erzeugt wurde, kann man aber auch dadurch hervorbringen, dass man in dem Rohr einen luftdicht schliessenden Kolben emporzieht. Ist das untere Ende des Rohres in Wasser eingetaucht, so füllt sich das Rohr mit dieser Flüssigkeit, wie sich dies an den gewöhnlichen Spritzbüchsen zeigen lässt.

Dies Princip wird nun auch bei Pumpen zur Hebung bedeutenderer Wassermengen angewandt. Fig. 483 stellt eine Saugpumpe der einfachsten Construction dar. Das hölzerne Saugrohr *a* steht in dem Brunnenschacht, und zwar geht es bis unter den Spiegel des in der Tiefe sich sammelnden Wassers *B* hinab. Das Wasser kann durch eine seitliche Oeffnung, welche zur Abhaltung von Unreinigkeiten durch ein Sieb verschlossen ist, in das Saugrohr eintreten. Auf das nach den Umständen kürzere oder längere, aus einem oder mehreren Stücken bestehende Saugrohr ist nun das etwas weitere, zwischen 6 bis 9 dcm hohe, genau cylindrisch ausgebohrte Kolbenrohr *b* aufgesetzt, in welchem ein Kolben luft- und wasserdicht schliessend auf- und abbewegt werden kann.

Das obere Ende des Saugrohres *a* ist durch ein Ventil (hier eine in der Mitte mit Metall beschlagene Lederklappe) bedeckt, welches durch einen Druck von unten gehoben, also geöffnet, durch einen Druck von oben aber fest auf die Oeffnung aufgedrückt, also geschlossen wird. Dieses Ventil bildet gewissermaassen den Boden des Kolbenrohres *b*, und wird deshalb das Bodenventil genannt.

Der im Kolbenrohre befindliche Kolben ist an einer eisernen Stange befestigt, welche durch eine passende Hebelvorrichtung bewegt werden kann; dieser Kolben ist selbst wieder hohl, und das obere Ende dieser Höhlung mit einem Ventil in gleicher Weise versehen wie das obere Ende des Saugrohres, so dass es durch einen Druck von oben geschlossen, durch einen Druck von unten geöffnet wird.

Fig. 483.



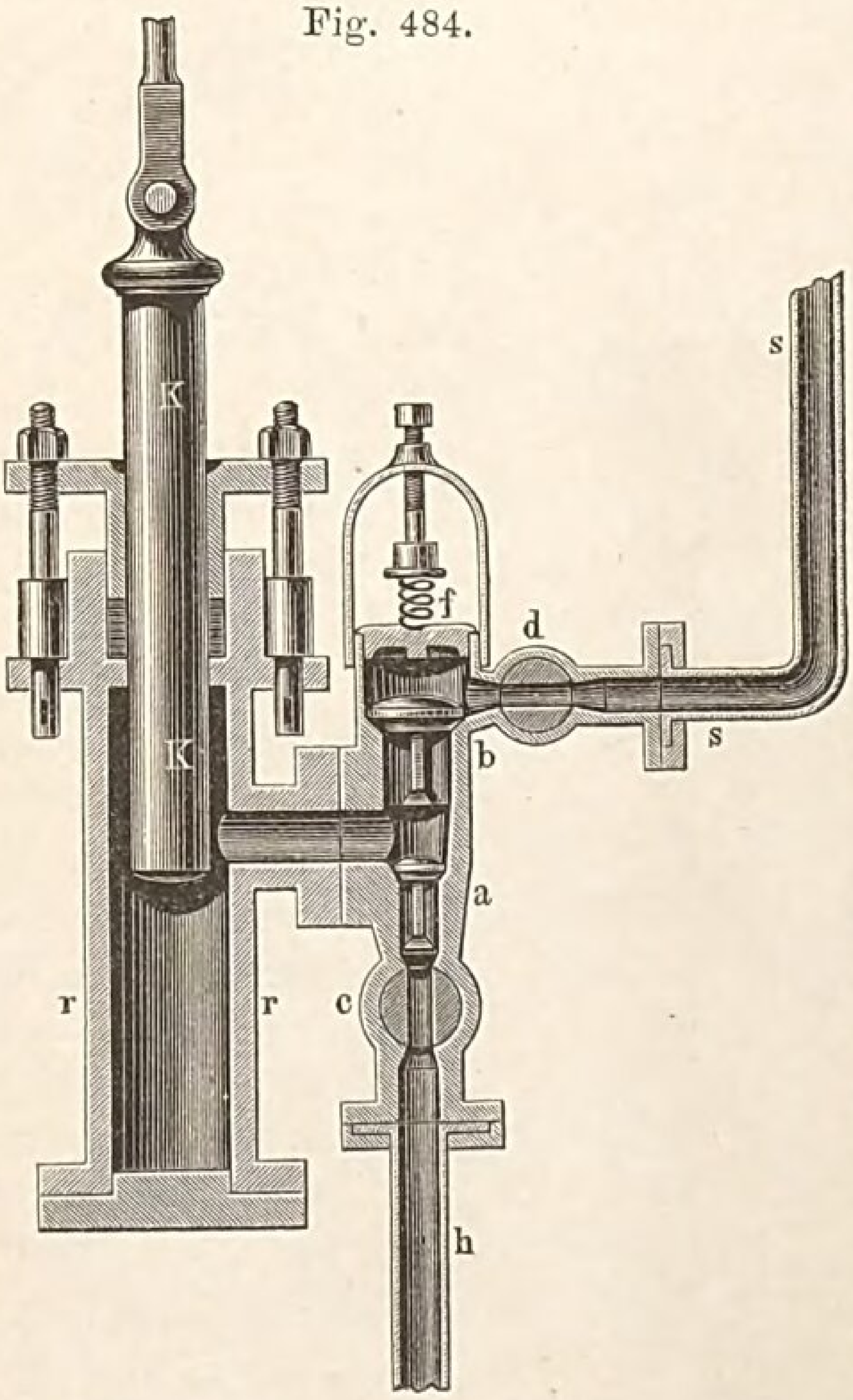
Der Umfang dieses Kolbens ist durch eine Lederkappe gebildet, welche unten um den hölzernen Kolben herum festgenagelt ist, oben aber frei von demselben absteht, so dass die Lederkappe, wenn sich einmal Wasser über dem Kolben befindet, fest gegen die Röhrenwände angepresst und dadurch ein guter Schluss erhalten wird.

Wenn der eben am unteren Ende des Kolbenrohres befindliche Kolben in die Höhe gezogen wird, so wirkt er wie ein massiver Kolben, weil sich das Kolbenventil schliesst, und es bildet sich unter demselben ein luftverdünnter Raum; das Bodenventil öffnet sich und das Wasser steigt in dem

Saugrohre in die Höhe. Beim Niedergange des Kolbens schliesst sich zunächst das Bodenventil, wodurch das Zurückfallen des im Saugrohr gestiegenen Wassers verhindert wird, das Kolbenventil aber öffnet sich und lässt die noch im Kolbenrohre befindliche Luft durch.

Erst nach mehrmaliger Wiederholung der Operation, wenn das Wasser bis in das Kolbenrohr gestiegen ist, beginnt die Pumpe wirklich Wasser zu fördern. Bei jedem Niedergange wird dann das im Kolbenrohre befindliche Wasser, welchem nun durch das Bodenventil der Rückweg verschlossen ist, durch den Kolben hindurchgehen; bei jedem Aufziehen des Kolbens wird das bereits über demselben befindliche Wasser aus dem Kolbenrohre in das Steigrohr gehoben, aus welchem es dann durch die seitliche Oeffnung *r* abfliesst, während zugleich eine neue Wassermenge von unten her in das Kolbenrohr aufgesaugt wird.

Fig. 484.



Bei vollkommen luftdichtem Schluss des Kolbens und der Ventile würde man bei mittlerem Luftdruck das Wasser bis zu 10 m aufsaugen können; bei der geringen Vollkommenheit jedoch, mit welcher solche Pumpen ausgeführt sind, darf das Bodenventil nicht wohl mehr als 6 m über dem Wasserspiegel im Bassin angebracht sein.

Um das Wasser auf grössere Höhen zu heben, um es in Dampfkessel hineinzupressen etc., werden Druckpumpen angewandt, welche sich von den vorigen dadurch unterscheiden, dass der Kolben massiv ist und dass das aufgesaugte Wasser durch ein seitliches Rohr in die Höhe gedrückt wird, dessen unteres Ende durch ein nach oben sich öffnendes Ventil geschlossen wird. Fig. 484 stellt eine Druckpumpe dar; *h* ist das Saugrohr, *r* das Kolbenrohr, *s* das Steigrohr.

Der Kolben *K* geht luftdicht durch die Stopfbüchse, welche das obere Ende des Kolbenrohres schliesst. Beim Aufgange des Kolbens hebt sich das Saugventil *a*, um Wasser aus dem Saugrohr durchzulassen, während das Druckventil *b* geschlossen bleibt; beim Nieder-

gange des Kolbens schliesst sich *a*, und das vorher aufgesaugte Wasser wird nun durch das geöffnete Ventil *b* in das Steigrohr *s* gepresst.

Bei *d* und *c* sind Hähne angebracht, die man abstellen kann, wenn die Pumpe nicht mehr arbeiten soll.

Der Deckel *f* kann entfernt werden, wenn man die Ventile nachsehen will. Er ist durch eine starke Drahtfeder aufgedrückt, so dass er gehoben wird, wenn der Druck zu stark werden sollte, wie es z. B. erfolgen kann, wenn das Steigrohr sich verstopft hat oder der Hahn *d* geschlossen bleibt, während *c* offen ist und die Ventile spielen. Der Deckel *f* dient also in diesem Falle als Sicherheitsventil, indem durch sein Heben das Bersten der Röhrenwände verhindert wird.

Messung des Luftdrucks, Toricelli's Versuch, Barometer. 132 Als zur Zeit Galiläi's die Pumpenmacher in Florenz in einem Saugrohre das Wasser über 10 m heben wollten, sahen sie zu ihrem grössten Erstaunen, dass es nicht höher stieg. Damals erklärte man das Aufsteigen der Flüssigkeiten, indem man sagte, die Natur habe einen horror vacui. Galiläi genügte eine solche Erklärung nicht, und als ihm die von den Pumpenmeistern gemachte Beobachtung mitgetheilt wurde, kam er sogleich auf die Vermuthung, dass die Schwere der Luft die wahre Ursache dieser Erscheinung sei. Sein Schüler Toricelli gab dafür entscheidende Beweise. Er machte ungefähr folgende Schlussfolge. Wenn zwei verschiedene Flüssigkeitssäulen sich das Gleichgewicht halten sollen, so müssen die Höhen der beiden Säulen sich umgekehrt verhalten wie ihre specifischen Gewichte. Das Quecksilber wiegt 13,6 mal so viel als Wasser; wenn also der Druck der atmosphärischen Luft eine Wassersäule von 10 m (genauer 10,33 m) tragen kann, so muss er auch gerade eine Quecksilbersäule von $\frac{10,33}{13,6} = 0,76$ m tragen können. Der Versuch ist leicht anzustellen. Man füllt eine Glasröhre, welche ungefähr 80 cm lang und an dem einen Ende verschlossen ist, mit Quecksilber, hält das offene Ende mit dem Finger zu und kehrt die Röhre um. Taucht man das mit dem Finger verschlossene Ende in ein flaches, mit Quecksilber gefülltes Gefäss *n*, Fig. 485 (a. f. S.), zieht man alsdann den Finger weg, so wird das Quecksilber um einige Centimeter fallen, und zwar so weit, dass die Erhebung des Quecksilbers in der Röhre über das Niveau des Quecksilbers in dem Gefässe so gross ist, wie es aus den eben angeführten Betrachtungen folgt. Die in der Röhre getragene Quecksilbersäule ist als Gegengewicht gegen den atmosphärischen Luftdruck zu betrachten. Dieser Apparat heisst „Toricelli'sche Röhre"; der leere Raum über dem Quecksilber die „Toricelli'sche Leere". Ist der Apparat mit Maassstab und Einrichtung zu dauerhafter Aufstellung oder auch zum Transport versehen, so heisst er Barometer, wie Fig. 486 (a. f. S.) in einfachster Ausführung zeigt. Die verticale Höhe des Niveaus in der Röhre über dem Niveau im Gefässe heisst die Barometerhöhe. Sie ist nicht an allen

Orten und nicht zu allen Zeiten dieselbe. Am Ufer des Meeres beträgt sie durchschnittlich 76 cm oder, was sehr nahe dasselbe ist, 28 Pariser Zoll. Eine solche Quecksilbersäule von 1 qcm Grundfläche hat einen Cubikinhalt von 76 ccm. Da nun 1 ccm Quecksilber 13,59 g wiegt, so ist der Druck dieser Säule auf ihre Basis $76 \times 13{,}59\,\text{g} = 1{,}033\,\text{kg}$.

Fig. 485.

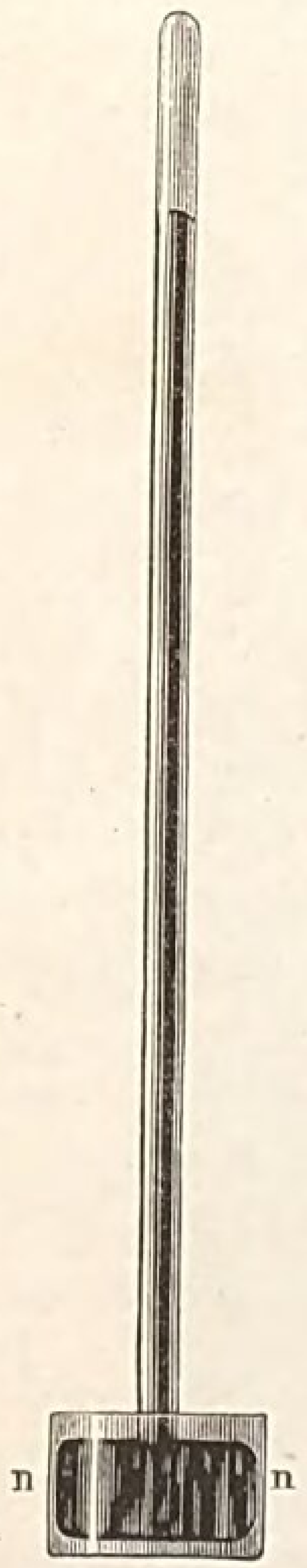
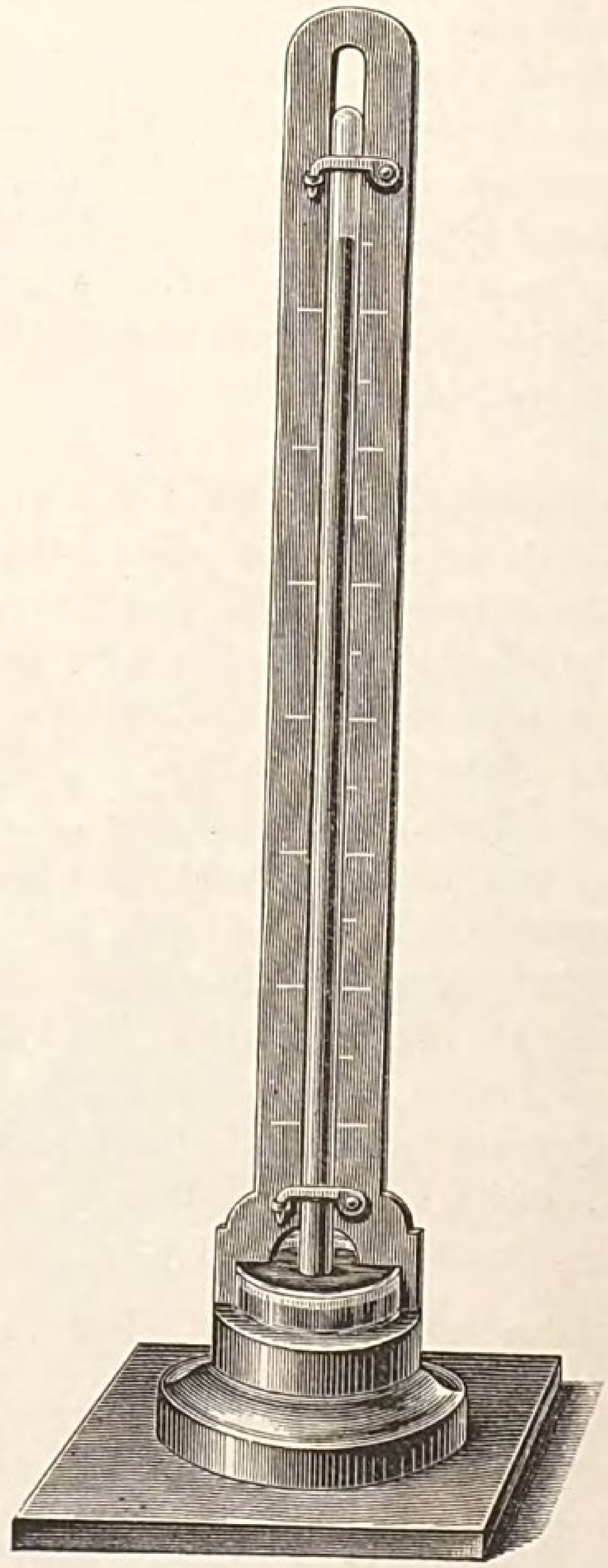


Fig. 486.



Die atmosphärische Luftsäule, welche im Niveau des Meeres auf einem Quadratcentimeter Basis ruht, drückt also auf diese Fläche mit einem Gewichte von 1,033 kg.

Ein gleichförmiger Gas- oder Flüssigkeitsdruck, welcher in der Art wirkt, dass jedes Quadratcentimeter der Gefässwand einen Druck von 1,033 kg (oder jeder Quadratzoll einen Druck von ungefähr 15 Pfunden) auszuhalten hat, wird ein **Atmosphärendruck** genannt. Wird die Spannkraft eines Gases oder Dampfes so gross, dass der Druck auf jeden Quadratcentimeter $2 \times 1{,}033\,\text{kg}$ beträgt, so sagt man, das Gas oder der Dampf habe eine Spannung von zwei Atmosphären.

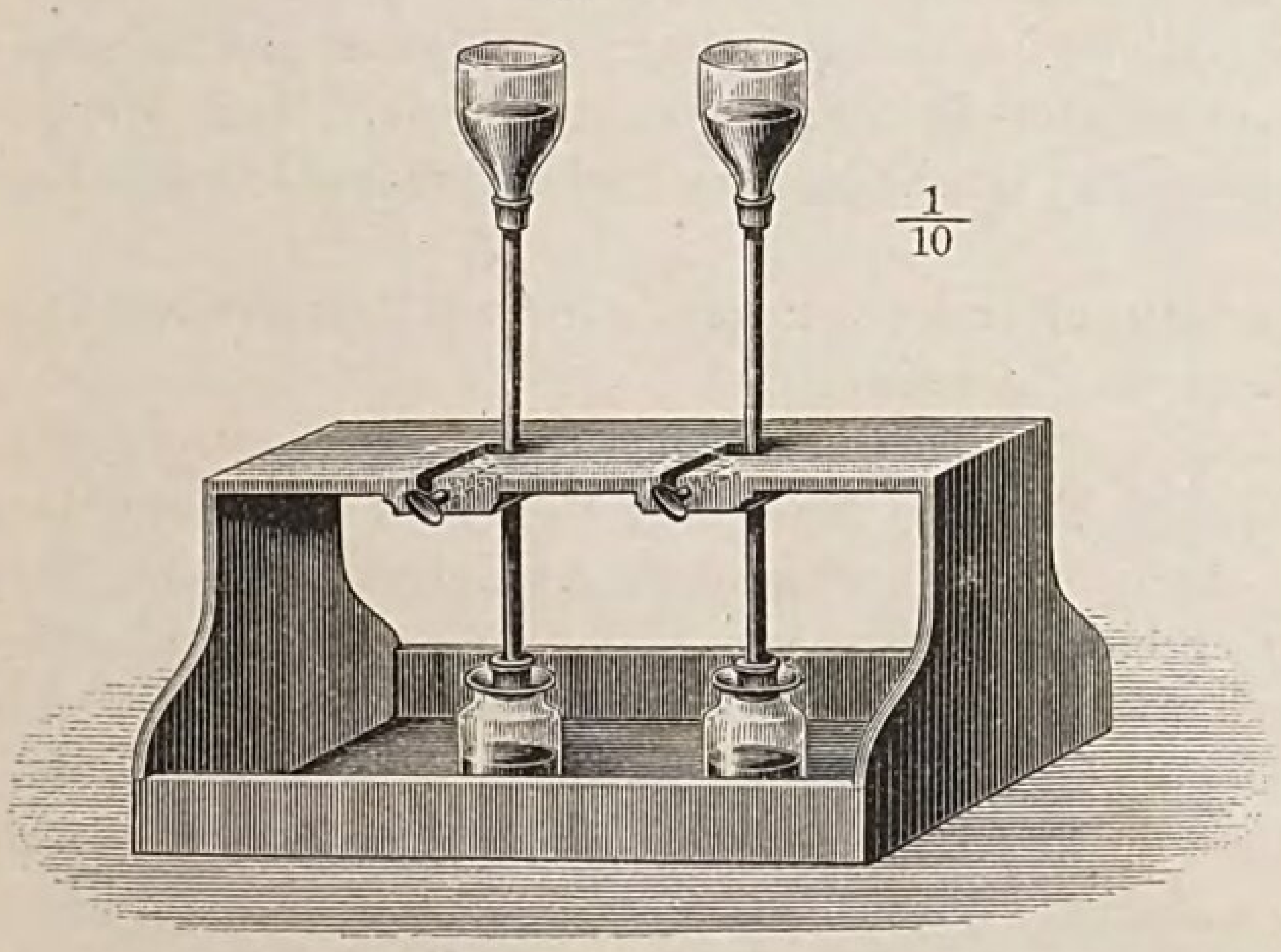
133 **Construction des Barometers.** Man hat dem Barometer sehr verschiedene Formen gegeben, welche in dem nächsten Paragraphen besprochen werden sollen. Welche Form man aber auch wählen mag, so müssen doch stets gewisse Bedingungen erfüllt sein, wenn man Genauigkeit fordert.

1) Das Quecksilber muss rein sein, weil unreines Quecksilber ein anderes specifisches Gewicht hat und insbesondere weil es am Glase adhärirt. Das Quecksilber des Handels hat in der Regel nicht die erforderliche Reinheit.

Von Staub und Schmutz, sowie von der grössten Menge von Oxyd befreit man das Quecksilber, indem man es durch Filter von Fliesspapier laufen lässt, deren Spitze mit einer Nadel durchstochen wurde. Viel besser wirkt jedoch Durchpressen durch Leder.

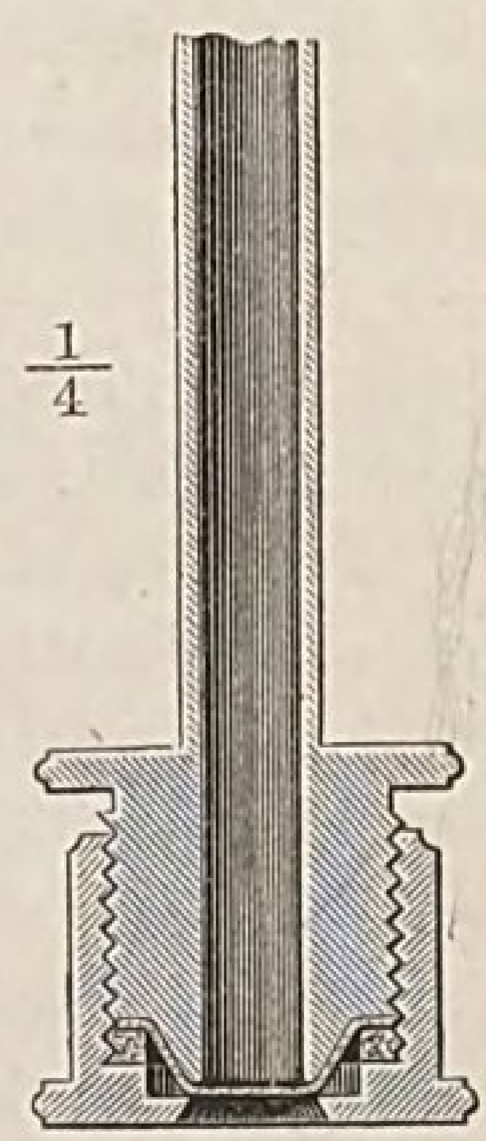
Recht bequem lässt sich dies mittelst einer einfachen von mir construirten Vorrichtung erreichen, bei welcher das Quecksilber in Folge seines eigenen Drucks durch das Leder getrieben wird. Fig. 487 zeigt die Anordnung des ganzen Apparates sammt Gestell, Fig. 488 einen Verticaldurchschnitt durch den unteren Theil der Filtrirapparate, deren zwei neben einander aufgestellt sind. Ein Scheibchen weichen Leders wird mittelst einer Ueberwurfschraube über die Mündung der Verticalröhre fest angespannt. Giesst man das Quecksilber in den Trichter, so beginnt es, sobald die drückende Säule ungefähr 20 cm überschritten hat, in

Fig. 487.



$\frac{1}{10}$

Fig. 488.



$\frac{1}{4}$

feinem Regen durch das Leder zu träufeln, während Schmutz und Staub zurückgehalten werden. Man entfernt die grösste Menge der Unreinigkeiten durch die erste Röhre und giesst dann, wenn nöthig, nochmals durch die zweite. Man kann dann dieselben Lederscheibchen oftmals benutzen *).

Enthält das Quecksilber fremde Metalle oder sehr viel Oxyd, so genügt dieses Verfahren nicht, es muss vielmehr entweder auf chemischem Wege oder durch Destillation gereinigt werden.

Das erstere geschieht nach verschiedenen Methoden, indem man das Quecksilber in fein vertheiltem Zustande entweder mit verdünnter Salpetersäure, oder mit verdünnter Eisenchloridlösung oder endlich mit einer Lösung von 5 g doppelt chromsaurem Kali auf 1 l Wasser, welcher

*) Der ganze Apparat ist vom Universitätsmechaniker Miller in Innsbruck zu beziehen.

einige Cubikcentimeter Schwefelsäure beigemischt sind, in Berührung bringt. Man schüttelt das Quecksilber anhaltend mit diesen Flüssigkeiten oder lässt es aus Trichtern mit feiner Oeffnung in dünnem Strahle durch hohe Schichten der Flüssigkeiten hindurchrinnen*). Bei Anwendung des chromsauren Salzes ist das Schütteln vorzuziehen; dasselbe ist so lange fortzusetzen, bis das anfänglich entstehende rothe Quecksilberchromat verschwunden ist und die wässerige Lösung durch das gebildete Chromsulphat rein grün gefärbt erscheint. Auf jeden Fall ist sodann das Quecksilber mit ausgekochtem, destillirtem Wasser vollkommen zu waschen und zuletzt unter dem Recipienten der Luftpumpe über einem Gefässe mit concentrirter Schwefelsäure zu trocknen.

Sicherer führt Destillation zum Ziele. Sie geschieht entweder aus eisernen Flaschen mit eingeschraubter eiserner Destillirröhre, welche man in kaltes Wasser münden lässt, oder viel besser im luftleeren Raume mittelst eines von A. Weinhold**) erfundenen Apparates, welcher allerdings ziemlich complicirt ist, dessen Leistungsfähigkeit und Bequemlichkeit aber von competenter Seite anerkannt wurde. Der Hauptvortheil ist dabei, dass sofort trockenes oxydfreies Quecksilber erhalten wird.

2) Ueber dem Quecksilber muss ein vollkommen luftleerer und trockener Raum sein.

Um dies zu erreichen, wird das Quecksilber in der Röhre ausgekocht, was auf folgende Weise geschieht: Man füllt $^1/_3$ der Röhrenlänge mit Quecksilber an und kocht es seiner ganzen Ausdehnung nach über einem Kohlenfeuer oder besser über einer grossen Gasflamme; alsdann giesst man eine neue Portion Quecksilber zu, welches aber etwas warm sein muss, damit die Röhre nicht springt, und kocht die neu hinzugegossene Quecksilbersäule auf dieselbe Weise, und so fort, bis man fast die ganze Röhre auf diese Weise behandelt hat, und giesst zuletzt noch etwas heisses Quecksilber auf, um die Röhre vollständig zu füllen. Durch diese Operation, bei welcher aber die Röhren leicht springen, wird sowohl die Luft, als auch die Feuchtigkeit, welche an den Röhrenwänden anhaftet, entfernt.

Das Auskochen des Quecksilbers im Barometerrohre wird wesentlich dadurch erleichtert, dass man den Druck der Atmosphäre von demselben entfernt. Dies benutzt Wild in folgender Weise, um Barometerröhren ohne Gefahr des Zerspringens zu füllen. Eine kugelförmige doppelt tubulirte Retorte C, Fig. 489, wird einerseits durch ein kurzes Stück ungeschwefelten Kautschukrohres mit der zu füllenden Barometerröhre K, andererseits durch Kautschukröhren mit einer Trockenröhre B und weiterhin mit einer Luftpumpe A verbunden. Die letzteren Röhren bestehen entweder aus sehr dickwandigem Kautschuk oder sie

*) L. Meyer, Anal. Zeitschrift 2, 241.
**) Carl's Repert. 15.

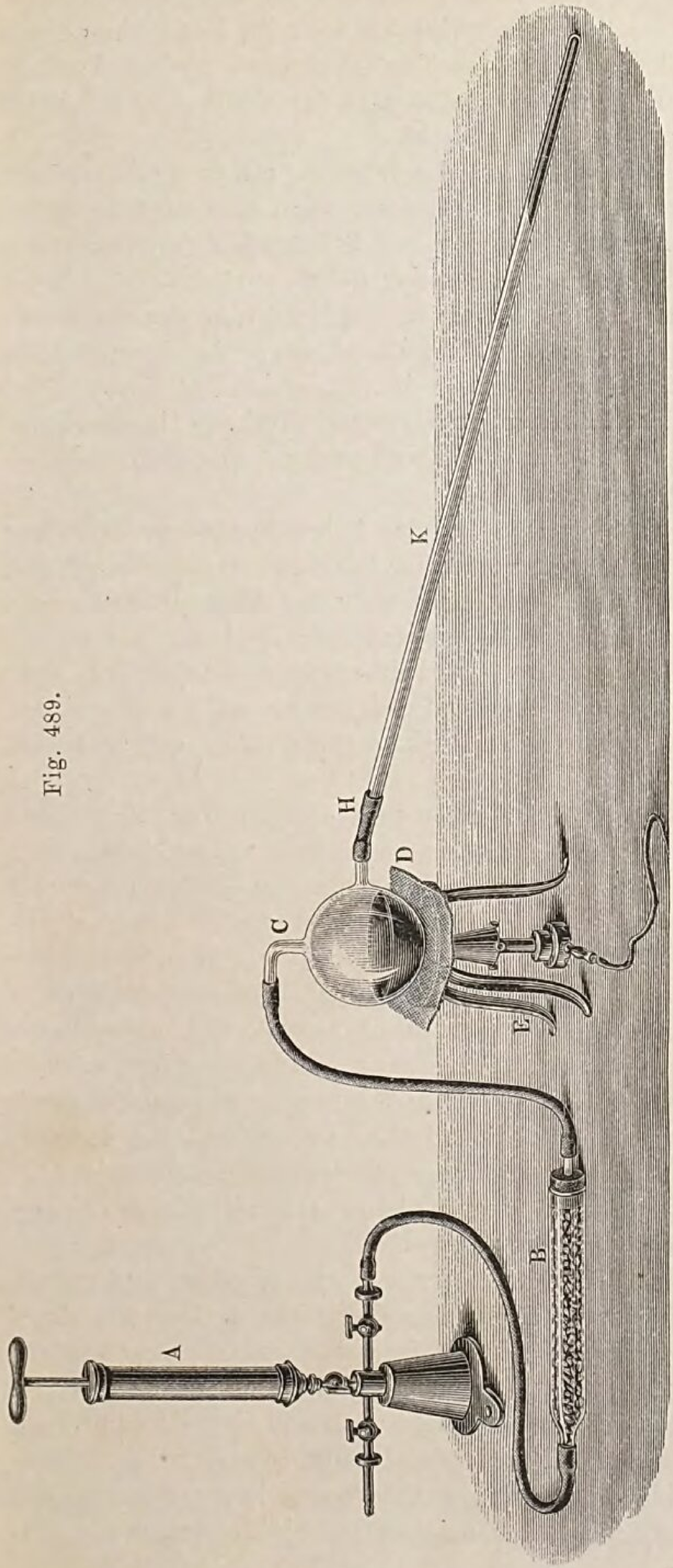


Fig. 489.

sind durch eingelegte Drahtspiralen gegen das Zusammendrücken durch den äusseren Luftdruck geschützt. Zunächst wird der ganze Apparat: Trockenröhre, Vorlage und Barometerrohr evacuirt und dann wieder von der Luftpumpe her Luft eingelassen, welche nun trocken ist, weil sie die Trockenröhre passirt hat. Hat man durch mehrmaliges Wiederholen dieser Operation alle Feuchtigkeit aus dem Innern entfernt und eine möglichste Luftverdünnung erzeugt, so wird die auf einem Dreifuss mit Drahtnetz liegende Vorlage erwärmt, bis das Quecksilber, welches sie enthält, ins Kochen geräth, was im leeren Raume ungefähr schon bei 300^{0} ohne Stossen erfolgt. Nachdem man hierauf mit derselben oder mit einer zweiten Lampe auch die Barometerröhre noch etwas erwärmt hat, lässt man das heisse Quecksilber durch Neigen der Vorlage langsam

und bei schwacher Neigung der Barometerröhre in dieselbe einlaufen. In dieser Weise wird die Barometerröhre bis über ihr Ende hinaus mit Quecksilber gefüllt und darauf mit der Kautschukröhre von der Vorlage abgezogen. In den Kautschukröhren lässt man Quecksilber, damit beim Erkalten die Barometerröhre gefüllt bleibt.

Wenn in der Toricelli'schen Leere noch etwas Luft zurückgeblieben ist, so erkennt man dies daran, dass, wenn man das Barometer neigt, das Rohr sich nicht vollkommen mit Quecksilber füllt, sondern dass ein kleines Luftbläschen am Gipfel der Röhre zurückbleibt. Nach und nach dringt fast immer etwas Luft in die leere Kammer der Barometer; der Fehler, der daraus entsteht, ist jedoch um so geringer, je grösser das Volumen der leeren Kammer ist.

Wir werden übrigens weiter unten eine Methode beschreiben, durch welche ein Luftgehalt genau bestimmt und dessen Einfluss durch Correction eliminirt werden kann.

Je länger man das Quecksilber in der Röhre kocht, desto flacher wird die Kuppe im Barometerrohre, ja der Quecksilberspiegel erscheint zuletzt fast ganz eben. Man hielt dies früher für einen Beweis, dass alle Luft vollständig aus dem Rohre entfernt sei; Dulong hat jedoch gezeigt, dass das Verschwinden der Quecksilberkuppe daher rühre, dass dem Quecksilber etwas Quecksilberoxyd beigemengt sei, wodurch das Anhaften an das Glas vermehrt wird. Dieses Oxyd bildet sich während des Auskochens.

3) Der Fehler durch die Veränderlichkeit der Capillardepression des Quecksilbers muss vermieden werden, indem man die Röhre wenigstens an den Stellen, wo die Ablesung erfolgt, genügend weit nimmt. Bei einer Weite von 12 mm beträgt die Unsicherheit in der Correction der Capillardepression ungefähr 0,1 mm. Man wird demnach die Röhre nicht unter 12 mm Durchmesser nehmen; beansprucht man grössere Genauigkeit und ist dieselbe durch die übrigen Constructionsverhältnisse ermöglicht, so muss die Röhre noch weiter genommen werden. An den übrigen Stellen kann die Röhre dagegen verengt sein, wodurch Quecksilber gespart wird; nur darf dies nicht so weit gehen, dass dadurch die Bewegung desselben zu sehr verlangsamt oder gar behindert wird.

4) Der Verticalabstand der beiden Quecksilberniveaus muss genau gemessen werden können.

Zu diesem Behufe ist das Barometer mit einem genau und richtig getheilten Maassstabe zu versehen, welcher aber nicht der ganzen Länge nach getheilt zu sein braucht. Dieser Maassstab muss genau vertical stehen, während die Röhre selbst nicht genau vertical zu stehen braucht. Ferner soll der Maassstab der ganzen Länge nach aus ein und demselben Materiale sein, damit man die Wärmeausdehnung desselben berücksichtigen kann. An dem Maassstabe müssen Ablesevorrichtungen vorhanden sein, welche ein möglichst genaues Einstellen auf die Kuppen des Quecksilbers gestatten.

5) Endlich muss ein Thermometer angebracht sein, mittelst welchem man die Temperatur des Quecksilbers und des Maassstabes bestimmen kann, um die Correction wegen der Wärmeausdehnung (Reduction auf 0°) zu erhalten.

Die hier aufgeführten Grundsätze für die Construction des Barometers sind in mehr oder weniger vollkommener Weise zur Durchführung gebracht bei den verschiedenen Hauptformen dieses Instrumentes, von denen wir die besten nachfolgend beschreiben wollen.

Das Gefässbarometer. Die einfachste Form des Gefässbarometers ist bereits durch Fig. 486, Seite 472, abgebildet. Dasselbe ist jedoch nicht gut transportabel und daher nur als „Standbarometer" verwendbar; ausserdem hat es den Uebelstand, dass das Niveau im unteren Gefässe fortwährend wechselt und dessen Höhe nicht gut abzulesen ist. Will man die Höhe der Quecksilbersäule mittelst des Kathetometers messen, so senkt man auf die Oberfläche des Quecksilbers des Gefässes einen von einer Schraubenmutter gehaltenen stählernen Stift von bekannter Länge, den man in genau verticaler Lage so weit auf- oder abbewegt, bis seine untere Spitze eben das Niveau berührt. Man misst dann nur noch den Höhenabstand zwischen dessen oberer Spitze und der Quecksilberkuppe im Rohre, zu welcher man die Länge des Stiftes addirt. Das früher manchmal angewendete Verfahren, die veränderliche Höhe des Quecksilbers im Gefäss aus der Höhe im Rohre und dem Durchmesserverhältniss zwischen Gefässe und Rohr zu berechnen, ist umständlich und ungenau, da das Volumen des Quecksilbers in Folge Temperaturschwankungen sich ändert. 134

Die verbreitetste Form des transportablen Gefässbarometers ist die, welche den Namen ihres Erfinders, Fortin, trägt.

Fig. 490 zeigt den unteren, Fig. 491 den oberen Theil, Fig. 492 (a. f. S.) das ganze Instrument sammt Stativ.

Bei diesem Instrumente ist durch eine eigenthümliche Vorrichtung dafür gesorgt, dass vor jeder Ablesung der Quecksilberspiegel im Gefässe genau in dieselbe Höhe gestellt werden kann. Der Boden des Gefässes, welches in Fig. 490 ungefähr in natürlicher Grösse, halb in äusserer Ansicht, halb im Durchschnitt dargestellt ist, wird nämlich durch einen Lederbeutel *l* (oder besser durch einen Beutel, dessen innere Seite aus nicht vulcanisirtem Kautschuk und dessen äussere aus Leder besteht) gebildet, gegen welchen von unten her der abgerundete Kopf der Schraube *s* drückt; je nachdem man die Schraube *s* dreht, wird also der Quecksilberspiegel im Gefässe gehoben oder gesenkt. Am Deckel des Gefässes aber ist ein unten zugespitzter Stift *r* von Elfenbein befestigt, dessen Bild man in dem Quecksilberspiegel des Gefässes erblickt. Durch Drehen der Schraube *s* ist es leicht, die Oberfläche des Quecksilbers gerade so hoch zu heben, dass sie eben die Spitze des Stiftes berührt. Diese Spitze nun ist der Nullpunkt der Barometerscala.

Das Rohr dieses Barometers ist vollständig von einer Messinghülse eingeschlossen, in welcher, um die Quecksilberkuppe im Rohre beobachten zu können, oben zwei einander gegenüberstehende Schlitze angebracht sind. Diese Messinghülse trägt eine Scala, deren Nullpunkt

Fig. 490.

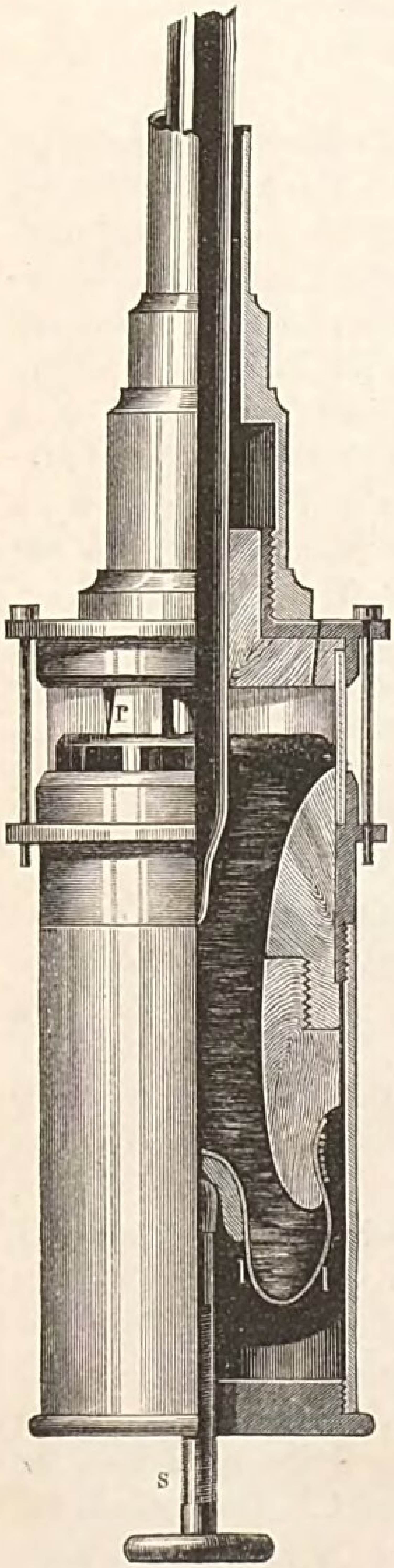


Fig. 491.

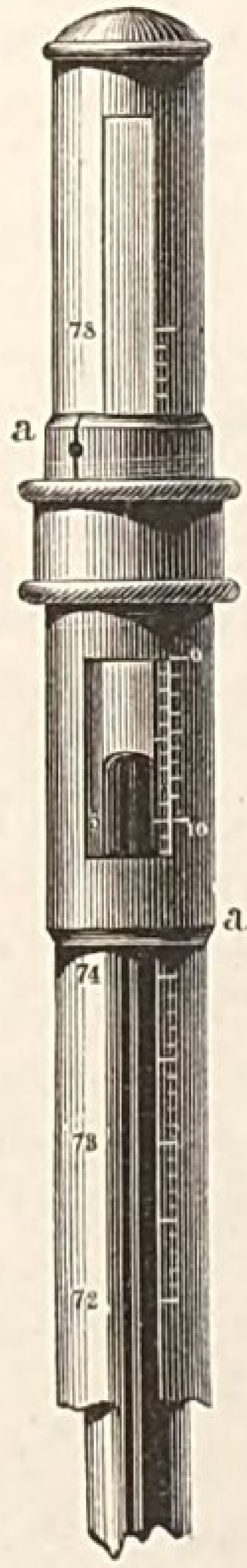
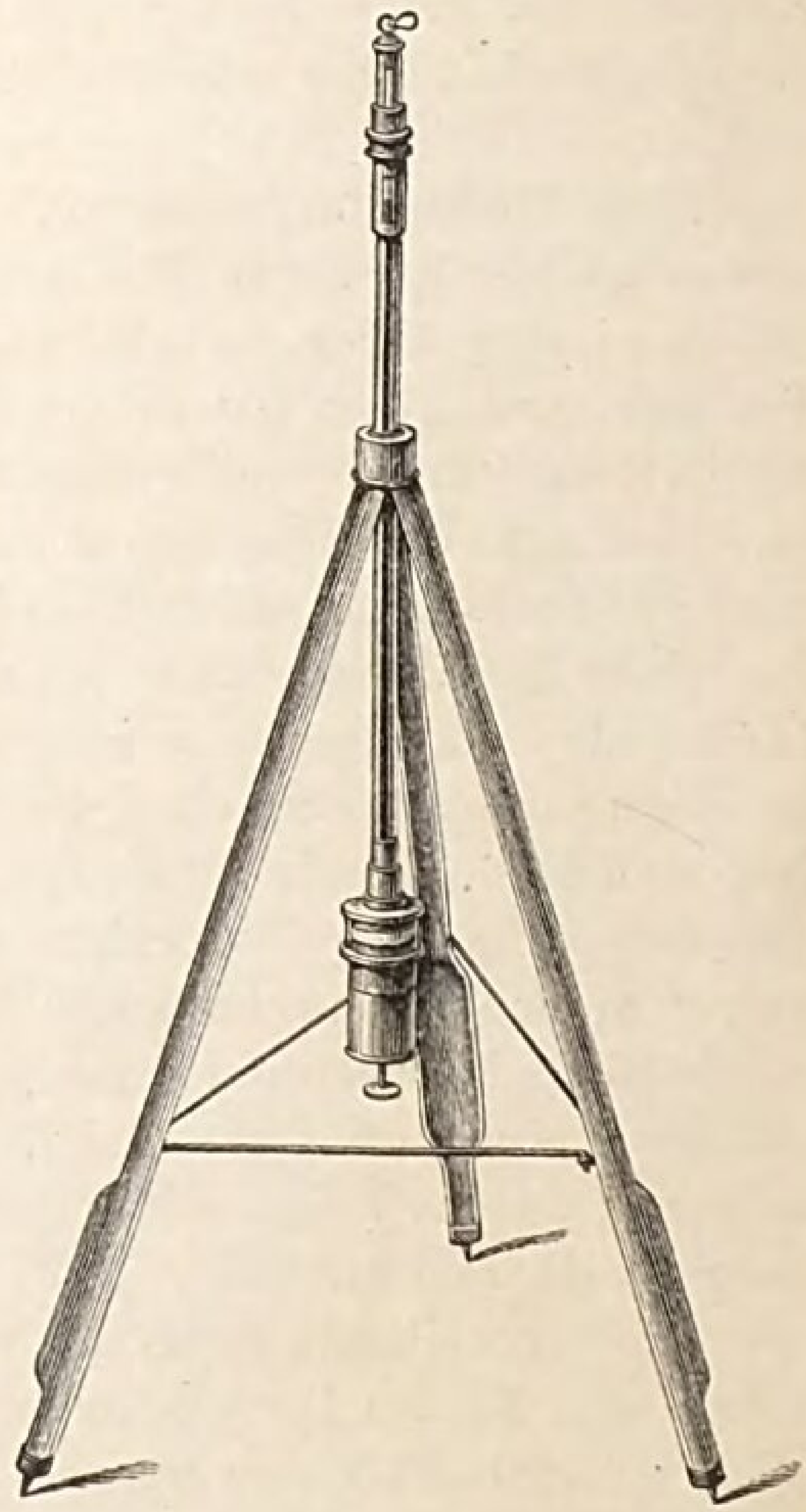


Fig. 492.



die bereits erwähnte Elfenbeinspitze ist. Um den Stand der Quecksilberkuppe richtig ablesen zu können, ist auf dem getheilten Messingrohr eine Hülse *a a*, Fig. 491 verschiebbar, in welcher sich ebenfalls zwei diametral gegenüberstehende Schlitze befinden, welche auf die Schlitze des Rohres passen und nur etwas breiter sind als jene, so dass man noch die Theilung des Rohres sehen kann. Die oberen Ränder der beiden Schieberschlitze sind genau in gleicher Höhe, und um eine Beobachtung zu machen, stellt man den Schieber so, dass diese oberen Ränder der Schieberschlitze in gleicher Höhe mit der Quecksilberkuppe stehen. Die eine Seite des vorderen Schieberschlitzes ist mit einem Nonius versehen.

Mittelst cardanischer Aufhängung, d. h. um zwei zu einander rechtwinklige horizontale Achsen drehbar, wird nun das Instrument in den Hals eines dreiseitigen Stativs eingesetzt, wie man Fig. 492 sieht, so dass das Barometer durch das bedeutende Gewicht des Gefässes stets in verticaler Richtung erhalten wird. Um das Barometer zu transportiren, wird die Schraube *s*, Fig. 490, so hoch in die Höhe geschraubt, dass das Rohr sowohl wie das Gefäss vollständig mit Quecksilber gefüllt sind. Die zusammengelegten Füsse des Stativs bilden dann das Gehäuse, in welchem das Instrument verpackt wird.

Die Anwendung des beweglichen Bodens zur Einstellung des Quecksilberspiegels im Gefäss auf einen bestimmten Punkt rührt von Horner her, welcher übrigens den Boden des Gefässes nicht durch einen Lederbeutel herstellte, sondern dazu einen dicht an die Wände anschliessenden mit Leder überzogenen Kolben gebrauchte, welcher durch eine Schraube auf- und niedergeschoben werden konnte.

Die Aufhängung des Barometers in einem dreibeinigen Stativ wurde zuerst von Engelfield angewandt.

Das Heberbarometer. Den bisher besprochenen Gefässbaro- 135
metern gegenüber bilden die Heberbarometer eine zweite Hauptform dieses wichtigen Instrumentes, welche sich durch mehrfache Vortheile auszeichnet, namentlich sind die Heberbarometer bei gleicher Genauigkeit weit transportabler als die Gefässbarometer.

Die Heberbarometer, Fig. 493 (a. f. S.), sind aus einem heberförmig gebogenen Glasrohre verfertigt, welches wenigstens an den Stellen der oberen und unteren Quecksilberkuppe gleichen Durchmesser haben muss.

Bei diesen Barometern hat die Quecksilberkuppe im kürzeren Schenkel durchaus keine feste Stellung. So lange die Temperatur nicht wechselt, muss bei verändertem Luftdruck die Quecksilbersäule in dem einen Schenkel genau so viel steigen, wie sie im anderen fällt, man könnte also aus den Schwankungen im einen Schenkel auf die im anderen schliessen; da jedoch bei wechselnder Temperatur auch das Volumen des Quecksilbers im Barometer sich ändert, so ist die Beobachtung beider Kuppen unerlässlich.

Bei den Heberbarometern sind entweder

1) das Rohr und die Scala fest;
2) die Scala fest und das Rohr in verticaler Richtung verschiebbar;
3) das Rohr fest und die Scala verschiebbar.

Im ersten Falle ist es am bequemsten, wenn der Nullpunkt der Scala noch unter der unteren Kuppe liegt. Man hat alsdann abzulesen, wie hoch die obere und wie hoch die untere Kuppe über dem fraglichen Nullpunkte liegt; die Differenz der beiden Ablesungen giebt dann die Barometerhöhe.

Bei den besten nach diesem Princip construirten Barometern ist die Theilung oft auf das Glasrohr selbst geätzt.

Fig. 493.

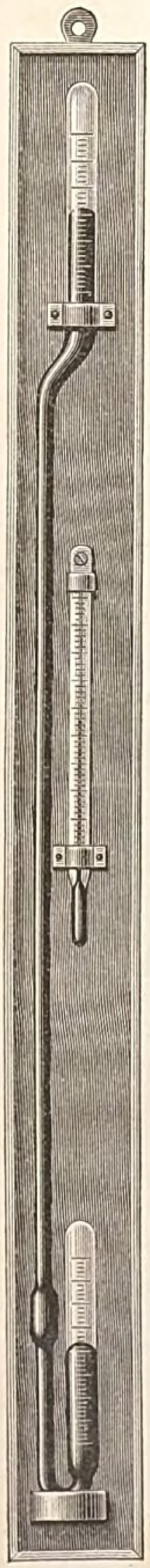


Fig. 494.

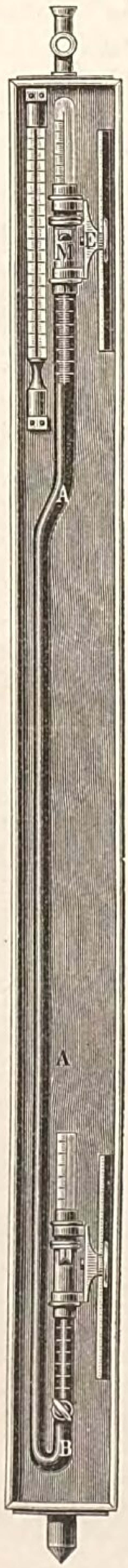


Fig. 495.

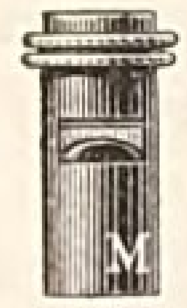


Fig. 496.

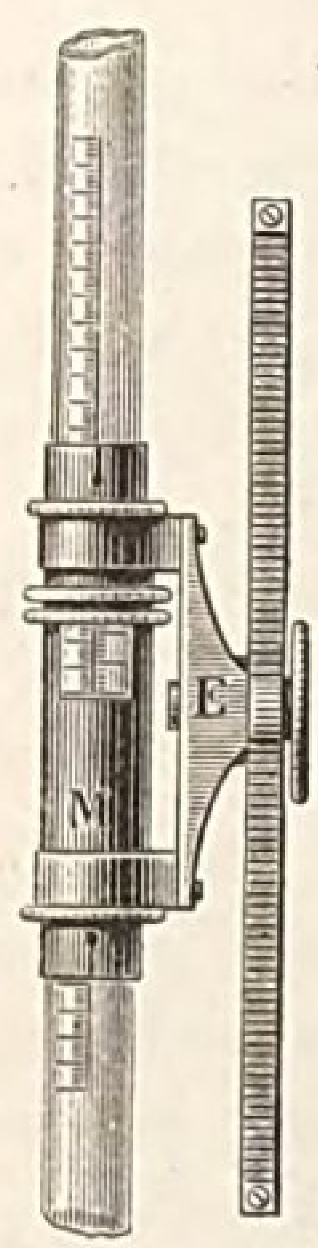
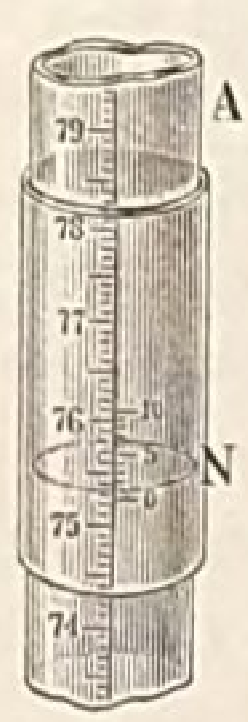


Fig. 497.



Ein solches Instrument ist in Fig. 493 abgebildet *); Fig. 494 zeigt ein ähnliches Instrument mit Glasnonien, deren Einrichtung aus den Nebenfiguren 495, 496, 497 genügend erhellt.

Die Fig. 498 deutet die Construction eines einfachen Heberbarometers der zweiten Art an.

Das Rohr ist auf der Messingplatte *d* befestigt, welche mit Hülfe der Schraube *s* auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch dann auch das Barometerrohr selbst gehoben oder gesenkt wird, indem die messingenen Halter *b* und *c* dasselbe zwar auf dem Brette halten, aber doch eine Verschiebung in verticalem Sinne gestatten. Soll eine Beobachtung gemacht werden, so wird zunächst die untere Kuppe auf den Nullpunkt der Scala eingestellt und dann der Stand der oberen abgelesen.

Bei den Heberbarometern der dritten Art ist die Scala mittelst eines in eine gezahnte Stange eingreifenden Triebes verschiebbar; sie wird bei jeder Beobachtung so eingestellt, dass der Nullpunkt der Scala in die Höhe der unteren Quecksilberkuppe zu stehen kommt. Ein Barometer dieser Art ist in Fig. 499 abgebildet. Die Barometerröhre ist ganz in ein Brett eingelassen, welches nur an den beiden Stellen durchbrochen ist, an welchen beobachtet werden soll; die verschiebbare Scala ist auf der Vorderseite dieses Brettes angebracht. Am unteren Ende der getheilten Stange ist ein kleines Mikroskop befestigt, welches so eingerichtet ist, dass man durch

*) Die Abbildungen Fig. 493, 494 bis 497 und 500 sind dem Kataloge der Firma R. Fuess (vormals J. G. Greiner jun. u. Geissler) in Berlin entnommen.

Fig. 498.

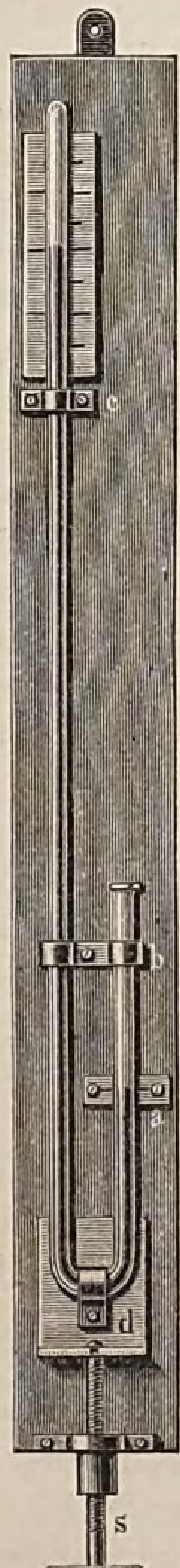


Fig. 499.

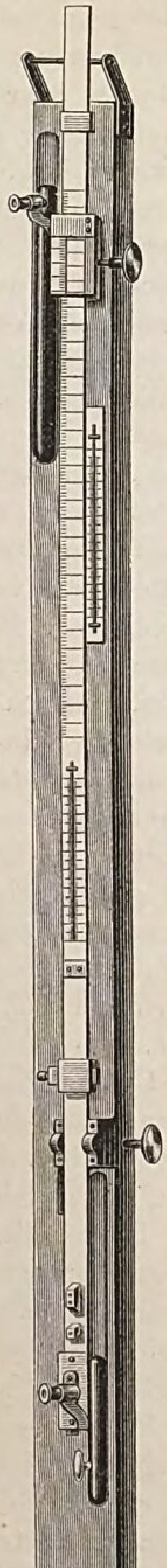


Fig. 500.

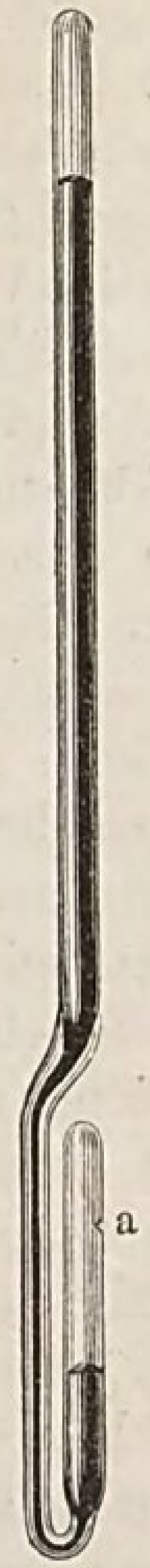


Fig. 501.

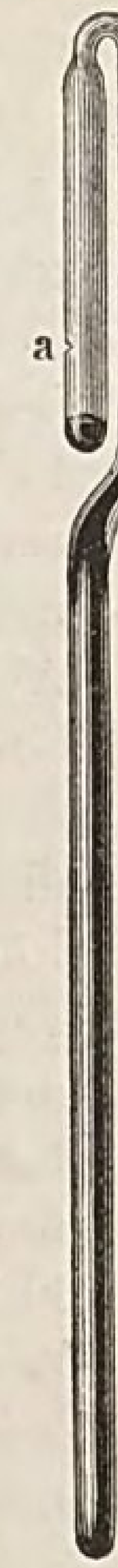
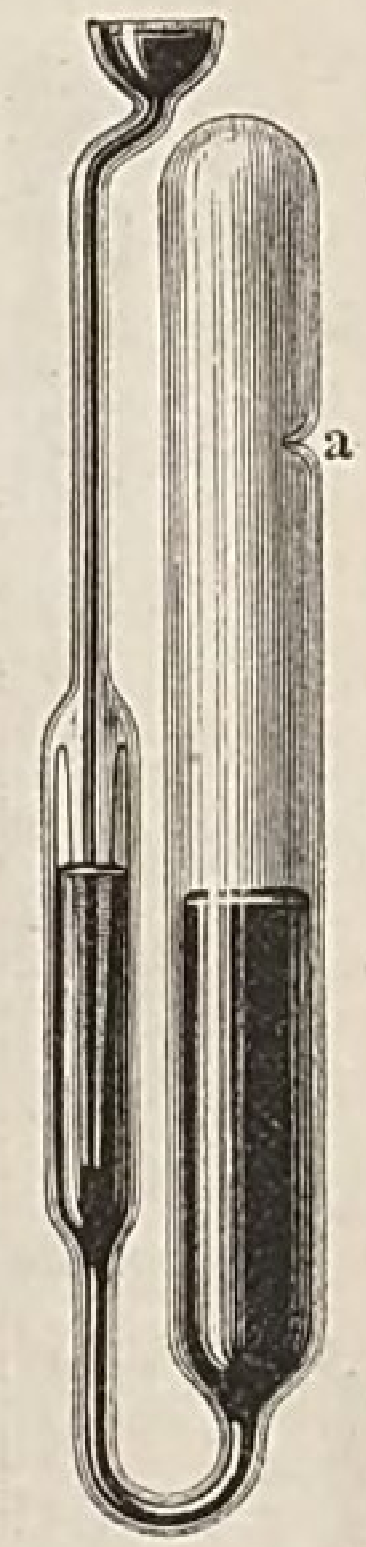


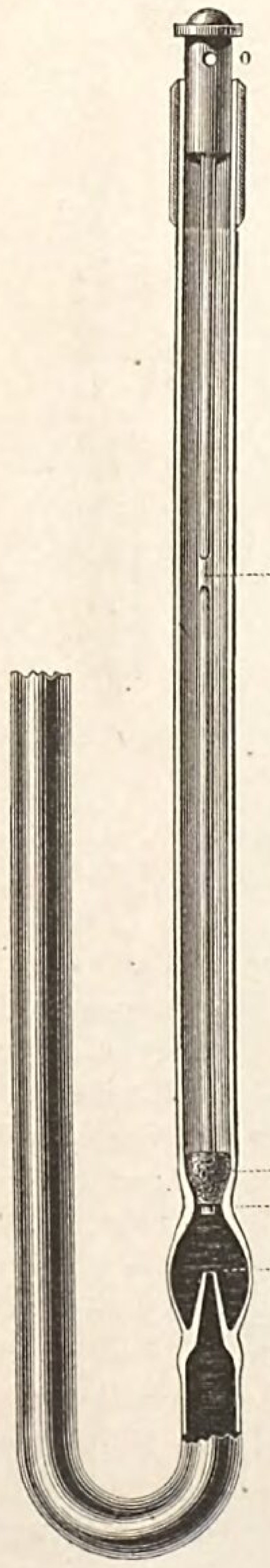
Fig. 502.



dasselbe die untere Kuppe des Barometers scharf sehen kann. Der Kreuzungspunkt des in diesem Mikroskop angebrachten Fadenkreuzes liegt in gleicher Horizontallinie mit dem Nullpunkte der Scala und dieser Kreuzungspunkt wird genau auf den Gipfel der unteren Kuppe eingestellt. Am oberen Ende der getheilten Stange ist gleichfalls aufs Feinste verschiebbar ein Nonius angebracht, dessen Nullpunkt in der Horizontallinie eines von ihm getragenen zweiten Mikroskopes liegt, welches auf die obere Kuppe eingestellt wird. Der Nonius ist so getheilt, dass man mit demselben unmittelbar 0,02 mm ablesen kann. Ein gleicher Grad von Genauigkeit ist bei dem Fortin'schen Barometer nicht möglich, selbst wenn man die Einstellung auf die obere Kuppe mit dem Mikroskop

ausführen wollte, weil die Einstellung auf die Spitze r im Gefäss, Fig. 490, nicht mit der Genauigkeit ausgeführt werden kann, wie die Einstellung auf die untere Kuppe des eben beschriebenen Instrumentes.

Fig. 503.



Ueberhaupt trägt es sehr zur Genauigkeit der Messung bei, wenn beide Ablesungen durch gleichartige Vorrichtungen bewerkstelligt werden. Will man die höchste Genauigkeit erreichen, so benutzt man Constructionen, welche gestatten, beide Ablesungen nicht nur durch gleichartige, sondern durch die nämliche Vorrichtung vorzunehmen. Man ist dann ganz sicher, constante Ablesefehler durch die Methode der Messung zu eliminiren.

Besondere Mühe hat man darauf verwandt, die Heberbarometer so zu construiren, dass sie bequem und sicher transportirt werden können. Fig. 500 stellt das Rohr des von Gay-Lussac angegebenen Barometers dar. Der offene Schenkel hat nur eine capillare Oeffnung a, gross genug, um die Luft frei eintreten zu lassen, aber zu klein, als dass Quecksilber durch dieselbe auslaufen könnte; man darf also das Instrument umkehren, Fig. 501, ohne fürchten zu müssen, dass man Quecksilber verliert. Damit man das Barometer aus der Lage Fig. 501 wieder zur Beobachtung umkehren könne, ohne dass Luft in den längeren Schenkel eintreten kann, hat Bunten an diesen Barometern die Fig. 502 abgebildete Einrichtung getroffen.

Bei den Gay-Lussac'schen Barometern findet man die Theilung meist auf das Glas geätzt.

Fig. 503 stellt den sehr zweckmässigen Verschluss der Greiner'schen Heberbarometer dar. Der offene Schenkel ist nämlich nahe über der Krümmung bei d etwas verengert und unter dieser Einschnürung bauchig erweitert. In diese Erweiterung erhebt sich vom unteren Rande aus eine conisch verjüngte oben bei i offene Fortsetzung des unteren Röhrentheils. Das Barometer enthält nun gerade so viel Quecksilber, dass die bauchige Erweiterung noch bis d mit Quecksilber gefüllt bleibt, wenn man durch Neigen des Instrumentes die Toricelli'sche Leere vollständig mit Quecksilber ausgefüllt hat. Zum Verschluss dient alsdann ein genau in die Verengung bei d passender Kork k, welcher am unteren Ende einer im Lichten ungefähr 1 mm weiten, bei n

zugeschmolzenen Glasröhre befestigt ist. Wenn nun selbst kleine Luftblasen in dem abgesperrten Theile zurückblieben, so können diese doch niemals in der Oeffnung bei *i* und durch diese in den längeren Schenkel des Barometers eindringen. Wenn bei steigender Temperatur das abgesperrte Quecksilber sich ausdehnt, so kann es in die durch den Kork *k* gesteckte Glasröhre eintreten. Es ist dafür gesorgt, dass während des Transports die fragliche Glasröhre sammt dem Kork *k* in der Stellung festgehalten wird, in welcher sie Fig. 503 darstellt. Soll das Instrument gebraucht werden, so wird die enge Glasröhre sammt dem daran steckenden Kork *k* in die Höhe gezogen.

Bei manchen Heberbarometern wird das Quecksilber, nachdem durch Neigen das Vacuum nahe ausgefüllt ist, durch einen Hahn abgesperrt, Fig. 494.

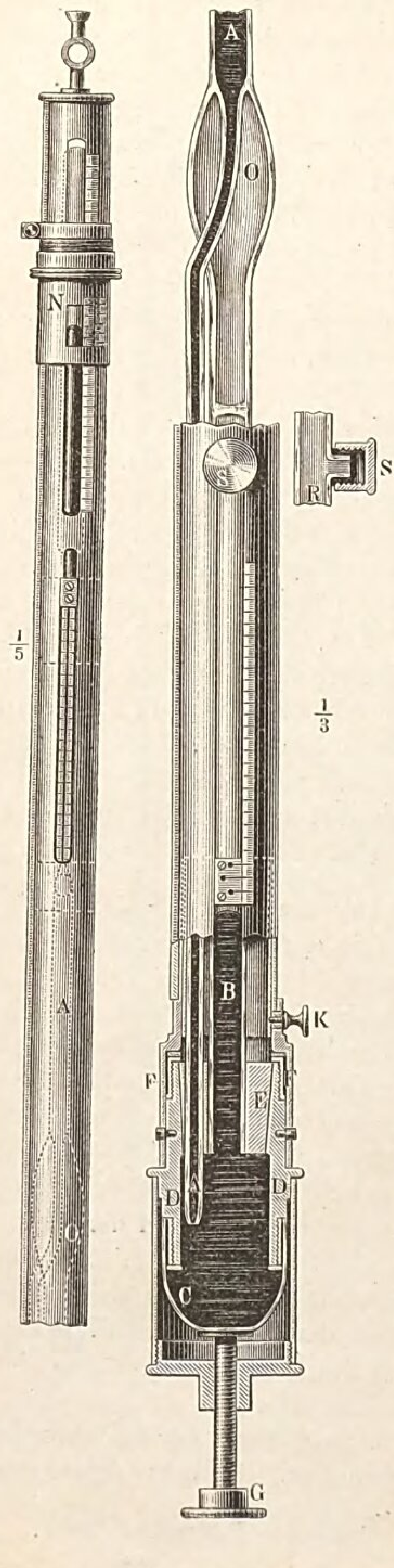
Wenn ein Heberbarometer einige Jahre lang in der Beobachtungsstellung hängen bleibt, so wird die Stelle des offenen Schenkels, an welcher die untere mit der Luft in Berührung stehende Quecksilberkuppe auf- und abspielt, durch anhaftendes Quecksilberoxyd und Quecksilber verunreinigt, was eine genaue Beobachtung sehr erschwert und endlich ganz unmöglich macht. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, wird vorgeschlagen, das Barometer beim Nichtgebrauch so schief zu hängen, dass das Vacuum ausgefüllt wird. Man vermeidet dadurch auch das Aus- und Einfliessen des Quecksilbers bei Aenderungen des Luftdruckes, wodurch nach und nach Luft ins Vacuum geführt wird. Dieser letztere Vortheil geht aber verloren und verkehrt sich in einen Nachtheil, wenn das Barometer täglich ein- oder mehrmals abgelesen werden soll, da dann der Verkehr des Quecksilbers viel grösser ist, als bei ruhig hängendem Instrumente.

Das Gefässheberbarometer. Der am Schlusse des vorigen 136
Paragraphen besprochene Uebelstand, dass in der Umgebung der unteren Kuppe das Glasrohr durch Quecksilberoxyd beschmutzt wird, wodurch insbesondere auch eine unregelmässige Capillardepression hervorgebracht wird, sowie noch ein wichtiger Umstand haben Veranlassung gegeben, ein Barometer zu construiren, welches die Vortheile des Gefässbarometers mit jenen des Heberbarometers vereinigt und den obigen Namen führt. Dasselbe besitzt vom Fortin'schen Instrumente den Lederbeutel mit der Anhebevorrichtung, ist aber doch doppelschenkelig, wie das Heberbarometer. Fig. 504 zeigt ein solches Instrument nach dem System Wild-Fuess*) und zwar links die obere Hälfte desselben mit Scala und Ablesevorrichtung, rechts in etwas grösserem Maassstabe den unteren Theil, wobei durch theilweise Wegnahme der Wände die Verbindung der beiden Schenkel und die Einrichtung des Quecksilbergefässes sichtbar gemacht ist.

Die beiden Schenkel *A* und *B* hängen an der mit der äusseren Luft nicht communicirenden Erweiterung *O* zusammen. Der obere Theil von *A*

*) H. Wild: Neueste Form des Controlbarometers, Petersburg 1883.

Fig. 504.



liegt in der Verlängerung von *B*, seine Fortsetzung aber ist seitlich durch *O* hindurch und hierauf parallel zu *B* fortgeführt. *A* und *B* sind in den Stahlconus *E* gekittet, über welchen *A* ein Stück weit hinausreicht, während *B* mit dem Conus abschneidet.

Der Schenkel *B* hat unterhalb *O* einen Ansatz, durch den er mit der Atmosphäre communicirt, welcher durch die Schraube *S* verschlossen werden kann.

Der Conus *F* ist in ein eisernes Gefäss *D* eingelassen, und wird durch eine Ueberfangschraube darin festgehalten. Auf *D* ist der Lederbeutel *C* aufgebunden. An der Aussenseite von *D* ist die messingene Schutzröhre, welche zugleich die Scala trägt, angeschraubt. Auf ihr verschiebt sich die mit einem Nonius versehene Ablesevorrichtung *N*, welche mit einer Schraube zur feinen Einstellung versehen ist. Diese nämliche Ablesevorrichtung kann nach Wegnahme des Knopfes *S* zur unteren Kuppe hinabgeschoben und zur dortigen Ablesung benutzt werden. Für weniger genaue Messungen benutzt man bequemer ein eigenes Nullpunktsvisir, das mittelst der Schraube *K* festgeklemmt werden kann. Man hebt dann das Quecksilber im kurzen Schenkel bis zu diesem Visir und bewerkstelligt die obere Ablesung mittelst des Nonius *N*.

Soll das Instrument auf kürzere Strecken im zusammengesetzten Zustande transportirt werden, so wird das Quecksilber im Rohre *B* ganz gehoben, die Oeffnung bei *S* verschlossen und das Instrument umgekehrt.

Die Versendung des Instrumentes auf weitere Strecken geschieht im zerlegten Zustande, ohne dass eine neue Füllung nothwendig wird. Zu

diesem Zwecke wird in umgekehrter Lage nach Abnahme des Scalenrohres vom Gefäss *D* und nach Lösung der Mutter *F* der Stahlconus *E* mitsammt den beiden eingekitteten Röhren aus *D* herausgehoben und nach Abnahme von *S* das Quecksilber aus dem Schenkel *B* abgelassen, während der längere Schenkel *A* gefüllt bleibt. Die beiden Rohre werden dann sammt dem Conus *E* abgesondert vom übrigen Instrumente verpackt, damit im Falle eines Bruches das ausfliessende Quecksilber nicht die Metalltheile beschädigt. Bei der Wiederzusammensetzung wird in umgekehrter Reihenfolge verfahren.

Zum Schlusse sei erwähnt, dass Barometer mit anhebbarem Quecksilber nach Löwenherz auch ohne Lederbeutel durch Anfügung eines dritten communicirenden Schenkels, aus dem das Quecksilber durch einen Kolben verdrängt wird, construirt werden.

Prüfung und Correction des Barometers. Um ein Barometer auf seinen brauchbaren Zustand zu prüfen, wird man zunächst 137
aus der blanken Oberfläche des Quecksilbers und dem wohlausgebildeten Meniscus auf die Reinheit des Quecksilbers schliessen dürfen. Die Weite der Röhre und die Beschaffenheit der Ablesevorrichtungen wird dann einen Maassstab über die erreichbare Genauigkeit der Ablesung ergeben. Die Richtigkeit der Scala kann wohl nur durch Untersuchung mittelst eines Kathetometers geprüft werden, wobei insbesondere auf die richtige Stellung der Nullmarke zu der übrigen Theilung zu achten ist.

Die Vollkommenheit des Vacuums kann zunächst annähernd dadurch geprüft werden, dass man das Instrument vorsichtig so neigt, dass das Quecksilber mit mässiger Stärke an das verschlossene Ende anschlägt. Entsteht dabei ein heller, klingender Ton, so ist dies ein gutes Zeichen, dagegen zeigt ein dumpfer Ton an, dass Luft vorhanden, welche den Stoss elastisch aufnimmt. Man wird dann auch, falls das Ende der Röhre sichtbar ist, daselbst die zurückbleibende Luftblase beobachten und der Grösse nach beiläufig schätzen können. Je grösser der Raum über dem Quecksilber, je weiter und je länger also die Röhre ist, desto weniger Ungenauigkeit wird durch ein kleines Luftbläschen entstehen können. Schon aus diesem Grunde sind enge Röhren verwerflich. Bei Heberbarometern, deren offener Schenkel lang genug ist, so dass man die Quecksilbersäule durch Nachgiessen von Quecksilber noch um ein Beträchtliches erhöhen kann, sowie bei den Anhebebarometern, z. B. dem zuletzt beschriebenen Gefässheberbarometer, lässt sich eine genaue Bestimmung des Fehlers, der durch einen Luftgehalt entstanden ist, nach folgender von Arago*) stammender Methode ermitteln.

Man macht unmittelbar nach einander zwei sorgfältige Ablesungen der Barometerhöhe, die erste, h, bei gewöhnlicher Füllung, die zweite,

*) Nach Régnault's Angabe (Relation des exp. 1, pag. 491, Anm.). Dieselbe Methode wurde von A. T. Kupffer 1832 beschrieben (Pogg. Ann. 26, S. 450).

nachdem man durch Nachfüllen oder Anheben des Quecksilbers den Raum des Vacuums auf die Hälfte des früheren gebracht hat. Ist die dann abgelesene Höhe gleich h', so ist der Fehler der ersten Messung gegeben durch die Differenz $h - h'$. Diese Grösse ist zur zuerst abgelesenen Höhe zu addiren.

Die Erklärung für dieses Verfahren ist einfach, sobald man das später mitzutheilende Gesetz von Boyle kennt, nach welchem sich die Spannkraft der Luft in demselben Verhältnisse erhöht, in welchem das Volumen derselben abnimmt. Durch Zusammendrücken der Luft auf ihr halbes Volumen wird ihre Spannkraft verdoppelt. Bei der ersten Ablesung war die gefundene Höhe h gleich der wahren Barometerhöhe b weniger der Spannkraft der eingesperrten Luft, welche mit x bezeichnet sei, also:

$$h = b - x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Bei der zweiten Ablesung tritt an Stelle von x der Werth $2x$, also gilt:

$$h' = b - 2x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber:

$$h - h' = x$$

Diese Methode gilt angenähert auch bezüglich des im Vacuum enthaltenen Wasserdampfes, so lange davon nicht eine so grosse Menge vorhanden ist, dass sich derselbe beim Versuche theilweise condensirt.

Es leuchtet ein, dass man das Volumen des Vacuums nicht gerade auf die Hälfte zu reduciren braucht; das Verfahren wird vielmehr noch empfindlicher, wenn man die Volumverminderung noch weiter treibt. Vermindert man das Volumen auf $\frac{1}{n}$ des ursprünglichen, so ist:

$$h = b - x, \quad h' = b - nx$$

woraus:

$$x = \frac{h - h'}{n - 1}.$$

Reducirt man also beispielsweise das Vacuum auf den elften Theil, so giebt die Differenz der Ablesungen der Barometerhöhen das Zehnfache des Fehlers der ersten Ablesung.

Um diese Methode genau durchzuführen, sollte das Barometerrohr eine Volumeintheilung besitzen. Es dürfte aber meistens genügen, die relativen Volumina aus den Längen abzuleiten, wobei man noch den Inhalt der Kalotte abschätzen kann.

Die Correction wegen der Capillardepression ist leider eine ziemlich unsichere, da die diesbezüglichen Correctionstabellen verschiedener Autoren nicht übereinstimmen. Wir führen hier die aus den Beobachtungen von Mendelejeff und Gutkowski von F. Kohlrausch berechnete Tabelle auf.

Capillardepression des Quecksilbers in einer Glasröhre.

Durchmesser	Höhe des Meniscus in Millimetern							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Für grössere Röhrendurchmesser mag man ohne Rücksicht auf die Höhe des Meniscus unter Annahme eines Randwinkels von 36^0 nach Bravais annehmen:

Durchmesser in Millimetern	Capillardepression in Millimetern
10	0,32
12	0,19
14	0,12
16	0,07
18	0,04
20	0,025

Beim Gefässbarometer ist die aus der Tabelle entnommene Correction nur an der oberen Ablesung anzubringen (zu addiren); beim Heberbarometer aber an beiden Ablesungen. Insofern daher die Rohrweite und die Meniscushöhe an beiden Schenkeln dieselben Werthe haben, entfällt beim Heberbarometer die Correction ganz. Man wird aber bemerken, dass die Menisken nur dann gleiche Höhen annehmen, wenn man das Quecksilber unmittelbar vor der Ablesung hat ansteigen lassen. Eben darum hat auch in dieser Hinsicht das Gefässheberbarometer oder überhaupt das Anhebebarometer den Vorzug.

Die Correction wegen der Temperatur kommt in drei Richtungen in Betracht, nämlich einmal wegen der Ausdehnung des Quecksilbers, dann wegen der Ausdehnung des Maassstabes, endlich wegen der Tension der Quecksilberdämpfe im Toricelli'schen Raume. Da wir die Grundlagen dieser Correctionen erst in der Wärmelehre vortragen können, so beschränken wir uns hier auf die Mittheilung der betreffenden Correctionswerthe.

1) Ist die Höhe einer Quecksilbersäule bei t^0 C. $= h$, so ist sie bei 0^0 C. $h_0 = h - 0{,}000181\,th$.

2) Hat man h an einem Maassstabe gemessen, der nicht die Temperatur Null hat (bei welcher seine Theilung als richtig angenommen wird), sondern die Temperatur t wie das Quecksilber, so ist bei Anwendung eines Maassstabes von Messing (Ausdehnungscoefficient $= 0{,}000019$)

$$h_0 = h - 0{,}000162\,th;$$

bei einem Maassstabe von Glas (Ausdehnungscoefficient $= 0{,}000008$)

$$h_0 = h - 0{,}000173\,th.$$

3) Die Correction wegen der Tension der Quecksilberdämpfe ist geringfügig, sie beträgt nach:

Temperatur	Régnault	Hagen	Hertz
0^0	0,0200 mm	0,015 mm	0,0002 mm
10^0	0,0268 „	0,018 „	
20^0	0,0372 „	0,021 „	0,0013 „
30^0	0,0530 „	0,026 „	

Sehen wir von den älteren Zahlen Régnault's ab, so wäre diese Correction nach Hertz überhaupt zu vernachlässigen, nach Hagen für die Zimmertemperaturen mit 0,02 in Rechnung zu bringen und zwar zu addiren.

Es ist sehr darauf zu achten, dass man die Temperatur des Quecksilbers des Barometers richtig bestimme. Ein neben oder an dem Barometer angebrachtes Thermometer giebt nur dann die Temperatur des Quecksilbers richtig an, wenn es vor störenden Einflüssen, wie Wärmestrahlen von Seite der Sonne, des Ofens, des Beobachters etc., dann vor Luftströmungen geschützt ist, und wenn die Temperatur der Umgebung nicht rasche Aenderungen erleidet. Man hat daher das Thermometer immer zuerst abzulesen und dann erst das Barometer.

Beispiele der Berechnung des corrigirten Barometerstandes.

a) An einem Gefässbarometer mit Scala auf Messing habe man abgelesen die Temperatur . . . $t = 20{,}5^0$

Nach Einstellung des unteren Niveaus stand die Quecksilberkuppe bei $h = 750{,}10$ mm

Die Röhre habe 10 mm innere Weite, der Meniscus eine Höhe $= 1$ „

Daraus ergiebt obige Tabelle eine Capillardepression $c = 0{,}20$ „

Die Quecksilbertension wird angenommen zu . $\tau = 0{,}02$ „

Dann ist der auf 0^0 reducirte und corrigirte Barometerstand:

$$b = h - 0{,}000162\,th + c + \tau$$

$$b = 750{,}10 - 2{,}49 + 0{,}20 + 0{,}02 = 747{,}83 \text{ mm}$$

b) An einem Heberbarometer sei bei einer Temperatur . $t = -6{,}0^0$ mm

Abgelesen die Höhendifferenz der beiden Kuppen $h = 720{,}00$ „

Die beiden Schenkel seien beide 8 mm weit, die Höhe des Meniscus sei an der oberen Kuppe . . . $= 0{,}6$ „

An der unteren Kuppe $= 1{,}2$ „

Nach der Tabelle entsprechen diesen Höhen die Depressionen 0,20 und 0,46 „

Die Scala sei auf der Röhre selbst aufgetragen.

Für die Dampftension wird 0,01 mm angenommen. Man erhält:

$$b = h - 0{,}000173\,th + 0{,}20 - 0{,}46 + 0{,}01$$
$$= 720{,}00 + 0{,}75 + 0{,}20 - 0{,}46 + 0{,}01 = 720{,}50 \text{ mm}$$

Da nämlich t negativ ist, so wird das zweite Glied positiv. Die Depression im kürzeren Schenkel kommt in Abzug, weil sie der Depression im langen Schenkel entgegenwirkt.

Berechnung des Luftdruckes aus dem Barometerstande. 138 Der Luftdruck wird auf zweierlei Weise gemessen. Einmal durch die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, welche von der Erde mit jener Kraft angezogen wird, welche sie auf die Körper unter 45° Breite in Meereshöhe ausübt.

An einem Orte von anderer Breite und in einer anderen Höhe ist der Druck (das Gewicht) aller Körper, also auch der Druck einer Quecksilbersäule, in Folge verschieden grossen Werthes der Schwerkraft verschieden gross.

Ist g die Acceleration der Schwere an dem Orte, wo der Barometerstand b gemessen wurde und g_{45} die Acceleration der Schwere unter 45° Breite in Meereshöhe, so ist der Luftdruck $= b\,\frac{g}{g_{45}}$. Die Werthe von g und g_{45} sind aus der im §. 30 mitgetheilten Formel zu berechnen.

In den meisten Fällen wird der Einfluss der Veränderlichkeit der Schwere bei der Bestimmung des Luftdruckes vernachlässigt und einfach die Höhe des Barometerstandes selbst für die Höhe des Luftdruckes genommen.

Die andere schon auf Seite 472 vorläufig erwähnte Messung des Luftdruckes beruht darauf, dass man als Einheit des Druckes das Gewicht der Masseneinheit, das Kilogrammgewicht, anwendet. In dieser Einheit gemessen, hängt der Luftdruck ab von dem Flächeninhalt der gedrückten Fläche; man muss daher noch festsetzen, dass man den Druck in Kilogrammgewicht auf die Flächeneinheit (Quadratmeter oder Quadratcentimeter) ausdrücken wolle. Da eine Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und 1 qm Bodenfläche 760 Liter Quecksilber enthält, und 1 Liter derselben ein Gewicht von 13,59 kg besitzt, so ergiebt sich der Druck einer Atmosphäre per Quadratmeter zu 10 325 kg. Ganz in

derselben Weise lässt sich der Luftdruck berechnen, der irgend einem anderen Barometerstande entspricht. Man wird die in folgender Tabelle aufgeführten Resultate finden.

Höhe der Quecksilbersäule	Druck auf ein Quadratmeter	Höhe der Quecksilbersäule	Druck auf ein Quadratmeter	Höhe der Quecksilbersäule	Druck auf ein Quadratmeter
Millimeter	Kilogramme	Millimeter	Kilogramme	Millimeter	Kilogramme
500	6793	600	8152	700	9510
510	6929	610	8287	710	9646
520	7065	620	8423	720	9782
530	7201	630	8559	730	9918
540	7336	640	8695	740	10054
550	7472	650	8831	750	10189
560	7608	660	8967	760	10325
570	7744	670	9105	770	10461
580	7880	680	9338	780	10597
590	8016	690	9374	790	10733

139 **Metallbarometer.** Wenn eine aus dünnem Metallblech gebildete Röhre von abgeplattetem Querschnitt und ungefähr so gebogen, wie es Fig. 506 darstellt, überall hermetisch verschlossen ist und nur durch das Röhrchen *r* mit der äusseren Luft in Verbindung steht, so wird sich das Rohr stärker krümmen, wenn man durch das Ansatzröhrchen *r* die Luft aus dem Inneren herauszieht, es wird sich dagegen mehr strecken, wenn man die Luft im Inneren comprimirt.

Es lässt sich dies leicht zeigen, wenn man die Vorrichtung, Fig. 506, durch das Röhrchen *r* mit einer Luftpumpe in Verbindung setzt; sobald man evacuirt, nähern sich die Hörner *a* und *b*. Setzt man dagegen die Vorrichtung auf eine Compressionspumpe, so entfernen sich die Hörner von einander, wenn die Luft im Inneren verdichtet wird.

Auf diesem Principe beruht das Metallbarometer von Bourdon, welches unter dem Namen Aneroid (Holosterikbarometer) bekannt ist.

Wenn das Rohr, Fig. 506, luftleer gemacht ist, so wird seine Krümmung doch noch mit dem Luftdruck variiren, dagegen werden Aenderungen der Temperatur keinen oder nur noch geringen Einfluss haben.

Fig. 506 stellt ein möglichst einfach construirtes Aneroidbarometer dar. Die nahezu kreisförmige, luftleer gemachte Röhre ist in ihrer Mitte bei *B* auf die Bodenplatte des Gehäuses befestigt, im Uebrigen aber ist sie frei. Wenn der Luftdruck abnimmt, so entfernen sich die freien Enden *A* und *C* des Rohres von einander und bewirken dadurch mittelst

der Metallstäbchen CD und AE die Drehung eines Hebels, dessen längerer Arm mit einem gezahnten Bogen ik endet. Dieser bei abnehmendem Luftdruck nach rechts gehende gezahnte Bogen greift aber in einen Trieb ein, auf dessen Achse ein Zeiger befestigt ist, der sich nun nach der entgegengesetzten Richtung drehen muss wie ik. Wenn dagegen der Luftdruck zunimmt, so krümmt sich die Röhre stärker und die Spiralfeder h kann die Achse des Zeigers wieder zurückdrehen, so dass also die Spitze desselben sich bei wachsendem Luftdrucke nach der Rechten bewegt.

Die Scala dieses Instrumentes kann natürlich auch nur durch Vergleichung mit einem anderen Barometer graduirt werden.

Um das Rohr luftleer zu machen, verfährt man auf folgende Weise:

Fig. 505.

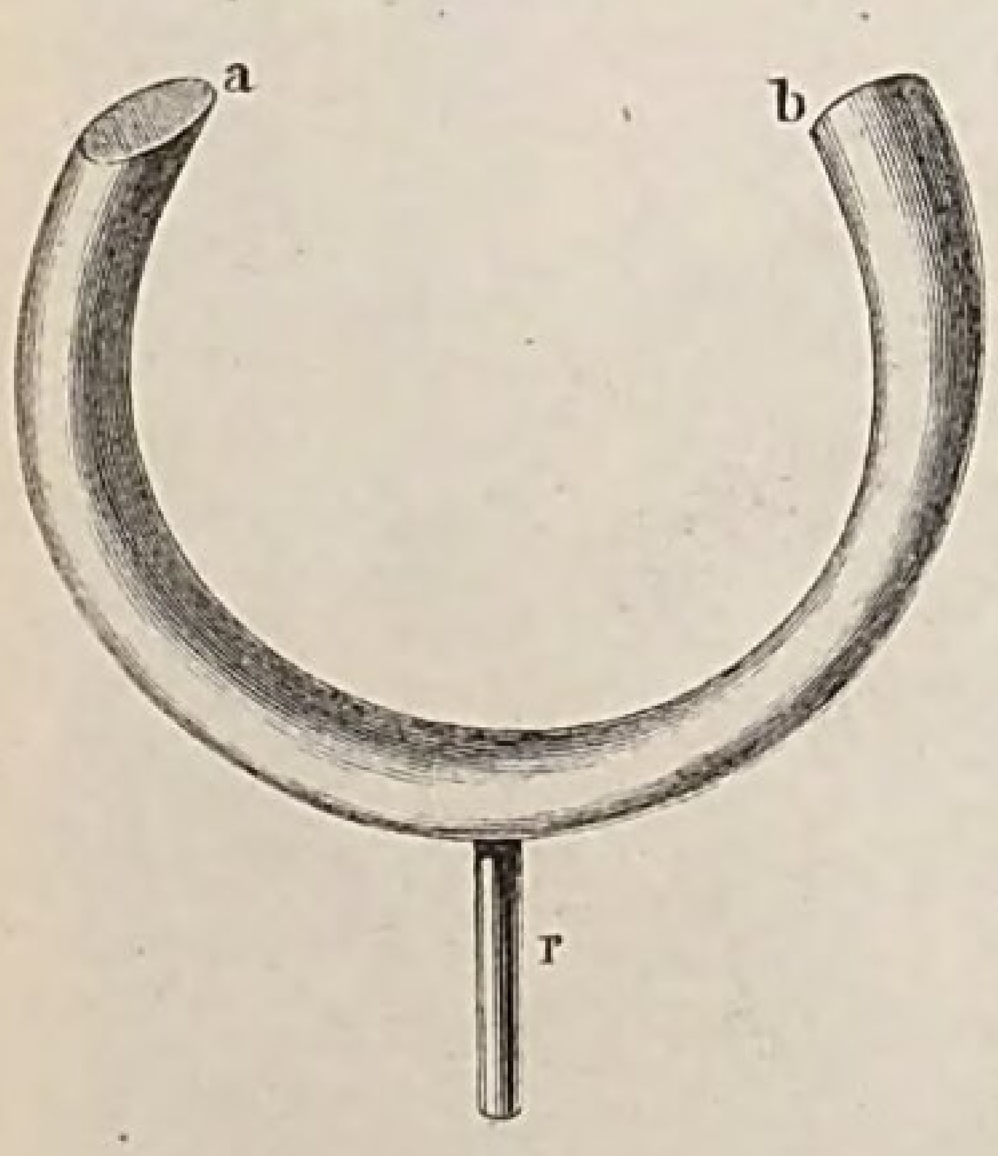
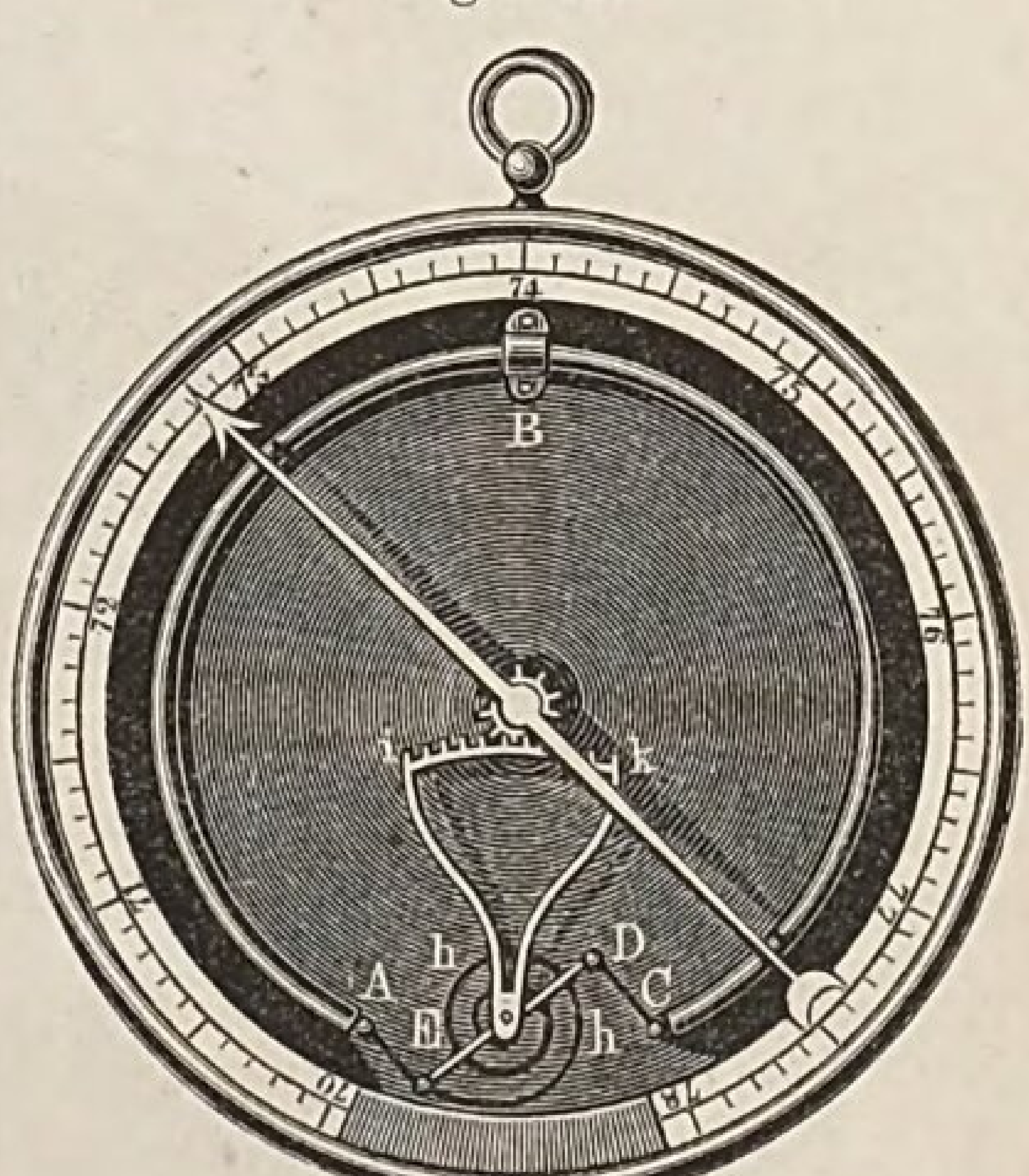


Fig. 506.



In der Art, wie es Fig. 505 zeigt, mit einem Röhrchen r von Zinn versehen, wird das gekrümmte Rohr mittelst der Luftpumpe evacuirt, und alsdann das Röhrchen r nahe an seiner Ansatzstelle fest zugedrückt, abgeschnitten und dann verlöthet.

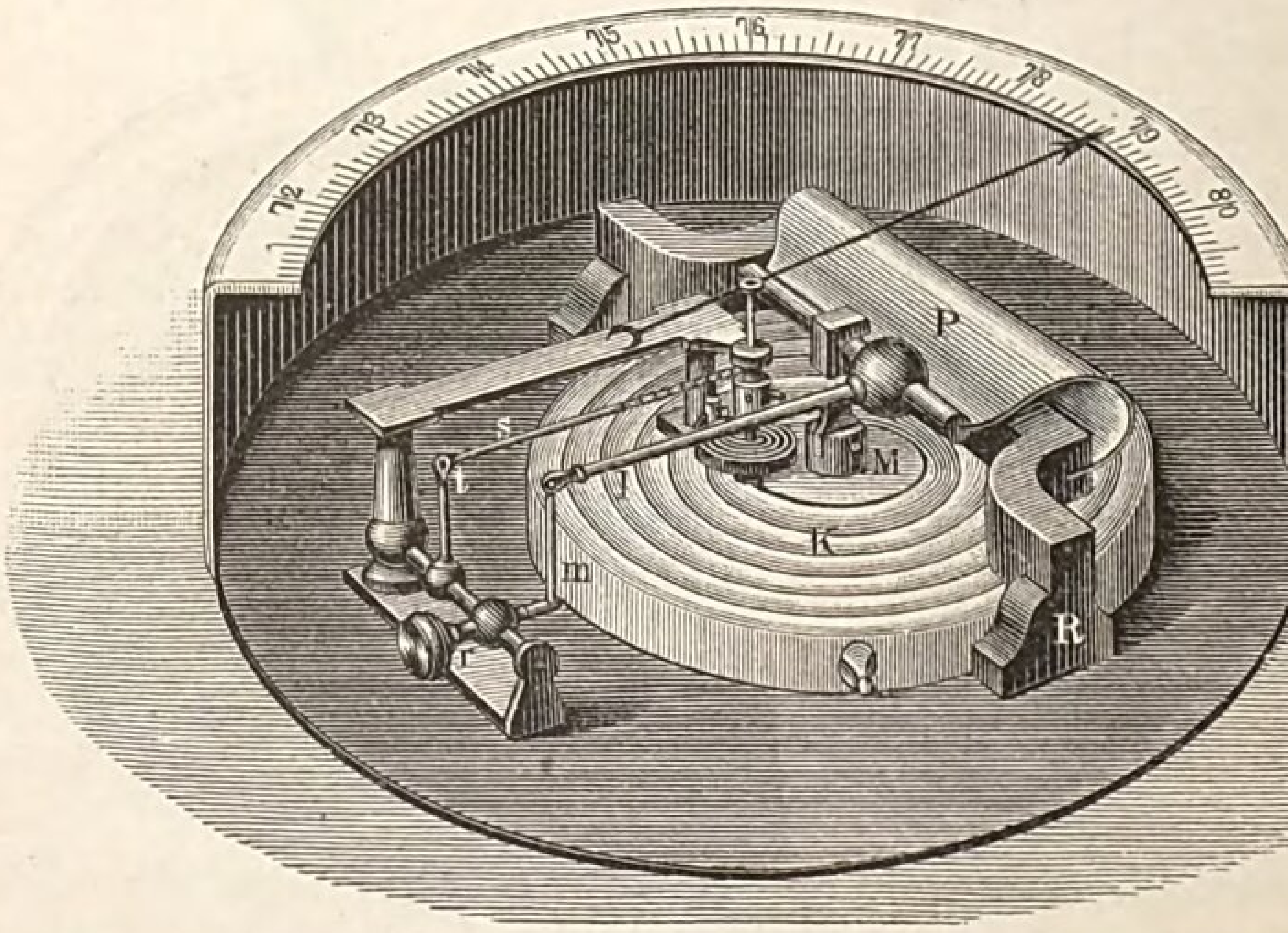
Fig. 506 stellt die Form dar, welche Bourdon dem Aneroidbarometer gegeben hat. Das ursprünglich von Vidi construirte Aneroidbarometer ist in Fig. 507 (a. f. S.) mit weggenommenem Gehäuse abgebildet. Der Hauptbestandtheil des Apparates ist die luftleere Metalldose K, deren Deckplatte zum Zwecke grösserer Beweglichkeit kreisförmig gewellt ist; die an der Bodenplatte des Apparates mittelst der Träger R befestigte starke breite Metallfeder P ist mit der Mitte des Dosendeckels bei M fest verbunden. Der Luftdruck sucht die Dose einzudrücken, die Feder P wirkt diesem Drucke entgegen. Zwischen beiden kommt es zum Gleichgewicht, wobei der Deckel desto stärker niedergedrückt bleibt, je grösser der Luftdruck ist. Aller übrige Mechanismus dient nur dazu, die Bewegungen der Mitte des Dosendeckels, beziehungsweise des Bügels P, in

geeignetem Maassstabe sichtbar zu machen. Steigt der Luftdruck, so sinkt *P*, sowie dessen Verlängerung *l*, der Hebel *mr* wird nach rechts gedreht, hierdurch die Kette *s* nach rechts hin nachgelassen, was weiterhin eine Drehung der Zeigerachse nach rechts, also ein Fortschreiten der Zeigerspitze auf der Randscala im Sinne wachsender Zahlen zur Folge hat. Eine Spiralfeder sorgt dafür, dass die Kette *s* gespannt bleibt. Sinkt der Luftdruck, so wird die Kraft der Feder *P* überwiegend, *M*, *l*, *m* rücken in die Höhe, der Hebel *rm* wird nach links gedreht, die Kette *s* nach links gezogen, folglich auch der Zeiger nach links gedreht.

Die Scala sollte so angefertigt sein, dass die Ablesung am Instrumente den Luftdruck in Millimetern Quecksilbersäule ergiebt.

Dies ist selten genau der Fall. Gewöhnlich zeigt sich eine Differenz; aber auch diese bleibt bei verschiedenem Werthe des Luftdruckes

Fig. 507.

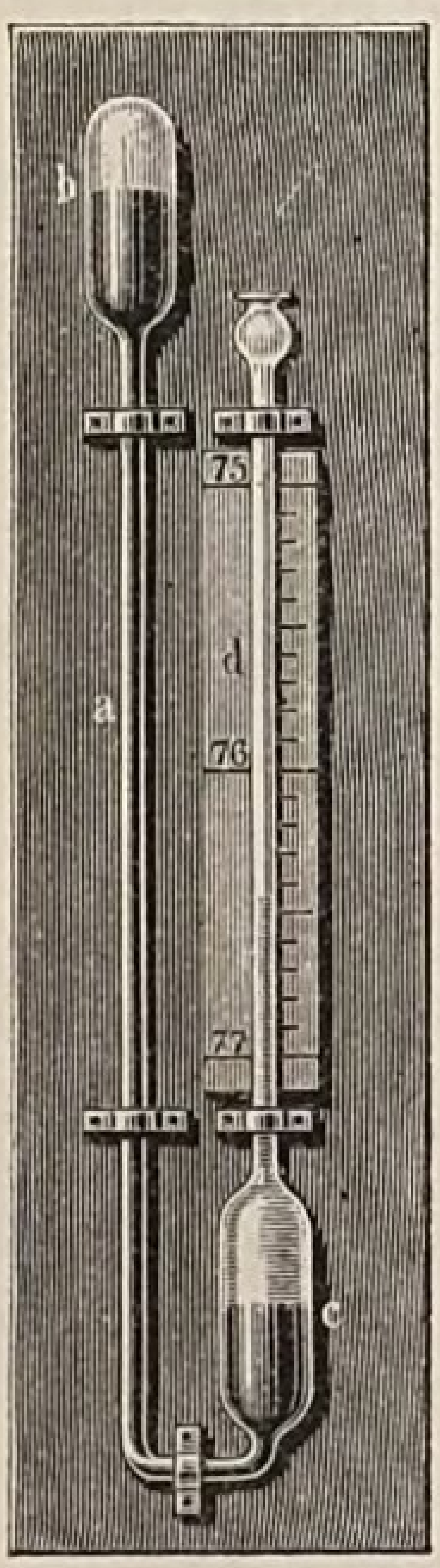


selten constant. Man muss daher jedes solche Instrument künstlich verschiedenen, genau gemessenen Drucken aussetzen und eine Reductionsscala dazu anfertigen. Aber auch die Temperatur ist nicht ganz ohne Einfluss auf diese Instrumente und deshalb noch eine specielle Correction erforderlich. Nur von einem Umstande sind diese Instrumente unabhängig im Gegensatze zum Quecksilberbarometer, nämlich von der Abnahme der Schwerkraft mit Erhebung über dem Meere oder bei Aenderung der geographischen Breite.

140 **Variationen des Barometerstandes.** Das Gewicht der atmosphärischen Luftsäule, welche sich über uns befindet, ist durch mancherlei Einflüsse bedingt. Der beständige Wechsel der Temperatur, die Winde, die veränderliche Menge der in der Luft verbreiteten Wasserdämpfe führen fortwährende Aenderungen des Luftdruckes mit sich, welcher auf

das Barometer wirkt. Man begreift demnach sehr wohl, dass die Barometersäule an einem und demselben Orte nicht stationär bleiben kann, und dass sie mehr oder weniger bedeutende Variationen erleidet. In unseren Gegenden z. B. vergeht fast kein Tag, an welchem der Barometerstand sich nicht um einige Millimeter änderte. Im Allgemeinen unterscheidet man zweierlei Arten von Schwankungen des Barometers, nämlich periodische und zufällige Schwankungen. Die ersteren treten regelmässig an bestimmten Zeiten ein und haben eine constante Grösse; die letzteren hingegen sind unregelmässig, so dass man weder ihre Zeit noch ihre Grösse voraussehen kann. Mit diesen Erscheinungen beschäftigt sich die Meteorologie.

Fig. 508.



Da die Variationen des Barometerstandes an demselben Orte nicht sehr bedeutend sind, so hat man sich viel Mühe gegeben, diese Schwankungen dem Auge merklicher zu machen. Wir wollen hier nur zwei solche Vorrichtungen betrachten, die ziemlich verbreitet sind.

Fig. 508 stellt ein von Huyghens construirtes Barometer dar. Die Barometerröhre *a* erweitert sich oben bei *b*, wo sich die Toricelli'sche Leere befindet, und unten bei *c*, wo eine Flüssigkeit von geringerem specifischem Gewicht auf das Quecksilber aufgegossen ist. Das Gefäss *c* geht in eine engere oben offene Röhre *d* über, so dass die leichtere Flüssigkeit, etwa gefärbtes Wasser oder gefärbter Weingeist, den oberen Theil von *c* und den unteren von *d* füllt.

Das Gefäss bei *b* habe gleichen Durchmesser wie das bei *c*; das Rohr bei *d* habe aber einen n mal kleineren Querschnitt. Wenn die Quecksilbersäule in *b* um x mm sinkt, so steigt der Quecksilberspiegel in *c* um eben so viel, die farbige Flüssigkeit in der Röhre *d* aber um nx mm, die Höhe der farbigen Flüssigkeit hat also um $(n - 1)\,x$ mm zugenommen. Eine $(n - 1)\,x$ mm hohe Säule dieser Flüssigkeit drückt ebenso stark wie eine $\frac{(n-1)\,x}{s}$ mm hohe Quecksilbersäule, wenn s die Zahl ist, welche angiebt, um wie vielmal das specifische Gewicht der farbigen Flüssigkeit geringer ist als das des Quecksilbers.

Wenn also das Quecksilber in *b* um x mm sinkt, so ist

$$y = 2x + \frac{n-1}{s}\,x$$

die Höhe einer Quecksilbersäule, welche der Abnahme des Luftdruckes entspricht. Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$x = \frac{sy}{2s + n - 1}.$$

Es sei z. B. der Querschnitt der Röhre *d* 20 mal kleiner als der von *b* und *c*; ferner sei die farbige Flüssigkeit Wasser, also 13,6 mal leichter als Quecksilber, so ist $n = 20$, $s = 13{,}6$ und also:

$$x = \frac{13{,}6\, y}{2 \,.\, 13{,}6 + 20 - 1} = 0{,}294\, y.$$

Fällt ein gewöhnliches Barometer um y mm, so fällt also das Quecksilber in *b* um $0{,}294\ y$.mm, die farbige Flüssigkeit in *d* steigt aber um $20 \,.\, 0{,}294\ y$, also um $5{,}88\ y$ mm. So oft also ein gewöhnliches Gefässbarometer um 1 mm steigt oder fällt, wird die farbige Flüssigkeit unseres Barometers um 5,88 mm, also fast 6 mal so viel, fallen oder steigen.

Ein solches Barometer ist sehr zweckmässig, wenn es sich nur um die Beobachtung der Barometerschwankungen und nicht um genaue Ermittelung der absoluten Barometerhöhe handelt. Die Scala, welche hinter der Röhre *d* angebracht ist, wird am besten so angefertigt, dass man einen Punkt nahe am oberen und einen nahe am unteren Ende derselben durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bestimmt und den Zwischenraum eintheilt.

Hook's Radbarometer hat folgende Einrichtung: Auf dem Quecksilber im offenen Schenkel eines Heberbarometers schwimmt ein eisernes Gewicht; von diesem Gewichte geht eine Schnur über eine Rolle, welche auf der anderen Seite durch ein etwas geringeres Gewicht gespannt ist. An der Achse der Rolle ist ein langer Zeiger befestigt, dessen Endpunkt also einen grossen Weg durchläuft, wenn das Quecksilber nur wenig steigt oder fällt und dadurch die Rolle dreht. — Zu genauen Messungen ist begreiflicher Weise auch ein solches Instrument nicht zu gebrauchen.

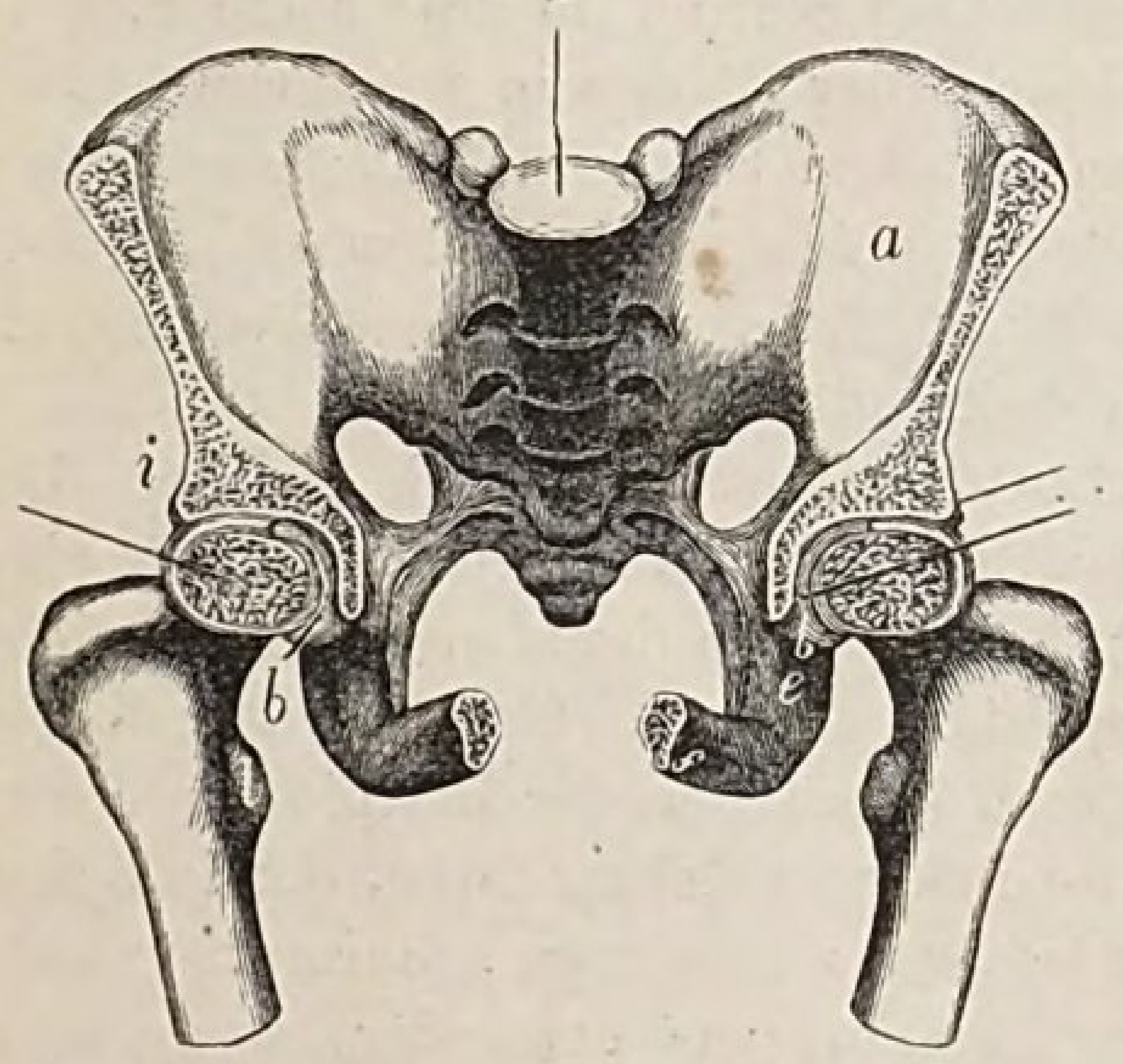
141 Wirkung des Luftdruckes auf den menschlichen Körper.

Da die Oberfläche des menschlichen Körpers bei einem Erwachsenen weit mehr als 1 qm beträgt, so ist der Totaldruck der Luft auf diese Oberfläche sehr bedeutend; er beträgt ungefähr das Gewicht von 15 000 bis 20 000 kg. Es könnte daher die Frage erhoben werden, wie so es kommt, dass der menschliche Körper unter einer solchen Last nicht erdrückt werde. Die Erklärung ist einfach diese, dass die festen, nicht hohlen Theile des Körpers, z. B. die Knochen, einen noch grösseren Druck aushalten könnten, ebenso könnten die tropfbaren Flüssigkeiten noch grösserem Drucke ausgesetzt werden, ohne merklich comprimirt zu werden. Die mit Luft angefüllten Räume endlich werden deshalb nicht eingedrückt, weil der Druck im Inneren derselben gleich gross ist, wie der von aussen.

Es bleibt demnach nur noch etwa der Zweifel zu heben übrig, ob nicht die zarten Häutchen und Gewebe, welche die Hüllen der einzelnen Gefässchen bilden, durch einen so starken Druck Noth leiden müssten. Von einem Zerreissen der zarten Gewebe kann aber keine Rede sein,

weil der Druck gleichmässig von beiden Seiten wirkt; um aber die Häutchen etwa zu zerquetschen, ist der Druck nicht stark genug. Da es sich hier nur um kleine Gefässchen handelt, so kommt auch nur der Druck in Betracht, der auf die kleine Oberfläche derselben wirkt; aus der obigen Tabelle aber kann man entnehmen, dass der Luftdruck auf eine 1 qcm grosse Oberfläche nur ungefähr einem Kilogramm entspricht, auf 1 qmm nur dem Gewichte von ungefähr 10 g gleichkommt.

Fig. 509.



Wenn man den Luftdruck von irgend einer Stelle des Körpers entweder mit Hülfe eines Schröpfkopfes oder einer Luftpumpe wegnimmt, so wird der Inhalt der Gefässchen ein Bestreben geltend machen, sich auszudehnen.

Wie wichtig der Luftdruck für die Oekonomie der Kräfte des menschlichen Körpers ist, haben die classischen Untersuchungen der Gebrüder Weber gezeigt.

Betrachtet man das Knochengerüst des menschlichen Körpers, so findet man an jeder Seite des Beckens eine spiegelglatte, mit einer schlüpfrigen Flüssigkeit benetzte Vertiefung, die Pfanne, in welche der kugelförmige Kopf des Schenkelknochens genau hineinpasst, wie man dies in Fig. 509 deutlich sehen kann, welche das Becken mit den Schenkelknochen darstellt.

Der vordere Theil des Beckens und der beiden Schenkelköpfe ist in Fig. 509 durch einen senkrechten Schnitt weggenommen, damit man besser sehen kann, wie die Schenkelköpfe in den Pfannen sitzen; da sich nun der Schenkelkopf in der Pfanne nach allen Seiten leicht drehen lässt, so begreift man, dass das Bein nach allen Seiten hin beweglich ist.

Das ganze Gelenk ist durch eine Kapselmembran eingehüllt, welche, das Becken mit dem Schenkelkopfe verbindend, an dem knöchernen Pfannenrande und am Halse des Schenkelkopfes angewachsen ist.

Wenn man auf einem Beine steht und das andere nur so viel krümmt, dass es hängt, ohne den Boden zu berühren, so kann man mit ungemein geringer Muskelanstrengung das hängende Bein hin und her schwingen lassen. Während das Bein so schwingt, sind die Muskeln, welche das Becken mit dem Schenkelbeine verbinden, ganz schlaff, und daraus schon geht hervor, dass diese Muskeln es nicht sein können, welche das schwebende Bein tragen. Die Gebrüder Weber haben dies auch durch den Versuch nachgewiesen, indem sie an einem Leichname alle Muskeln durchschnitten, welche den Schenkel mit dem Becken ver-

binden. Das frei schwebende Bein fiel nicht herab, wie es der Fall gewesen wäre, wenn es im Leben durch die Muskeln getragen würde.

Auch die Kapselmembran wurde durchschnitten, und das Bein fiel nicht herab.

Wurde dagegen durch das Becken hindurch mitten in die Pfanne ein kleines Loch gebohrt, so fiel das Bein in demselben Augenblicke herab, in welchem die Spitze des Bohrers die Pfanne eben durchbrochen hatte und den Schenkelkopf noch nicht berührte. Als der Schenkelkopf nun wieder in die Pfanne hineingeschoben wurde, so dass seine Kugelfläche wieder genau mit der Kugelfläche der Pfanne in Berührung kam, und man dann das Loch im Becken mit dem Finger zuhielt, wurde das Bein auch wieder durch den Luftdruck getragen; es fiel aber sogleich wieder herab, sobald man den Finger wieder von dem Loche wegnahm, so dass die Luft von oben eindringen konnte.

Daraus folgt also, dass der Luftdruck es ist, durch welchen das Bein am Becken festgehalten wird. Dies dürfte aber nicht in der Weise missverstanden werden, als hätte in Folge dessen der Mensch das Gewicht des gehobenen Beines überhaupt nicht zu tragen. Es ist irriger Weise versucht worden, die Ermüdung des Körpers bei der Besteigung hoher Berge auf die Verringerung des Luftdruckes zurückzuführen, der in Folge dessen die Muskeln, die das Bein tragen, weniger zu unterstützen vermöge. Es wäre dies ein ähnlicher Irrthum, wie etwa der, wenn man glaubte, man erspare sich das Gewicht eines Korbes zu tragen, wenn man diesen, statt ihn in der Hand zu halten, an das Handgelenk angebunden tragen würde. Hierdurch können offenbar nur jene Muskeln entlastet werden, welche den Zusammenhang zwischen Korb und Arm herzustellen haben, nicht aber die übrigen Muskeln, welche den Körper mit sammt dem Korbe zu tragen haben. Die Arbeitsleistung des Menschen im Ganzen ist genau dieselbe, ob er den Korb angebunden oder in der Hand trägt; also auch ob das Bein durch Muskeln oder durch Luftdruck am Körper festgehalten wird.

Wenn wir oben nachgewiesen haben, dass der Luftdruck dem menschlichen Körper keinen Schaden zufügen kann, so ist dies nicht mehr gültig für die Veränderungen des Luftdruckes, insbesondere, wenn sie rasch erfolgen. Nimmt der Luftdruck so rasch ab, dass die Luft in den Hohlräumen nicht Zeit findet, sich durch Canäle oder Poren mit der äusseren Luft ins Gleichgewicht zu setzen, so übt sie einen Druck auf die Gefässe aus, welcher Störungen des Wohlbefindens verursachen kann. Es erklären sich dadurch die Athembeschwerden bei Besteigung hoher Berge, das Hervorströmen von Blut aus Nase und Ohren bei Luftschiffern, schmerzliche Empfindungen bei Aenderungen der Witterungsverhältnisse.

Ausserdem hat die Verminderung des Luftdruckes eine ähnliche physiologische Wirkung, wie eine Verminderung des Sauerstoffgehaltes der Luft. Die Absorption des Sauerstoffs durch das Blut in der Lunge

hängt nämlich von dem Partialdrucke desselben (d. i. dem Drucke, den der Sauerstoff allein ohne den Stickstoff ausübt) ab. Dieser wird aber durch Verminderung des Totaldruckes der beiden Gase ebenfalls vermindert, so dass also in dieser Hinsicht verdünnte Luft wirkt, wie sauerstoffärmere. Hieraus erklärt sich auch die günstige Wirkung des Einathmens von in Schläuchen mitgenommenem Sauerstoffgas durch die Luftschiffer.

Auch die Luftverdichtung, welcher beispielsweise die Taucher in der Taucherglocke in grösserer Meerestiefe ausgesetzt sind, hat störenden Einfluss auf den Organismus, der um so merklicher ist, je rascher die Verdichtung erfolgt.

Das Gesetz von Boyle (Mariotte); Reduction eines Gasvolumens auf Normaldruck. 142 Wenn man ein Gas oder Gasgemisch, z. B. Luft von einem gegebenen Volumen V und einem Anfangsdruck P durch Compression oder Expansion auf ein anderes Volumen V' bringt und dafür sorgt, dass die dabei eintretenden Aenderungen der Temperatur wieder aufgehoben werden, so dass also das Gas nachher wiederum dieselbe Temperatur hat wie vorher, so gilt, wenn P' den neuen Druck des Gases bedeutet, mit sehr grosser Annäherung die Proportion:

$$V : V' = P' : P,$$

woraus auch folgt:

$$VP = V'P'.$$

Dieses Gesetz, welches zuerst von R. Boyle 1662, dann nochmals von Mariotte 1679 ausgesprochen wurde, ist bisher in Deutschland und Frankreich meist unter dem Namen Mariotte'sches Gesetz bekannt gewesen. In Worten ausgedrückt lautet es: *Bei gleicher Temperatur verhalten sich die Volumina eines Gasquantums verkehrt wie die Druckkräfte desselben; oder: So lange die Temperatur eines Gasquantums dieselbe bleibt, ist das Product aus Volumen und Druck desselben eine constante Grösse.*

Um dieses wichtige Gesetz durch den Versuch zu beweisen, nehme man eine gekrümmte cylindrische Röhre, deren kürzerer Schenkel oben geschlossen ist, während der längere Schenkel offen bleibt, Fig. 510 (a. f. S.), und welche auf einem Brett befestigt ist. Man giesse zu Anfang nur wenig Quecksilber ein, neige dann den Apparat ein wenig, damit etwas Luft aus dem kürzeren Schenkel entweicht; so kann man es leicht dahin bringen, dass das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch steht, Fig. 511 (a. f. S.). Alsdann ist die in dem geschlossenen Schenkel abgesperrte Luft genau dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt. Giesst man nun von Neuem Quecksilber in den offenen Schenkel, so wird der Druck, den die eingeschlossene Luft auszuhalten hat, vermehrt, sie wird dadurch auf einen kleineren Raum zusammengepresst. Wenn das Quecksilber

im kürzeren Schenkel bis zum Punkte *N*, Fig. 512, gestiegen ist, welcher sich in der Mitte zwischen *M* und dem Gipfel *A* der geschlossenen

Fig. 510.

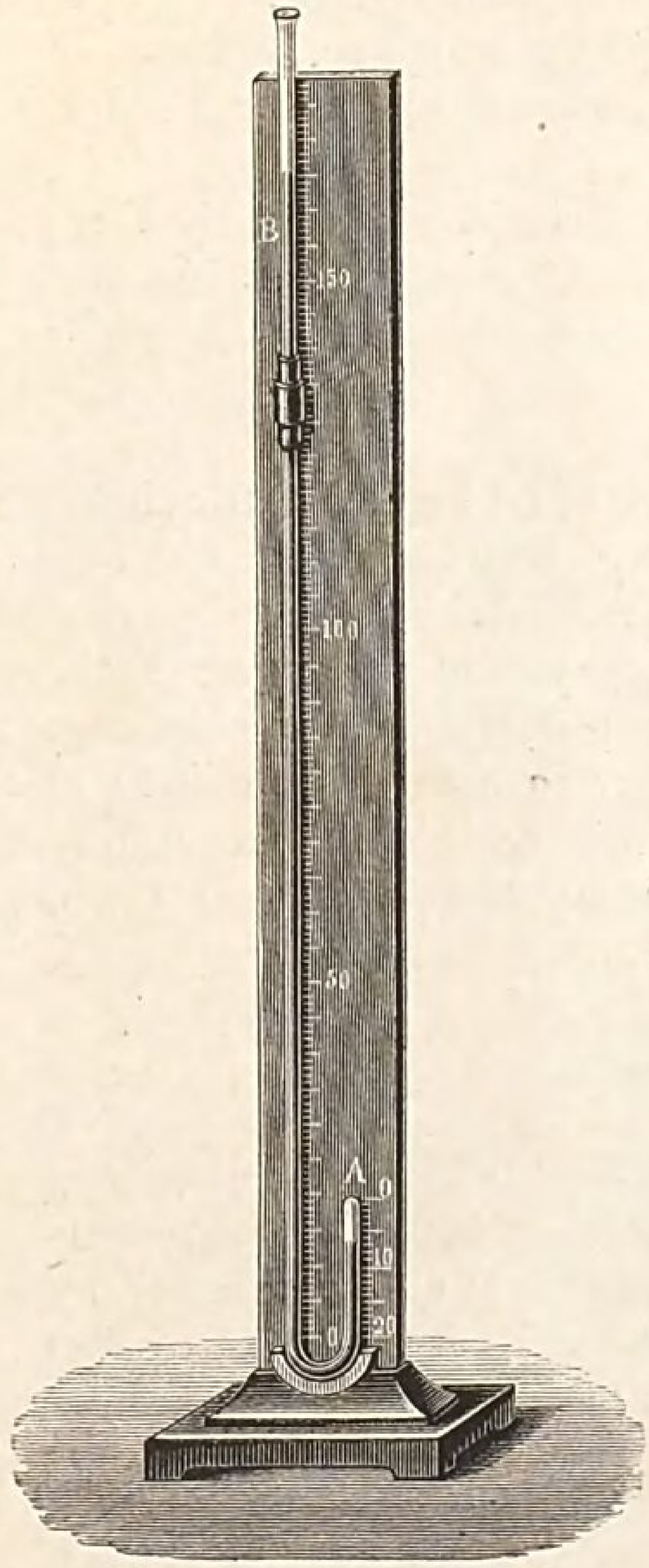


Fig. 511.

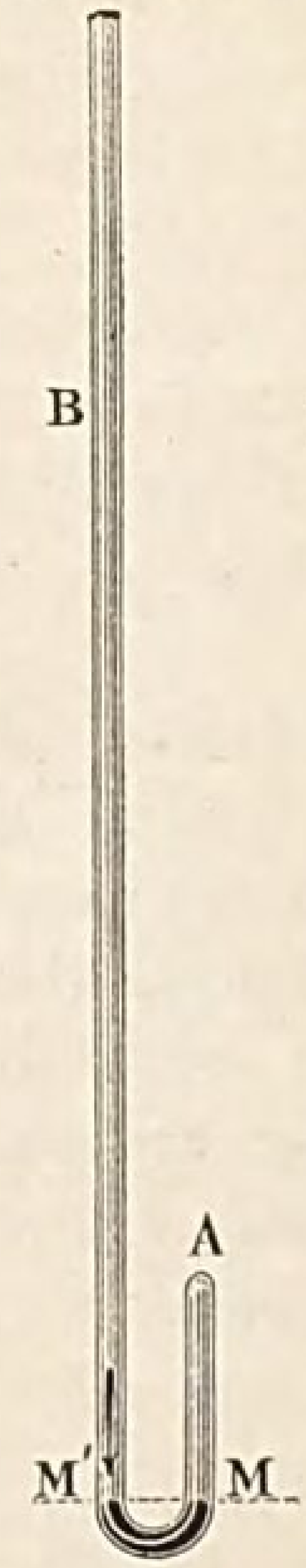
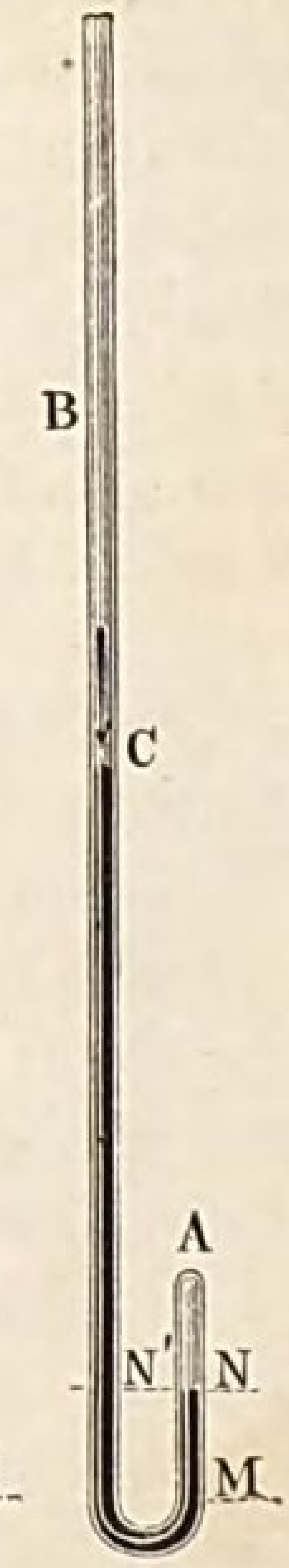


Fig. 512.



Röhre befindet, so ist die Luft auf die Hälfte ihres vorherigen Volumens zusammengepresst; bezeichnet man nun auf dem längeren Schenkel den Punkt *N'*, welcher mit *N* gleiche Höhe hat, und misst man dann, wie hoch das Quecksilber sich im längeren Schenkel noch über *N'* erhebt, so findet man, dass die Höhe dieser Quecksilbersäule genau der Barometerhöhe gleich ist; die in dem kurzen Rohre abgeschlossene Luft hat demnach jetzt einen Druck von zwei Atmosphären auszuhalten.

Solche Versuche kann man mit verschiedenen Drucken wiederholen. Stets erhält man den auf das Gas ausgeübten Druck, indem man zu der Niveaudifferenz des Quecksilbers im offenen und geschlossenen Schenkel die Höhe des Barometers addirt. Die so ermittelten Drucke werden den zugehörigen Werthen des Gasvolumens nahe verkehrt proportional sein. Die etwaigen Abweichungen sind meist Temperatureinflüssen zuzuschreiben. Es ist bequem, wenn der Apparat, Fig. 510, mit einem Hahn am Ende der geschlossenen Röhre (aus Glas oder Stahl) und mit einem ebensolchen zum Ablassen des Quecksilbers aus dem Apparate an der tiefsten Stelle versehen ist.

Um das Gesetz von Boyle auch für Drucke unter einer Atmosphäre nachzuweisen, kann man sich des Apparates Fig. 513 bedienen.

Eine etwas weite eiserne Röhre r, welche oben in ein weiteres Gefäss ab endet und unten geschlossen ist, wird in einem Gestelle, wie es

Fig. 513.

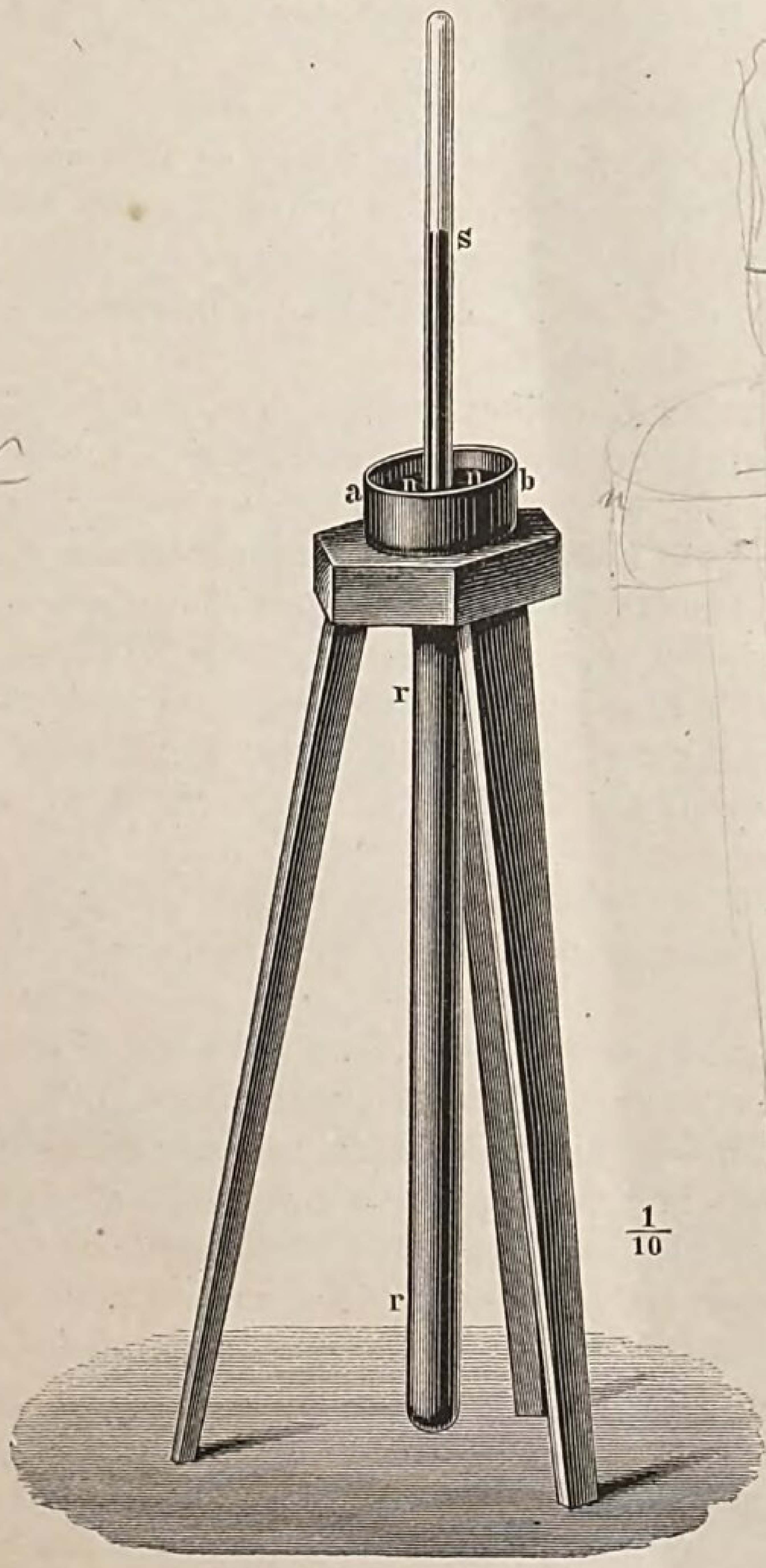


Fig. 514.

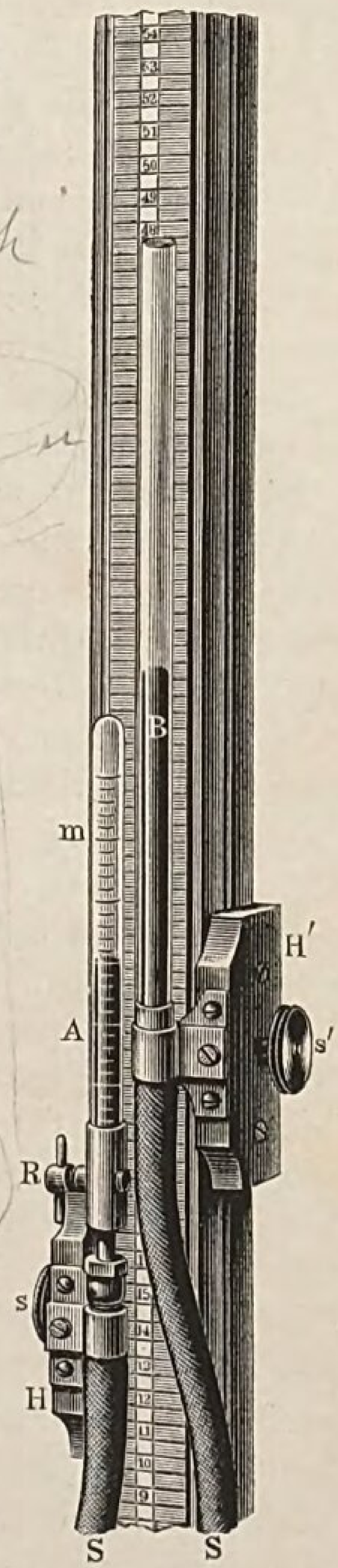


Fig. 513 zeigt, so angebracht, dass sie vertical steht, und dann ungefähr bis zur Höhe nn mit Quecksilber vollgegossen. Nun füllt man eine Barometerröhre, wie zum Toricelli'schen Versuche, mit Quecksilber, jedoch nicht ganz voll, sondern nur so weit, dass noch etwa 5 bis 7 cm nicht mit Quecksilber angefüllt sind. Kehrt man die Röhre um, nachdem man die Oeffnung mit dem Finger geschlossen hat, so wird die Luft-

blase in den oberen Theil der Röhre hinaufsteigen. Wenn man nun, wie bei dem Toricelli'schen Versuche, das untere Ende der Röhre in das Quecksilber des Gefässes ab taucht und dann den Finger von der Oeffnung wegzieht, so wird die Quecksilbersäule im Barometerrohre bis auf einen bestimmten Punkt fallen. Man wird aber sogleich bemerken, dass der Gipfel s der Quecksilbersäule nicht so hoch über nn steht, als die Barometerhöhe beträgt, weil ja im oberen Theile unserer Röhre sich Luft befindet und kein Vacuum wie beim Barometer.

Wenn man die Röhre niederdrückt, so dass sie weiter und weiter in das Quecksilber des Rohres r hinabreicht, so wird das Volumen der oben eingeschlossenen Luft immer kleiner. Man drückt nun die Röhre so weit hinab, dass das Quecksilber in derselben genau in der Höhe des Quecksilberspiegels nn steht; in diesem Falle steht die abgesperrte Luft genau unter dem Drucke einer Atmosphäre.

Die Länge der abgesperrten Luftsäule, welche dem Drucke einer Atmosphäre ausgesetzt ist, wird nun gemessen; sie sei gleich V.

Zieht man nun das Glasrohr wieder in die Höhe, wobei man möglichst vermeidet, die abgesperrte Luft durch Berührung mit der Hand zu erwärmen, so vermehrt sich das Volumen derselben und gleichzeitig erhebt sich die Quecksilberkuppe um eine gewisse Höhe h über den Spiegel nn. Der Druck, unter dem jetzt die Luft steht, ist gleich dem Luftdruck weniger dem Drucke der Quecksilbersäule h. Bezeichnen wir das zugehörige Volumen der Luft mit V', den Luftdruck mit H, so muss der Versuch bestätigen, dass

$$V : V' = H - h : H,$$

denselben Versuch kann man dann bei verschiedenen Erhebungen des Rohres wiederholen.

Die beiden Apparate, Fig. 510 und Fig. 513, sind mit Vortheil ersetzbar durch den in Fig. 514 (a. v. S.) abgebildeten Apparat. Derselbe besteht aus einer Säule mit Dreifuss, welche an der Vorderseite einen Maassstab, der nach Millimetern getheilt ist, trägt. Ein einfacher Mechanismus gestattet zwei Träger vertical zu verschieben und nach Bedürfniss festzustellen, an welche zwei kurze stählerne Rohrstücke angeschraubt sind.

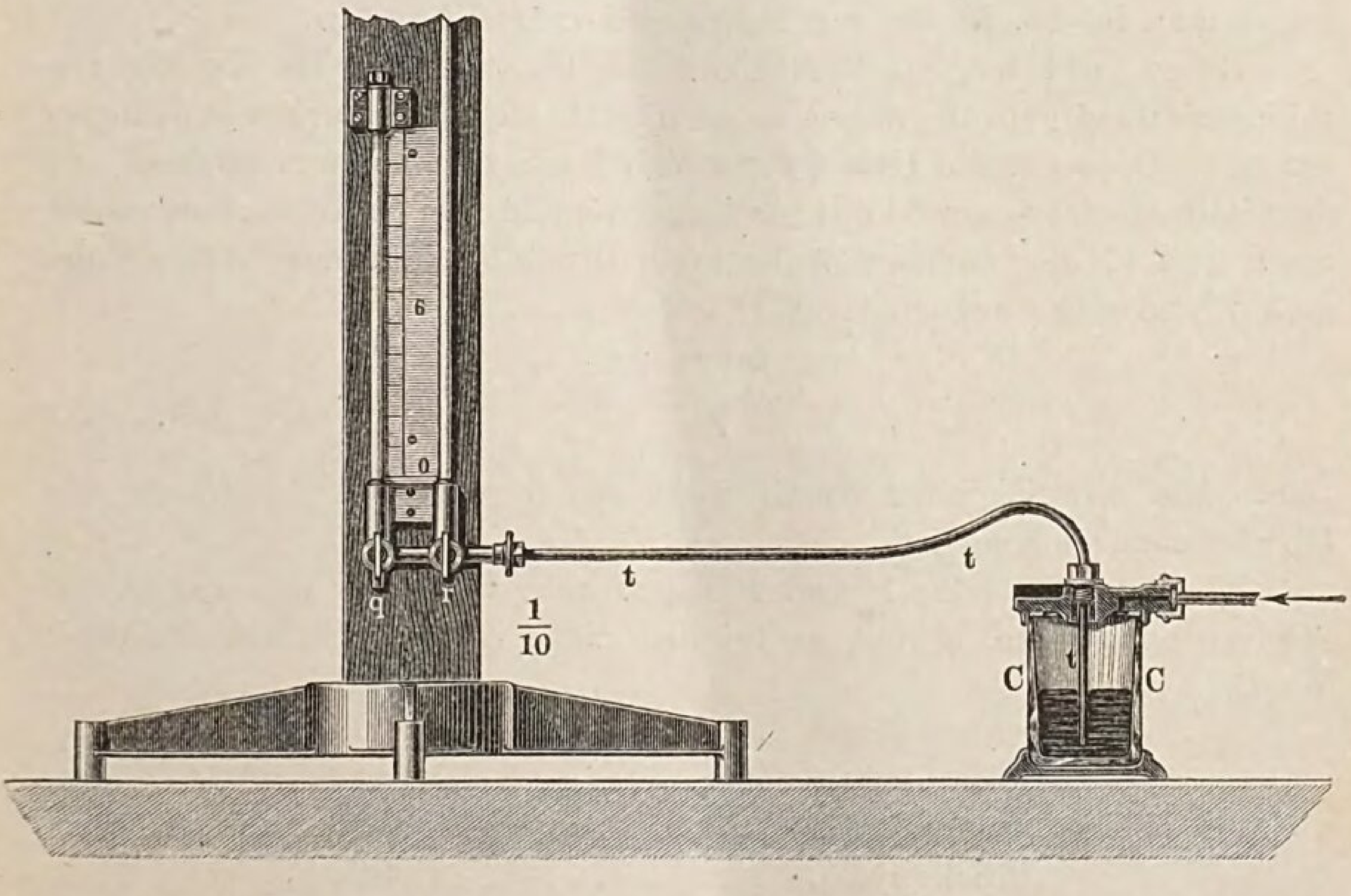
In das rechtsseitige dieser Rohrstücke ist von oben eine offene Glasröhre B eingekittet, von unten ein Kautschukschlauch S angebunden. Das andere Rohrstück ist unten mit dem anderen Ende desselben Schlauches verbunden; oben trägt es mittelst konischen Ansatzes und Ueberwurfschraube u ein mit Hahn R versehenes Stahlrohr, in welches ein oben geschlossenes mit Volumenscala versehenes Glasrohr A eingekittet ist. Man füllt das Glasrohr A beiläufig zur Hälfte mit Luft, zur anderen Hälfte mit Quecksilber, befestigt die Ueberwurfschraube auf dem mit Quecksilber angefüllten Schlauche und giebt nun zunächst den beiden Trägern eine solche Höhe, dass das Niveau beider Quecksilberkuppen gleich hoch steht. Das abgelesene Luftvolumen V entspricht dann dem Atmosphärendrucke H. Hebt man dann die Röhre B oder senkt die-

selbe, so erhält man eine Druckdifferenz des Quecksilbers h' respective — h'', wobei wir einen Ueberdruck auf der rechten Seite positiv bezeichnen. Sind die dabei abgelesenen Volumina V' und V'', so muss sich bestätigen, dass

$$V : V' = H + h' : H$$
$$V : V'' = H - h'' : H.$$

Ersetzt man die rechtsseitige Glasröhre durch eine oben mit Stahlhahn oder Glashahn versehene um 760 mm längere Röhre, so kann man den Luftdruck H durch den Druck einer äquivalenten Quecksilbersäule ersetzen. Man senkt zu diesem Zwecke das Rohr B, bis alle Luft aus demselben durch den geöffneten Hahn vollständig entwichen ist, verschliesst dann den Hahn und verfährt wie früher. Man beobachtet dann

Fig. 515.



direct die Ueberhöhen $H + h'$ und $H - h''$. Das Rohr B spielt dabei offenbar die Rolle des Barometers. Für genauere Versuche müsste es freilich auch wie dieses ganz luftfrei gefüllt werden.

Um das Gesetz von Boyle für Drucke zu prüfen, welche zwei Atmosphären übersteigen, muss man sich stärkerer Apparate und höherer Manometer bedienen. Fig. 515 zeigt die Abbildung eines solchen, wie er in der mechanischen Werkstätte zu Genf construirt wurde. $C\,C$ ist ein starkes Glasgefäss, welches oben luftdicht geschlossen und zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt ist. Die Röhre t geht fast auf den Boden des Druckgefässes C, in welchem sich über dem Quecksilber Wasser oder Luft befindet. Wird nun durch die Druckpumpe einer kleinen hydraulischen Presse ferner Wasser oder mit einer Luftcompressionspumpe ferner Luft

in C eingepumpt, so wird das Quecksilber durch die Röhre t gleichzeitig in die Manometerröhre und die Druckröhre hinübergepresst, in welcher es auf diese Weise gleichförmig steigt.

Arago und Dulong haben durch eine besondere Versuchsreihe dargethan, dass das Boyle'sche Gesetz wenigstens für atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären noch keine erhebliche Aenderung erleidet. Die aus 13 sechsfüssigen Glasröhren mittelst eiserner Fassungen zusammengesetzte Druckröhre ihres Apparates war an einem Mastbaume befestigt, welcher in einem Thurme des Collège Henri IV. aufgerichtet worden war. Der kurze Schenkel war 1,7 m lang und 5 mm weit. Das Quecksilber wurde durch eine Druckpumpe in die beiden Röhren in ähnlicher Weise eingepresst, wie wir es oben beim Genfer Apparat gesehen haben. Eine genaue Beschreibung des Apparates von Arago und Dulong, sowie der mit demselben angestellten Versuche findet man im 18. Bande von Poggendorff's Annalen.

Régnault hat die Richtigkeit des Gesetzes von Boyle für verschiedene Gase geprüft, indem er ermittelte, welchen Druckes es bedurfte, um diese Gase auf die Hälfte ihres Volumens zusammenzudrücken. Ist der Anfangsdruck und das Anfangsvolumen des untersuchten Gases $= P$ und V, der nachher beobachtete Druck P', das zugehörige Volumen V', so sollte der Quotient

$$\frac{PV}{P'V'} = 1$$

sein. Ein abweichender Werth zeigt an, in wie weit das Gesetz von Boyle unzureichend ist.

Als Régnault für P und P' die Drucke von einer und zwei Atmosphären anwendete, erhielt er für das obige Zahlenverhältniss folgende Werthe:

Wasserstoff	0,999
Stickstoff	1,001
Sauerstoff	1,002
Stickoxyd	1,003
Kohlenoxyd	1,003
Grubengas	1,006
Stickoxydul	1,007
Kohlensäure	1,008
Chlorwasserstoff	1,009
Schwefelwasserstoff	1,011
Ammoniak	1,019
Schweflige Säure	1,021
Cyangas	1,024

Diese Tabelle lässt erkennen, dass wenigstens die ersteren dieser Gase bei gewöhnlicher Temperatur und mässiger Drucksteigerung dem Gesetze von Boyle so genau unterworfen sind, dass dasselbe in den

meisten Fällen als gültig angenommen werden kann. Für höhere Drucke und niedrigere Temperaturen ist dies, wie wir später erfahren werden, nicht mehr der Fall.

Aus dem oben Mitgetheilten folgt, dass die Messung eines Gasvolumens nur dann einen mit anderen Messungen dieser Art vergleichbaren Werth ergeben kann, wenn dabei derselbe Druck geherrscht hat. Man ist übereingekommen, alle Gasmessungen auf den Druck von 760 mm Quecksilber als Normaldruck zu beziehen, und wenn sie bei anderem Drucke gemacht sind, auf diesen Normaldruck zu reduciren. Unter Annahme der Gültigkeit des Gesetzes von Boyle geschieht dies einfach in folgender Weise:

Ist V das beim Drucke H gemessene Volumen (wobei H in Millimetern angegeben ist), so ist das Volumen V_n beim Normaldruck 760 gegeben durch:

$$V_n = V \cdot \frac{H}{760}.$$

Eine Gasmenge nehme z. B. unter einem Drucke von 500 mm das Volumen von 84 ccm ein, so würde dieselbe Gasmenge unter einem Drucke von 760 mm das Volumen

$$V = \frac{500}{760} \cdot 84 = 55{,}2, \text{ ccm}$$

einnehmen.

Da das Volumen der Gase auch von ihrer Temperatur abhängig ist, so sind auch in dieser Beziehung Reductionen nöthig, die aber erst später bei der Wärmelehre erörtert werden können.

Manometer. Apparate, welche dazu dienen, den Druck von Gasen 143
oder Dämpfen zu messen, welche in einem Raume eingeschlossen sind, heissen Manometer. Es giebt deren nach verschiedenen Systemen.

In Fällen, wo der zu messende Druck sehr gering ist, wendet man für den fraglichen Zweck Flüssigkeitssäulen an, welche in doppelt gebogenen Röhren, Fig. 516 (a. f. S.), enthalten sind. Das eine Ende a des Manometerrohres wird mittelst eines Korkes in eine entsprechende Oeffnung des Gasbehälters eingesetzt, oder mittelst einer Messingfassung auf dieselbe aufgeschraubt. Ist nun der Druck des Gases auf den Gipfel der Flüssigkeitssäule im Schenkel bc grösser als der Druck der atmosphärischen Luft, welcher auf die Flüssigkeitssäule in dc wirkt, so muss die Flüssigkeit im äusseren Schenkel cd höher stehen als im inneren.

Solche Manometer wendet man zur Messung des Druckes an, unter welchem das Gas in den Gasometern und Leitungsröhren der Gasbeleuchtungsanstalten steht. Als Sperrungsflüssigkeit dient in diesem Falle gefärbtes Wasser. Fig. 517 und 518 (a. f. S.) zeigen etwas andere Formen des offenen Hebermanometers.

Ganz ähnlich sind die Manometer construirt, durch welche der Luftdruck in Gebläsen gemessen wird und welche den Namen der Windmesser führen.

Zu diesen Manometern können wir auch die Welter'schen Sicherheitsröhren rechnen, welche Fig. 519 und Fig. 520, in zwei verschiedenen Formen dargestellt sind. Durch den Kork, welcher das Glasgefäss, Fig. 519, verschliesst, in welchem ein Gas entwickelt werden soll, gehen zwei Röhren hindurch. Die eine, nicht weiter in das Gefäss hinunterführend, ist die Abzugsröhre für das entwickelte Gas, die andere, bis in die Flüssigkeit hinunterreichend, ist die Sicherheitsröhre. Soll das Gas ausströmen, so muss der Gasdruck im Inneren des Glasgefässes grösser sein als der Druck der äusseren Luft, die Flüssigkeit wird also in der Sicherheitsröhre in die Höhe getrieben, und aus der Höhe der in derselben stehenden Flüssigkeitssäule erkennt man die Grösse des Ueberdruckes im Inneren des Gefässes. In gleicher Weise kann man die Grösse

Fig. 516.

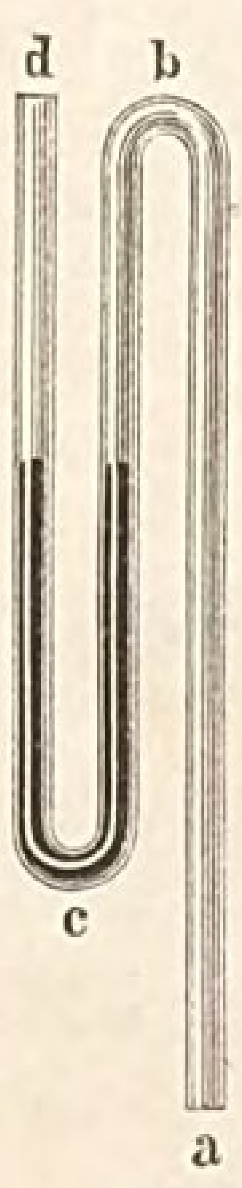


Fig. 517.



Fig. 518.

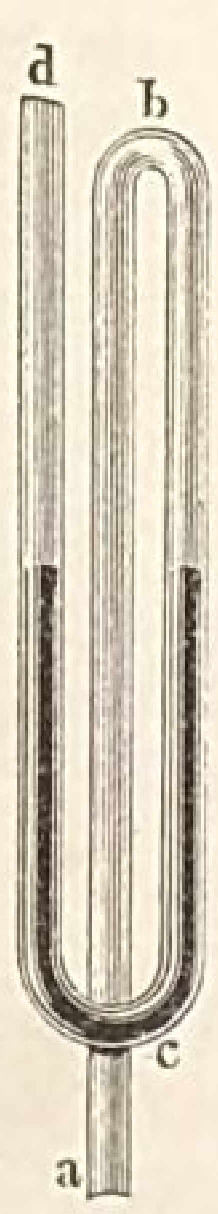


Fig. 519.

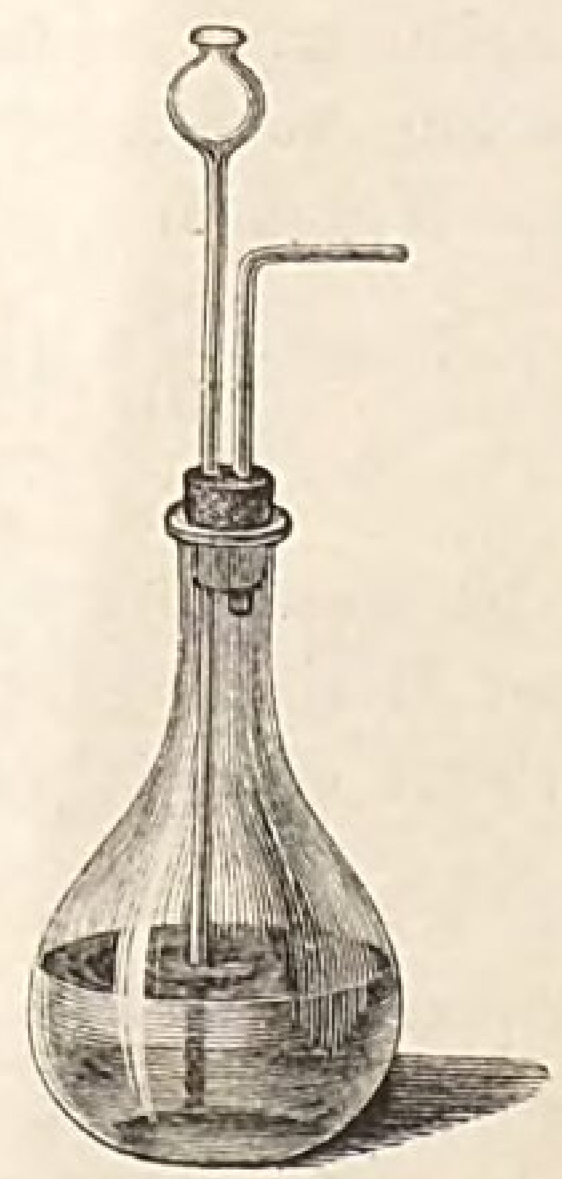
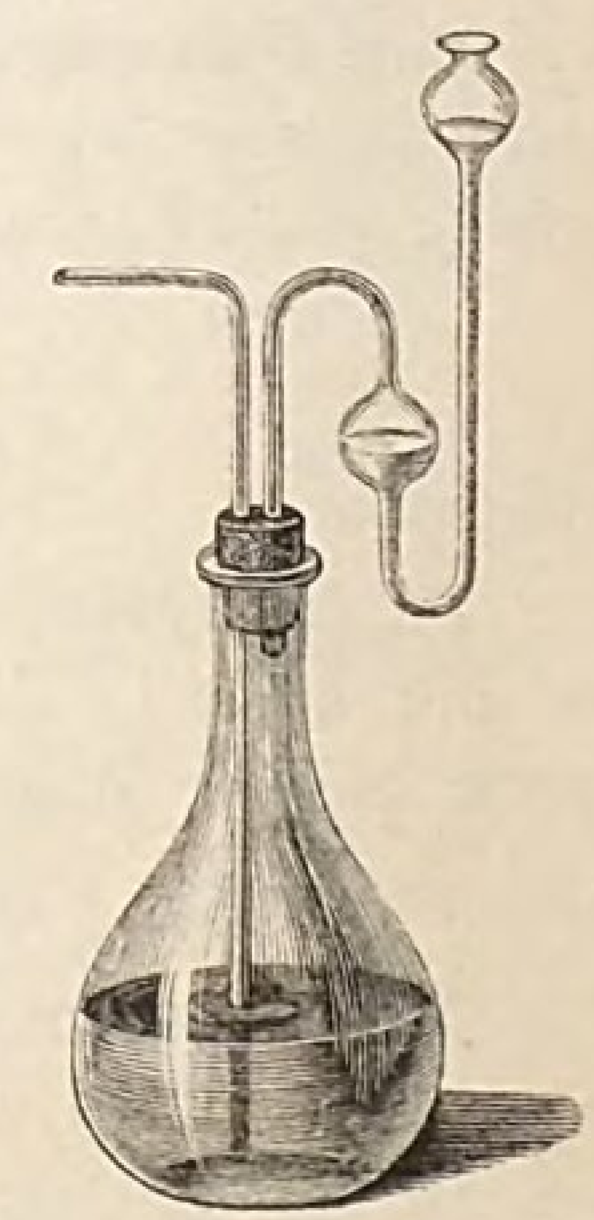


Fig. 520.



des Gasdruckes im Gefäss Fig. 520 aus der Niveaudifferenz der Sperrflüssigkeit in der doppelt gebogenen Röhre erkennen.

Für höhere Drucke wird das Quecksilbermanometer verwendet. Régnault hatte ein solches von über 23 m Höhe angewendet, welches aus mehreren durch Stahlfassungen zusammengeschraubten Glasröhren bestand. Ein eigener Fahrstuhl, den der Beobachter selbst mittelst eines Mechanismus auf und nieder bewegen konnte, ermöglichte die Ablesungen in verschiedener Höhe. Noch viel weiter gelangten Amagat und Cailletet, welche in stählernen Röhren, die sie theils an Berglehnen hinaufführten, theils in Schachte versenkten, Quecksilbersäulen bis zu 325 m Höhe anwendeten, womit Drucke bis zu 430 Atmosphären gemessen werden konnten. Wir kommen darauf in einem der nächsten Paragraphen zu sprechen.

Fig. 521.

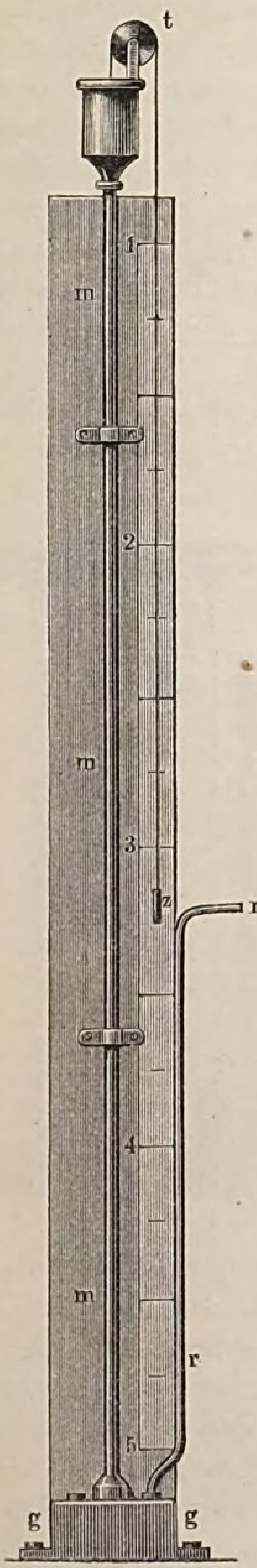


Fig. 522.

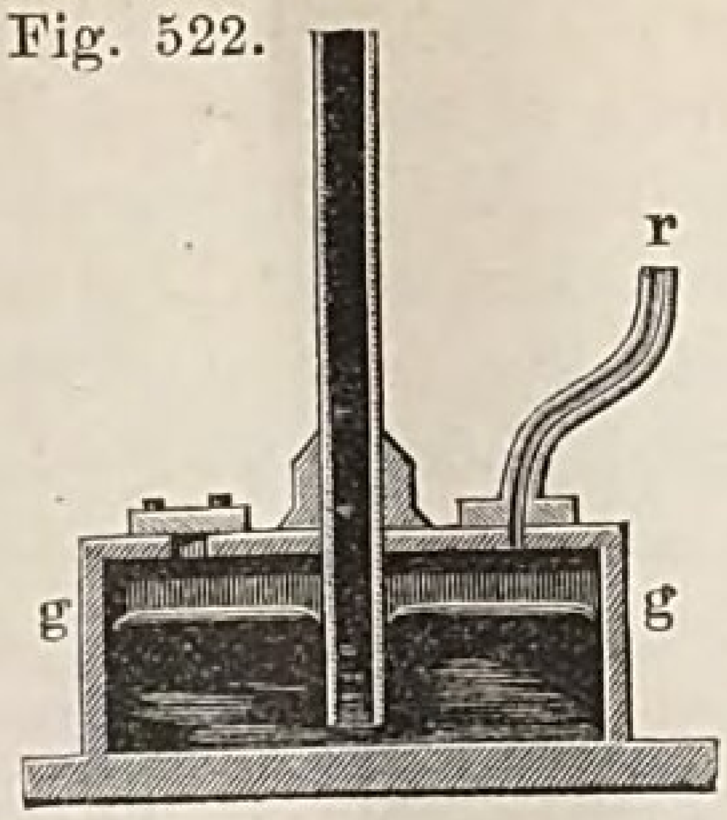


Fig. 523.

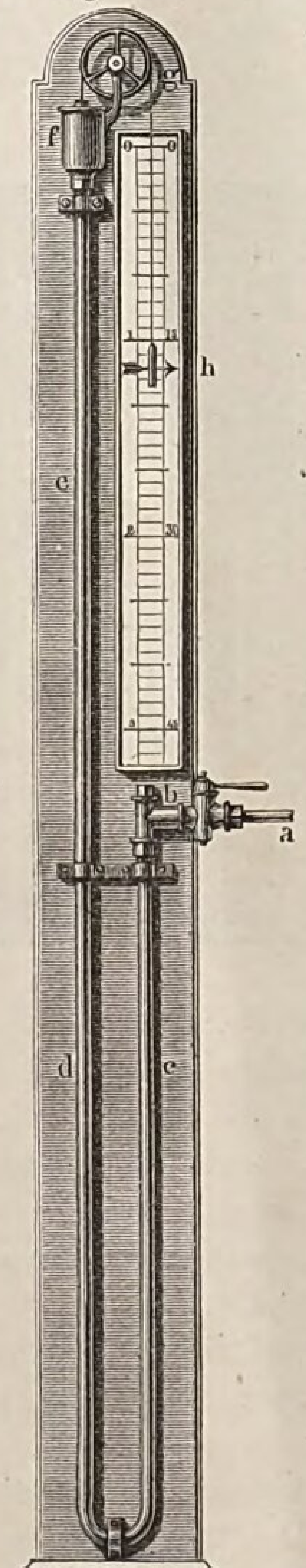


Fig. 521 und 522 zeigen die Einrichtung eines Quecksilbermanometers mit eiserner Röhre, wie es bei stationären Dampfmaschinen manchmal angewendet wird. Der untere Theil des eisernen Gefässes *gg* ist mit Quecksilber gefüllt, wie Fig. 522 zeigt; die Röhre *r* communicirt mit dem Raume, dessen Spannung gemessen werden soll. Die Höhe der Quecksilberkuppe in der undurchsichtigen Röhre *mm* wird mittelst eines eisernen Schwimmers ermittelt, welcher durch sein Steigen und Sinken das Gegengewicht *z* zum Sinken und Steigen bringt. Die verticale Scala enthält eine Eintheilung nach Atmosphären oder nach Kilogrammen per Quadratcentimeter. Statt des Gefässmanometers, Fig. 521, kann auch ein Hebermanometer, Fig. 523, benutzt werden.

Ein neuerdings von M. Thiesen*) wieder aufgegriffener Gedanke, welcher darauf ausgeht, die hohe Quecksilbersäule in eine Anzahl kleinerer zu zerlegen, ist durch die schematisch im Durchschnitt gezeichnete Fig. 524 (a. f. S.)

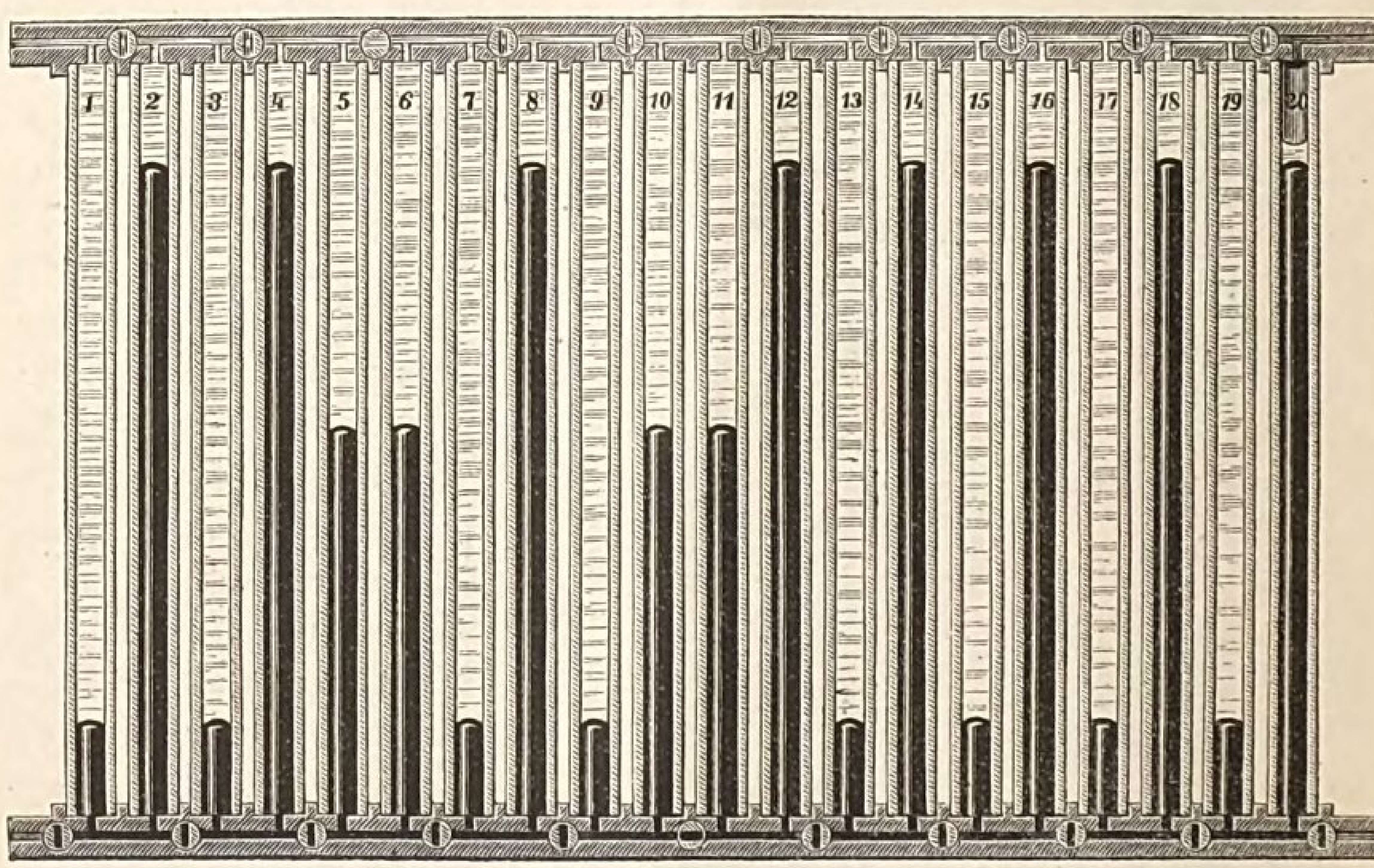
*) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881.

verständlich gemacht. In zwei horizontale Stahlröhren ist eine Reihe von verticalen Glasröhren in der ersichtlichen Weise eingesetzt. Eine Anzahl von Hähnen gestattet oben die Communication zwischen den Röhren 1 und 2, 3 und 4 etc., unten zwischen den Röhren 2 und 3, 4 und 5 etc. herzustellen oder aufzuheben. Der Apparat wird zur Hälfte mit Quecksilber, zur anderen Hälfte mit Wasser gefüllt. Das linksseitige Ende der oberen Stahlröhre wird mit dem Raume, in dem der Druck gemessen werden soll, verbunden.

Der Gesammtdruck setzt sich dann zusammen aus der Summe der Ueberhöhen der Quecksilbersäulen weniger der Summe der auf Quecksilber reducirten Ueberhöhen der Wassersäulen.

Ist der Druck so gering, dass man nicht alle Partialdrucke benöthigt, so kann man einzelne Manometer ganz ausschalten, indem man die be-

Fig. 524.



treffenden Hähne öffnet. So z. B. erscheint in der Figur der Hahn oben zwischen 5 und 6, unten zwischen 10 und 11 geöffnet. Dadurch gleicht sich der Niveauunterschied in den zur Verbindung gebrachten Röhren aus, während er in den übrigen entsprechend grösser wird. Sind sämmtliche Röhren gleicher Dimension, so braucht nur an den letzten beiden die Beobachtung gemacht zu werden, der dort gemessene Druck ist einfach mit der Zahl der Röhrenpaare zu multipliciren. In diesem Falle könnten auch die Röhren bis auf die beiden letzten aus Stahl angefertigt sein. An Genauigkeit wird aber dieses Manometer dem einschenkligen stets nachstehen müssen.

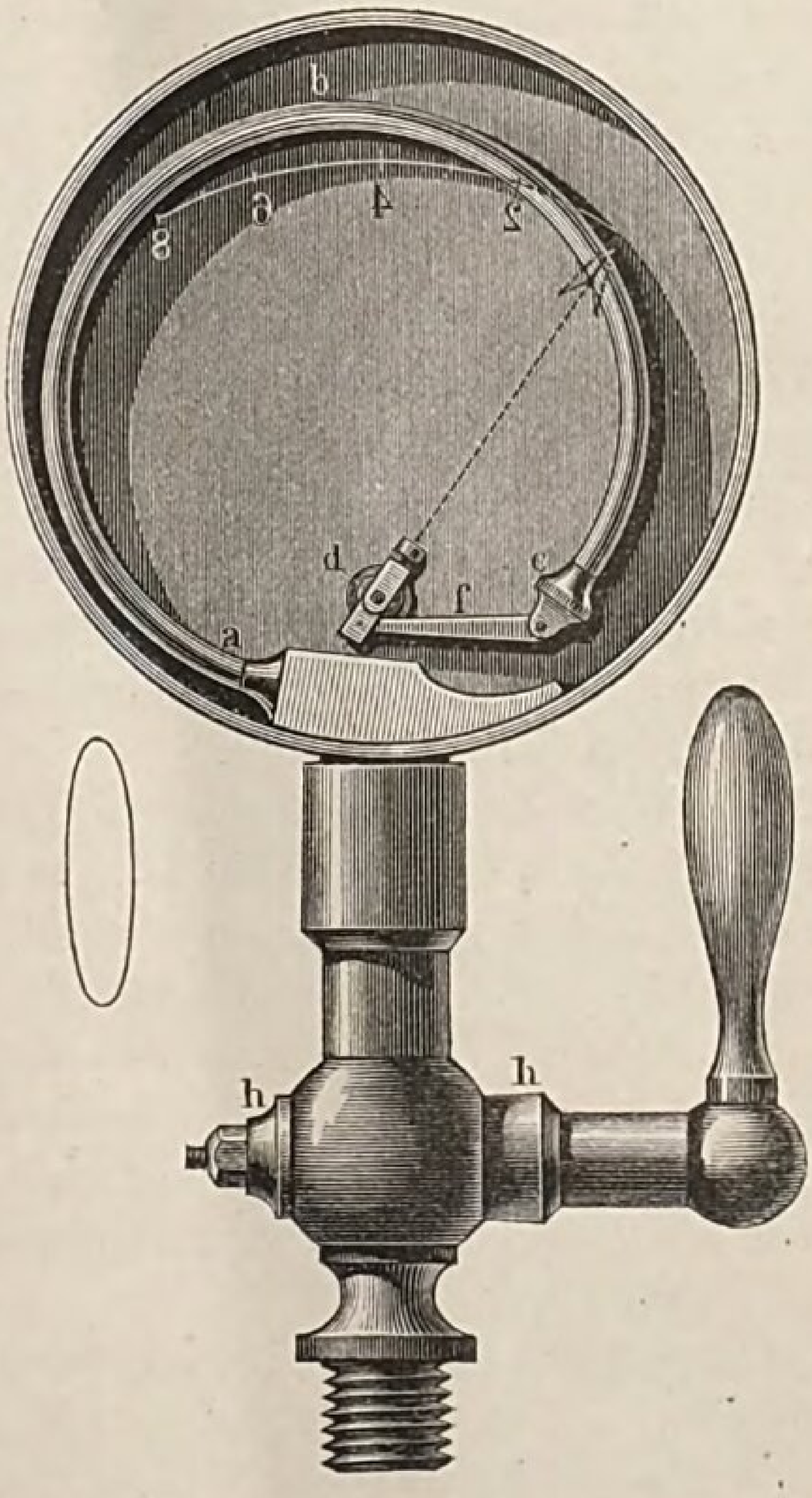
Alle Manometer, die wir bisher betrachtet haben, sind auf der einen Seite offen, so dass hier der Druck der Atmosphäre wirken kann. Man hat aber auch noch andere Manometer, bei denen das Quecksilber nicht

in eine oben offene, sondern in eine oben verschlossene Röhre hineingetrieben wird, so dass der hervorgebrachte Druck vorzugsweise durch die Compression der in der Röhre abgesperrten Luft gemessen wird. Einen derartigen Apparat haben wir schon Seite 474 kennen gelernt. Fig. 525 zeigt einen auf demselben Principe beruhenden Apparat, wie er auf Dampfkesseln oder Dampfleitungen aufgeschraubt werden kann. Durch den Canal *a* verbreitet sich der Dampfdruck in den von allen Seiten luftdicht verschlossenen Raum *b*. In demselben steht, auf dem Boden befestigt, ein eisernes zum Theil mit Quecksilber gefülltes Gefäss

Fig. 525.



Fig. 526.



und in dieses taucht eine mit Luft gefüllte Glasröhre ein. Der Druck des Dampfes treibt das Quecksilber in das Rohr, wodurch die eingeschlossene Luft comprimirt wird. Wenn sie auf $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ etc. ihres ursprünglichen Volumens comprimirt ist, so übt sie einen Druck von 2, 4, 8 etc. Atmosphären auf den Gipfel der Quecksilbersäule aus.

Um das Compressionsrohr besser zu schützen, ist es meist von einem mit zwei diametral gegenüberliegenden 4 bis 5 mm breiten Schlitzen versehenen Metallrohr umgeben, auf welchem auch die Scala angebracht ist.

Wenn die Röhren solcher Compressionsmanometer cylindrisch sind, so werden natürlich die Abtheilungen der Scala, welche gleichen

Druckdifferenzen entsprechen, nach oben hin sehr rasch abnehmen. Um dies zu verhindern, macht man die Röhren oft von unten nach oben verjüngt, ganz oben aber in eine kugelförmige Erweiterung auslaufend.

Endlich werden jetzt häufig Manometer ohne Quecksilber nach dem Principe des Bourdon'schen Metallbarometers angewendet. Fig. 526 (a. v. S.) zeigt ein solches Instrument, dessen Einrichtung nach dem, was wir im §. 139 vorgetragen, wohl keiner weitläufigen Erklärung bedarf.

Die dünnwandige Röhre *abc* ist von elliptischem Querschnitt; ihre grosse Achse beträgt ungefähr 11, ihre kleine Achse beträgt 4 mm. Sie befindet sich in einem Gehäuse, welches in Fig. 526 von der gewöhnlich durch eine Metallplatte geschlossenen Rückseite aus sichtbar ist. Wenn der Apparat auf einem Dampfkessel aufgeschraubt ist und der Dampf durch den geöffneten Hahn *h* in das Rohr *abc* eindringt, so wird es durch den Druck des Dampfes mehr gestreckt, das Ende *c* wird nach der rechten Seite hin bewegt und dadurch mittelst des Eisenstäbchens *f* ein um den Zapfen *d* drehbarer Hebel in Bewegung gesetzt. Das Stäbchen *f* greift an dem kürzeren Arme dieses Hebels an, während der längere Arm desselben durch einen Zeiger gebildet wird, welcher sich auf der dem Beschauer der Figur abgewendeten Seite des Gehäuses befindet. Je mehr das Ende *c* der Röhre *abc* durch den Druck des eingeschlossenen Dampfes nach der rechten Seite hin bewegt wird, desto weiter bewegt sich die Spitze dieses Zeigers über eine empirische Scala hin nach der entgegengesetzten Seite.

Dieses Manometer hat den grossen Vorzug, dass es nicht zerbrechlich und dabei leicht transportabel ist. In der That wird es auf Locomotiven und Locomobilen vielfach angewandt.

Auch das dem Metallbarometer von Vidi zu Grunde liegende Princip ist zu manometrischen Messungen verwendet worden. W. C. Röntgen*), M. Th. Edelmann**), Fr. Kohlrausch u. A. haben durch Verbindung desselben mit der Spiegelablesung Apparate (Pneumatometer) hergestellt, welche ausserordentlich kleine Druckänderungen zu messen gestatten.

144 **Stereometer und Volumenometer.** Eine sehr sinnreiche Anwendung hat zuerst ein französischer Physiker Say von dem Boyle'schen Gesetze gemacht, um das Volumen pulverförmiger Körper zu bestimmen. Später sind Apparate, auf dieselbe Methode gestützt, von verschiedenen Physikern, namentlich von Leslie, Kopp und Régnault vorgeschlagen worden. Say's Apparat, Fig. 527, welchen derselbe Stereometer genannt hat, besitzt folgende Einrichtung.

An das Glasgefäss *A* setzt sich eine möglichst genau cylindrische Glasröhre an. Der Rand des Gefässes ist mit Smirgel abgeschliffen, so dass der innere Raum mittelst einer Glasplatte luftdicht abgesperrt

*) Pogg. Ann. Bd. 148; Wiedem. Ann. Bd. 4, S. 305.
**) Edelmann's „Neuere Apparate", S. 134.

werden kann. Das Rohr ist mit einer Längentheilung versehen und genau bestimmt, welches der dem Zwischenraume zweier Theilstriche entsprechende Rauminhalt der Röhre ist.

Während der Behälter A offen ist, wird die Röhre in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss bis zum Nullpunkte o der Theilung eingetaucht. Wird alsdann die Glasplatte auf den Rand von A luftdicht aufgesetzt, so ist ein bestimmtes Luftvolumen V von einer Dichtigkeit abgesperrt, welche dem Barometerstande H entspricht.

Wird nun, während A geschlossen bleibt, das Instrument in die Höhe gezogen, so tritt ein Theil der Luft aus A in die Röhre, während das Quecksilber von unten her in derselben über das äussere Niveau

Fig. 527.

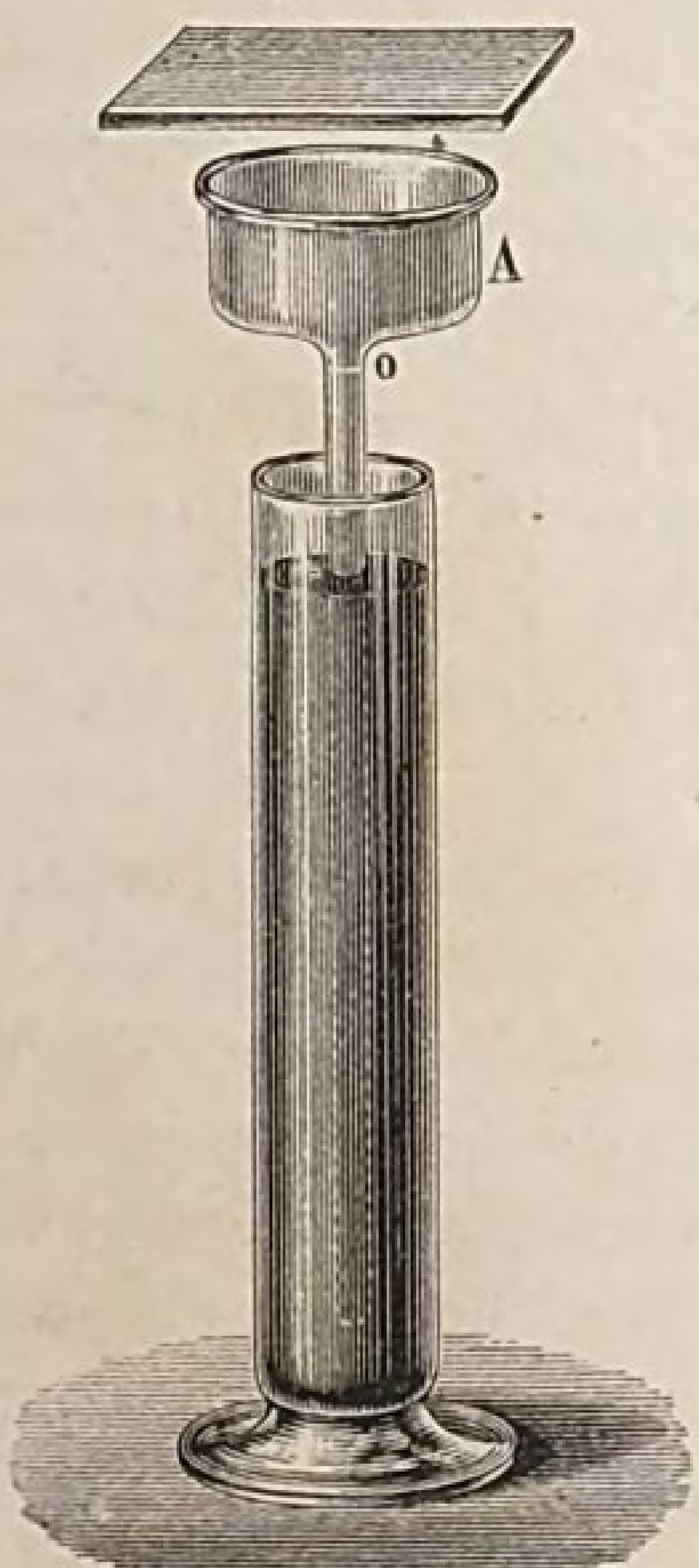
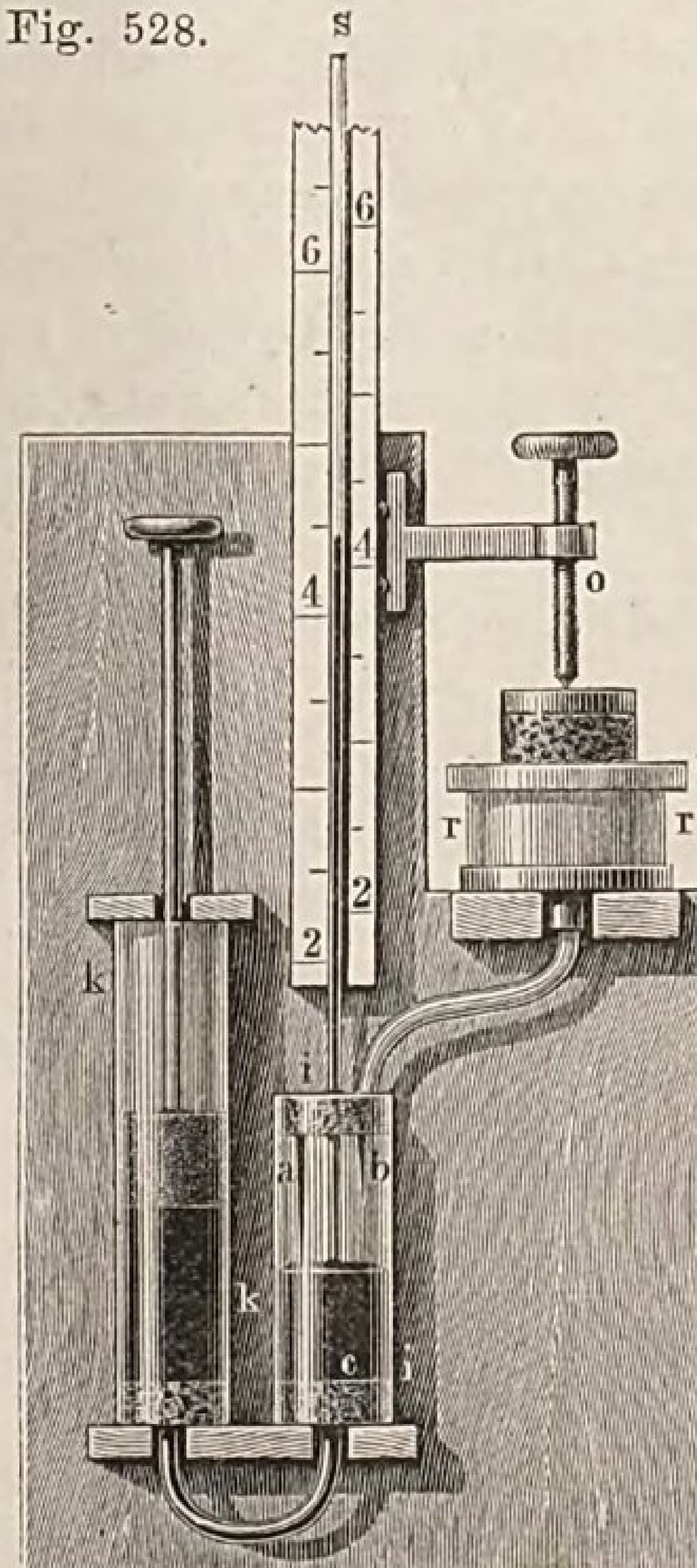


Fig. 528.



$\frac{2}{5}$

steigt. Es sei v die durch Ablesung an der Röhre ermittelte Zunahme des Luftvolumens, h die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, so haben wir:

$$\frac{V+v}{V} = \frac{H}{H-h} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 1)$$

woraus V berechnet werden kann, weil H, h und v bekannt sind.

Wiederholt man denselben Versuch, nachdem man den pulverförmigen Körper, dessen Volumen x man bestimmen will, in das Reservoir

A gebracht hat, so ist das Volumen der in A abgesperrten Luft, wenn das Instrument bis zum Nullpunkte eingetaucht ist, gleich $V - x$. Erhebt man die Röhre, bis das Volumen der abgesperrten Luft gleichfalls um v zugenommen hat, so hat man:

$$\frac{V - x + v}{V - x} = \frac{H}{H - h'}, \quad \text{. 2)}$$

wenn h' die diesem Falle entsprechende Hebung der Quecksilbersäule in der Röhre ist. Aus 2) kann man aber x berechnen, da V schon durch die Gleichung 1) ermittelt worden ist.

Das Volumenometer von Kopp ist Fig. 528 (a. v. S.) ungefähr in 0,4 der natürlichen Grösse dargestellt. Die cylindrische Glasröhre ii ist oben und unten durch Kork luftdicht verschlossen; unten aber steht ii durch ein gebogenes engeres Röhrchen mit dem Glascylinder k, oben durch ein Glasrohr mit dem Glasgefäss rr in Verbindung. Durch den oberen Verschluss des Cylinders i geht noch ein verticales engeres Glasrohr s hindurch, welches, unten und oben offen, fast bis auf den Boden des Cylinders i hinabreicht.

Der obere etwas breite Rand des Glascylinders r ist sorgfältig plan abgeschliffen, so dass man mit Hülfe von etwas Fett eine Glasplatte luftdicht aufsetzen kann, welche dann noch durch eine Schraube o fester aufgedrückt wird. In dem Glascylinder r befindet sich ein zunächst noch leeres Platingefäss.

Der untere Theil von i und k ist mit Quecksilber gefüllt, wie es unsere Figur zeigt. In der Röhre k aber sitzt auf dem Quecksilber ein Lederkolben auf, welcher zwar nicht absolut luftdicht, aber doch quecksilberdicht schliesst. Wird dieser Kolben in die Höhe gezogen, so geht das Quecksilber aus i nach k hinüber, das untere Ende c der Steigröhre s wird frei und es wird sich alsdann der obere Theil von i und das mit demselben in Verbindung stehende Gefäss r mit Luft von atmosphärischer Dichtigkeit füllen.

Sobald aber nun der Kolben in k niedergedrückt und dadurch das Quecksilber nach i getrieben wird, kommt auch das untere Ende des Steigrohres s wieder unter den Quecksilberspiegel, es ist also dadurch ein gewisses Quantum Luft in i und r abgesperrt, welche eben unter atmosphärischem Druck stehend das Volumen V einnahm, welche aber durch ferneres Niederdrücken des Kolbens in k mehr und mehr comprimirt wird. Hat man den Kolben in k niedergedrückt, bis der Quecksilberspiegel in i eben die Spitze a berührt, welche ähnlich wie beim Fortin'schen Barometer von dem oberen Verschluss der Röhre i hinabreicht, so ist die abgesperrte Luft um das Volumen v (den Rauminhalt der Röhre i zwischen c und a) comprimirt, während in Folge ihrer Verdichtung das Quecksilber in dem Steigrohre s um die Höhe h über das Niveau des Quecksilbers in i gestiegen ist.

Hat man den eben herrschenden Barometerstand b und die Höhe h der Quecksilbersäule in s beobachtet, so ergiebt sich die Gleichung:

$$v : V = h : b + h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Wiederholt man nun denselben Versuch, nachdem man n Gramm Wasser in das vorher erwähnte Platingefäss eingefüllt hat, so wird in s eine Quecksilbersäule h' gehoben sein, wenn das Quecksilber in i bis zur Spitze a hinaufgepresst worden ist und demnach ergiebt sich nun die Gleichung:

$$v : V - n = h' : b + h' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

aus der Combination der Gleichungen 1) und 2) ergeben sich aber die Werthe von v und V, da alle anderen Grössen, nämlich h, h' und b, bekannt sind.

Nachdem einmal die Werthe von V und v ermittelt sind, ist es leicht, das Volumen x eines beliebigen und zwar auch eines pulverförmigen Körpers zu bestimmen. Man bringe denselben nur in das in r befindliche Platingefäss und wiederhole den Versuch ganz in der oben angegebenen Weise. Es sei nun B der jetzt herrschende Barometerstand und H die Höhe, bis zu welcher die Quecksilbersäule in s über die Spitze a gehoben ist, wenn das Quecksilber in i oben die Spitze a berührt, so haben wir die Gleichung:

$$B + H : B = V - x : V - x - v,$$

aus welcher sich x berechnen lässt.

Eine zweite Drahtspitze b dient zu Controlversuchen. An der Steigröhre sind zwei Scalen angebracht, der Nullpunkt der einen ist a, der der anderen aber b. Die Höhe der Steigröhre beträgt etwa 40 cm.

Für solche Substanzen, welche bei höherem Drucke eine grössere Quantität Luft absorbiren, wie dies z. B. bei der Kohle der Fall ist, lässt sich natürlich auch dieses Instrument nicht anwenden.

Hat man mit Hülfe des Kopp'schen Volumenometers das Volumen und durch die Wage das absolute Gewicht des zu untersuchenden Körpers bestimmt, so ist sein specifisches Gewicht leicht zu berechnen.

Die folgende Tabelle enthält das specifische Gewicht einiger Körper, wie es Kopp mit Hülfe seines Instrumentes bestimmte.

Körper	Specif. Gewicht		Körper	Specif. Gewicht
Bimsstein (gepulvert) . .	2,15	Holzfaser von	Lindenholz	1,13
Asche von Buchenholz .	2,85	Holzfaser von	Tannenholz	1,16
Stärkemehl	1,56	Holzfaser von	Nussbaumholz	1,17
Flachs	1,45	Holzfaser von	Birnbaumholz	1,23
Seide (rohe Coconfäden) .	1,56	Holzfaser von	Eichenholz	1,27
Baumwolle	1,27	Holzfaser von	Buchenholz	1,29

Um das specifische Gewicht der Holzfaser zu erhalten, war das Holz fein geraspelt und gut getrocknet worden. Man sieht hier, dass das specifische Gewicht der Holzfaser weit grösser ist als das eines massiven

Fig. 529.

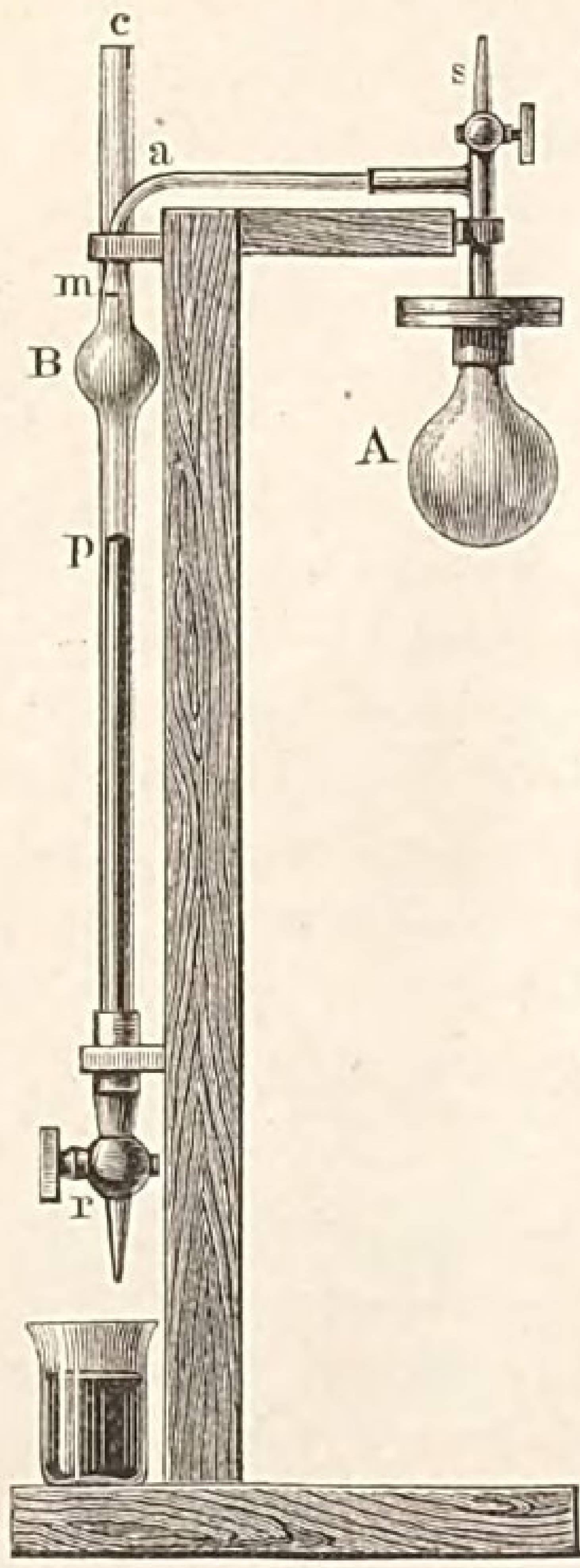


Fig. 530.

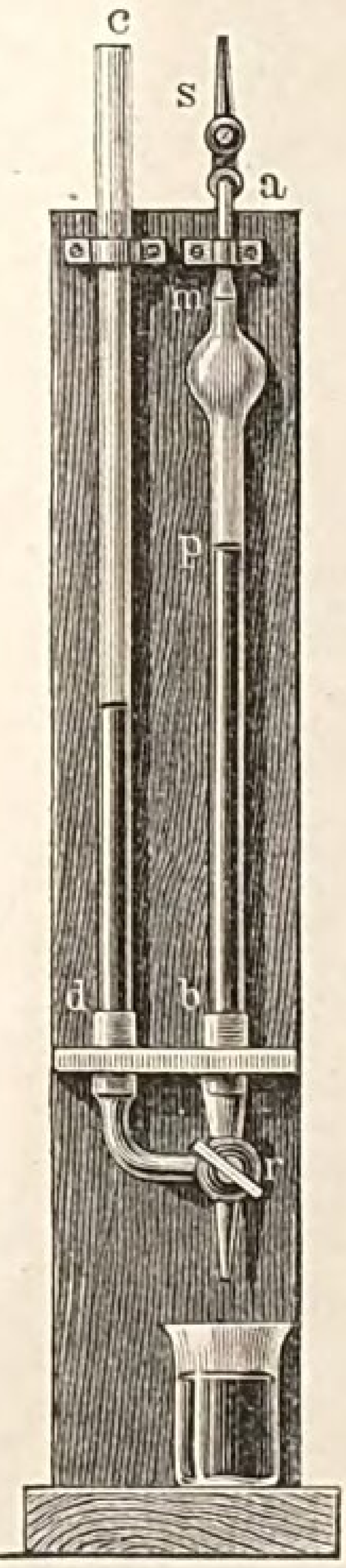


Fig. 531.

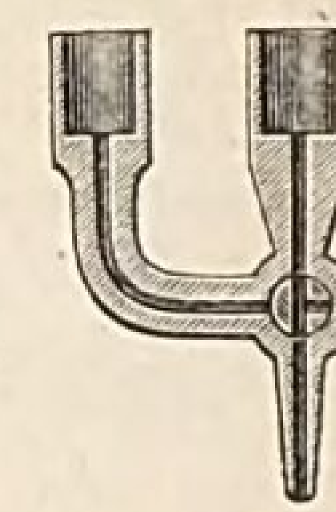


Fig. 532.

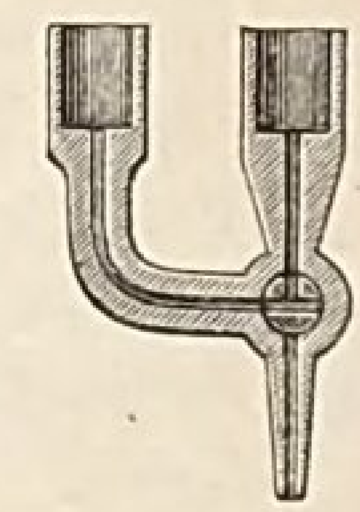
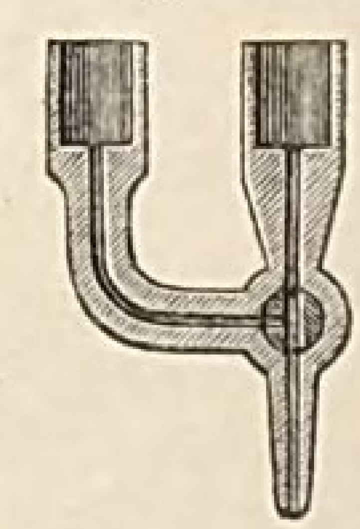


Fig. 533.



Holzstücks, dass also das Holzstück ein Aggregat von Holzfaser und Luft ist.

Régnault's Volumenometer ist Fig. 529 bis 533 abgebildet. *A* ist ein Glasballon von ungefähr 300 ccm Inhalt. Der Hals desselben trägt eine Metallplatte, welche erlaubt, den Ballon mit Hülfe von vier Schrauben durch Zwischenlegen eines gefetteten Leders (noch besser einer Platte von vulcanisirtem Kautschuk) an den manometrischen Apparat luftdicht zu befestigen.

Von *A* führt nun eine Röhre direct in die Höhe; sie kann durch den Hahn *s* abgesperrt werden, eine andere führt zu der verticalen 14 mm weiten Röhre *ab*, welche nahe an ihrem oberen Ende zu einer Kugel *B* erweitert ist. Auf dieser Röhre ist ein Merkstrich bei *m* und einer bei *p* gemacht; unten ist sie in eine eiserne Fassung eingekittet und kann mittelst des Hahnes *r* entweder nach unten geöffnet oder mit der Röhre *cd* in Verbindung gesetzt werden, wie es die Figuren 531 und 532 erläutern.

Das Volumen v der Röhre ab zwischen m und p wird dadurch ermittelt, dass man in der Stellung Fig. 532 bei geöffnetem Hahn s durch die Röhre cd Quecksilber eingiesst, bis es bei m steht, und dann durch den in die Stellung Fig. 531 gebrachten Hahn r ausfliessen lässt, bis es auf p gesunken ist. Die ausgeflossene Quecksilbermenge wird durch Wägung gemessen.

Um nun das Volumen V der Kugel A und der Röhrenverbindung zwischen A und m zu ermitteln, wird bei angesetztem Ballon A und offenem Hahn s in der Stellung Fig. 532 bis zur Höhe p Quecksilber eingefüllt, dann s geschlossen und so viel Quecksilber durch cd nachgegossen, bis es im Schenkel ab an die Marke m reicht.

Ist nun h die Ueberhöhe des Quecksilbers im Schenkel cd, H der Atmosphärendruck, so ist:

$$\frac{V+v}{V}=\frac{H+h}{H},$$

woraus:

$$V=v\,\frac{H}{h}.$$

Wird dann die nämliche Operation wiederholt, nachdem man vorher den Körper, dessen Volumen x gemessen werden soll, in den Ballon A gebracht hat, und ist diesmal die Ueberhöhe des Quecksilbers h', so ist:

$$\frac{V-x+v}{V-x}=\frac{H+h'}{H}$$

und endlich:

$$x=vH\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h'}\right).$$

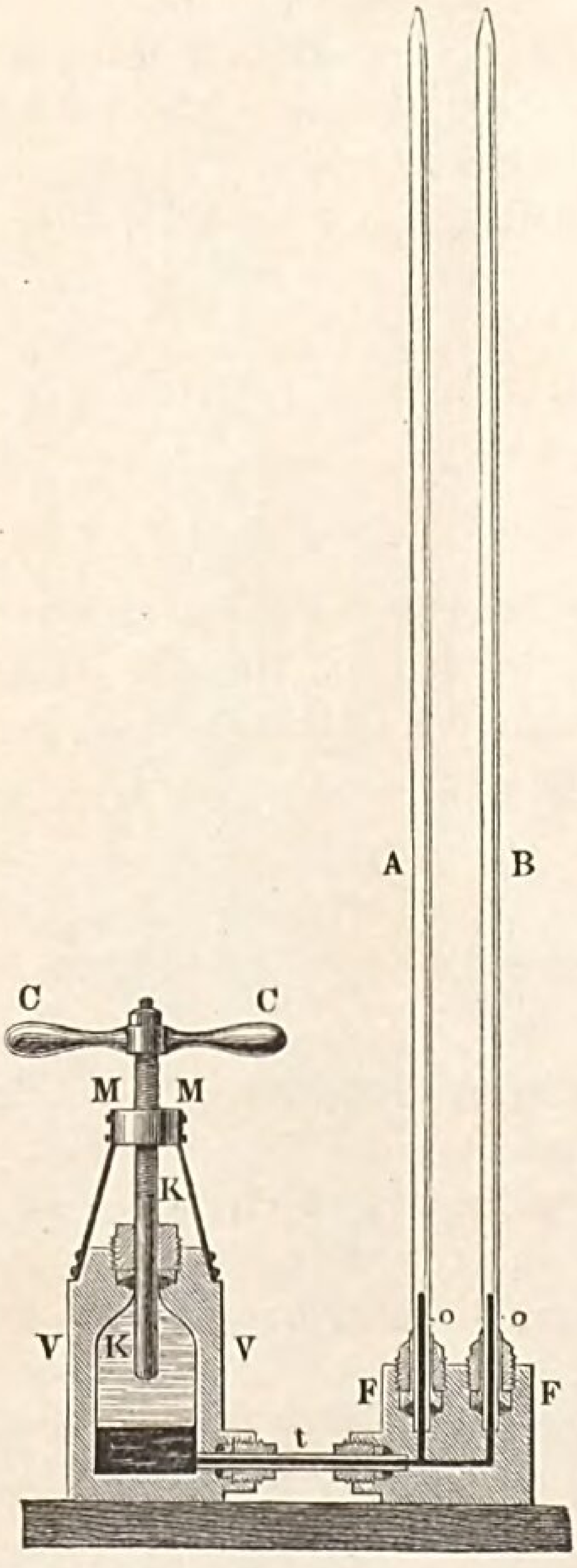
Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze. Viele Physiker haben sich damit beschäftigt, das Verhalten der Gase unter grösserem Drucke zu prüfen. Besonders zu erwähnen sind die Versuche von Oersted und Swendsen, Depretz, Pouillet, Arago und Dulong, Régnault, Andrews, sowie die neueren Untersuchungen von Amagat und von Mendelejeff. 145

Um zu zeigen, dass verschiedene Gase bei gleicher Drucksteigerung eine ungleiche Verminderung des Volumens erleiden, hat Pouillet den Apparat Fig. 534 (a. f. S.) construirt.

Der Hals des gusseisernen Gefässes V ist mittelst einer Stopfbüchse geschlossen, durch welche der massive Kolben K hindurchgeht; der obere Theil desselben ist mit einem Schraubengewinde versehen, welches sich in der Schraubenmutter M drehen lässt. Aus dem unteren Theil des Gefässes V führt die eiserne Röhre t zu einem horizontalen Canal des gusseisernen Klotzes F, auf welchen von oben her zwei verticale Canäle münden. Auf diese verticalen Canäle sind die 2 m langen, genau getheilten Glasröhren A und B aufgeschraubt. Oben sind diese Glasröhren offen, aber in eine feine Spitze ausgezogen.

Der untere Theil des Gefässes *V* enthält Quecksilber, der obere Theil desselben ist mit Oel gefüllt. Durch Umdrehung des Hebels *C* wird der Kolben *K* niedergeschraubt, und dadurch das Quecksilber in die Röhren *A* und *B* hineingetrieben, bis es die Spitzen derselben erreicht hat. Sobald dies der Fall ist, setzt man die Spitze der einen Röhre mit einer Glocke in Verbindung, welche mit dem zu prüfenden Gase gefüllt ist, während die Spitze der anderen durch eine Trockenröhre mit der äusseren Luft in Verbindung steht. Schraubt man nun den Kolben in die Höhe, so sinkt das Quecksilber langsam in beiden Röhren; die eine füllt sich mit trockener Luft, die andere mit dem Gase der Glocke, beide aber unter dem Druck der Atmosphäre. Sobald das Quecksilber in beiden Röhren bis zum Punkte *o* gesunken ist, werden die Spitzen beider Röhren vor dem Löthrohr zugeschmolzen, und somit ist der Versuch vorbereitet.

Fig. 534.



Wird nun der Kolben *K* abermals niedergeschraubt, so wird in der einen der beiden Glasröhren atmosphärische Luft, in der anderen das zu prüfende Gas comprimirt, und man kann bei dieser Vorrichtung den Druck bis auf 100 Atmosphären steigern. Es zeigt sich dabei, dass Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenoxydgas sich nahezu gleich wie Luft verhalten, während diejenigen Gase, welche schon bei relativ geringer Druckerhöhung flüssig werden, wie schweflige Säure, Ammoniakgas, merklich compressibler sind als Luft.

Arago und Dulong bedienten sich zur Prüfung des Boyle'schen Gesetzes eines Verfahrens, welches mit dem in §. 142 zuerst beschriebenen im Wesentlichen übereinstimmte. Nur war der dazu verwendete, nach Art der Fig. 516, Seite 502, construirte Apparat mit einer Druckröhre von grösserer Höhe versehen. Die genannten Forscher fanden das Volumen der comprimirten Luft stets kleiner als das nach Boyle's Gesetz berechnete. Da aber die Abweichungen nur gering waren, hielten sie dies für eine Folge der Beobachtungsfehler.

Eine definitive Lösung erhielt endlich die Frage durch eine von Régnault im Jahre 1845 ausgeführte Untersuchung*). Der äusserst zweckmässig und sorgfältig construirte Apparat, dessen er sich bediente, hatte grosse Aehnlichkeit mit dem in §. 142 erwähnten Apparat von Arago und Dulong. Die 3 m lange Manometerröhre war im Inneren nahezu 1 cm weit; ihr unteres Ende communicirte mit einer 30 m hohen Druckröhre. Durch eine Druckpumpe wurde das Quecksilber von unten her gleichzeitig in die Manometerröhre und in die Druckröhre hineingepresst.

Bei den Arago-Dulong'schen Versuchen wurde die nämliche Luftmenge, welche in der Manometerröhre ursprünglich eine Länge von 2 m einnahm, durch den Druck einer Quecksilbersäule von 30 m Höhe auf die Länge von 0,066 ... m zusammengedrückt, der gleiche Fehler in der Ablesung der Quecksilberkuppe wird deshalb bei hohem Druck auf die Messung des Gasvolumens einen verhältnissmässig viel nachtheiligeren Einfluss ausüben, als bei geringem Druck. Ein Ablesungsfehler von 1 mm z. B. musste das ursprüngliche Volumen um $^1/_{2000}$ fehlerhaft angeben, während der gleiche Ablesungsfehler die Bestimmung des Gasvolumens bei einem Druck von 30 m um $^1/_{66}$ fehlerhaft machte.

Régnault hat diesen Uebelstand auf folgende Weise vermieden. Statt das Manometerrohr oben zuzuschmelzen, setzte er einen sehr gut gearbeiteten, vollkommen sicher schliessenden Hahn auf das obere Ende der Manometerröhre, durch welchen derselbe mit einem kupfernen mit comprimirtem Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt werden konnte. Ein Merkzeichen war am unteren Ende der Manometerröhre angebracht und ein zweites in der Mitte derselben, so dass durch dasselbe das Volumen der Röhre vom Hahn bis zum unteren Merkzeichen in zwei gleiche Theile getheilt wurde. Um einen Versuch zu machen, wurde der Hahn am oberen Ende des Manometers, den wir h nennen wollen, geöffnet, und aus dem Gasreservoir so viel Gas in die Manometerröhre hinübergetrieben, dass dieselbe bis zum unteren Merkzeichen mit Gas gefüllt war. Nun wurde der Hahn h geschlossen, das im Manometerrohre abgesperrte Gas nahm nun den Raum V_0 unter dem Druck P_0 ein.

Jetzt liess man die Druckpumpe spielen, bis das Quecksilber im Manometerrohre die zweite Marke erreicht hatte; das Volumen des abgesperrten Gases war dadurch auf V_1 (die Hälfte von V_0) vermindert, der Druck, unter welchem es stand, aber auf P_1 erhöht worden. — Die Versuche wurden nun ganz in der gleichen Weise für einen anfänglichen Druck P_0 wiederholt, welcher nach und nach von 739 mm bis 9336 mm gesteigert wurde; es wurde also bei niederem und hohem Druck mit gleich grossem Gasvolumen operirt.

Die Endresultate der Régnault'schen Untersuchung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Sie giebt den Druck (in Metern

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, T. XXI.

ausgedrückt) an, welcher nöthig ist, ein anfänglich unter 1 m Quecksilberdruck stehendes Gas auf $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$ und $^1/_{20}$ seines ursprünglichen Volumens zu comprimiren.

Volumen	Druck		
	Luft	Kohlensäure	Wasserstoffgas
	Meter	Meter	Meter
1	1,0000	1,0000	1,0000
$^1/_5$	4,9794	4,8288	5,0116
$^1/_{10}$	9,9162	9,2262	10,0560
$^1/_{15}$	14,8248	13,1869	15,1359
$^1/_{20}$	19,7198	16,7054	20,2687

Nach diesen Daten werden also Luft und Kohlensäure bei steigendem Drucke stärker comprimirt als nach Boyle's Gesetz folgen würde, dagegen Wasserstoff weniger stark.

In Bezug auf die Höhe der angewendeten Druckkräfte werden alle früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand weit übertroffen von den neueren Messungen, welche Amagat*) 1880 angestellt hat.

Die Beobachtungsapparate und das Quecksilbermanometer waren in einem zu Méons bei St. Etienne befindlichen Schachte von 400 m Tiefe aufgestellt. Auf dem Grunde des Schachtes befand sich die Compressionspumpe, welche zunächst auf Glycerin und durch dieses auf das Quecksilber wirkte. Dieses wurde in ein zweischenkliges Manometer eingepresst, dessen kürzerer aus einer kalibrirten oben geschlossenen Glasröhre bestehender Schenkel reines Stickstoffgas enthielt. Der andere Schenkel bestand aus einer nach dem Ausgange des Schachtes führenden, dünnen, eisernen Röhre, welche aus vielen Stücken von mehreren Metern Länge zusammengeschraubt war. Die Gesammthöhe dieser Druckröhre betrug etwas mehr als 325 m, was einem Drucke der darin enthaltenen Quecksilbersäule von 430 Atmosphären entspricht.

Während nun ein Beobachter mittelst Fernrohres den Stand der Quecksilberkuppe abzulesen hatte, wurde ein zweiter Beobachter in einem Korbe bis zu einer der Stellen gehoben, wo zwei Stücke zusammengeschraubt waren. Diese Verbindung wurde gelöst, ein Stück offenes Glasrohr angesetzt und dann gewartet, bis durch die Pumpe das Quecksilber bis in die Gasröhre getrieben war. Hierauf erfolgte die gleichzeitige Ablesung des Druckes und des Gasvolumens. Dabei wurde insbesondere für Constanthalten der Temperatur des Gases Sorge getragen.

*) Ann. de chim. et de phys. (5) XIX, pag. 345; Fortschritte der Physik im Jahre 1880, Jahrgang XXXVI, S. 171.

Das Resultat dieser Messungen am Stickstoffgase ist nachstehend in der Weise angegeben, dass für die in Metern Quecksilber von 0° gemessenen Drucke P das zugehörige Product PV aus Druck und Volumen beigefügt ist.

Druck in Metern Quecksilber von 0° P	Product aus Volumen und Druck PV	
20,740	50989	
25,337	50897	
47,146	50811	Minimum bei $P = 50$
55,482	50857	
61,241	50895	
69,140	50987	
82,970	51226	
96,441	51602	
128,296	52860	
158,563	54214	
190,855	55850	
221,103	57796	
252,353	59921	
283,710	62192	
327,388	65428	

Wie man sieht, nimmt das Product PV nicht fortwährend ab, sondern erreicht für $P = 50$ ein Minimum, um von da an nicht unbedeutend anzusteigen.

Nachdem nun so das Stickstoffgas untersucht war, konnte dasselbe zur Füllung eines geschlossenen Manometers benutzt werden, um damit andere Gase einer ähnlichen Untersuchung zu unterziehen. Sauerstoff, Luft, Aethylen, Kohlenoxyd und Grubengas zeigten hierbei insofern ein gleichmässiges Verhalten, als die Producte PV ein Minimum bei wachsendem Drucke erreichten. Dasselbe liegt ungefähr bei folgenden Quecksilberdruckhöhen:

Stickstoff	50 m	Kohlenoxyd	50 m
Sauerstoff	100 „	Grubengas	120 „
Luft	65 „	Aethylen	65 „

Das Minimum war bei den fünf ersten dieser Gase nur wenig ausgeprägt, dagegen ausserordentlich auffallend beim Aethylen, für dieses sank der Werth des Products PV, welcher bei 24 m Quecksilberdruck = 21 473 war, für 63,96 m Druck auf 9370 herab, um dann bei 303,02 m Druck auf 29 333 anzusteigen.

Wasserstoff zeigte kein solches Minimum, doch vermuthet Amagat ein solches bei geringerem Druck.

Für Drucke unter einer Atmosphäre liegen mehrere Untersuchungen vor, welche aber nicht zu übereinstimmenden Resultaten geführt haben.

Die Arbeiten von Mendelejeff und Kirpitschoff*) ergaben für Luft, dass mit Abnahme des Druckes P auch das Product PV abnimmt. Setzt man für $P = 646$ mm $PV = 1$, so ist nach den genannten Autoren für $P = 14{,}5$ mm $PV = 0{,}96551$. Die Volumbestimmungen geschahen durch Wägung des in den verdünnten Raum eintretenden Quecksilbers.

146 **Die Luftpumpe.** Zu den unentbehrlichsten und wichtigsten Instrumenten des Physikers gehört die Luftpumpe, welche seit ihrer Erfindung (1650) durch Otto von Guericke mancherlei Veränderungen und Verbesserungen erfahren hat. Wir wollen sie zunächst in einer möglichst einfachen Gestalt kennen lernen.

Fig. 535 stellt eine sogenannte Handluftpumpe dar, wie sie gewöhnlich in chemischen Laboratorien gebraucht wird. CC ist der Stiefel, d. h. ein hohler Messingcylinder, in welchem ein luftdicht schliessender Kolben A auf und ab bewegt werden kann.

Von dem Boden des Cylinders führt ein verticaler Canal herab bis zu dem horizontalen Rohre s, welches durch ein Glasrohr t mit Hülfe von Kautschukröhren mit dem Recipienten g, d. h. mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden kann, aus welchem man die Luft entfernen will. Die Glasröhre t verbindet nämlich die Messingröhren s und p, von welchen letztere zu dem verticalen Canale ab führt, der oben in der Mitte des eben abgeschliffenen Tellers dd mündet. Auf diesen Teller wird dann die Glasglocke g aufgesetzt, deren unterer Rand ebenfalls eben abgeschliffen ist, und der des besseren Schlusses wegen mit Talg oder Schweinefett bestrichen wird.

Der Kolben A besteht aus verschiedenen Stücken, nämlich erstens einem zum Theil hohlen Messingstücke K, welches von einer Lederkappe umgeben ist, die fest an die Wände des Cylinders andrückt, und namentlich beim Aufziehen des Kolbens noch durch den von oben her wirkenden Luftdruck an dieselben gepresst wird, und zweitens aus einem von unten her in K eingeschraubten Metallstücke L, welches in der Mitte durchbohrt ist und die Bodenplatte des Kolbens bildet.

Dieses Metallstück L ist nun oben mit einem Ventil versehen, welches dadurch gebildet wird, dass man ein Stück Schweinsblase so über dasselbe bindet, dass es die Oeffnung des verticalen Canals verschliesst, und dann seitlich von dieser Oeffnung zwei Einschnitte anbringt, wie Fig. 536 zeigt, welche das fragliche Stück im Grund- und Aufriss darstellt.

Dieses Ventil wird fest auf die Oeffnung aufgepresst, wenn der Luftdruck von oben her, es wird geöffnet, wenn er von unten her stärker ist.

Wird der eben am unteren Ende des Stiefels C aufsitzende Kolben A in die Höhe gezogen, so entsteht unter dem Kolben ein luftverdünnter

*) Fortschritte d. Physik i. J. 1874. Jahrg. XXX, S. 232.

Raum, und in Folge davon tritt ein Theil der in *g* befindlichen Luft in den Cylinder über. Wird dann, wenn der Kolben am oberen Ende des

Fig. 535.

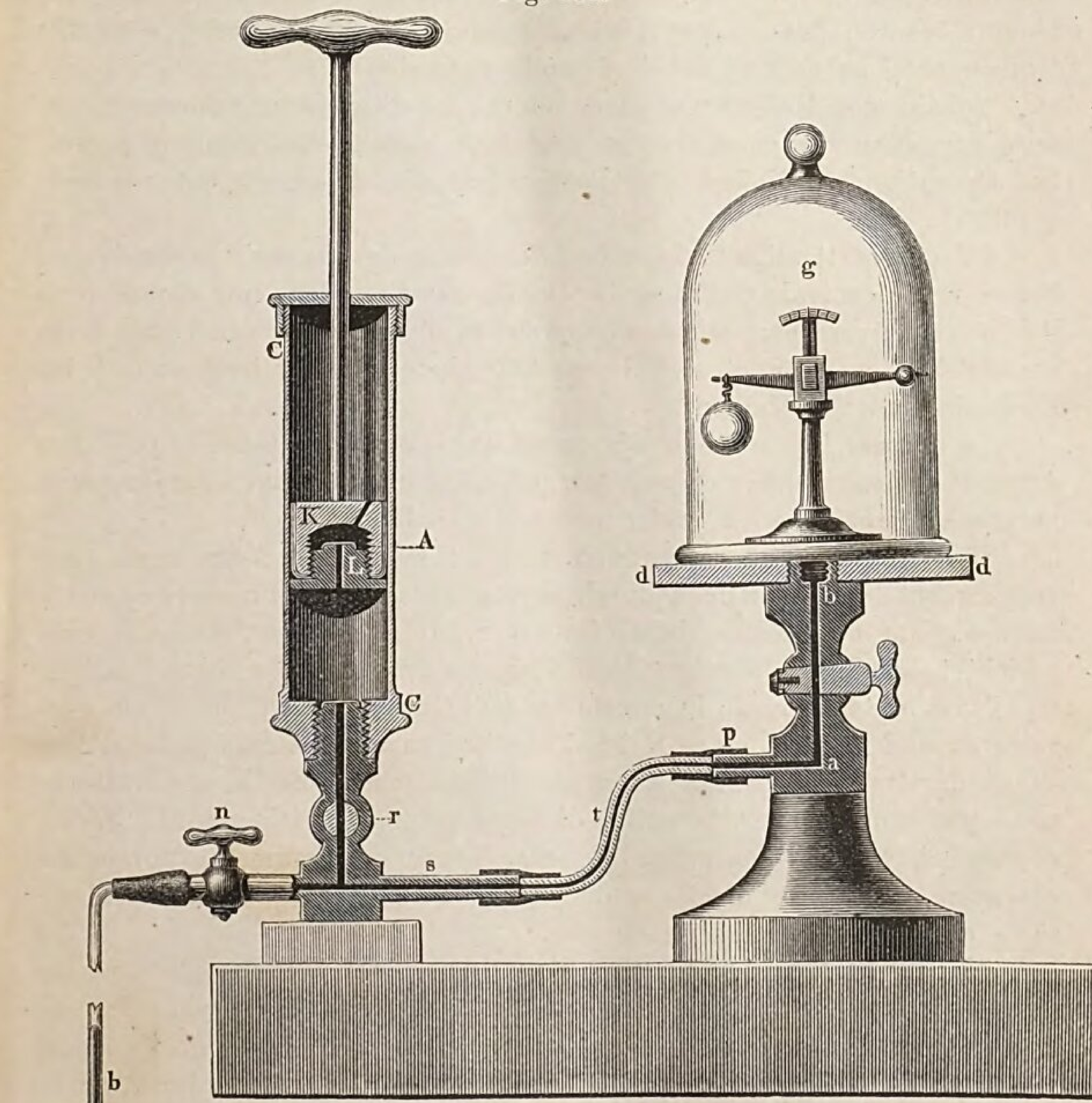
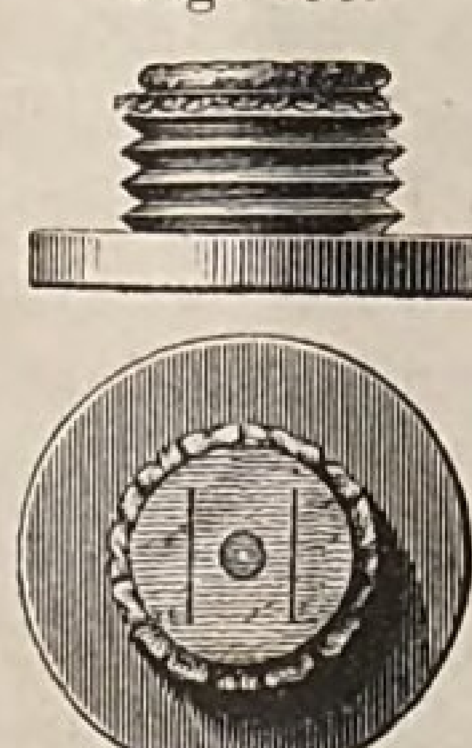


Fig. 536.



Cylinders *C* angekommen ist, der Hahn *r* geschlossen und so die Communication zwischen dem Stiefel *C* und dem Recipienten *g* unterbrochen,

so kann beim Niederdrücken des Kolbens A die herübergesaugte Luft nicht wieder in den Recipienten zurückkehren, die Luft unter dem Kolben wird, da ihr kein Ausweg bleibt, allmälig so verdichtet, dass sie einen stärkeren Druck ausübt als die äussere Luft, sie wird also das Kolbenventil heben und durch dasselbe entweichen.

Sobald der Kolben auf dem Boden des Stiefels angekommen ist, wird der Hahn r wieder geöffnet und dann durch Wiederholung derselben Operation von Neuem eine Portion Luft aus dem Recipienten g fortgeschafft.

Da das beständige Oeffnen und Schliessen des Hahns r lästig ist, so hat man die centrale Oeffnung im Boden des Cylinders mit einem ähnlichen Ventil versehen, wie das ist, welches sich im Kolben befindet. Dieses untere Ventil öffnet sich beim Aufziehen und schliesst sich beim Niederdrücken des Kolbens.

In unserer Figur sehen wir unter der Glocke der Luftpumpe einen Apparat stehen, welcher erst später, und zwar in demjenigen Paragraphen besprochen werden wird, welcher vom Luftballon handelt.

Den Grad der Luftverdünnung, welchen man durch Auspumpen hervorgebracht hat, kann man durch eine sogenannte Barometerprobe messen. Für die kleinen Handluftpumpen ist die Barometerprobe so eingerichtet, wie Fig. 535 zeigt. Eine etwa 80 cm lange Glasröhre b taucht mit ihrem unteren Ende in ein Gefäss voll Quecksilber; oben ist sie umgebogen und mittelst eines Kautschukröhrchens an die Pumpe befestigt. Wenn der Hahn n geöffnet ist, so steigt das Quecksilber in die Röhre b, und zwar um so höher, je weiter die Verdünnung getrieben wird. Wenn es möglich wäre, einen ganz luftleeren Raum durch die Luftpumpe zu erzeugen, so würde die Höhe der im Rohre b gehobenen Quecksilbersäule der Barometerhöhe gleich sein.

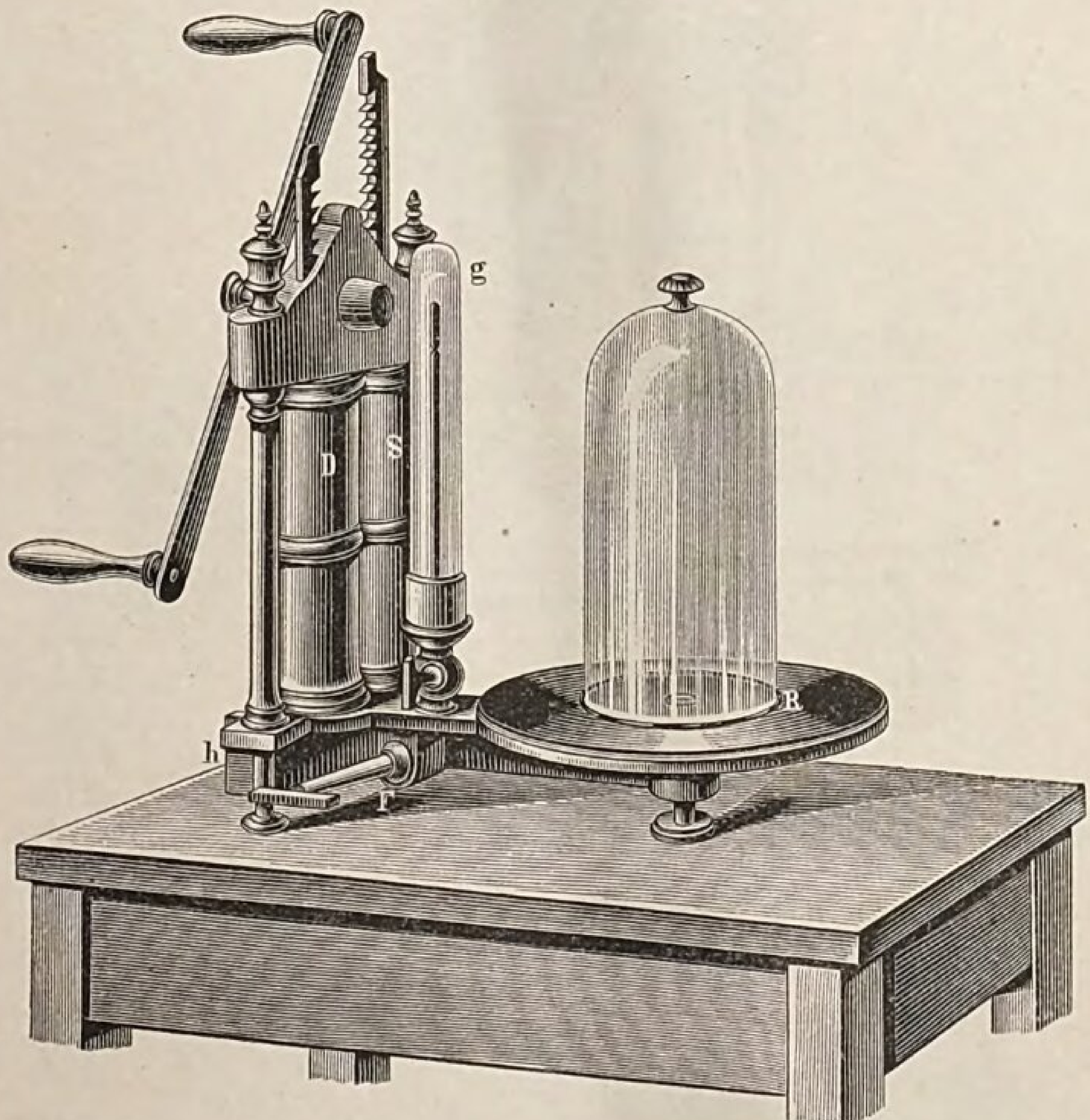
Man begreift leicht, dass mit einem derartigen Instrumente niemals ein absolut luftleerer Raum hervorgebracht werden kann, wie vollkommen es auch construirt sein mag; denn wie lange man auch fortpumpen mag, so wird durch jeden neuen Kolbenzug die im Recipienten befindliche Luft doch nur von Neuem verdünnt und nie vollständig entfernt. Aber auch durch noch so lange fortgesetztes Pumpen kann man die Verdünnung der Luft im Recipienten nicht über eine gewisse Grenze bringen, welche im nächsten Paragraphen näher bezeichnet werden soll.

Grössere Luftpumpen hat man in sehr verschiedenen Formen construirt, welche der Hauptsache nach in zwei Hauptclassen zerfallen, nämlich in Ventilluftpumpen und Hahnluftpumpen. Bei den ersteren wird die Unterbrechung und Wiederherstellung der Communication des Stiefels mit dem Recipienten durch ein Ventil bewerkstelligt, bei den letzteren geschieht dieses durch einen Hahn.

Bei grösseren Luftpumpen, seien es nun Hahn- oder Ventilluftpumpen, sind gewöhnlich zwei Stiefel angebracht, um schneller evacuiren zu können.

147 **Die zweistiefelige Ventilluftpumpe.** Fig. 537 stellt eine zweistiefelige Ventilluftpumpe von der Seite gesehen, Fig. 538 (a. f. S.) stellt die vordere Ansicht desselben Instrumentes dar. Die innere Einrichtung einer solchen Luftpumpe erkennt man aus dem Grundriss Fig. 539 (a. f. S.) und dem Durchschnitte Fig. 540 (a. S. 523), für welchen zu bemerken ist, dass die Durchschnittsebene für den vorderen Theil des Instrumentes durch die Mitte des Stiefels *D*, für den hinteren Theil durch die Mitte des ganzen Instrumentes geht.

Fig. 537.



Im Kolben *B*, dessen Einrichtung aus Fig. 541 (a. S. 523) deutlicher ersehen werden kann, ist ein Ventil angebracht, welches sich durch einen Druck von unten öffnet, durch einen Druck von oben aber geschlossen wird.

Die Stange *ca*, Fig. 540, trägt das Bodenventil. Wenn der Kolben gehoben wird, so wird die ganze Stange gehoben, bald aber stösst der Absatz *c* an die obere Platte des Cylinders, und der Kolben bewegt sich nun mit einiger Reibung längs der ganzen Stange hin. Sobald der Kolben niedergeht, wird der abgestumpfte Kegel *a* in die unter ihm befindliche conische Oeffnung gedrückt, so dass die obere Fläche dieses Kegels mit dem Boden des Cylinders in eine Ebene zusammenfällt und der Kolben sich also vollkommen auf diesen Boden aufsetzen kann.

Dieselbe Einrichtung hat auch der Kolben im anderen Stiefel *S*.

Die in dem Kolben der eben beschriebenen Luftpumpe angebrachten Ventile sind allerdings schwer zugänglich, so dass ein Reinigen derselben

Fig. 538.

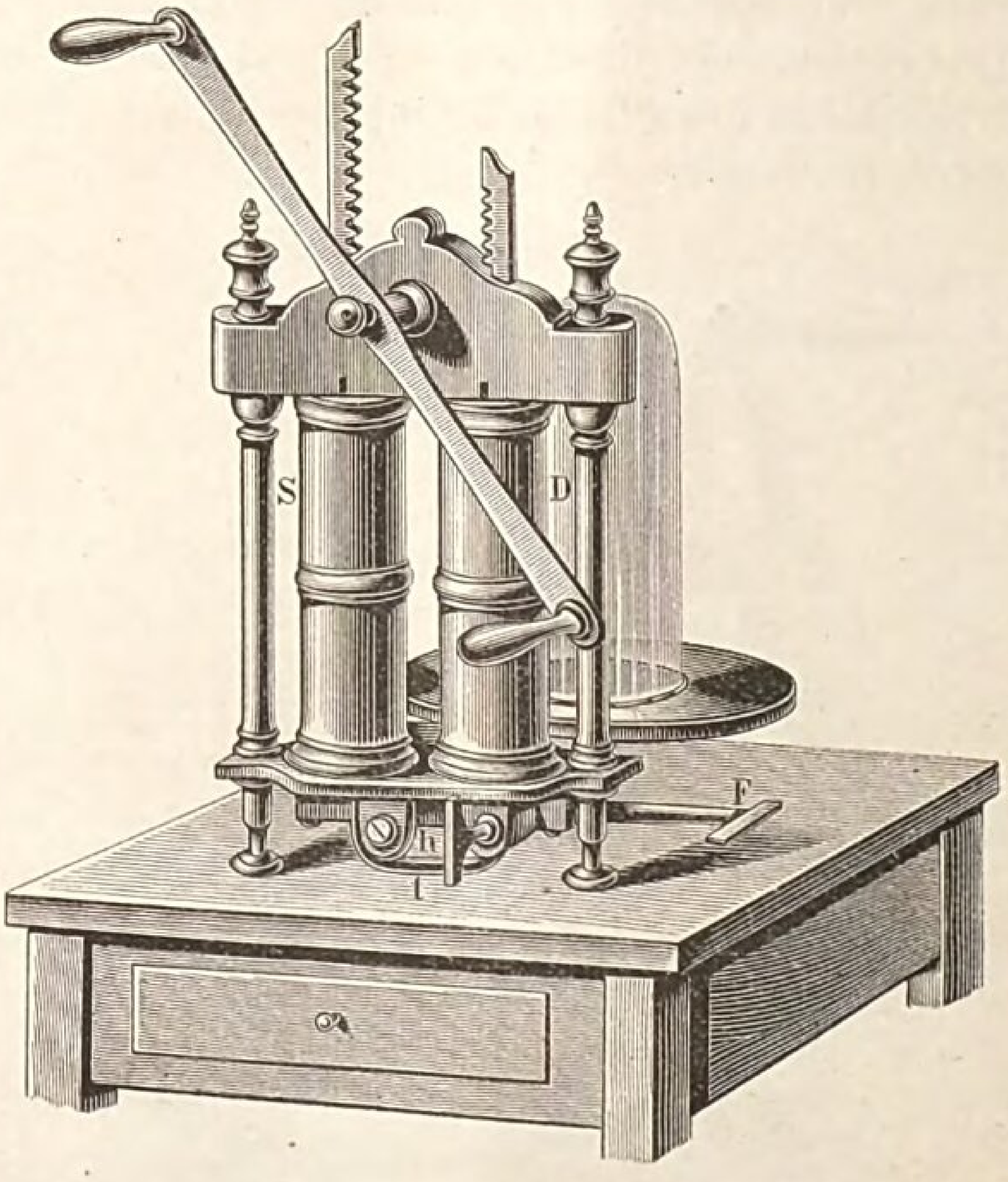
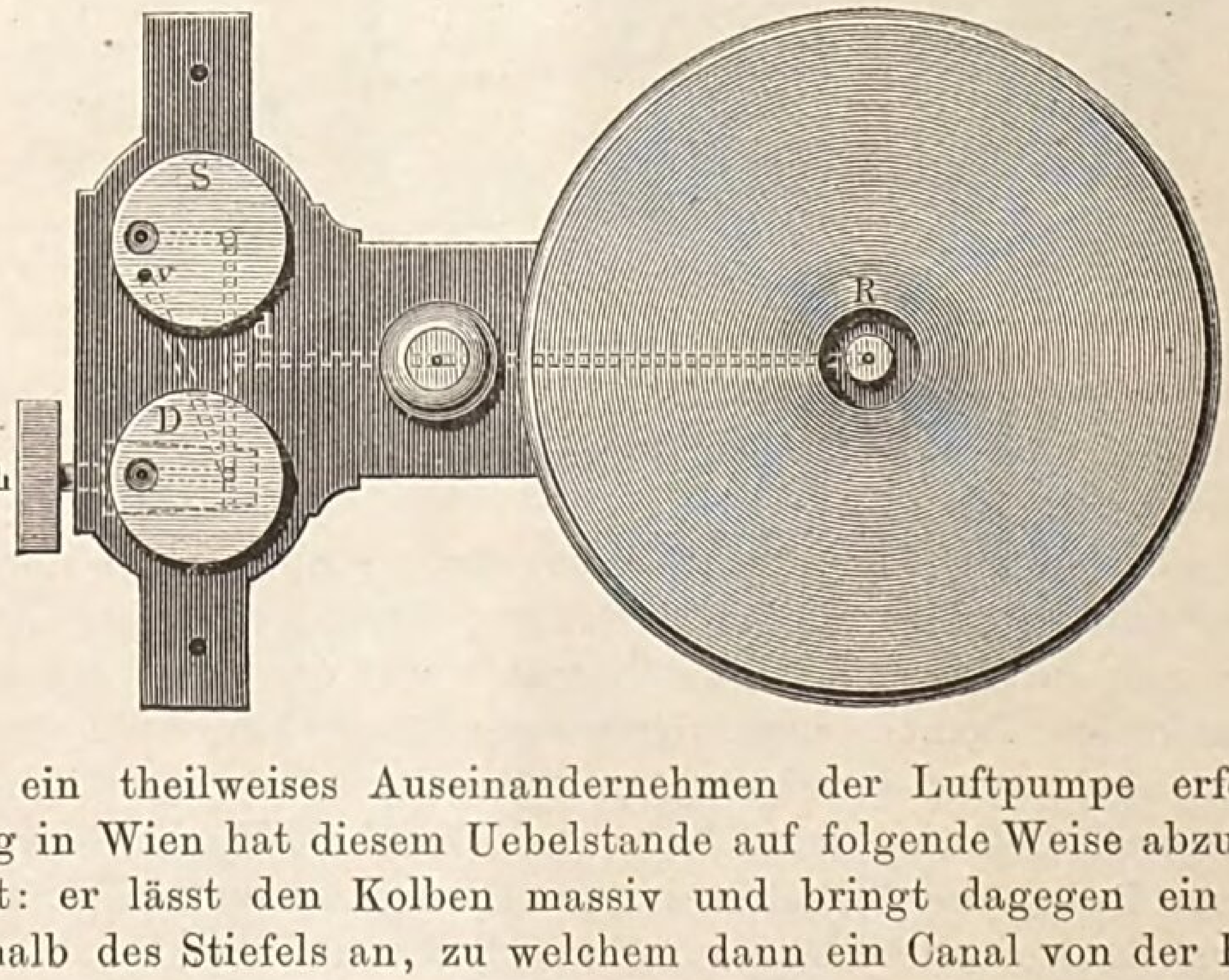


Fig. 539.



immer ein theilweises Auseinandernehmen der Luftpumpe erfordert. Ekling in Wien hat diesem Uebelstande auf folgende Weise abzuhelfen gesucht: er lässt den Kolben massiv und bringt dagegen ein Ventil ausserhalb des Stiefels an, zu welchem dann ein Canal von der Boden-

platte aus führt. Dieses Ventil öffnet sich, wenn beim Niedergange des Kolbens die im unteren Theile des Cylinders befindliche Luft comprimirt wird, und nun durch den besprochenen Canal hindurch gegen die untere Fläche des Ventils drückt, um endlich durch dasselbe zu entweichen. Beim Aufziehen des Kolbens schliesst sich dies Ventil natürlich wieder.

Die Mitte des Tellers *R*, Fig. 539 und Fig. 540, welcher zum Aufsetzen von Glasglocken dient, wird durch eine Schraube gebildet, auf welche man Ballons etc. aufschrauben kann. Von hier führt ein Canal bis *d*,

Fig. 540.

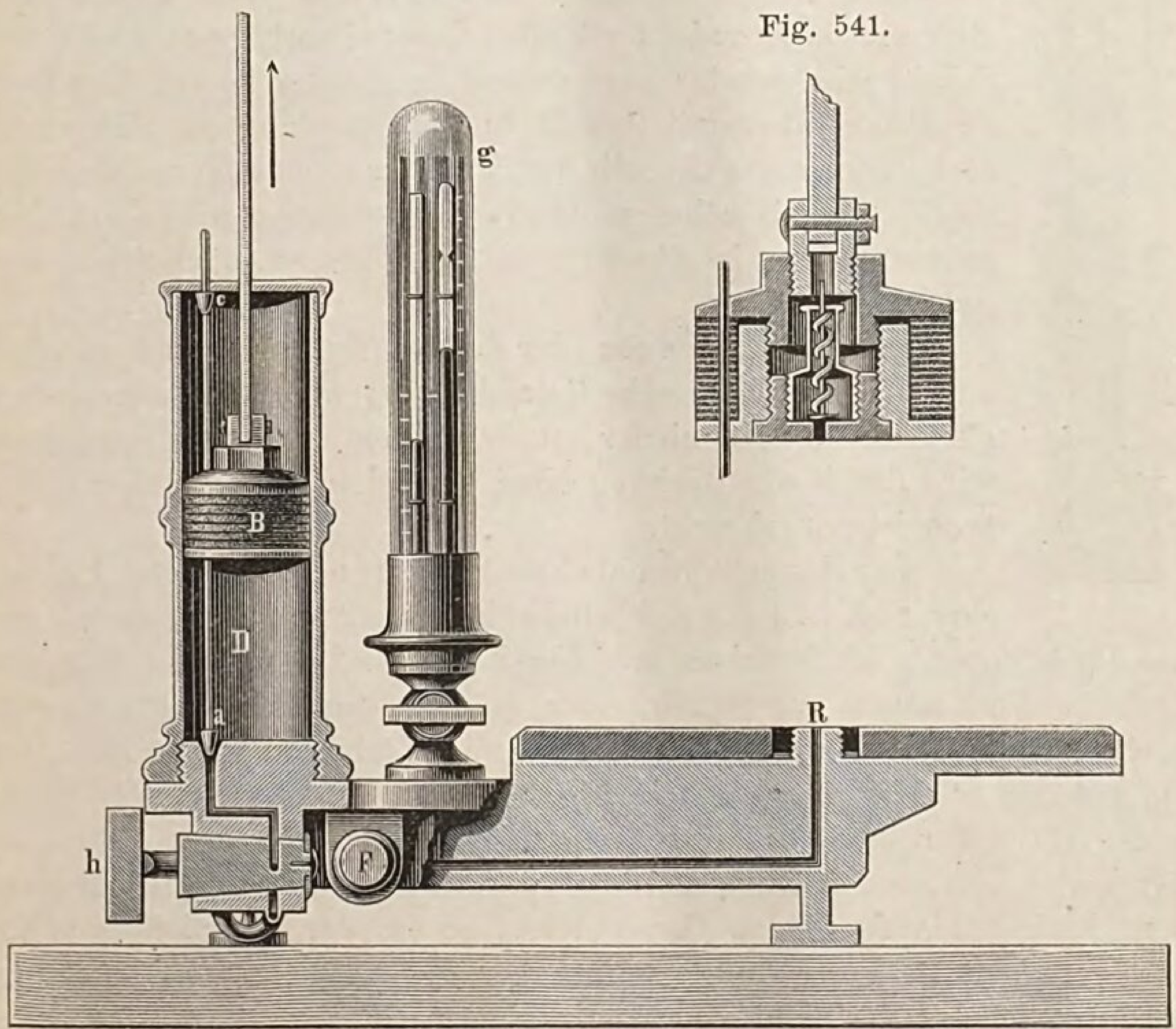


Fig. 541.

wo er sich in zwei Arme theilt, von welchen der eine zum Boden des Cylinders *D*, der andere zum Boden des Cylinders *S* führt.

Derjenige Cylinder, in welchem der Kolben gerade aufsteigt, saugt Luft aus dem Recipienten, während in dem anderen Stiefel, in welchem der Kolben gleichzeitig niedergeht, die vorher aus dem Recipienten gesaugte Luft durch das Kolbenventil entweicht.

Bei diesen Luftpumpen ist die Barometerprobe in der Regel von etwas anderer Einrichtung als die vorher erwähnte. Gewöhnlich ist sie ein abgekürztes Barometer, welches in eine lange, enge Glasglocke *g*, Fig. 537 und Fig. 540, eingeschlossen ist, die mit dem Canal der Maschine in Verbindung steht. Diese Verbindung kann mittelst eines Hahnes

willkürlich unterbrochen und wieder hergestellt werden. Fig. 542 stellt eine isolirte Barometerprobe von 20 cm Länge dar. Das Quecksilber

Fig. 542.

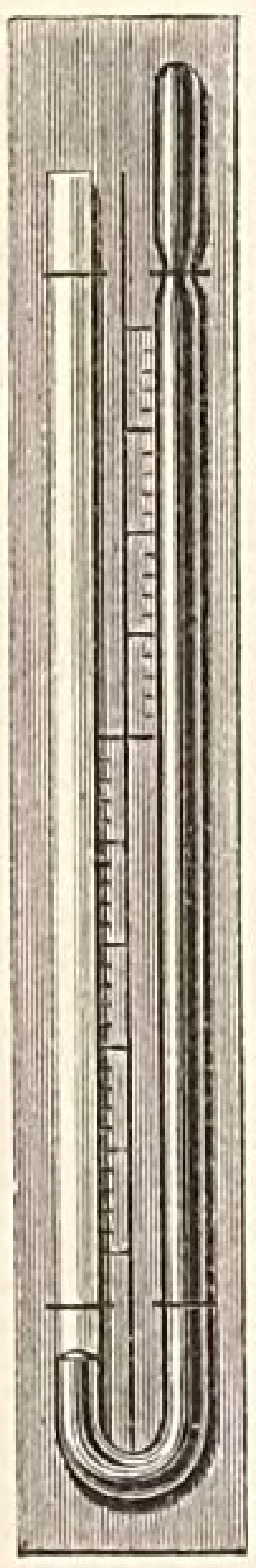
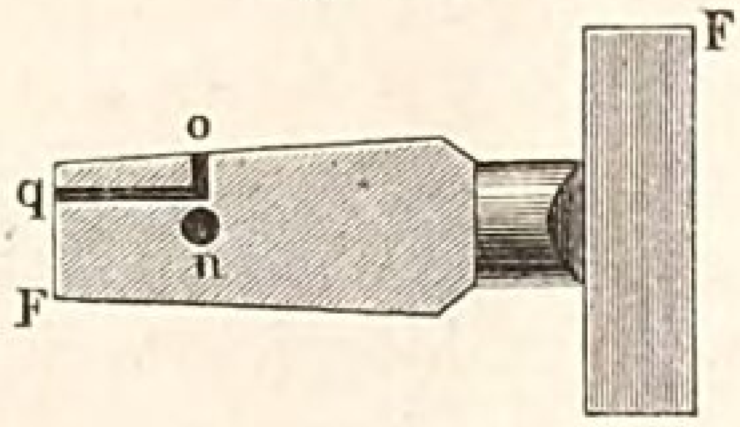


Fig. 543.



füllt den zugeschmolzenen Schenkel ganz aus und beginnt erst zu sinken, wenn der auf den offenen Schenkel wirkende Luftdruck bis auf $^1/_4$ Atmosphärendruck reducirt ist. Ist dieser Grad von Verdünnung erreicht, so giebt die Barometerprobe stets den Druck der Luft im Recipienten an, welcher der Differenz im Stande der beiden Quecksilberkuppen gleich ist. Sobald man wieder Luft zulässt, treibt der Druck derselben das Quecksilber mit Gewalt in die verschlossene Röhre zurück; man muss deshalb das Einströmen mässigen, damit der Gipfel der Glasröhre nicht durchgeschlagen wird; um dies zu verhindern, ist überdies die Glasröhre an einer Stelle eingeschnürt.

Die Kolbenstangen der beiden Cylinder sind gezahnt und greifen in dasselbe Getriebe ein; wenn die eine steigt, geht die andere nieder, und diese alternirende Bewegung wird durch die Drehung einer Kurbel in alternirender Richtung hervorgebracht.

Der doppelt durchbohrte Senguerd'sche Hahn *F*, welcher Fig. 543 für sich allein dargestellt ist, dient dazu, um den Recipienten nach Belieben mit den Stiefeln oder mit der äusseren Luft in Verbindung zu setzen, oder endlich ihn ganz abzusperren. Während die Luftpumpe arbeitet, wird die Verbindung des Recipienten mit den Stiefeln durch den in Fig. 543 zum Punkt verkürzten Canal *n* des Hahnes hergestellt. Dreht man den Hahn aus dieser Stellung durch eine Viertelumdrehung so, dass die Oeffnung *o* gerade auf den nach dem Recipienten führenden Canal stösst, so ist der Recipient mit der äusseren Luft in Verbindung; wenn aber *o* gegen die Stiefel gekehrt wird, so ist der Recipient vollständig abgesperrt.

Wie vollkommen man auch alle Theile der Luftpumpe ausarbeiten mag, so ist es doch nicht möglich, den Kolben so herzustellen, dass, wenn er auf dem Boden des Stiefels sitzt, sich nun gar kein Raum mehr zwischen dem Kolben und dem Stiefelboden befände. Ja, selbst wenn der Kolben absolut genau auf den Boden passte, so ist noch ein namhafter Raum unmittelbar unter der unteren Fläche des Kolbenventils. Wenn nun beim Niedergange des Kolbens das Kolbenventil sich hebt, um die zusammengepresste Luft entweichen zu lassen, so bleibt immer noch in dem erwähnten schädlichen Raume etwas Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre zurück. Denken wir uns nun während des Aufsteigens des Kolbens den Recipienten abgeschlossen, so wird sich die Luft des schädlichen Raumes in dem ganzen Stiefelraume verbreiten,

und ihre Dichtigkeit wird sich nun zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft gerade so verhalten, wie das Volumen des schädlichen Raumes zum Volumen des ganzen Stiefels. Wenn nun die im Recipienten zurückgebliebene Luft auch schon bis zu diesem Grade verdünnt ist, so ist klar, dass durchaus keine Luft mehr aus dem Recipienten in den Stiefel übergehen kann, wenn auch eine Verbindung zwischen beiden besteht, und somit ist denn die Grenze der Luftverdünnung mittelst einer gewöhnlichen Luftpumpe gegeben. Hat man einmal diesen Punkt erreicht, so ist alles fernere Pumpen nutzlos, die Barometerprobe bleibt stationär.

Der nachtheilige Einfluss des schädlichen Raumes lässt sich durch Vorrichtungen vermindern, welche nicht Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur stark verdünnte Luft in den schädlichen Raum eindringen lassen. Am einfachsten lässt sich dies dadurch erreichen, dass man den Stiefel auch oben luftdicht schliesst, die runde Kolbenstange durch eine Stopfbüchse gehen lässt und in der oberen Deckplatte des Cylinders ein Ventil anbringt, welches beim Aufziehen des Kolbens die Luft aus dem oberen Theile des Cylinders entweichen, beim Niedergehen des Kolbens aber keine Luft in den Cylinder eintreten lässt. Bei dieser Einrichtung befindet sich, wenn der Kolben unten ankommt, nur verdünnte Luft über dem Kolbenventil, der schädliche Raum kann sich also auch nur mit verdünnter Luft füllen. Diese Einrichtung wendet u. A. auch Carrée bei seinen für künstliche Eisbereitung construirten Luftpumpen an. Auch Staudinger in Giessen und Stöhrer in Leipzig haben die eben besprochene Einrichtung bei ihren Handluftpumpen in Anwendung gebracht.

Bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen, wie sie oben beschrieben sind, wird derselbe Vortheil durch den Babinet'schen Hahn erreicht.

Das Wesentliche dieser Einrichtung besteht darin, dass, wenn ein gewisser Grad von Verdünnung erreicht ist, die Verbindung des Stiefels *D* mit dem Recipienten abgesperrt, dagegen eine Verbindung des Stiefels *S* mit dem Stiefel *D* hergestellt wird. Nun kann nur noch der Stiefel *S* Luft aus dem Recipienten saugen; wenn aber der Kolben in *S* niedergeht und der in *D* steigt, so wird die unter dem Kolben in *S* befindliche Luft nicht verdichtet, sondern sie wird ohne Verdichtung in den Cylinder *D* hinübergeschafft, so dass, wenn der Kolben in *S* auf dem Boden ankommt, sich im schädlichen Raume keine Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur eine sehr verdünnte Luft befindet.

Wenn nun der Kolben in *S* zu steigen, der in *D* niederzugehen beginnt, so wird die Communication zwischen den beiden Cylindern durch das Bodenventil in *D* unterbrochen und die in *D* unter dem Kolben befindliche Luft durch denselben entfernt.

In den Fig. 537 bis 540 ist der Babinet'sche Hahn mit *h* bezeichnet; seine Einrichtung ist aus Fig. 544 u. 545 (a. f. S.) näher zu ersehen. Auf den Umfang des Hahnes führen drei Canäle; einer nach oben führt

zum Cylinder *D*; einer nach unten führt durch ein Rohr *t*, welches in der vorderen Ansicht der Luftpumpe, Fig. 538, deutlich zu sehen ist, zum Boden des Stiefels *S*, wo es mit einer Oeffnung *v*, Fig. 539, mündet; der dritte vom Hahn nach links gehende Canal endlich führt zum Recipienten. So lange der Hahn die Stellung Fig. 544 behält, welcher auch Fig. 538 und Fig. 540 entspricht, sind beide Cylinder mit dem Recipienten in Verbindung und jeder Cylinder saugt aus dem Recipienten, wenn sein Kolben aufsteigt. Ist man auf diese Weise so weit gekommen, dass ein ferneres Pumpen die Barometerprobe nicht weiter fallen macht, so wird der Hahn *h* um 90 Grade gedreht, so dass er in die Stellung Fig. 545 kommt. Jetzt ist, wie man sieht, die Verbindung zwischen *D* und *S*, d. h. die Verbindung zwischen beiden Stiefeln, hergestellt, aber die Verbindung zwischen dem Stiefel *D* und dem Recipienten *R* unterbrochen. Nun wird bei weiterem Pumpen die Barometerprobe von Neuem sinken, bis eine neue weitere Grenze der Verdünnung erreicht ist. Mit Hülfe des Babinet'schen Hahnes lässt sich die Verdünnung ungefähr so weit treiben, dass die Barometerprobe nur noch einen Luftdruck von 1 mm anzeigt.

Fig. 544.

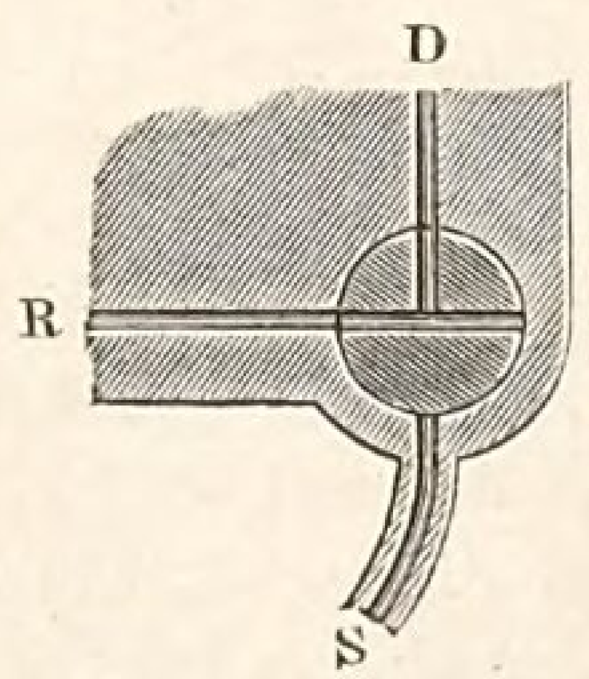
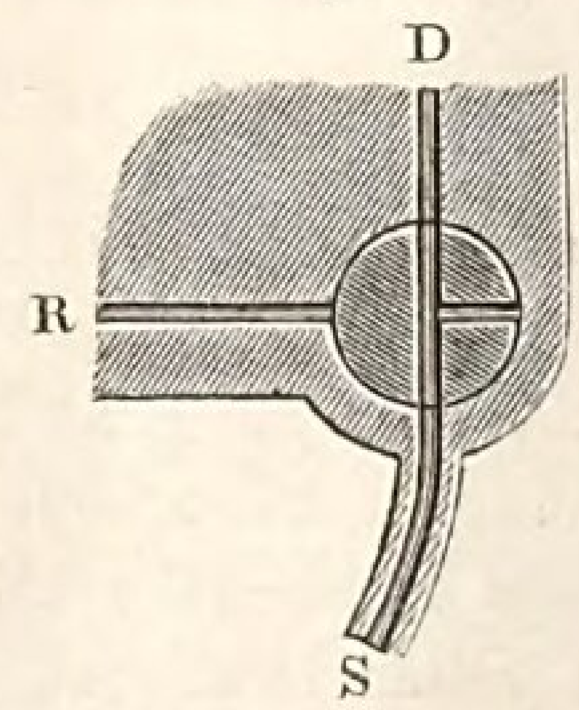


Fig. 545.



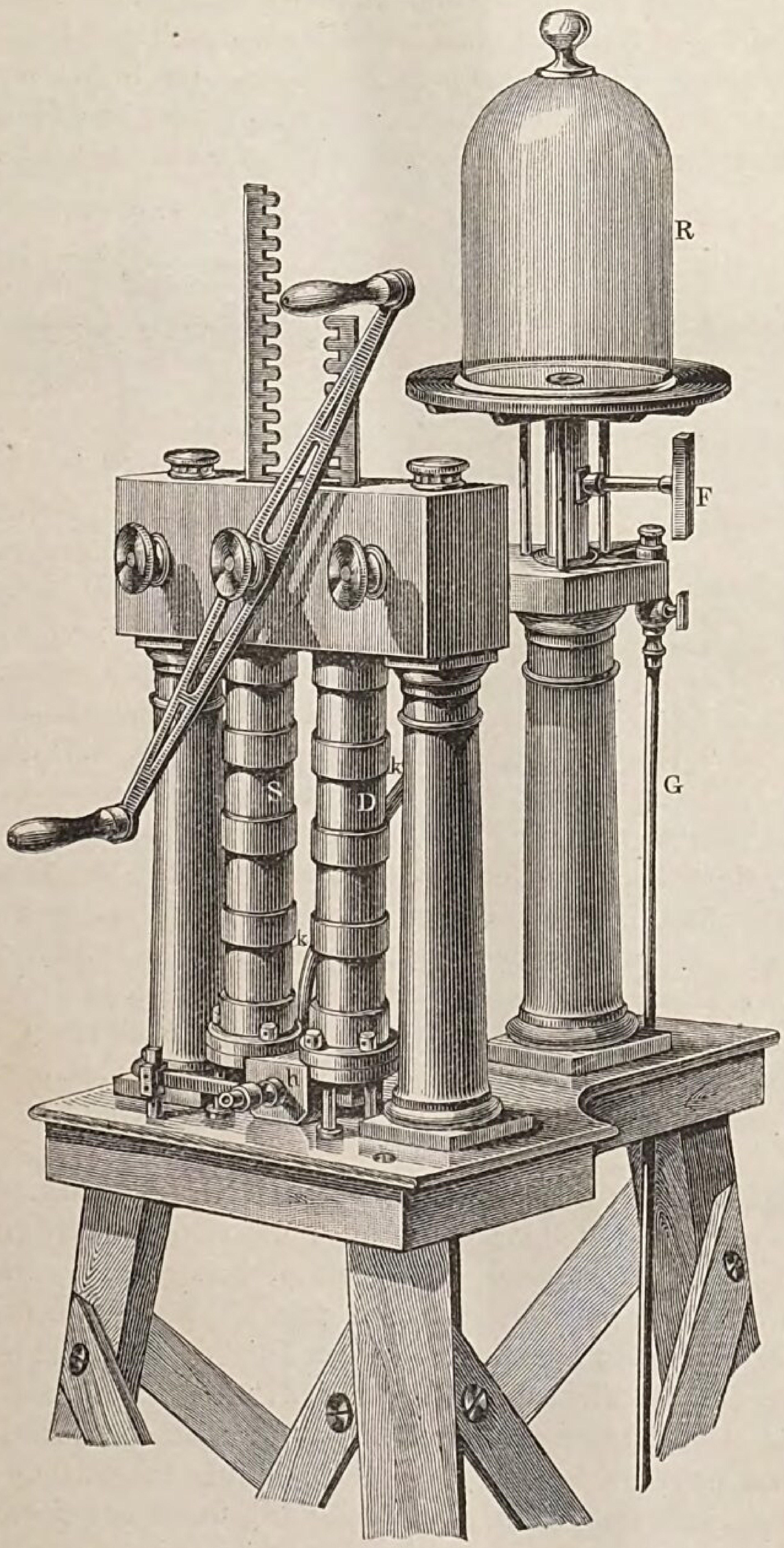
148 **Die zweistiefelige Hahnluftpumpe.** Eine solche Luftpumpe ist in Fig. 546 dargestellt, welche wohl auch ohne detaillirte Beschreibung verständlich sein wird, und zwar um so mehr, da alle Theile mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, wie die entsprechenden Theile der zweistiefeligen Ventilluftpumpe. Von dem Recipienten führt ein Rohr *k*, welches in unserer Figur nur stellenweise sichtbar ist, zu einem Hahn *h*, welcher sich in der Bodenplatte zwischen den beiden Cylindern befindet; je nachdem dieser Hahn gestellt ist, wird durch ihn die Verbindung entweder des einen oder des anderen Stiefels mit dem Recipienten vermittelt, wie dies Fig. 547 und 548 (a. S. 528) erläutern.

Wenn der Hahn die Stellung Fig. 547 einnimmt, so ist durch ihn der Stiefel rechts (*D*) mit dem Recipienten in Verbindung, von dem Stiefel links (*S*) führt aber ein Canal in die äussere Luft, dies ist also die Stellung des Hahns, wenn der, bei dieser Luftpumpe nicht mit einem Ventil versehene Kolben im Stiefel *D* gerade in die Höhe, der in *S* aber niedergeht.

Ist der Kolben in *D* oben, der in *S* unten angekommen, so wird der Hahn *h* durch eine halbe Umdrehung in die Stellung Fig. 548 gebracht, so dass jetzt *S* mit dem Recipienten und *D* mit der äusseren Luft communicirt.

Bei jedem Umsetzen der Kolbenbewegung muss natürlich der Hahn *h* um 180 Grade gedreht werden, was bei vielen derartigen Instrumenten

Fig. 546.



durch eine besondere Vorrichtung (Hahnsteuerung) bewerkstelligt wird, deren Besprechung hier nicht nöthig scheint.

Grassmann hat bereits im Jahre 1819 diesem Hahn eine Einrichtung gegeben, mittelst deren er tauglich wird, bei der zweistiefeligen Hahnluftpumpe dasselbe Princip in Anwendung zu bringen, welches dem Babinet'schen Hahn bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen zu Grunde liegt. Der Hahn ist nämlich mit einer weiteren Durchbohrung *n* versehen, welche rechtwinkelig zu der Ebene der bisher betrachteten Canäle steht. Wird nun der Hahn aus der Stellung Fig. 547 durch eine Viertelumdrehung in die Stellung Fig. 549 gebracht, so sind nun beide

Fig. 547.

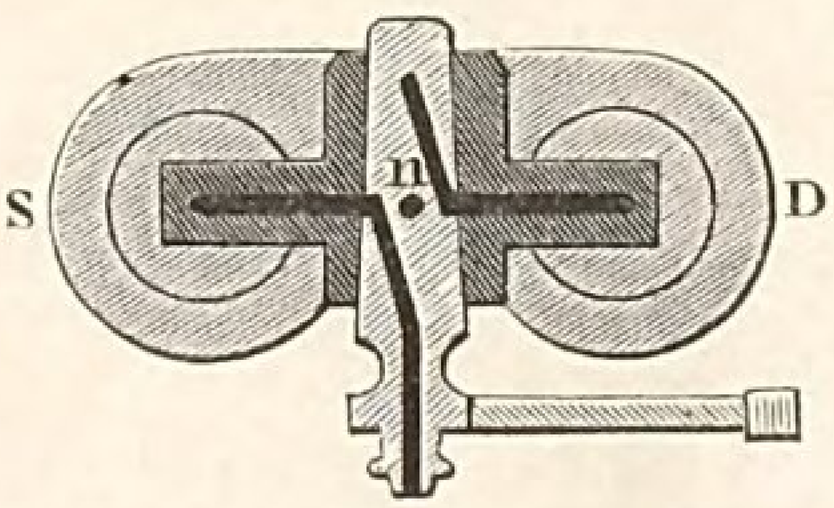


Fig. 548.

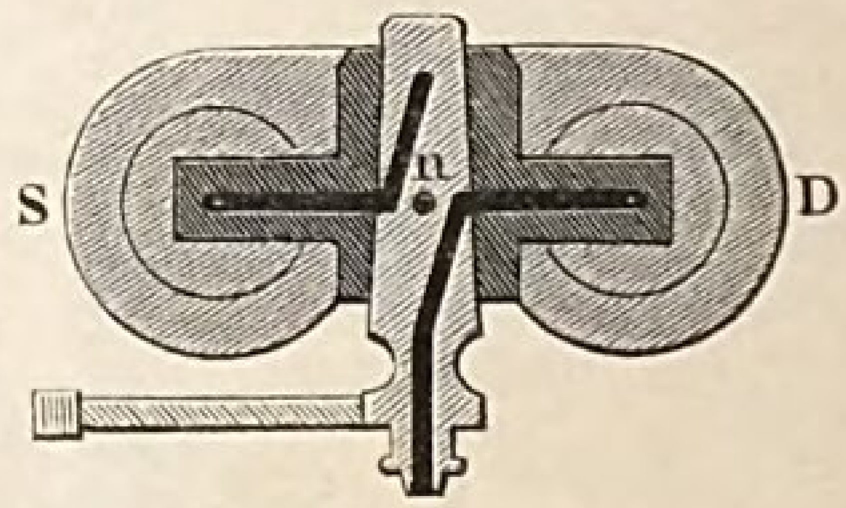
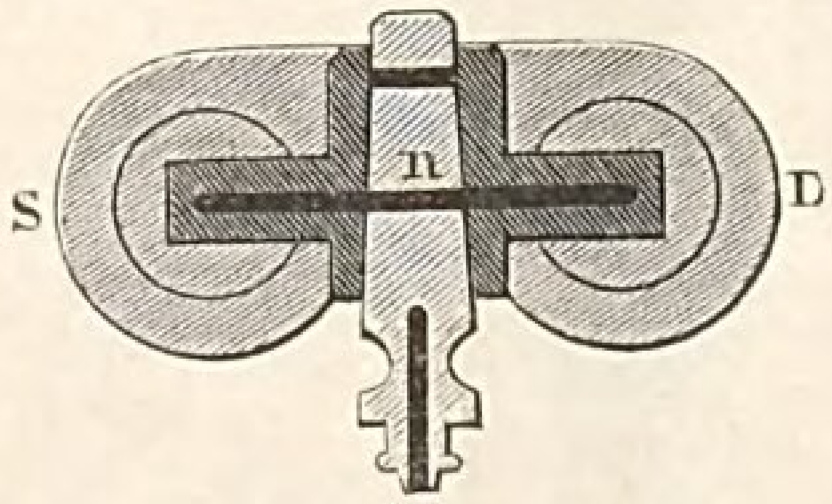


Fig. 549.



Cylinder mit einander verbunden, und beide sowohl vom Recipienten als auch von der äusseren Luft abgesperrt.

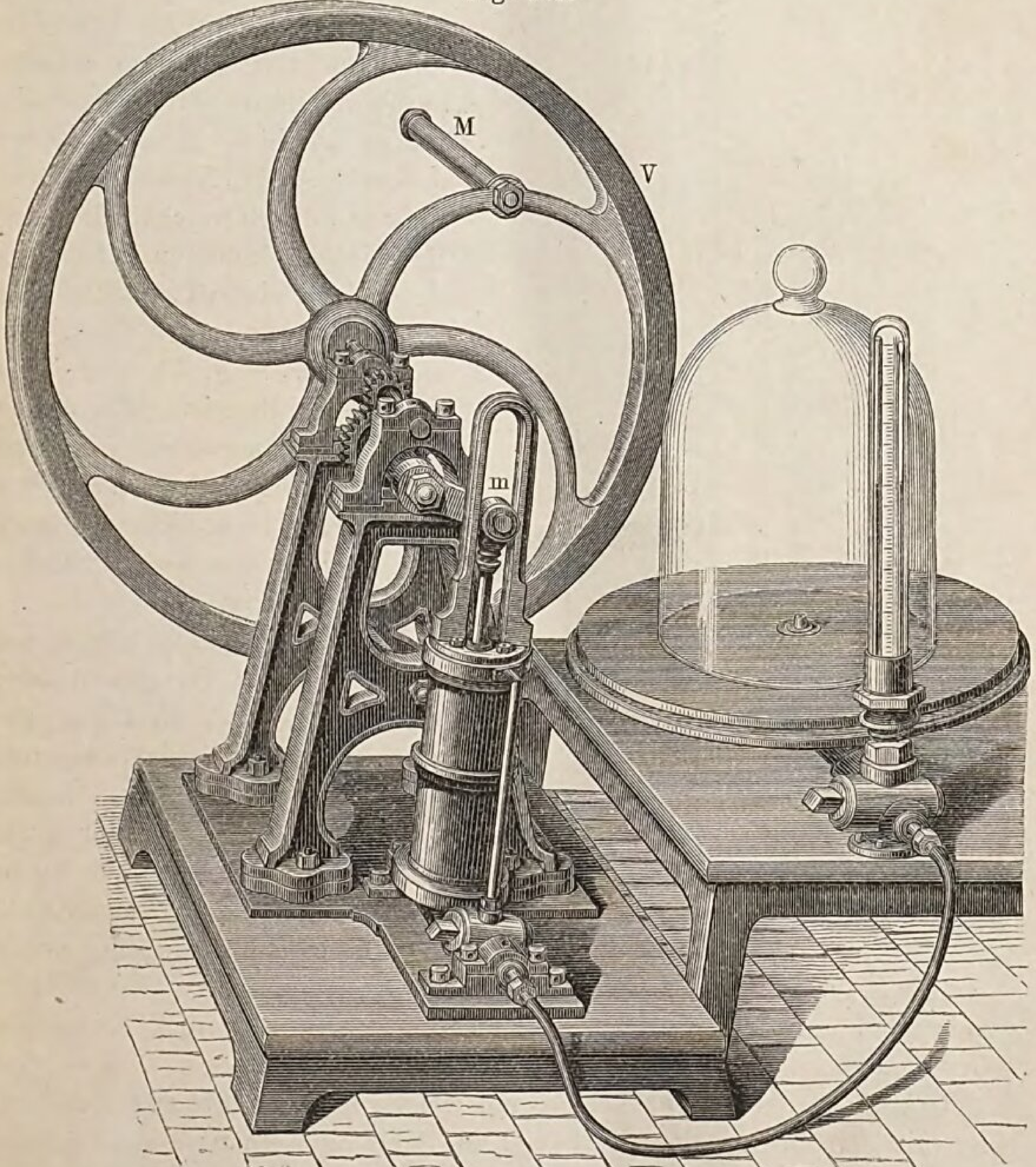
Nachdem nun durch die oben beschriebenen Manipulationen, bei welchen der Hahn abwechselnd aus der Stellung Fig. 547 in die Stellung Fig. 548 gebracht wird, die so mögliche Grenze der Verdünnung erreicht ist, wird von nun an, wenn der Cylinder *S* Luft aus dem Recipienten gesaugt hat, der Hahn aus der Stellung Fig. 548 in die Stellung Fig. 549 gebracht, und also beim Niedergange des Kolbens in *S* die unter demselben befindliche Luft in den Cylinder *D* geschafft, so dass, wenn nun der Kolben in *S* unten ankommt, sich nur bedeutend verdünnte Luft im schädlichen Raume befindet. Ehe nun das Aufziehen des Kolbens in *S* wieder beginnt, wird der Hahn wieder in die Stellung Fig. 548 gebracht etc.

149 **Einstiefelig doppelt wirkende Luftpumpen.** Gleichen Effect wie die zweistiefeligen geben auch die einstiefeligen doppelt wirkenden Luftpumpen, d. h. solche, bei welchen, während der Kolben in die Höhe geht, die Luft aus dem Recipienten in den unteren, während er hinabgeht aber in den oberen Theil des Stiefels gesaugt wird. An solchen doppelt wirkenden Luftpumpen, welche übrigens weit weniger verbreitet sind als die zweistiefeligen, hat man in neuerer Zeit noch die Verbesserung angebracht, dass die auf- und abgehende Bewegung des Kolbens durch eine Kurbel vermittelt wird, deren mit einem Schwungrad versehene Achse stets in gleicher Richtung gedreht wird.

Sehr einfach und zweckmässig ist die Construction der doppelt wirkenden Luftpumpe von Bianchi, Fig. 550, deren Spiel durch die

Durchschnittsfigur 551 (a. f. S.) erläutert wird. Durch einen vor B angesetzten Kautschukschlauch, der über eine Drahtspirale gezogen ist, wird der zu evacuirende Recipient mit dem Stiefel verbunden. Beim Niedergange des Kolbens strömt die vom Recipienten kommende Luft durch das Rohr C bei s in den oberen Theil des Cylinders ein, während die im unteren

Fig. 550.



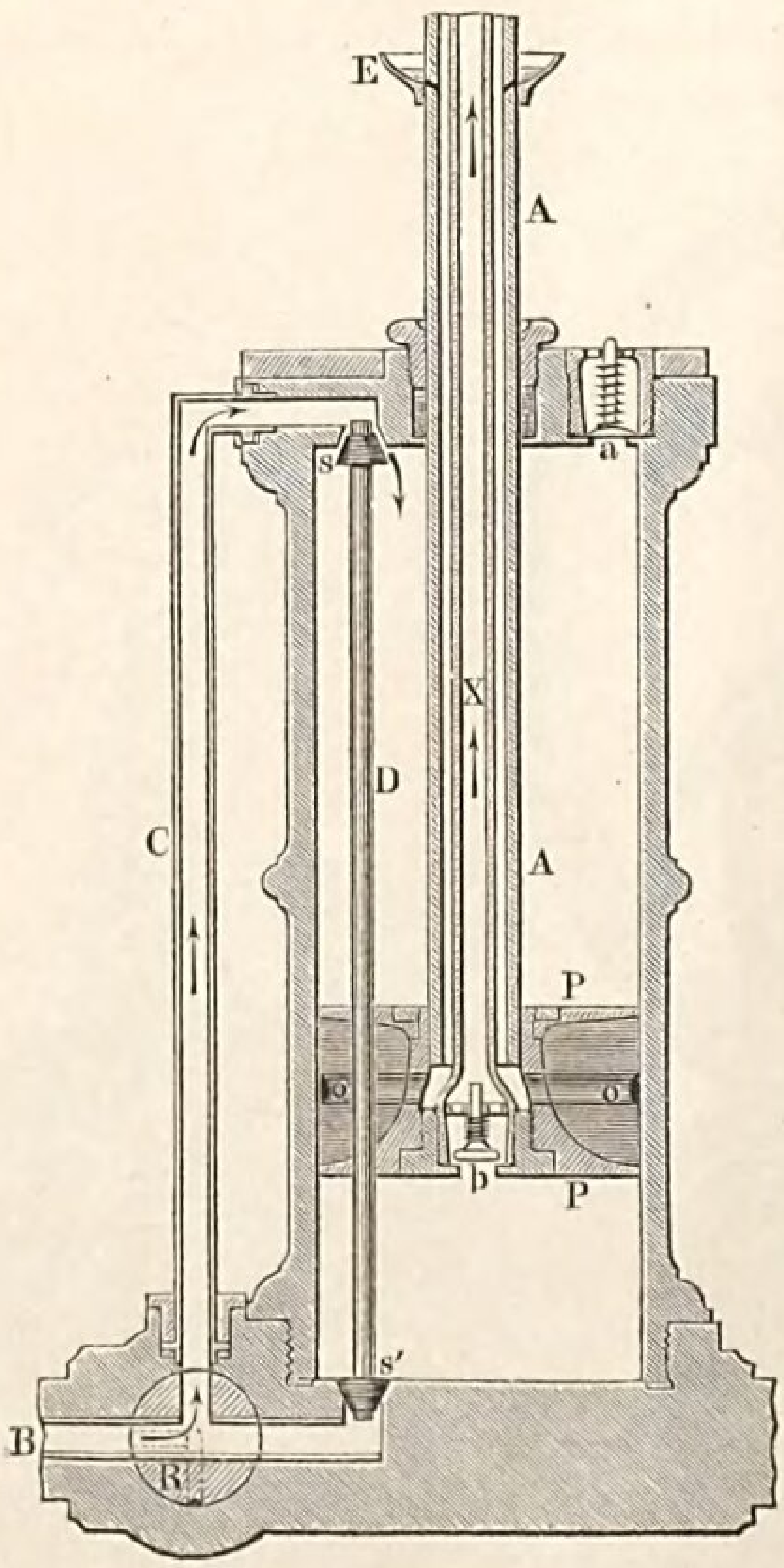
Theile des Cylinders comprimirte Luft durch das Ventil b und die Höhlung X der Kolbenstange entweicht.

Beim Aufgange des Kolbens strömt die vom Recipienten kommende Luft bei s' in den unteren Theil des Cylinders ein, während die in dem oberen Theile desselben befindliche Luft durch das Ventil a entweicht.

Die auf- und niedergehende Bewegung des Kolbens wird bei der Bianchi'schen Luftpumpe dadurch bewerkstelligt, dass das obere Ende der Kolbenstange mit dem Kurbelarme m, Fig. 550, verbunden ist.

Durch Umdrehung des Kurbelarmes *m* wird aber die Kolbenstange nicht allein aufgezogen und dann wieder hinuntergeschoben, sondern ihr oberes Ende wird auch bald nach rechts, bald nach links bewegt. Damit aber die Kolbenstange nach dieser letzteren Bewegung folgen könne, ist der Cylinder um eine mit der Bodenplatte zusammenhängende horizontale Achse drehbar, in deren vorderem Theile bei *B* sich der Canal befindet, durch welchen die vom Recipienten kommende Luft in den Stiefel eintritt, und welche in zwei Zapfenlagern ruht, von welchen in Fig. 550 nur das vordere sichtbar ist. Wenn also die Kurbel umgedreht wird, so muss der Cylinder um diese Achse ganz so oscilliren, wie es bei oscillirenden Dampfmaschinen der Fall ist.

Fig. 551.



Da die Maschine durch ein gleichförmiges Umdrehen des Schwungrades *V* in Gang gesetzt wird, so bedarf sie nur einer sehr geringen Kraftanstrengung und da der gusseiserne Cylinder derselben ziemlich bedeutende Dimensionen hat, so evacuirt sie sehr rasch.

Bei *R* ist ein dem Babinet'schen (S. 526) entsprechender Hahn angebracht, auf dessen nähere Beschreibung wir hier nicht eingehen können.

Um die Nachtheile zu vermeiden, welche die Einfettung des Kolbens mit sich bringt, hat Deleuil in Paris eine einstiefelige doppeltwirkende Luftpumpe mit freiem Kolben, d. h. mit einem Kolben construirt, der nicht fest an die Cylinderwände anschliesst. Der Stiefel ist von Glas, der Kolben von Metall. Der Durchmesser des Kolbens (6 cm) ist $^1/_{20}$ mm kleiner als der des Stiefels. Die Länge des Kolbens, auf dessen Umfang 1 cm von einander abstehend parallel mit der Basis kleine Rinnen eingedreht sind, ist ungefähr doppelt so gross als der Durchmesser.

Die Wirksamkeit dieser Pumpe erklärt sich einerseits durch den Umstand, dass sich Luft in capillaren Räumen nur schwer bewegt,

andererseits aber dadurch, dass in doppeltwirkenden Luftpumpen die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Kolbens stets unbedeutend ist.

Die Vortheile, welche die Deleuil'sche Pumpe bietet, beruhen vorzugsweise darin, dass keine Kolbenreibung stattfindet und dass alle Verunreinigung der Ventile durch Fett wegfällt. Deleuil brachte mit diesem Instrument unter Anwendung eines Babinet'schen Hahnes in einem Recipienten von 1 Liter Inhalt eine Luftverdünnung bis zu 4 mm Quecksilberdruck hervor.

Hochgesang in Ohrdruf bei Gotha hat eine zweistiefelige doppeltwirkende Luftpumpe construirt, welche natürlich sehr rasch evacuirt.

Die wichtigsten Luftpumpenversuche. Otto von Guericke machte mit seiner Maschine den merkwürdigen Versuch mit den 150

Fig. 552.

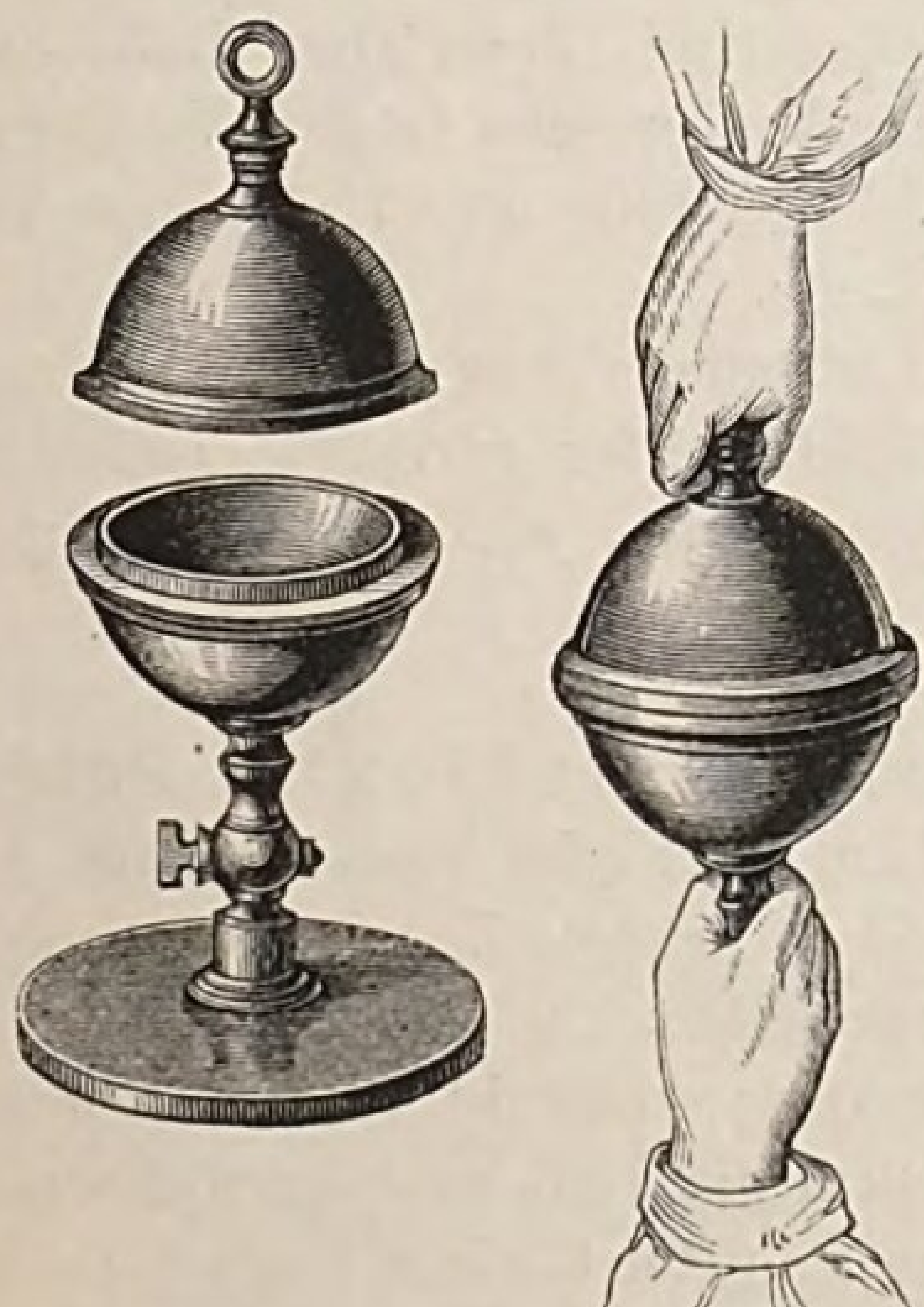


Fig. 553.

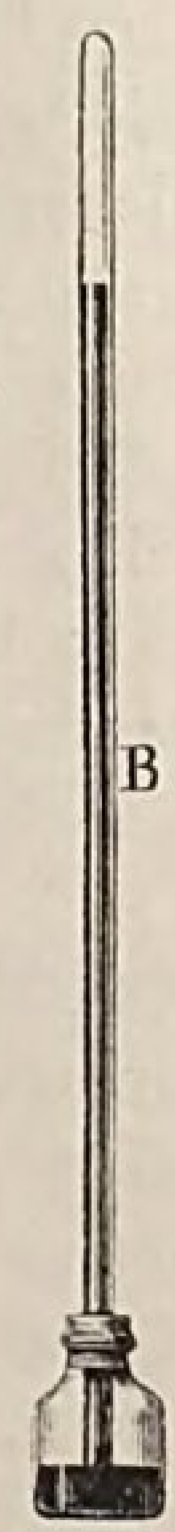
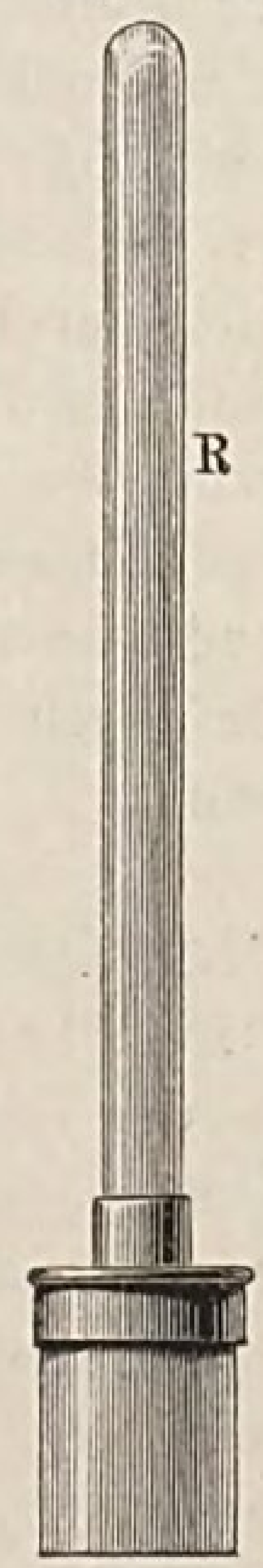


Fig. 554.



Magdeburger Halbkugeln, welcher darin bestand, eine Hohlkugel von Metall, deren Hälften, Fig. 552, nur einfach auf einander gesetzt waren, luftleer zu machen. Ehe die Luft ausgepumpt ist, sind die beiden Hälften leicht zu trennen, wenn aber im Inneren keine Luft mehr vorhanden ist, um dem äusseren Luftdrucke das Gleichgewicht zu halten, so haften sie ausserordentlich stark zusammen. Mag z. B. der Radius der Kugel nur 1 dm sein, so beträgt der Querschnitt der Kugel 314 qcm, und demnach beträgt der äussere Druck, welcher die Hälften zusammenpresst, mehr als 314 kg. Um den Contact vollständiger zu machen, be-

schmiert man die Ränder der Halbkugeln, welche auf einander gesetzt werden, mit Fett, wie eine auf den Teller der Luftpumpe zu setzende Glocke; ein Hahn, welcher während des Auspumpens geöffnet ist, wird, bevor man die zusammengedrückten Halbkugeln von der Luftpumpe abschraubt, geschlossen, um den Wiedereintritt der Luft zu verhindern.

Dass der Druck der Atmosphäre es ist, welcher das Quecksilber ins Barometerrohr hinaufdrückt, lässt sich sehr schön mittelst der Luftpumpe zeigen. Ein Barometer von der durch Fig. 553 (a. v. S.) erläuterten Einrichtung wird unter dem langen und engen Recipienten R, Fig. 554, (a. v. S.) auf den Teller der Luftpumpe gebracht. Wird nun evacuirt, so wird der Druck vermindert, welcher auf dem Quecksilberspiegel im Gefäss g lastet, das Quecksilber in der Röhre sinkt; es steigt wieder, sobald die Luft wieder zugelassen wird.

Unter den vielen Luftpumpenversuchen wollen wir nur noch einige andeuten. Man zeigt z. B. mit Hülfe der Luftpumpe, dass brennende Körper im luftleeren Raume verlöschen; dass der Rauch wie ein schwerer Körper zu Boden fällt; dass Luft im Wasser absorbirt enthalten ist; dass sich eine Luftschicht zwischen den Flüssigkeiten und den Wänden der Gefässe befindet, in welchen sie enthalten sind, denn diese Luftschicht zeigt sich durch eine Menge kleiner Bläschen, welche in dem Verhältniss wachsen, als der Luftdruck abnimmt. Mit Hülfe der Luftpumpe kann man laues Wasser zum Kochen bringen etc.

Von einigen Versuchen mit der Luftpumpe war schon früher die Rede, von anderen, wie z. B. dem Sieden unter geringem Luftdruck, dem Gefrieren durch rasche Verdampfung etc., wird noch später die Rede sein.

151 **Die Quecksilberluftpumpen; Geissler's Pumpe.** Schon früh hat man versucht, das Toricelli'sche Vacuum zum Auspumpen der Luft zu benutzen, aber erst in neuerer Zeit ist es gelungen, brauchbare Quecksilberluftpumpen herzustellen.

Das Princip aller Quecksilberluftpumpen besteht darin, dass man den Recipienten R, Fig. 555, aus welchem die Luft ausgepumpt werden soll, mit dem Toricelli'schen Raume v mittelst eines Canals in Verbindung setzt, welche Verbindung beispielsweise durch einen Hahn h hergestellt oder unterbrochen werden kann. Die Luft aus R wird sich dann zum Theil in das Vacuum begeben und dort einen Druck auf die Quecksilbersäule ausüben, wodurch die Höhe derselben, die ursprünglich op betrug, desto mehr vermindert wird, je grösser der Raum R und je kleiner der Raum des Vacuums v ist. Sobald der Druck in diesen beiden Räumen gleich gross geworden, kommt auch das Quecksilber zur Ruhe. Man hat nun den Hahn h zu schliessen und das Toricelli'sche Vacuum aufs Neue herzustellen. Je nach der Art, wie man das letztere bewerkstelligt, unterscheidet man zwei verschiedene Systeme von Quecksilberluftpumpen. Bei dem ersten System (welches wir System Geissler

nennen wollen) nimmt man die Füllung mit dem Quecksilber von unten nach oben vor und entfernt die Luft am oberen Ende aus der Röhre. Zu diesem Zwecke kann man, wie Fig. 556 schematisch andeutet, den offenen Schenkel des Heberbarometers durch einen Kautschukschlauch mit dem verschlossenen Schenkel verbinden und durch Anheben des ersteren das Quecksilber auch in letzterem zum Ansteigen veranlassen. Zum Austritte der Luft dient der Hahn h' an dem oberen Ende der Röhre, bis zu dem, oder über welchen hinaus man das Quecksilber steigen lässt.

Fig. 555.

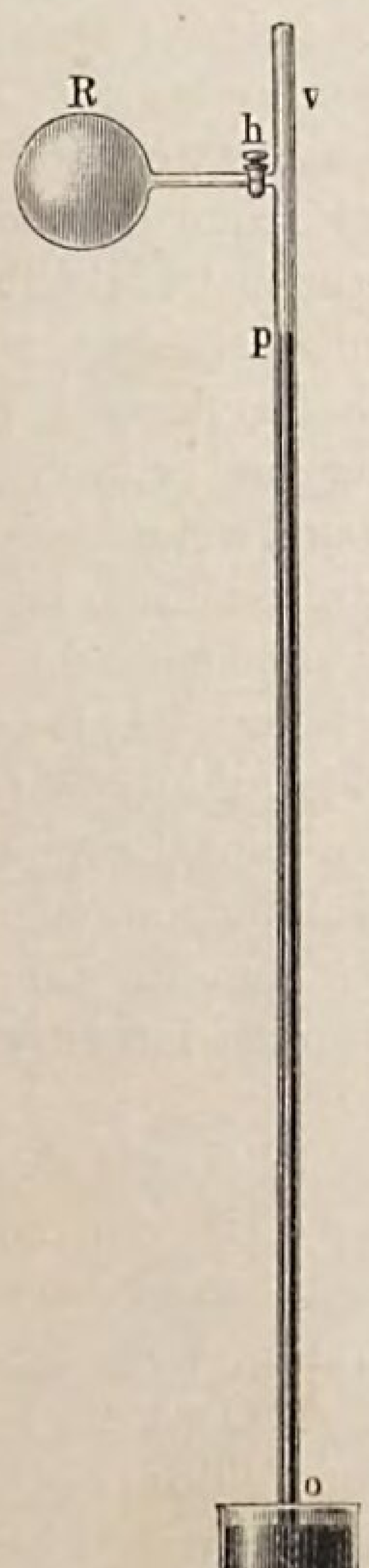


Fig. 556.

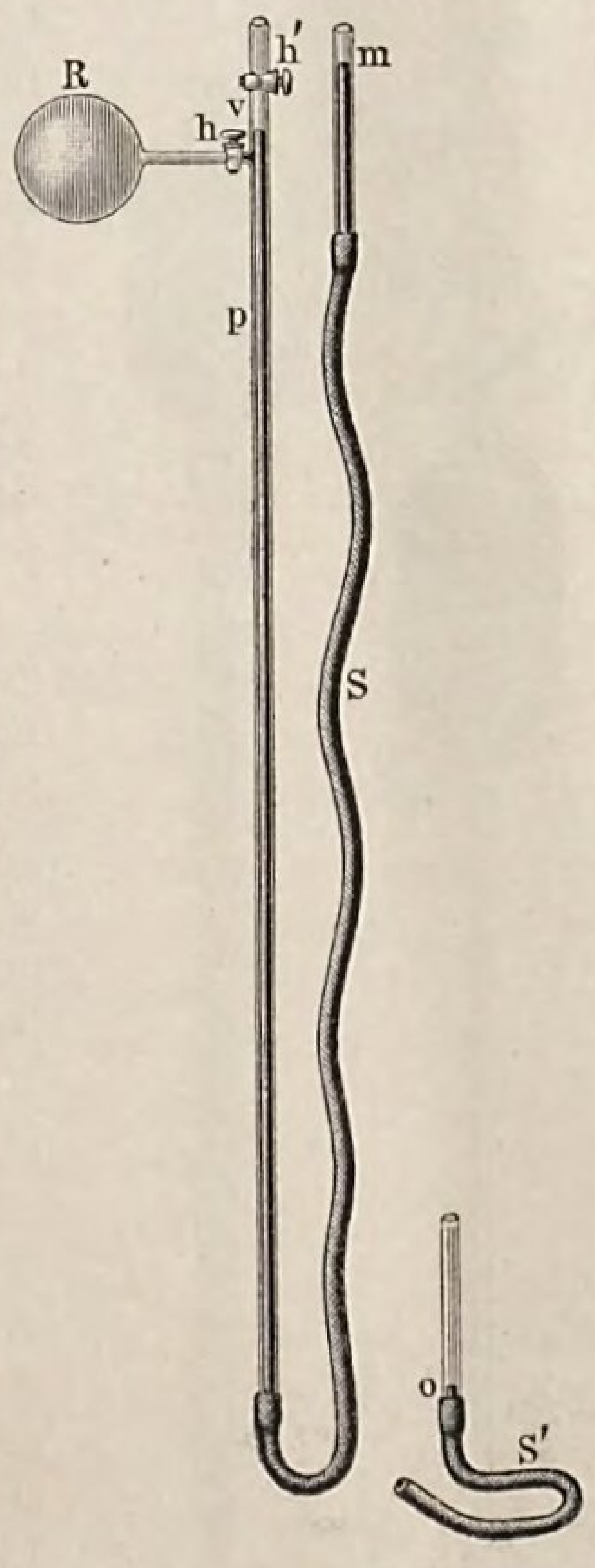
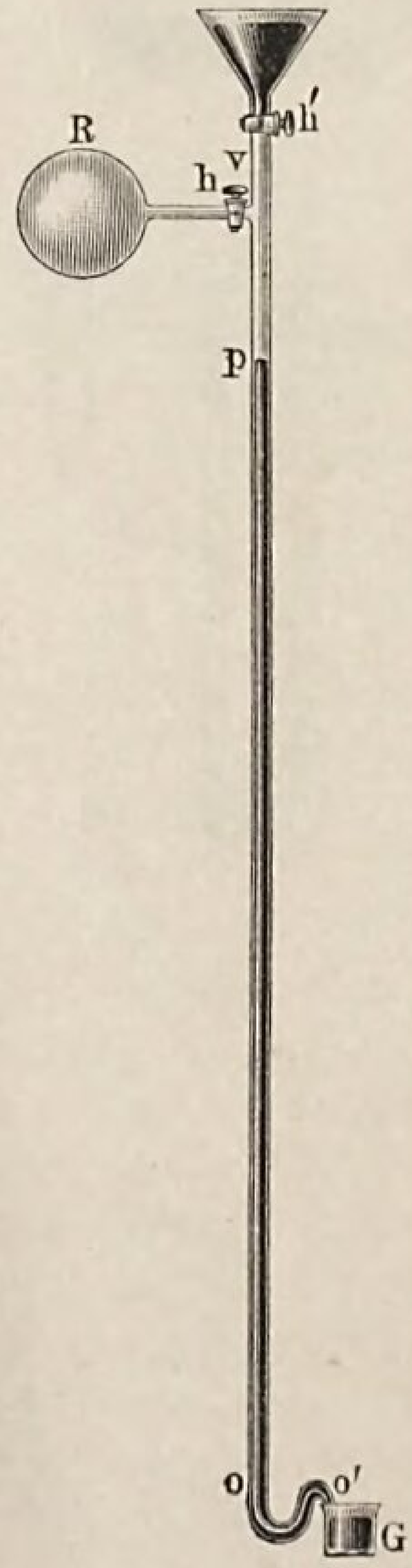


Fig. 557.

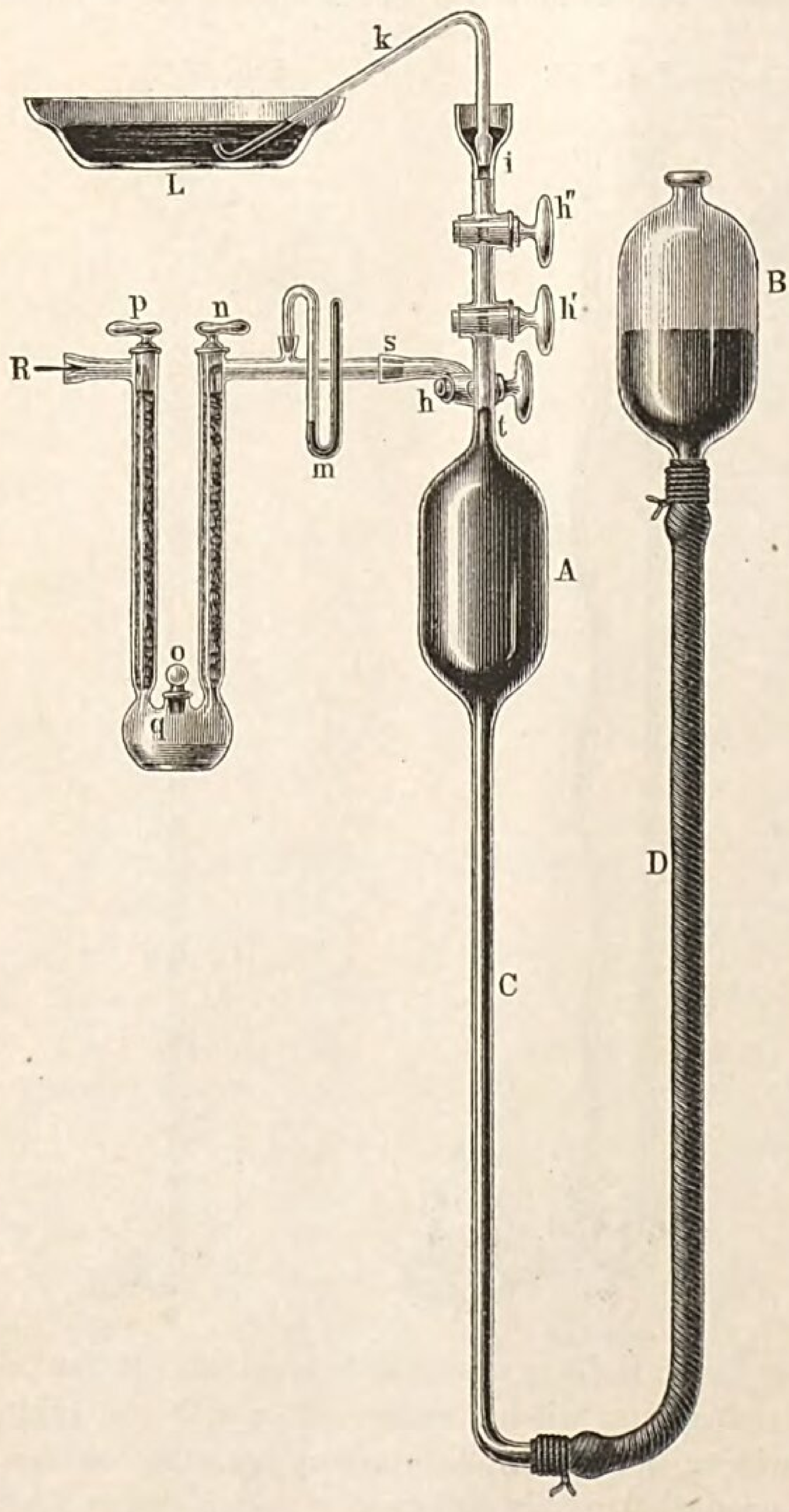


Schliesst man dann wieder diesen Hahn, senkt den beweglichen Schenkel S in die Lage S', so ist das Vacuum wieder hergestellt und kann durch Oeffnung des Hahnes h wieder mit R in Verbindung gesetzt werden. Dieses Spiel ist so oft zu wiederholen, bis zwischen q und h' keine Luft mehr vorhanden ist.

Bei dem zweiten System von Quecksilberluftpumpen (System Sprengel) wird die Neufüllung mit Quecksilber von oben nach unten vorgenommen und die Luft am unteren Ende aus der Röhre geschafft.

Fig. 557 (a. v. S.) zeigt die dazu nöthige schematische Anordnung. Das Quecksilber fliesst in vollem Strahle aus dem Trichter T durch den Hahn h' in den Raum oberhalb p, drängt die Luft vor sich her nach dem unteren Ende und von dort durch die Oeffnung o' hinaus. Das mit ausfliessende Quecksilber wird in einem untergesetzten Gefässe G aufgefangen. Man erkennt sofort, dass es in diesem Falle nicht nöthig ist, den Hahn h wechselweise mit h' zu öffnen und zu schliessen. Man kann beide Hähne gleich offen lassen, so lange das Auspumpen andauert. Die Luftquantitäten, welche sich zwischen die niederfliessenden Quecksilbersäulen einschalten, werden immer kleiner und kleiner und verschwinden ganz, wenn das Auspumpen zu Ende ist.

Fig. 558.



Die schematisch angedeuteten Apparate, Fig. 556 und 557, erfordern eine Reihe von Vervollkommnungen, die wir nun im Einzelnen kennen lernen wollen.

Die Geissler'sche Pumpe ist in ihren Hauptbestandtheilen durch Fig. 558 dargestellt. $A\,C$ ist die feststehende Toricelli'sche Röhre, welche bei A sich zu einem 1 bis $1^1/_2$ Liter fassenden Gefässe erweitert. D ist der bewegliche Schenkel aus starkem, nicht vulcanisirtem übersponnenem Kautschukrohr, B das bewegliche Gefäss, welches durch eine mechanische Vorrichtung gehoben und gesenkt werden kann.

Das Gefäss A mündet bei t in eine vertical ansteigende Röhre $t\,i$, welche sich am oberen Ende in ein trichterförmiges Gefäss i erweitert.

Nahe über dem Punkte *t* geht nach rückwärts ein Seitenrohr, welches durch einen Glashahn *h* geschlossen werden kann. Dieses Rohr endet bei *s* in ein Schliffstück, durch welches die Verbindung mit dem Trockenapparat sammt Barometerprobe und dem bei *R* anzusetzenden Recipienten, welcher evacuirt werden soll, hergestellt wird. Der Trockenapparat besteht aus dem Gefässe *q*, welches mit den beiden aufsteigenden Trockenröhren und den Röhrenfortsätzen bis *R* und bis *s* ein Ganzes bildet. Die Hähne *p* und *n* dienen dazu, den Trockenapparat von dem Recipienten *R* und der Pumpe absperren zu können. Ein Stöpsel *o* gestattet die Entleerung und Erneuerung der Schwefelsäure (oder Phosphorsäure) in *q*. Die Röhren enthalten Bimssteinstücke, welche mit Schwefelsäure befeuchtet sind. Das abgekürzte Barometer *m* ist mittelst Schliffstückes in eine nach oben gerichtete Oeffnung der horizontalen Röhre eingesetzt.

Zwischen *t* und *i* befinden sich noch zwei Hähne *h'* und *h''*, von denen der zweite nicht unbedingt erforderlich, aber zur Erreichung eines vollkommenen Vacuums sehr dienlich ist*). Bei *i* kann noch ein eingeschliffenes krummes Glasrohr *k* eingesetzt werden, welches die ausgepumpten Gase in eine pneumatische Wanne *l* überzuführen gestattet. Die vollkommene Dichtung bei *i* wird durch etwas eingegossenes Quecksilber sicher gestellt.

Die Glashähne werden am besten durch eine Mischung von reinem Wachs mit reinstem Vaselin (einem mineralischen Fette) eingefettet. Diese Mischung kann in verschiedenem Grade von Dickflüssigkeit hergestellt werden, entwickelt keine Dämpfe und verharzt nicht**).

Das Auspumpen erfordert nun folgende Operationen:

Die Hähne *p*, *n*, *h'* und *h''* sind offen, *h* wird geschlossen, das Gefäss *B* so weit gehoben, dass das Quecksilber von *A* über den Hahn *h'* emporsteigt. Nun wird *h'* geschlossen, *B* gesenkt, *h* geöffnet. *A* füllt sich mit Luft aus dem Recipienten *R*. Hierauf wird wieder *h* geschlossen, *h'* geöffnet und *B* gehoben wie früher und so fort. Ist auf diese Weise beinahe alle Luft hinausgeschafft, was man daran erkennt, dass beim Ansteigen des Quecksilbers in *t* nur noch ein kleines Bläschen übrig bleibt, wobei auch die Barometerprobe *m* nahezu den Druck Null anzeigt, so kann man, wenn nöthig, die Evacuirung noch weiter vervollkommnen, indem man von jetzt an auch den obersten Hahn *h''* mit benutzt, welcher bisher offen gestanden ist. Man lässt zu diesem Behufe das Quecksilber bis über *h''* ansteigen, schliesst dann *h''*, senkt *B*, bis das Quecksilber unter *h'* gesunken, schliesst nun *h'* und senkt dann erst bis zur Entleerung des Gefässes *A*. Oeffnet man nun *h* und schliesst wieder, hebt dann das Quecksilber wiederum bis zum Hahn *h'*, so kann

*) Bei den Geissler'schen Pumpen älterer Construction fehlte der zweite Hahn.

**) Röntgen, Wied. Ann. XXIII, S. 26.

man die dort zusammengedrückte Spur von Luft durch Oeffnen von h' mit dem Vacuum zwischen h' und h'' in Verbindung setzen. Hierdurch wird dieselbe verhindert, am Glase zu adhäriren, von wo sie sich sonst bei Wiederherstellung des Vacuums in A in demselben ausbreiten könnte.

Fig. 559.

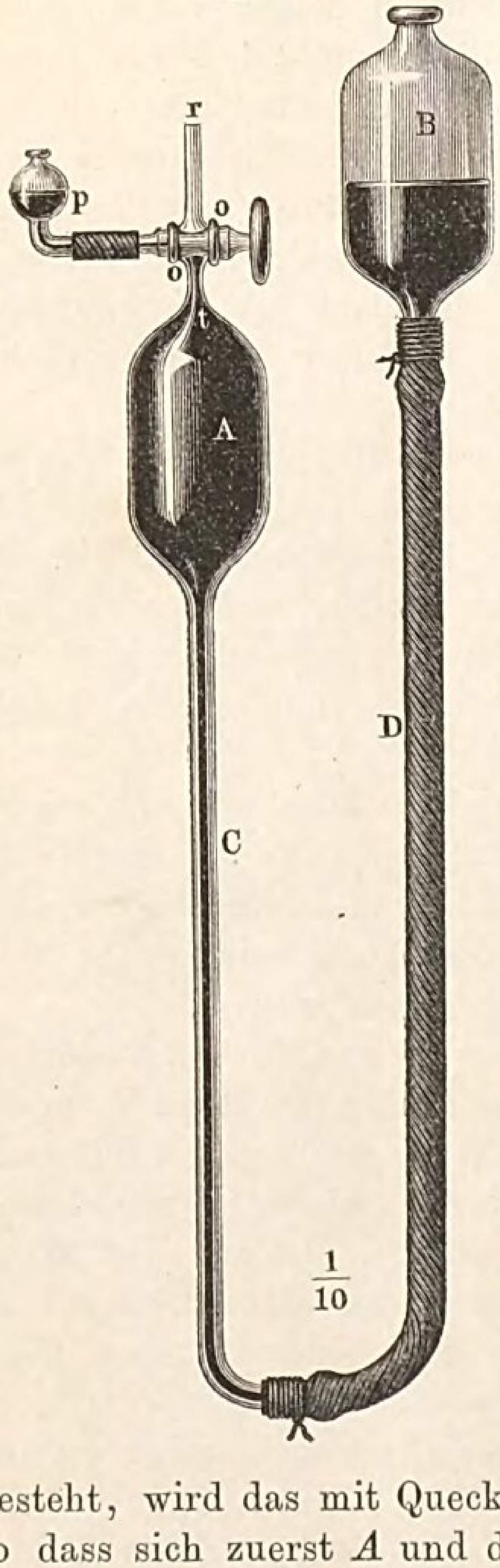
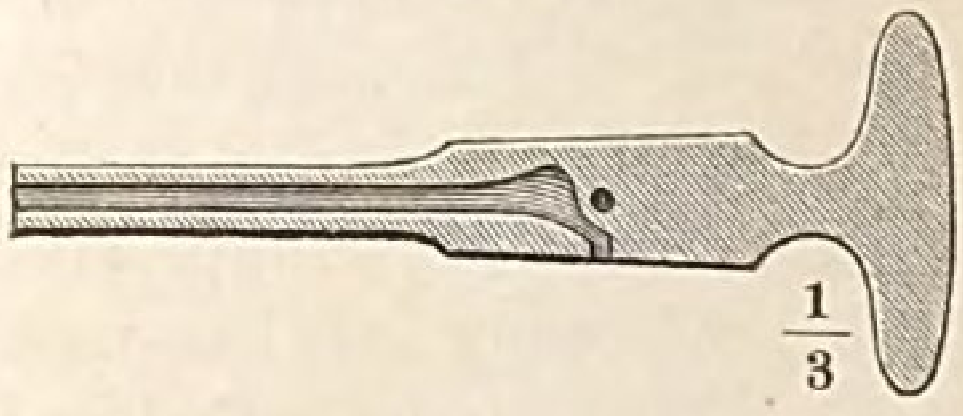


Fig. 560.



Das Vacuum zwischen den Hähnen h' und h'' wirkt also analog der Vorrichtung von Babinet.

Beim Gebrauch der Pumpe ist Vorsicht nöthig, damit das Quecksilber nicht zu rasch in das Vacuum einströme, da sonst durch den harten Anprall des Quecksilbers dieselbe zerschlagen werden könnte.

Statt der oben beschriebenen Einrichtung mit den Hähnen h und h' findet man manchmal eine abweichende Construction, bei welcher diese beiden Hähne durch einen einzigen nach dem Princip des Senguerd'schen durchbohrten Hahnes ersetzt sind.

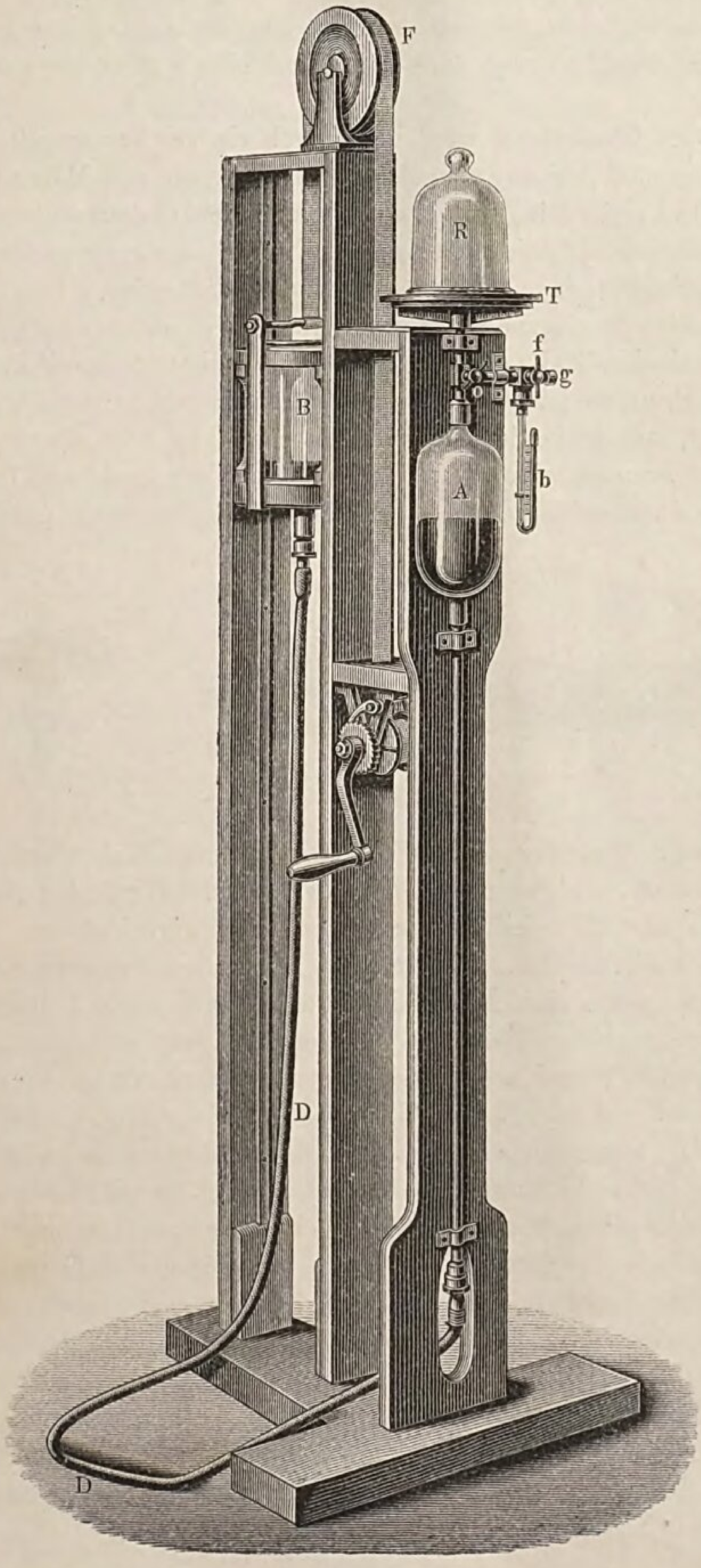
Fig. 559 zeigt diese ältere Construction *), Fig. 560 den Hahn für sich. Je nach Stellung des Hahnes ist durch ihn die Verbindung zwischen t und r oder t und p hergestellt. Das Spiel des Apparates ist dann folgendes:

Wenn der Hahn bei o so gestellt ist, dass Verbindung zwischen A und p besteht, wird das mit Quecksilber gefüllte Gefäss B langsam gehoben, so dass sich zuerst A und dann auch p ungefähr so weit füllt, wie es die Figur zeigt. Alsdann wird der Hahn um 45^0 gedreht (an welcher Drehung auch die Kugel p Theil nimmt) und dadurch alle Verbindung von A nach oben abgesperrt. Wird nun B allmälig gesenkt, so sinkt auch das Quecksilber in A und es entsteht hier eine Toricelli'sche Leere, mit welcher man den Recipienten durch eine abermalige Drehung des Hahnes um 45^0 (durch welche nun die Kugel p in eine solche Lage

*) Die neueren Geissler'schen Pumpen mit Senguerd'schem Hahn haben noch einen zweiten gewöhnlichen Hahn oberhalb des ersteren.

gebracht wird, dass ihr Mittelpunkt in gleicher Höhe mit der Achse des Hahnes sich befindet) in Verbindung setzt.

Fig. 561.



Ist dann ein Theil der Luft aus dem Recipienten nach A übergegangen, so wird der Hahn zunächst wieder um 45^0 zurückgedreht und durch Hebung von B die Luft in A comprimirt, welche dann nach abermaliger Rückdrehung des Hahnes um 45^0 (also nachdem er wieder in seine Anfangsstellung gebracht worden ist) durch das Quecksilber in p ausgetrieben wird, worauf dann dieselbe Reihe von Operationen wiederholt wird.

Statt des Glashahnes wird wohl auch ein solcher aus Stahl verwendet, wie dies z. B. bei den Quecksilberluftpumpen von Morren und von Jolly der Fall ist. Die Abbildung des letzteren Instrumentes in Fig. 561 (a. v. S.) lässt zugleich die mechanische Einrichtung ersehen, wodurch das Heben und Senken des Gefässes B bewerkstelligt wird. Das Gefäss A ist oben und unten in eiserne Fassungen eingekittet, deren obere den Teller T trägt, und mit dem Hahn o versehen, während die untere mit dem eisernen Rohre C verbunden ist. Der Hahn o, dessen Einrichtung Fig. 562 deutlicher zeigt, unterscheidet sich von dem in Fig. 560 dargestellten dadurch, dass er noch einen Canal K hat, welcher rechtwinklig steht zu der gerade durchgehenden, mit dem Griffe des Hahnes o parallel laufen-

Fig. 562.

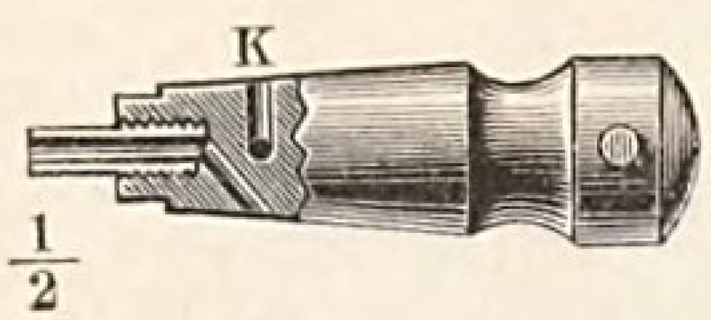


Fig. 563.

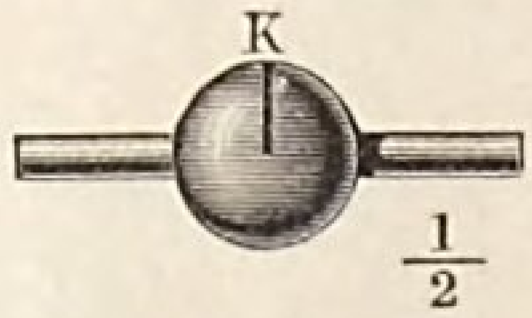
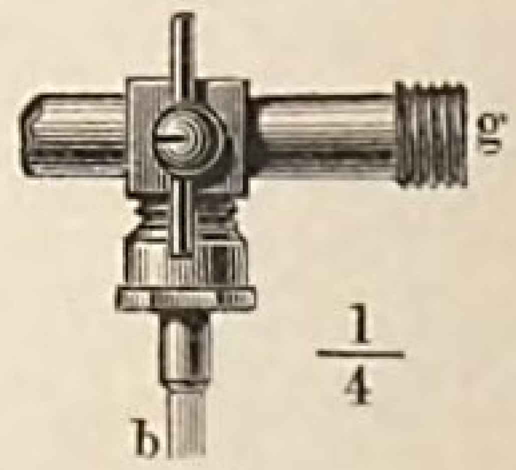


Fig. 564.



den Bohrung. Auf der einen Seite der vorderen Hahnenfläche ist eine Linie eingefeilt, welche mit K parallel läuft. Wird der Hahn so gedreht, dass der eingefeilte Strich nach oben gerichtet ist, so steht A durch den schiefen Canal des Hahnes o mit der äusseren Luft in Verbindung, und wenn sich B in seiner höchsten Stellung befindet, so läuft Quecksilber durch das Röhrchen n in ein kleines Gefäss, welches in der Figur nicht sichtbar ist. Nachdem etwas Quecksilber ausgeflossen ist, wird der Hahn um 45^0 so gedreht, dass der eingefeilte Strich nach oben rechts geht. Nun sind alle Verbindungen abgeschlossen und wenn B bis in seine tiefste Stellung herabgelassen wird, so sinkt das Quecksilber in A und über demselben bildet sich ein Toricelli'sches Vacuum, in welches die Luft aus dem Recipienten R einströmt, sobald man den Hahn um 45^0 weiter dreht, so dass der Griff des Hahnes vertical steht und der eingefeilte Strich horizontal nach rechts schaut. Jetzt ist auch die Barometerprobe b mit A in Verbindung und man kann den Grad der Verdünnung ablesen. Hat sich alles ins Gleichgewicht gestellt, so wird der Hahn o wieder um 45^0 zurückgedreht, B in seine höchste Stellung gebracht, der Hahn o nochmals um 45^0 zurückgedreht, um abermals etwas Quecksilber auslaufen zu lassen etc.

Ueber der Barometerprobe ist ein zweiter Hahn *f* angebracht, welcher dem Hahn *o* bis auf den Umstand ganz gleich ist, dass der schiefe Canal mit der Mündung *n* ganz fehlt. In der Stellung des Hahnes *f*, wie ihn Fig. 561 (deutlicher Fig. 564) zeigt, ist die Barometerprobe mit *A* in Verbindung; wird aber der Hahn *f* um 90° so gedreht, dass der Griff wagerecht steht und der eingefeilte Strich nach unten gerichtet ist, so steht die Barometerprobe auch mit der Mischung des eisernen Rohres bei *g* in Verbindung.

In dieser Stellung bleibt der Hahn *f*, wenn es sich darum handelt, kleinere Räume, etwa Geissler'sche Röhren und dergleichen, zu evacuiren. Es wird dann bei *g* eine eiserne Fassung angeschraubt, in welche die Enden der luftleer zu machenden Röhren eingekittet sind. Der Recipient *R* wird entfernt und die Röhrenmündung in der Mitte des Tellers zugeschraubt. Wie der Hahn *o* während der Operation zu verstellen ist, bedarf nach dem Obigen keiner weiteren Erläuterung.

Der Umstand, dass das Quecksilber im Gefässe *B* mit der Luft der Atmosphäre in Berührung kommt, hat den Uebelstand zur Folge, dass es sich dabei oxydirt und auch Spuren von Feuchtigkeit aufnehmen kann.

Das letztere kann man durch Anbringung eines Chlorcalciumrohres verhindern. A. P. Weinhold hat, um die Communication mit der Atmosphäre zu vermeiden, das Gefäss *B* gänzlich verschlossen und daselbst nur eine kleine Luftblase zurückbehalten, welche den harten Anschlag des Quecksilbers zu verhindern bestimmt ist. Begreiflicher Weise muss dann aber die Höhe des Schenkels *D* um die Höhe des Barometerstandes vergrössert werden, indem man zwischen dem Gefässe *B* und dem Schlauche *D* noch eine Röhre von entsprechender Länge einschaltet. Hierdurch bekommt allerdings das ganze Instrument eine unbequeme Höhe.

Die Geissler'sche Pumpe hat noch mancherlei Modificationen erfahren, so hat z. B. v. Babo den Hahn durch Ventile ersetzt. Bei der im nächsten Paragraphen zu beschreibenden Pumpe von Töpler sind diese Ventile selbst wiederum durch Quecksilbersäulen vertreten, welche selbstthätig fungiren.

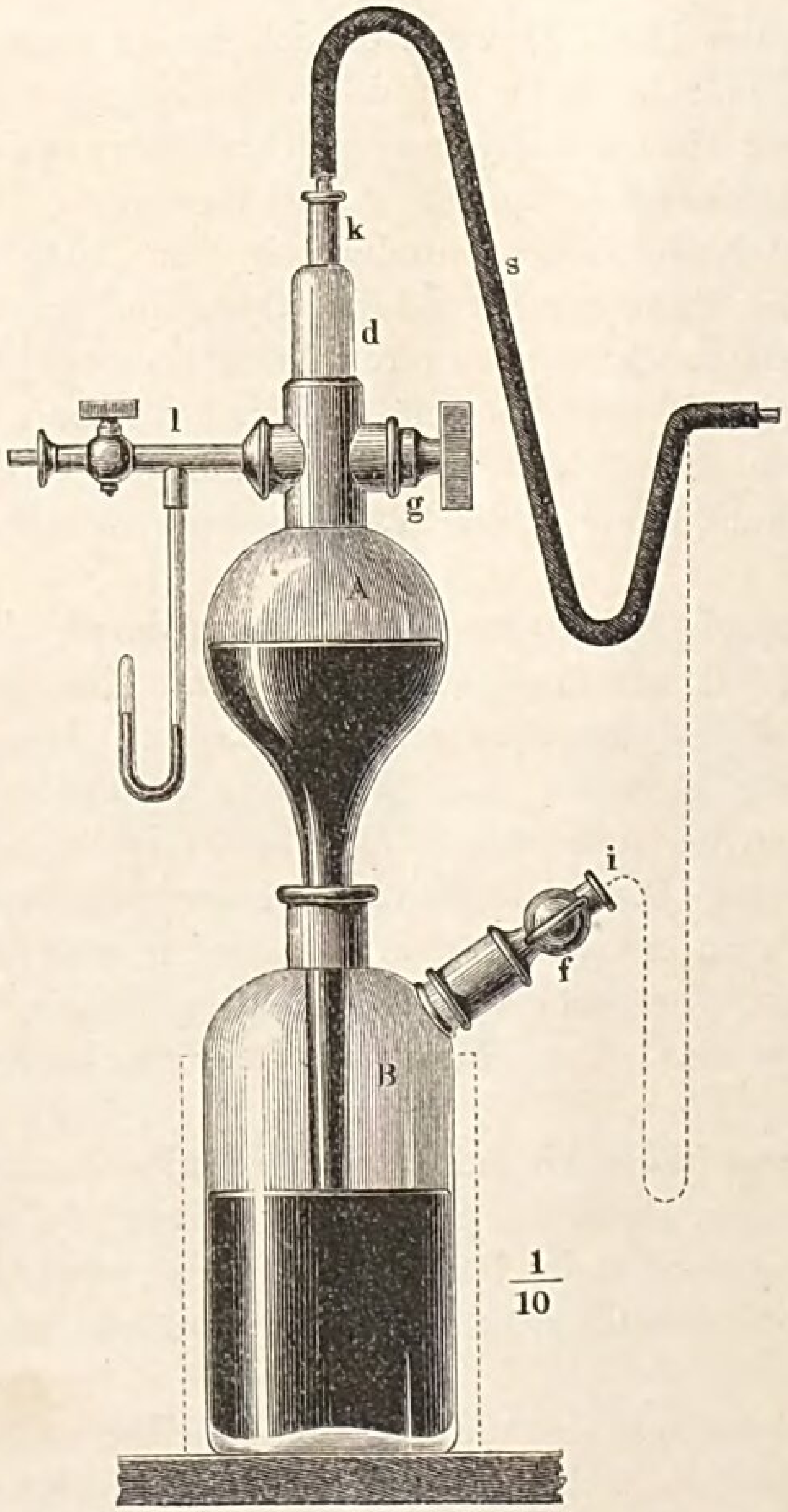
Statt das Quecksilber in *A* dadurch anzuheben, dass man den communicirenden beweglichen Schenkel emporhebt, kann man auch das Quecksilber in letzterem durch einen eingetauchten Körper verdrängen. Bei einer von dem Innsbrucker Mechaniker Kravogl noch vor dem Bekanntwerden der Geissler'schen Pumpe construirten Quecksilberluftpumpe *) wurde durch einen Mechanismus ein Stahlcylinder durch eine Stopfbüchse von unten in das Gefäss *A* hineingeschoben und wieder zurückgezogen und hierdurch das den Stahlcylinder bedeckende Quecksilber gehoben und gesenkt.

*) Beschrieben von A. v. Waltenhofen (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1861, Bd. 44).

Endlich kann die Hubhöhe des Quecksilbers in der Toricelli'schen Röhre nach Poggendorff*) dadurch vermindert werden, dass man eine gewöhnliche Luftpumpe zu Hülfe nimmt.

Der Körper des Poggendorff'schen Instrumentes, Fig. 565, besteht aus zwei Theilen, einer Glasflasche B und einem eiförmigen Gasgefäss A mit einem kurzen Hals nach oben und einem langen nach unten, welche in den Hals der Flasche B eingeschliffen fast auf den Boden derselben hinabreicht.

Fig. 565.



Auf dem oberen Halse von A ist eine eiserne Fassung aufgekittet, welche durch einen Hahn geschlossen werden kann, dessen Bohrung ähnlich der des Geissler'schen ist. Je nach seiner Stellung vermittelt er die Verbindung zwischen A und dem Glasfläschchen d, oder zwischen A und der Röhre l, welche jedoch so befestigt ist, dass sie an der Drehung des Hahnes g nicht Theil nimmt. An dem freien Ende der Röhre l werden die zu evacuirenden Räume sammt Zubehör befestigt.

In die obere Fassung der kleinen Flasche d kann ein hohler Metallzapfen luftdicht eingesteckt werden, welcher das eine Ende des zur Luftpumpe führenden Gummischlauches s bildet.

Auf die Tubulatur der Flasche B ist eine durch den Hahn f verschliessbare Fassung aufgekittet, in welche dasselbe Ende des Kautschukrohres s eingesteckt werden kann, welches jetzt in k steckt.

Zunächst wird der Hahn g so gestellt, dass A und d verbunden sind, und der Schlauch s bei k eingesteckt. Wird nun, während der Hahn f geöffnet bleibt, die Luftpumpe in Bewegung gesetzt, so steigt

*) Pogg. Ann. Bd. 125.

das Quecksilber aus *B* nach *A*. Man fährt mit Pumpen fort, bis auch *d* mit Quecksilber gefüllt ist.

Nun wird durch eine Drehung des Hahnes *g* um 45⁰ alle Verbindung von *A* nach oben abgesperrt, der Schlauch *s* bei *i* eingesteckt und die Luftpumpe abermals in Thätigkeit gesetzt. Das Quecksilber geht von *A* nach *B* herab und in *A* entsteht ein Toricelli'sches Vacuum, mit welchem der Recipient durch eine abermalige Drehung des Hahnes *g* um 45⁰ in Verbindung gebracht wird etc.

Der Sicherheit halber ist das Gefäss *B* in ein weiteres Holzgefäss eingestellt, welches in unserer Figur durch Punktirung angedeutet ist.

Dasselbe Princip kommt bei den complicirteren Quecksilberluftpumpen, welche von Mitscherlich*), Neesen**), A. Schuller***) u. A. angegeben wurden, zur Anwendung. Schuller's Pumpe ist mit einer sehr sinnreichen Steuerung versehen, welche automatisch wirkt, so dass man nur die Hülfspumpe (welche auch eine Wasserluftpumpe sein kann) in Gang zu setzen braucht.

Töpler's Quecksilberluftpumpe ohne Hahn und Ventil. 152

Eine sehr sinnreiche Abänderung der Geissler'schen Pumpe, wodurch die Hähne und Ventile ganz vermieden werden, hat A. Töpler†) angegeben. Wir beschreiben dieselbe hier mit einigen nachträglichen Verbesserungen, welche von Neesen††) und Bessel-Hagen†††) angebracht worden sind. Die Figur 566 (a. f. S.) lässt in perspectivischer Abbildung folgende Theile erkennen:

KA die Toricelli'sche Röhre mit dem Vacuumraum *K*.

SQ den beweglichen Schenkel mit dem anhebbaren Quecksilberreservoir *Q*.

XY die Anhebevorrichtung mit Gestell und Winde.

DO ein seitliches Verbindungsrohr (von Neesen eingeführt, um die heftigen Stösse des Quecksilbers beim Eintritte der Luft aus dem Recipienten zu vermeiden).

OBC das Auslassrohr, welches den Auslasshahn ersetzt. Dasselbe besteht aus einer Röhre in Form eines Heberbarometers *†), deren längerer Schenkel *B* 2 mm weit und 815 mm lang, dessen kürzerer, oben in ein offenes Chlorcalciumrohr mündender Schenkel *C* 13 mm weit und 250 mm lang ist.

*) Pogg. Ann. Bd. 150, S. 420.

**) Wied. Ann. Bd. 13, S. 304, dann Zeitschrift f. Instrumentenkunde 1882, S. 285.

***) Wied. Ann. Bd. 13, S. 528.

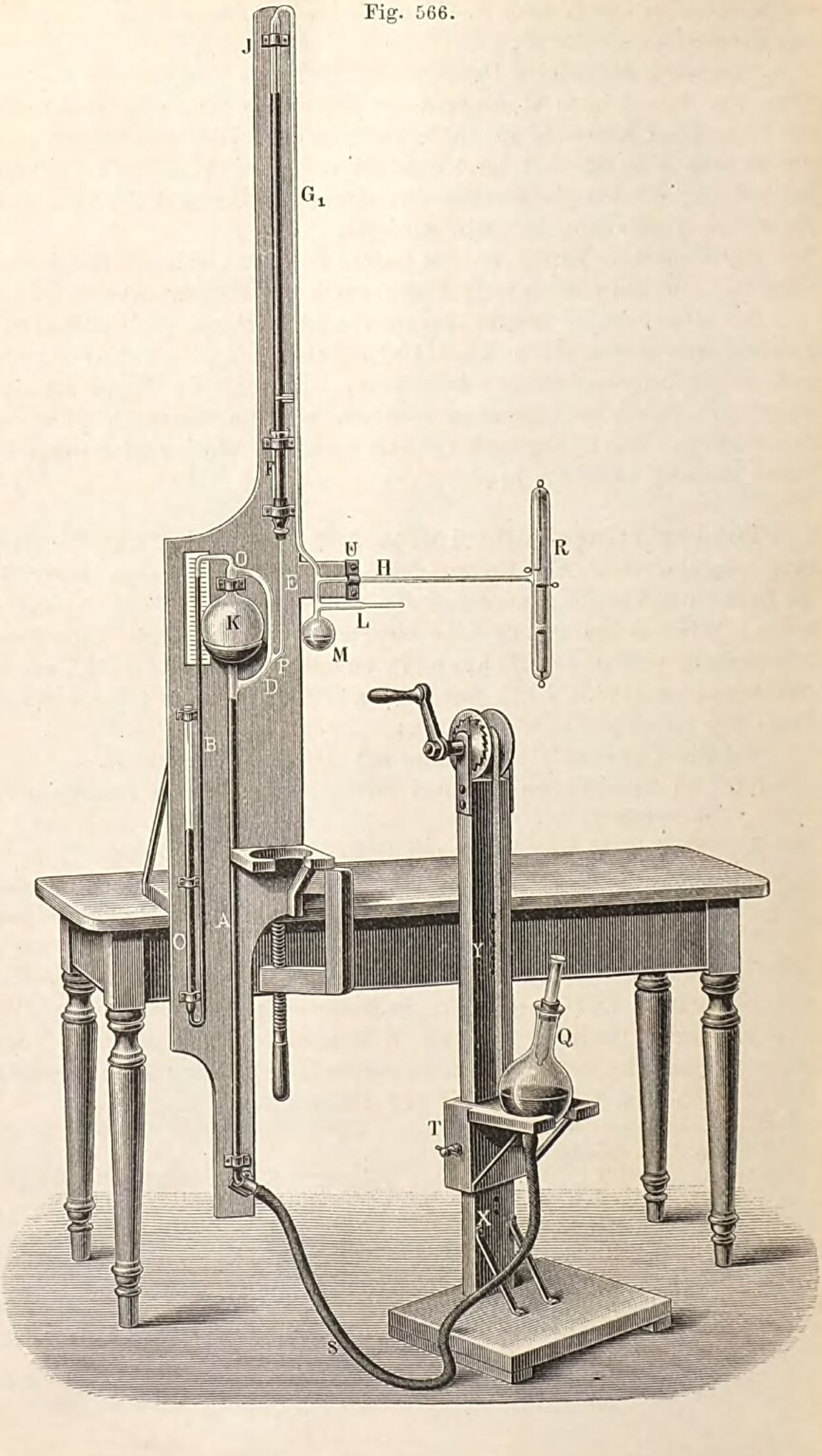
†) A. Töpler, Dingl. polyt. J. Bd. 163, S. 426, 1862.

††) Neesen (Wied. Ann. Bd. 3, S. 608, 1878) verwendete zuerst das Rohr *DO* bei seiner Quecksilberventilluftpumpe.

†††) E. Bessel-Hagen (Wied. Ann. Bd. 12, S. 425, 1881). Dessen Abhandlung ist auch die Fig. 566 entnommen.

*†) Töpler hatte ursprünglich die Form eines Gefässbarometers angewendet.

Fig. 566.



PJG_1 die Verbindungsvorrichtung, welche die Communication zwischen dem Vacuumraum K und dem Recipienten R vermittelt. Dieselbe besteht nach Bessel-Hagen aus der 110 cm langen, oben offenen Steigröhre PJ (siehe Fig. 567), dem daran befestigten, als Quecksilberwanne fungirenden Gefässe F und der verkehrt Uförmigen Röhre G_1 resp. G_2, welche mit ihrem weiteren Schenkel über das Steigrohr PJ darüber gestülpt ist, so dass sie in das Quecksilber in F eintaucht.

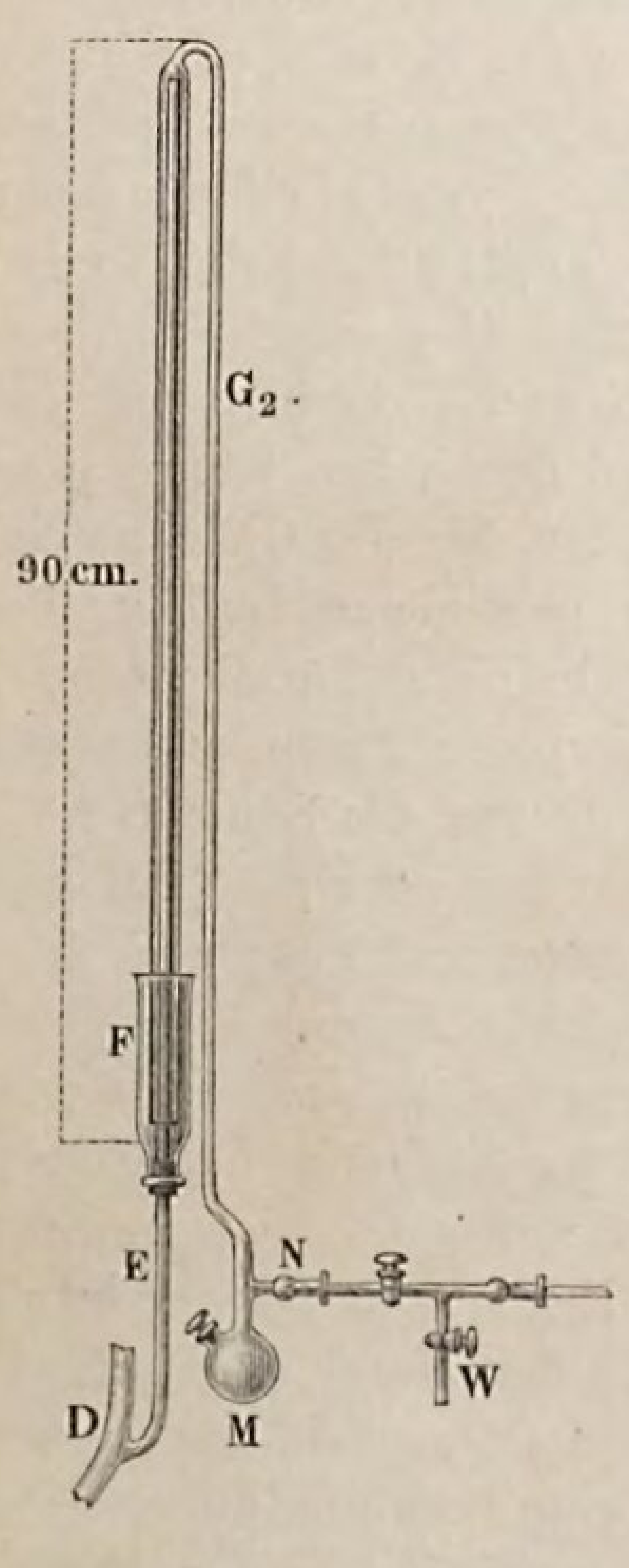
M das mit wasserfreier Phosphorsäure beschickte Trockengefäss,

H das Verbindungsrohr, welches mit dem Recipienten R (hier als Geissler'sche Röhre angenommen) entweder durch Anschmelzen (Fig. 566) oder durch Schliffstücke und Hähne (Fig. 567) verbunden ist.

L (Fig. 566) ist eine Oeffnung, welche zur Einbringung der Phosphorsäure dient und dann dünn ausgezogen und zugeschmolzen wird. Durch dieselbe Oeffnung lässt man wiederum Luft ein, indem man die Spitze abbricht.

Soll jeder Hahn gänzlich vermieden und die höchste Verdünnung erreicht werden, so dient das Verbindungsrohr G_1 (Fig. 566), im anderen Falle G_2 (Fig. 567).

Fig. 567.



Die Bestandtheile C, B, K, A, P bis J bilden zusammen ein ganzes Stück aus Glas, welches auf einem verticalen Brett derart befestigt ist, dass der untere Theil der Kugel K mit einem Metallband umgeben und mit Gyps in letzterem eingebettet ist. Die übrigen Rohrtheile sind mittelst nicht zu enger Metallbänder auf das Holz aufgeschraubt. Auf der Rückseite ist ein horizontales durch Stützen abgesteiftes Brett angebracht, um die Pumpe an den Experimentirtisch anzuschrauben. Die Hebevorrichtung für das Reservoir Q steht separat auf dem Boden.

Der Gebrauch der Pumpe ist nun folgender: Man befestigt den zu evacuirenden Recipienten durch Anschmelzen an das vom Apparate abgehobene Rohr G_1 (oder mittelst Schliffstück an das Rohr G_2), beschickt die Kugel M durch L mit Phosphorsäure (eventuell Schwefelsäure) und schmilzt L zu. Das Auspumpen kann nun beginnen und besteht lediglich in einem Heben und Senken des Quecksilbergefässes Q. Hebt man dasselbe, so wird, sobald das Quecksilber im Rohre A bis zur Einmündungsstelle P des zum

Recipienten führenden Steigrohres gestiegen ist, die Verbindung der Kugel *K* mit dem Recipienten durch die im Rohre *PJ* aufsteigende Quecksilbersäule unterbrochen, während die in *K* enthaltene Luft zusammengepresst und genöthigt wird, in Blasen durch das im Auslassrohr *B C* befindliche Quecksilber zu entweichen. Ist das Quecksilber in *K* bis *O* gestiegen, so wird *Q* wieder gesenkt, das Quecksilber fliesst aus *K* und *PJ* zurück, die Einmündungsstelle *P* wird frei und die im Recipienten enthaltene Luft kann neuerdings nach *K* übertreten. Gleichzeitig steigt im Auslassrohr *B* das Quecksilber aus *C* und ebenso aus der Wanne *F* in den zwischen Steigrohr *PJ* und Ueberstülprohr *G* vorhandenen Raum empor und zwar bis zu einer Höhe, welche der Spannungsdifferenz zwischen der Atmosphäre und der Luft des Recipienten entspricht. Während des nun folgenden Wiederanhebens des Quecksilbers *Q* steigt sofort auch Quecksilber in das Rohr *PJ* und unterbricht dadurch die Verbindung mit dem Recipienten, gleichzeitig fällt die Quecksilbersäule in *B*, bis schliesslich wiederum die Luft aus *K* durch *B* und *C* hinausgepresst wird. Diese Art des Pumpens wird so lange fortgesetzt, bis bei *C* keine oder nur unbedeutende Luftblasen entweichen. Es bleibt dabei das Rohr *B* mit Luft gefüllt, deren Spannung gleich ist jener der Atmosphäre, vermehrt um die kleine Quecksilbersäule in *C*. Diese Luft entspricht jener des schädlichen Raumes anderer Luftpumpen. Um sie zu eliminiren, wird von jetzt an das Gefäss *Q* nur noch langsam höher und zwar so weit gehoben, bis das Quecksilber aus *K* in das Rohr *B* eintritt und die Luft vor sich her bei *C* hinaustreibt. Bringt man hierauf *Q* wieder in die tiefste Lage, so entsteht nun in *K* eine Toricelli'sche Leere, welche mit dem Recipienten in Verbindung gelangt, sobald die Stelle *P* frei wird. Sollte aus *K* so viel Quecksilber nach *C* gelangt sein, dass die Höhendifferenz der Quecksilbersäulen in *B* und *C* kleiner geworden als dem Atmosphärendruck entspricht, so wird durch den letzteren von selbst Quecksilber nach *K* zurückgedrückt werden, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Damit dabei keine haftend gebliebene Luft zurückgeführt werde, muss die weitere Röhre *C* nicht halbkugelförmig, sondern trichterförmig an *B* angesetzt sein. Bei Beginn des Pumpens ist *Q* so weit zu heben, bis das Quecksilberniveau in *Q* um die Säule *C* höher steht als *O*; später ist nur eine geringere Erhebung nöthig. Man giebt zweckmässig dem das Quecksilbergefäss *Q* tragenden Träger *T* durch Einstecken von Anschlagstiften in eines der Löcher *X* und *V* der Holzsäule nur eine solche Bewegungsweite auf- und abwärts, dass das Quecksilberniveau in *Q* bei der höchsten und tiefsten Stellung des Trägers nahezu um Barometerhöhe tiefer steht als die obere beziehungsweise untere Einmündungstelle des Rohres *D*. Zum Hinausschaffen der letzten Luftreste hebt man dann noch vorsichtig mit der Hand das Gefäss *Q* aus dem Träger, damit nicht zu heftige Stösse des Quecksilbers erfolgen.

Wie man sieht, ist Töpler's Pumpe als eine Combination von drei Barometern anzusehen; man kann sie aber auch mit einer Kolben-

luftpumpe vergleichen, in welcher das Rohr AK als Stiefel, das Quecksilber in A als Kolben, das in CB und in PJ als Ventile fungiren.

Ein wesentlicher Vortheil der Töpler'schen Pumpe besteht darin, dass dieselbe bei jedem einzelnen Hube eine Messung der übrig gebliebenen Spannung der Luft im Raume K zu machen gestattet*). Die gewöhnlichen abgekürzten Barometer (Barometerproben) sind dazu nicht geeignet, da die zu messenden Spannungen bis unter 0,00001 mm Quecksilber hinabreichen und überdies die Barometer selten so vollkommen luftfrei gefüllt sind, dass sie nicht negative Drucke anzeigen, sobald die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat. Bei Töpler's Pumpe geschieht die Druckmessung der restirenden Luft nach dem Princip von Arago (§. 137). Zu diesem Zwecke ist das Rohr B mit einer Scala versehen, welche auf der einen Seite mit Millimetertheilung, auf der anderen Seite mit einer Volumtheilung versehen ist, welche von dem Einmündungspunkte O an beginnt und nach Zehntel-Cubikcentimetern fortschreitet. Ausserdem ist das gemeinschaftliche Volumen der Kugel K und des Rohrs D zwischen O und P bestimmt. Um eine Druckmessung vorzunehmen, hat man folgende drei Ablesungen zu machen:

1) Während das Quecksilber in K so tief steht, dass eben noch die Verbindung bei P frei ist, wird der Stand der Quecksilberkuppe in B notirt.
2) Während das Quecksilber in K bis O steht, wird wiederum der Stand in B notirt.
3) Gleichzeitig wird daselbst das Volumen v abgelesen.

Ist h die Differenz der Ablesungen in 1) und 2)**),
v das zurückgebliebene Volumen,
V das Volumen der Kugel K sammt Rohr D,
x der zu bestimmende Druck, welcher die erreichte Luftverdünnung misst, so ist nach dem Boyle'schen Gesetze:

$$Vx = v\,(x + h), \quad \text{woraus} \quad x = \frac{v}{V - v}\,h,$$

oder da v neben V verschwindend klein ist, $x = \frac{v}{V}\,h.$

Gegen die volle Richtigkeit dieser Methode liesse sich nach unserer Meinung nur der eine Einwand erheben, dass während des Ansteigens des Quecksilbers in K in Folge Zunahme des Druckes von x auf $x + h$ bereits ein Theil der Luft an die Wände sich anlegen oder von dem Quecksilber absorbirt werden kann, so dass in Folge dessen etwas zu niedrige Werthe für den Druck, also zu hohe Verdünnungen gefunden werden.

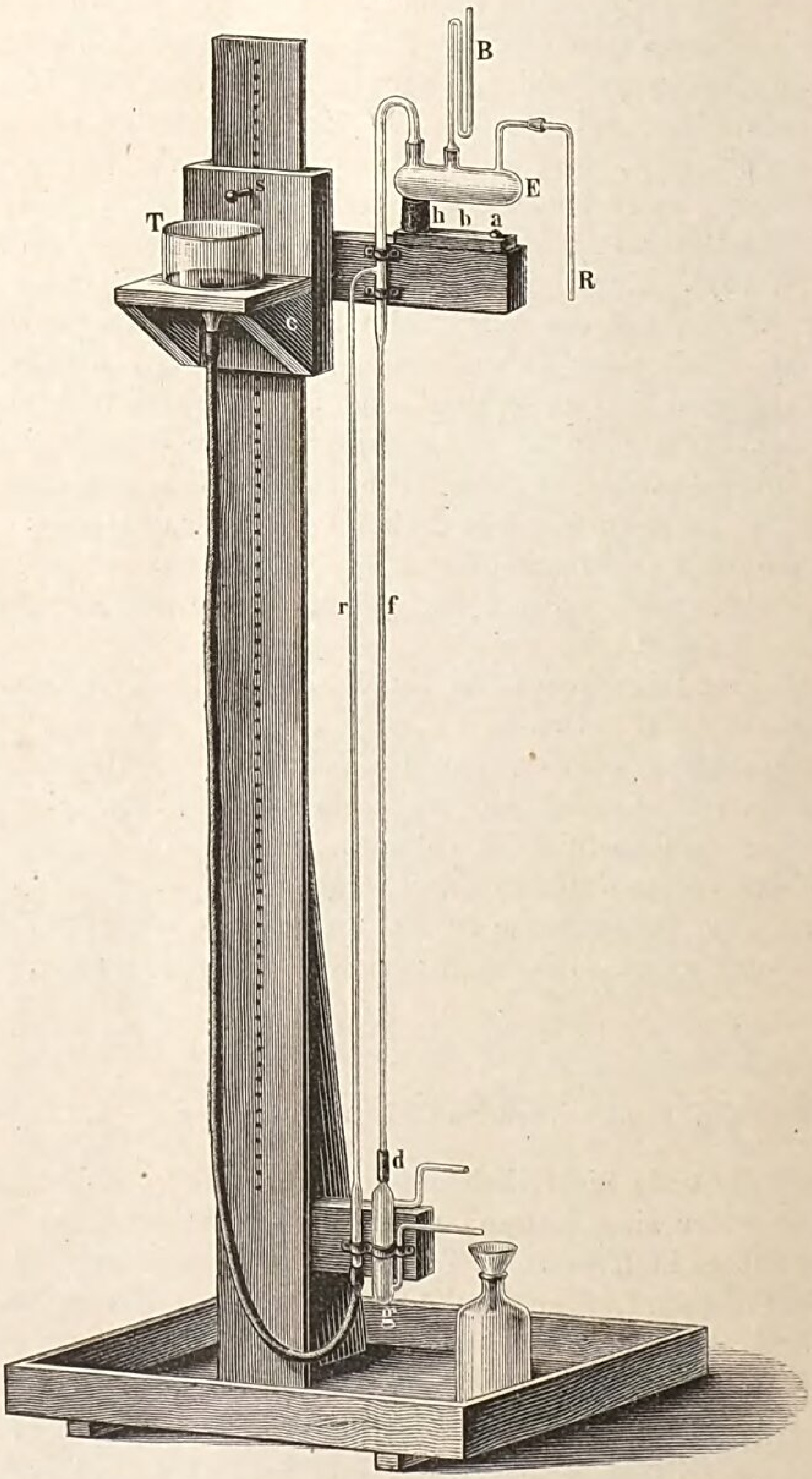
Sprengel's Quecksilberluftpumpe. Nachdem wir das Princip dieser Luftpumpe im §. 151 erörtert haben, erübrigt uns nur 153

*) A. Töpler (Sitz.-Ber. der naturw. Ges. Iris in Dresden 1877, S. 135).

**) Die Niveauänderung im Rohre C kann bei der Messung von h vernachlässigt werden, da C viel weiter ist als B.

noch ein wirklich brauchbares Instrument dieser Art zu beschreiben. Eine nach dem Schema der Fig. 557 construirte Pumpe hätte vor Allem den Nachtheil, dass, wenn das Quecksilber in dem Trichter einmal ganz

Fig. 568.



ausginge, sofort Luft in den Recipienten eindringen würde und die ganze Arbeit des Auspumpens von vorn an wiederholt werden müsste. Am vollkommensten ausgebildet wurde die Sprengel'sche Pumpe wohl von

Gimingham*), dessen Apparat von Crookes zu seinen Experimenten benutzt worden ist. Die beistehend Fig. 568 in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse abgebildete von A. Weinhold**) ist als eine Vereinfachung derselben zu betrachten. Ihre Bestandtheile sind:

f Die Fallröhre von 2 mm Weite, in deren oberem, weiterem Theile, dem Saugrohr, sich das Vacuum bilden soll.

r Die Zuführungsröhre für das Quecksilber verbunden mit dem beweglichen Schenkel aus Kautschuk und dem Reservoir *T*.

E Das Trockengefäss, welches einerseits mit der Fallröhre *f*, andererseits mit dem Recipienten durch *R*, ausserdem mit dem Manometer *B* durch Schliffstücke in Verbindung steht.

g Ein Sammelgefäss mit zwei nach aufwärts gebogenen seitlichen Ausflussröhren, wovon die obere zum Austritt der Luft, die untere zum Ausfluss des Quecksilbers dient. Die Fallröhre mündet natürlich unterhalb der Höhe der letzteren Ausflussöffnung.

Das Trockengefäss *E* wird durch die Schlifföffnung des Manometers *B* mit Schwefelsäure oder Phosphorsäure gefüllt oder entleert. Es ruht auf dem Kork *k* auf, welcher auf dem Brettchen *b* festgeleimt ist. Dreht man letzteres um die Schraube *a*, so kann das Trockengefäss nach abwärts losgelöst werden. Da ausserdem das Trockengefäss um das Schliffstück der Saugröhre wie um eine verticale Achse, ferner das Verbindungsrohr *R* um sein Schliffstück als horizontale Achse gedreht werden können, so ist dadurch dem Verbindungsrohr allseitige Beweglichkeit gesichert.

Beim Gebrauche wird der Träger *c* des Quecksilberreservoirs *T* anfangs so hoch an dem Stative befestigt, dass das Niveau etwas über der Einmündungsstelle des Rohres *r* in das Fallrohr *f* steht. Sowie die Entleerung fortschreitet, senkt man nach und nach das Reservoir *T* so weit, dass oben noch immer Quecksilber durch den Luftdruck nach der Fallröhre hinübergetrieben wird. Gegen Ende wird das Niveau von *T* um die Barometerhöhe tiefer stehen als die Einmündungsstelle. Das unten ausfliessende Quecksilber wird in der Flasche aufgefangen und oben wiederum aufgegossen. Man beobachtet an dem Kleinerwerden der mitgerissenen Luftblasen und dem härteren Klange des aufschlagenden Quecksilbers den Fortschritt des Auspumpens.

Bei der oben erwähnten Gimingham'schen Pumpe sind der rascheren Verdünnung wegen statt einer einzigen Fallröhre drei neben einander vorhanden. Ferner ist diese Pumpe mit einem Apparat zur Messung der Verdünnung nach Mc Leod ausgerüstet, welcher auf demselben Principe wie jener an der Töpler'schen Pumpe beruht.

*) Proc. Roy. Soc. XXV, p. 396. Eine Beschreibung und Abbildung dieses zwar sehr sinnreichen, aber auch sehr complicirten (aus 20 grösstentheils durch Schliffstellen verbundenen Glastheilen zusammengesetzten) Apparates findet sich in Wiedem. Beibl. Bd. I, S. 175, 1877.

**) A. Weinhold, physik. Demonstr. S. 171.

154 **Die mit Quecksilberluftpumpen erreichbaren Verdünnungen; Nebenapparate.** Während die gewöhnlichen Luftpumpen selten gestatten, die Verdünnung so weit zu treiben, dass der Druck bis unter 1 mm Quecksilbersäule herabsinkt, weshalb denn auch die gewöhnliche Prüfung mittelst des abgekürzten Barometers genügt, ist bei den Quecksilberpumpen eine viel weiter gehende Verdünnung zu erreichen, für deren Messung dann die Barometerprobe nicht mehr zu brauchen ist.

A. v. Waltenhofen hat bereits 1861 *) an der Quecksilberluftpumpe von Kravogl ein Verfahren angewendet, bei welchem der erreichte Minimaldruck in dem verdünnten Raume aus dem Volumen ermittelt wurde, welches die zurückgebliebene Luft nachher bei Atmosphärendruck einnahm. Zu diesem Zwecke war an den aus einem weiten kalibrirten Glasrohr bestehenden Recipienten eine enge kalibrirte Röhre angesetzt und die Einrichtung so getroffen, dass der evacuirte Recipient von der Pumpe abgenommen und unter Quecksilber geöffnet werden konnte. Die weite Röhre und ein Theil der engen wurde durch den Luftdruck mit Quecksilber gefüllt und aus dem restlichen Volumen der Luft nach bekannten Grundsätzen die Verdünnung berechnet.

Verwandte Methoden wurden oben bei Töpler's Pumpe beschrieben und bei Gimingham's Pumpe (Mc Leod's Apparat) erwähnt.

Wir müssen jedoch darauf aufmerksam machen, dass die auf solche Weise gefundenen Minimaldrucke sich nur auf den Druck der zurückgebliebenen Luft, nicht auf den Gesammtdruck beziehen, der sich aus dem Druck der Luft und dem Druck des Quecksilberdampfes zusammensetzt.

Nach Bessel-Hagen **) beträgt die Spannung des gesättigten Quecksilberdampfes:

$$\text{bei } 0^0 \; e = 0{,}0148 \text{ mm}$$
$$\text{„ } 20^0 \; e = 0{,}0201 \text{ mm.}$$

Demnach kann der Gesammtdruck im Inneren der Pumpe bei gewöhnlicher Zimmertemperatur nicht viel unter 0,02 mm herabgesetzt werden.

Steht mit der Pumpe ein Recipient in Verbindung, der nur ein Gas, aber kein Quecksilber (oder andere Flüssigkeit) enthält, so kann demnach dieses Gas auch nicht weiter als auf circa 0,02 mm verdünnt werden. Anders steht die Sache, wenn durch Diffusion oder auf andere Weise auch das im Recipienten enthaltene Gas mit Quecksilberdämpfen gesättigt wurde. Es kann dann auch in diesem zwar nicht der Totaldruck, wohl aber der vom Gase allein ausgeübte Partialdruck ebenso weit herabgesetzt werden, wie im Toricelli'schen Raume der Pumpe.

Wir verdanken Bessel-Hagen ***) vergleichende Messungen der Minimal-Partialdrucke der Luft, welche durch die Quecksilberluftpumpen

*) Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1861, Bd. 44.

**) Wiedem. Ann. 12, S. 441, 1881.

***) l. c.

nach Geissler's alter und neuer Construction, dann mittelst der Töpler'schen Pumpe erreicht werden, welchen Angaben in der nachfolgenden Tabelle noch die mit einer Sprengel-Gimingham'schen, sowie mit einer Kravogl'schen Pumpe erreichten Druckminima hinzugefügt sind. Die Messungen Bessel-Hagen's geschahen in der Weise, dass eine Töpler'sche und eine Geissler'sche Pumpe mit einander verbunden wurden, so zwar, dass zuerst die erstere, dann die letztere als Recipient diente, während zuerst die letztere, dann die erstere als Pumpe functionirte. Die Druckmessung geschah dann an der Töpler'schen Pumpe in der oben beschriebenen Weise. Die Angabe für die Kravogl'sche Pumpe ist den v. Waltenhofen'schen Messungen entnommen.

Die Resultate sind in der Rangordnung der erreichten Verdünnungen aufgeführt:

Instrument	Beobachter	Minimum des erreichten Partialdruckes der Luft in Millimetern	Grenze der erreichten Verdünnung in Bruchtheilen einer Atmosphäre
Geissler's Pumpe älterer Construction	Bessel-Hagen	0,11	$\frac{1}{6909}$
Kravogl's Pumpe	v. Waltenhofen	0,0316 *)	$\frac{1}{24\,000}$
Geissler's Pumpe neuerer Construction	Bessel-Hagen	0,0082	$\frac{1}{92\,683}$
Sprengel-Gimingham's Pumpe	Crookes	0,000046	$\frac{1}{17\,000\,000}$
Töpler's Pumpe neuerer Construction	Bessel-Hagen	0,000009 **)	$\frac{1}{84\,000\,000}$ **)
Sprengel-Gimingham's Pumpe mit einer weiteren Verbesserung ***).	Prof. Ogden N. Rood vom Columbia-College in New York	0,0000069	$\frac{1}{110\,000\,000}$

Zur Erreichung solcher hoher Verdünnungsgrade ist eine vollständige Trockenheit aller Apparatentheile, sowie eine vollkommen dichte Ver-

*) Diese Zahl folgt durch Rechnung aus dem Grade der Verdünnung, welcher, wie oben angegeben, bestimmt wurde.

**) Im Mittel aus sechs Versuchen wurde erhalten Druck = 0,000012 mm entsprechend einer Verdünnung gleich $^1/_{63}$ Milliontel Atmosphäre; wie weit die Wirkung der Töpler'schen Pumpe in der ursprünglichen Form geht, ist nicht gemessen worden.

***) Die Verbesserung soll darin bestehen, dass das Quecksilber aus einem evacuirten Gefässe in das Fallrohr gelangt; dies ist aber schon bei der ursprünglichen Gimingham-Pumpe der Fall (Rood, The New York Times 19. Nov. 1880, p. 2, Sp. 3). Das angegebene Minimum wurde nur in einem Falle erreicht und sonst zu $^1/_{94}$ Milliontel Atmosphäre bestimmt.

bindung zwischen Recipient und Pumpe erforderlich. Verbindungen mittelst Kautschukröhren genügen nicht; in der Regel werden die einzelnen Glasbestandtheile durch Aneinanderschmelzen vereinigt. Um denselben trotzdem eine, wenn auch eng begrenzte Verschiebbarkeit zu sichern und hierdurch die Gefahr des Zerbrechens zu vermindern, verwendet man zu den Verbindungen entweder spiralförmig gewundene Glasröhren oder besser die von A. Kundt*) eingeführten „Glasfedern".

Fig. 569 und 570 zeigen im Aufriss und in Perspective eine solche Kundt'sche Glasfeder in ungefähr $^1/_6$ der natürlichen Grösse. Eine lange, dünne Glasröhre wird zweimal U förmig gebogen, so dass die beiden U in einer Ebene liegen, aber bei *e* einen rechten Winkel mit einander machen. Die beiden Enden *a* und *b* der Röhre sind senkrecht zur Ebene der U umgebogen, so dass sie in eine Gerade zu liegen kommen. Denkt man sich das Ende *a* festgehalten, so ermöglicht das U rohr *c* dem Ende *b* eine Bewegung in der Richtung *ed*, ebenso das U rohr *d* eine Bewegung nach *ec*. Da ausserdem *a* und *b* sich etwas von einander entfernen

Fig. 569.

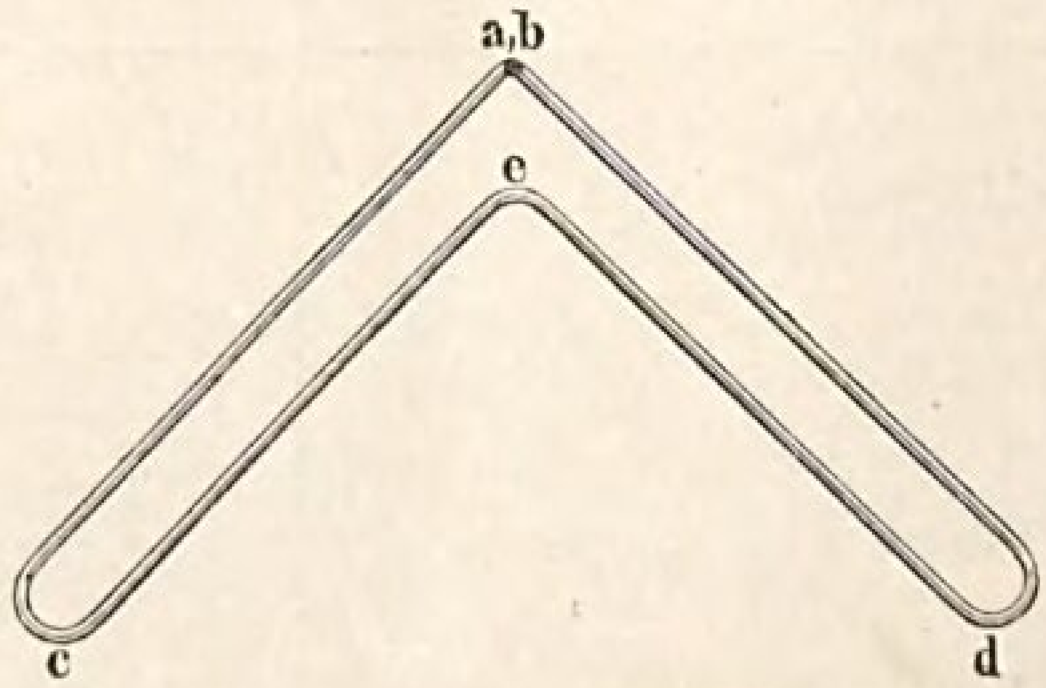
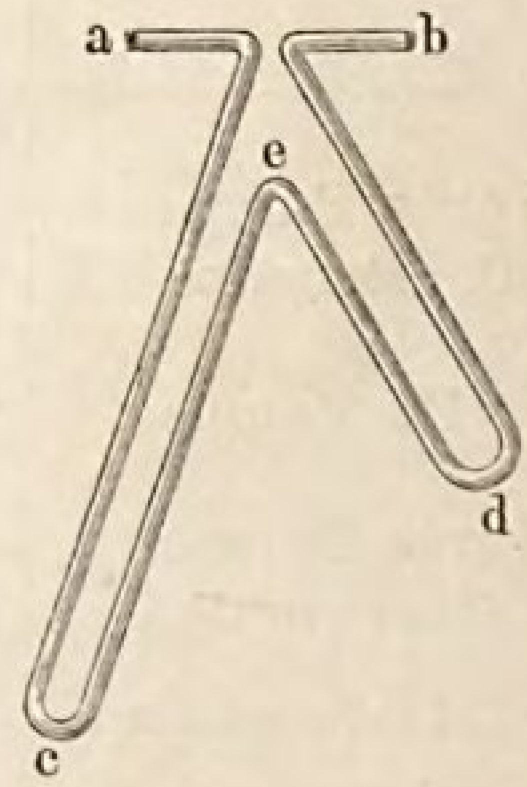


Fig. 570.



können, so ist innerhalb gewisser Grenzen für eine allseitige Beweglichkeit des Endes *b* gegenüber dem Ende *a* vorgesorgt. Bei einer 1,8 m langen, 6 mm weiten Röhre beträgt der Spielraum mehrere Centimeter. Engere Röhren können entsprechend kürzer genommen werden.

Lösbare Verbindungen werden mittelst Quecksilbers dicht erhalten. Eine solche Verbindungsweise von Bessel-Hagen wurde bei der Töpler'schen Pumpe beschrieben, eine andere bei der Geissler'schen Pumpe angewendete ist in Fig. 571 abgebildet. Die Glasröhre *b* ist in den Trichter *a* eingeschliffen. Der Trichter wird mit Quecksilber *c* gefüllt und, wenn man recht sicher gehen will, mit einer Schicht von Schwefelsäure *d* überdeckt, welche hindert, dass Luft zwischen Quecksilber und Glas eindringe. Statt der gewöhnlichen Glashähne sind ebenfalls mit Quecksilber hergestellte Vorrichtungen anzuwenden. Eine solche von Bessel-Hagen vorgeschlagene ist in Fig. 572 abgebildet; sie kann

*) Pogg. Ann. 155, S. 364.

dazu dienen, den evacuirten Recipienten *R* aus einem Gasometer *G* mit einem anderen Gase zu füllen. Zwischen *R* und *G* befindet sich die U röhre *abc* mit einer kugelförmigen Erweiterung bei *a*. Am tiefsten Punkte der U röhre ist eine Abzweigung nach abwärts, welche mittelst Kautschukrohr zum Reservoir *d* führt. Von *b* bis *e* ist Barometerhöhe. Die Quecksilbersäule *be* sperrt den Zutritt zum Recipienten hermetisch; senkt man aber das Reservoir *d*, so entleert sich der Schenkel *c* und erniedrigt sich die Quecksilbersäule *be* so weit, dass das bei *G* zugeführte Gas eintreten kann. Die Erweiterung *a* verhindert das Uebersteigen von Quecksilber nach *R*.

Eine andere, einen Hahn ersetzende, durch Quecksilber gedichtete Verbindungsweise ist der „Vacuumzapfen" von Gimingham, welcher

Fig. 571.

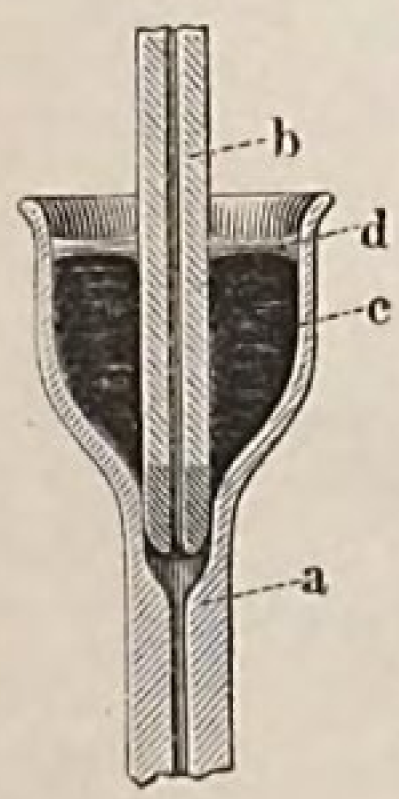


Fig. 572.

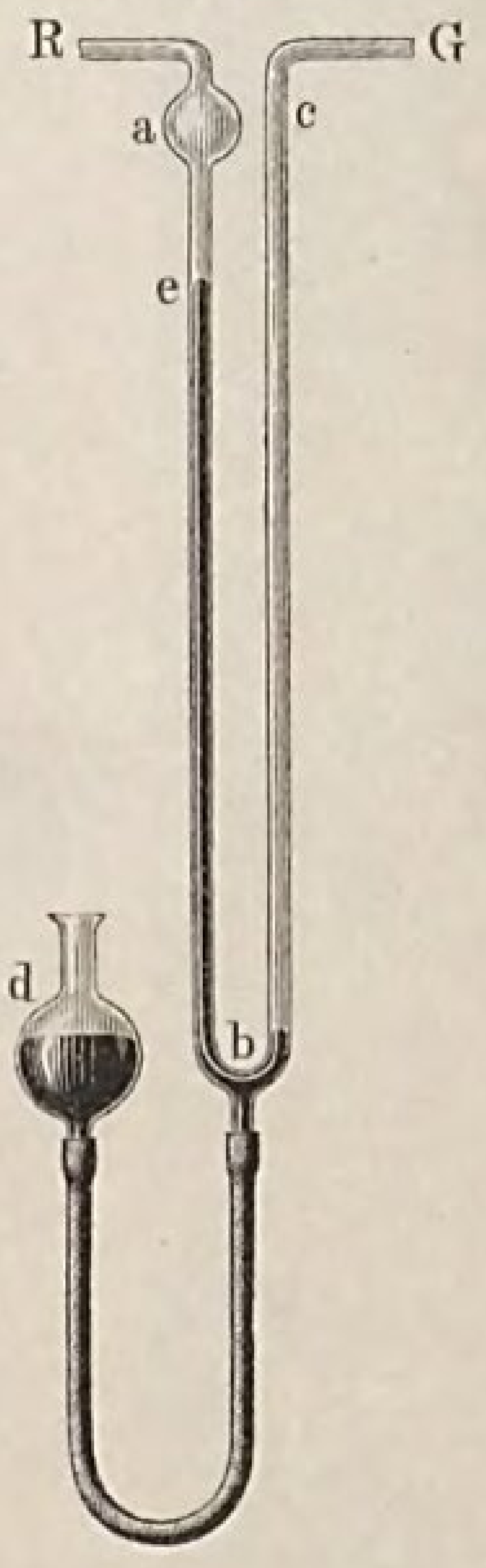
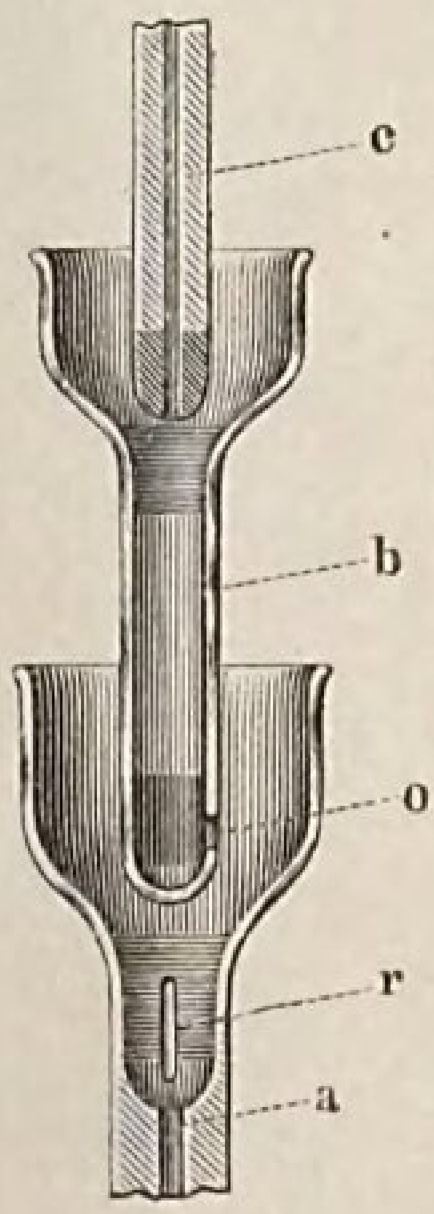


Fig. 573.



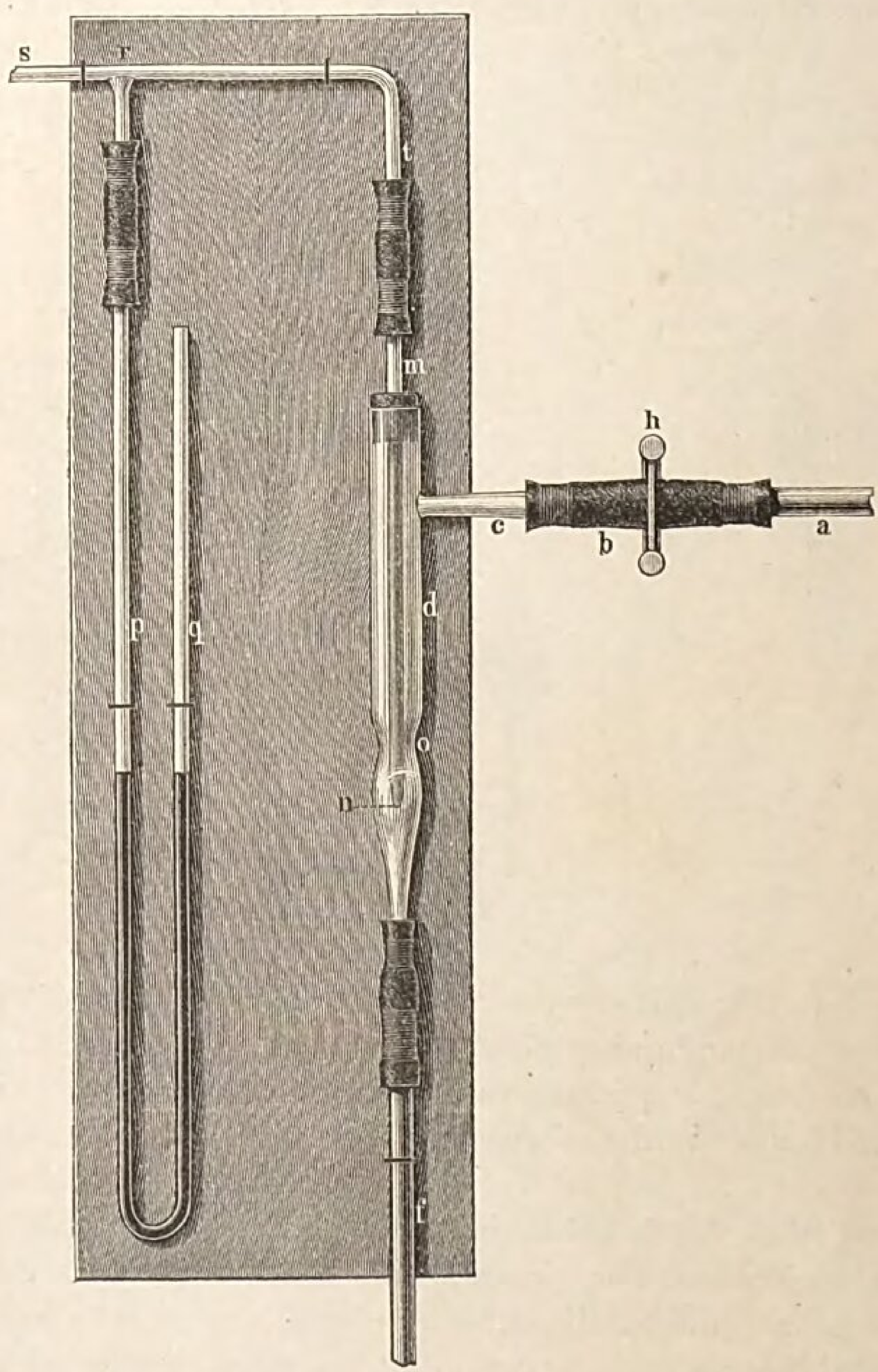
an dessen Pumpe mehrfach verwendet wurde. Derselbe ist in Fig. 573 im zerlegten Zustande abgebildet; er besteht aus den drei Glastheilen *a*, *b* und *c*. *b* und *c* wirken zusammen ganz ebenso wie die Vorrichtung Fig. 571 und werden ebenso mit Quecksilber und Schwefelsäure gedichtet.

Das mittlere Stück *b* hat jedoch am unteren verschlossenen Ende ein seitliches Loch *o*, das unterste Stück *a* besitzt bei *r* eine verticale Rinne *r*. Sobald die Schliffstellen in einander gesteckt sind, kann das Mittelstück *b* so gedreht werden, dass dasselbe durch das Loch *o* und die Rinne *r* mit dem unteren Stück *a* communicirt, oder aber so, dass das Loch versperrt ist. Der Trichter des unteren Stückes wird ebenfalls mit Quecksilber und Schwefelsäure gedichtet.

Wird das Stück *c* weggenommen, so fällt Quecksilber in den unteren Theil von *b* und bedeckt das Loch *o* auch von innen, wodurch ein vollkommener Verschluss bewerkstelligt wird, währenddem an das Stück *c* andere Apparate angesetzt werden können. Vor dem Wiedereinsetzen des „Zapfens“ wird das Quecksilber aus *b* mittelst Pipette und amalgamirten Messingdrahtes wieder entfernt.

155 **Bunsen's Wasserluftpumpe.** Statt der fallenden Quecksilbersäule hat Bunsen eine fallende Wassersäule zur Construction einer

Fig. 574.



Luftsaugepumpe (Wasserluftpumpe) benutzt. Aus einem oben offenen Wasserbehälter strömt das Wasser durch ein Bleirohr *a*, Fig. 574,

das verbindende Kautschukrohr *b* und das Glasrohr *c* in das weitere Glasrohr *d*, um dann von hier aus weiter durch das 9 bis 12 m lang vertical hinabreichende ungefähr 8 mm weite Bleirohr *f* hinabzufallen. Das weitere Rohr *d* ist oben mit einem wohl schliessenden Kautschukstopfen geschlossen, durch welchen ein engeres Glasrohr *mn* bis in den unteren Theil des weiteren Rohres *d* hinabreicht (bei den von Desaga ausgeführten Wasserluftpumpen ist das Glasrohr *mn* in das obere Ende von *d* luftdicht eingeschmolzen). Der Raum, aus welchem die Luft ausgesaugt werden soll, wird mit dem Glasrohr *st* in Verbindung gesetzt, welches andererseits durch eine Kautschukröhre mit *mn* verbunden ist. So zieht dann die in *f* herabfallende Wassersäule die Luft aus dem Recipienten durch die Röhren *st* und *mn* nach. Der Grad der erzielten Luftverdünnung kann an dem Quecksilbermanometer *pq* abgelesen wer-

Fig. 575.



Fig. 576.

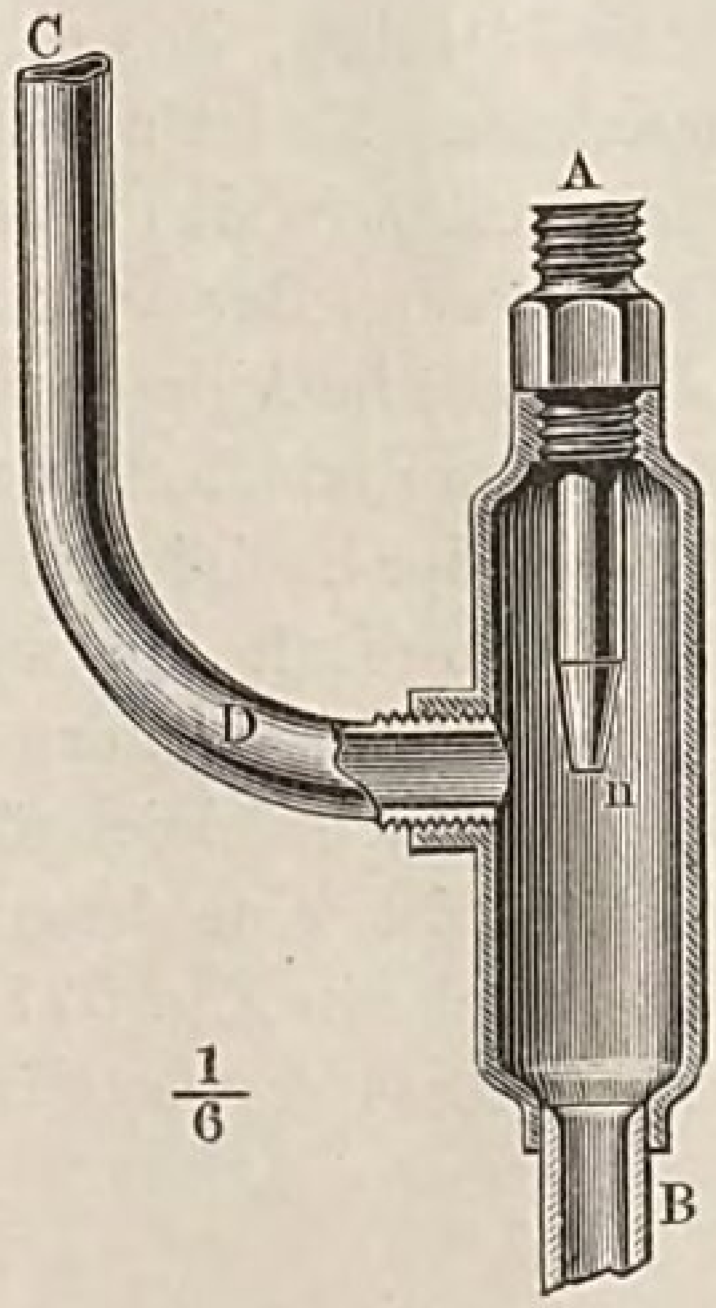


Fig. 577.



den. Alle am Apparate befindlichen Kautschukverbindungen bestehen aus ziemlich engen, aber sehr dickwandigen Röhrenstücken.

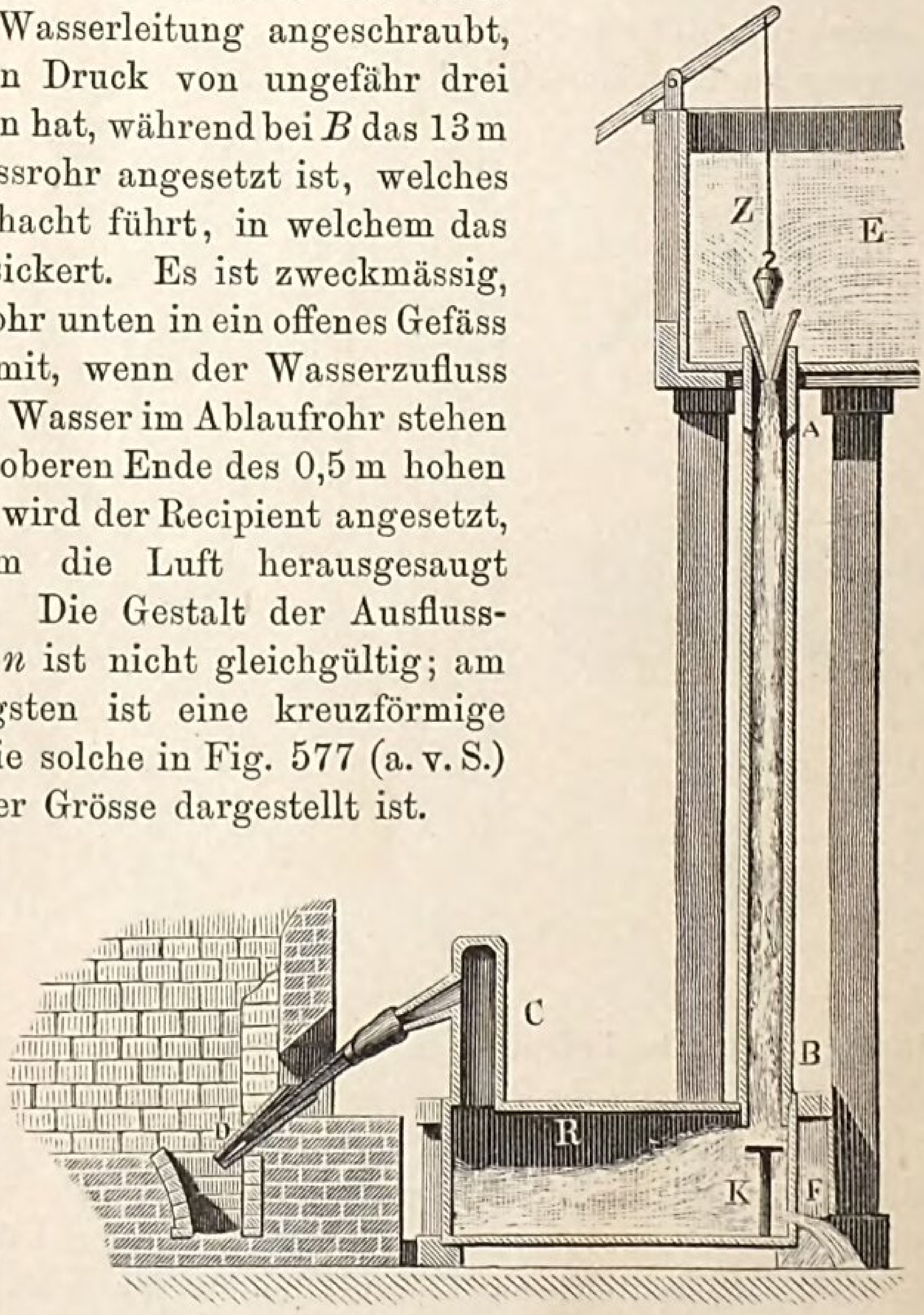
Die Bunsen'sche Luftsaugepumpe wird vorzugsweise zur Beschleunigung des Auswaschens von Niederschlägen gebraucht. Zu diesem Zwecke wird die Röhre des Trichters, auf welchem das Filter mit dem Niederschlage liegt, mittelst eines Kautschukstopfens luftdicht in den Hals eines Glasgefässes *A*, Fig. 575, eingesetzt. Dieser Kautschukstopfen hat aber noch eine zweite Durchbohrung, an welcher ein durch ein dickwandiges Kautschukrohr *K* mit dem Glasrohr *st*, Fig. 574, in Verbindung zu setzendes Glasröhrchen steckt. Sobald nun die Luftpumpe functionirt, wird das auf den Trichter gegossene Wasser durch den Niederschlag und das Filter hindurchgesaugt, und so ein rasches Auswaschen des Niederschlages bewirkt. Damit das Filter nicht reisse,

wird seine Spitze in einen kleinen aus dünnem Platinblech zusammengelegten Hohlkegel eingesetzt und nur eine mässige Verdünnung in Anwendung gebracht.

Die Menge des abströmenden Wassers muss mit Hülfe des Quetschhahnes *h* gehörig regulirt werden. Mit dieser Vorrichtung kann die Luft in *A* so weit verdünnt werden, dass das Manometer *pq* nur noch einen Druck von 10 bis 15 mm anzeigt.

Hagenbach hat in der physikalischen Anstalt des Bernoullianums zu Basel eine Wasserluftpumpe in grösserem Maassstabe construirt, deren wesentlichster Theil in Fig. 576 (a. v. S.) dargestellt ist. Bei *A* wird das Rohr *An* an die Wasserleitung angeschraubt, welche einen Druck von ungefähr drei Atmosphären hat, während bei *B* das 13 m lange Abflussrohr angesetzt ist, welches in einen Schacht führt, in welchem das Wasser versickert. Es ist zweckmässig, wenn das Rohr unten in ein offenes Gefäss mündet, damit, wenn der Wasserzufluss aufhört, das Wasser im Ablaufrohr stehen bleibt. Am oberen Ende des 0,5 m hohen Rohres *DC* wird der Recipient angesetzt, aus welchem die Luft herausgesaugt werden soll. Die Gestalt der Ausflussöffnung bei *n* ist nicht gleichgültig; am zweckmässigsten ist eine kreuzförmige Oeffnung, wie solche in Fig. 577 (a. v. S.) in natürlicher Grösse dargestellt ist.

Fig. 578.



Bei freiem Zutritt der Luft saugt dieser Apparat 34 Liter in der Minute, während eine zweistiefelige Luftpumpe bei raschem Pumpen nur $12\frac{1}{2}$ l und eine Bunsen'sche Wasserluftpumpe nur 2 bis 3 l Luft in der gleichen Zeit einsaugt.

Was die Grenze der Verdünnung betrifft, welche man mit den Wasserluftpumpen erreichen kann, so ist klar, dass im günstigsten Falle die zu

leerenden Gasräume nur bis zu einem Drucke gleich der Spannkraft des die Pumpe füllenden Wasserdampfes entleert werden können.

Aehnliche Wasserluftpumpen, bei denen schon ein geringeres Gefälle genügt, sind von Arzberger und Zulkowski construirt und wegen ihrer Bequemlichkeit in Laboratorien vielfach verwendet.

Die Wasserluftpumpe kann jedoch auch als Compressionspumpe (Gebläse) gebraucht werden, indem man die durch das Wasser fortgeführte Luft wirken lässt. Fig. 578 zeigt eine solche statt des Blasebalges bei Schmiedefeuern angewendete unter dem Namen Wassertrommelgebläse angewendete Vorrichtung. Aus dem Wasserbehälter stürzt das Wasser durch eine Röhre in den Windkasten *B*, welcher oben geschlossen ist, unten aber eine Ausflussöffnung hat. Das herabstürzende Wasser saugt nun Luft durch die Löcher *A* ein und reisst sie mit Gewalt in den Windkasten *B*, aus welchem sie durch die Düse *D* ausströmt, während das Wasser bei *F* ausfliesst.

Compressionspumpen. Um die Luft in einem Recipienten zu verdichten, kann man jede Hahnluftpumpe gebrauchen, nur muss der Hahn entgegengesetzt gestellt werden, wie beim Verdünnen, d. h. derjenige Stiefel, in welchem der Kolben gerade in die Höhe geht, muss mit der äusseren Luft, derjenige, in welchem der Kolben niedergeht, muss mit dem Recipienten in Verbindung stehen. 156

Ballons, in welchen die Luft comprimirt werden soll, werden auf der Schraube in der Mitte des Luftpumpentellers aufgeschraubt; Recipienten aber, welche auf den Teller aufgesetzt werden, müssen in der Fig. 579 (a. f. S.) dargestellten Weise auf den Teller der Luftpumpe aufgedrückt und auf ihm festgehalten werden.

Bei Ventilapparaten, welche zum Verdichten der Luft dienen sollen, müssen sich die Ventile nach der entgegengesetzten Seite öffnen, wie bei der Luftpumpe.

Eine der bekanntesten Formen der Compressionspumpe ist die, welche man zum Laden der Windbüchse anwendet. Der Recipient der Windbüchse ist aus Schmiedeeisen verfertigt; ein Ventil, welches sich nach innen öffnet, lässt die Luft zwar eintreten, hindert aber ihren Austritt. An diesen Recipienten wird ein Rohr angeschraubt, wie man in Fig. 580 (a. f. S.) sieht, in welchem ein Kolben luftdicht auf- und abgeschoben werden kann. Wenn sich der Kolben am unteren Ende des Laderohrs befindet, so kann Luft durch zwei seitliche Löcher *a* eintreten; diese Luft wird nun beim Hinauftreiben des Kolbens in das Reservoir hineingepresst. Zieht man den Kolben wieder nieder, so kann die Luft aus dem Reservoir nicht zurücktreten, die Röhre aber füllt sich mit einer neuen Portion Luft, die nun auch in das Reservoir gepresst wird, etc.

Wenn man mit Hülfe der Compressionspumpe die Luft im Recipienten der Windbüchse bis auf 8 oder 10 Atmosphären comprimirt

hat, wird ein Lauf angeschraubt, welcher der Kugel die Richtung geben soll. Das Ventil, welches den Recipienten verschliesst, wird durch den Drücker momentan geöffnet, so dass ein Theil der eingeschlossenen Luft mit grosser Gewalt entweicht und die Kugel forttreibt; das Ventil schliesst aber augenblicklich wieder. Mit einer guten Windbüchse kann man eine Kugel mit annähernd eben so grosser Geschwindigkeit fortschiessen, wie mit einem Feuergewehr. Man kann, ohne von Neuem zu laden, mehrere Schüsse nach einander thun, und zwar um so mehr, je grösser der Recipient ist.

Fig. 580.

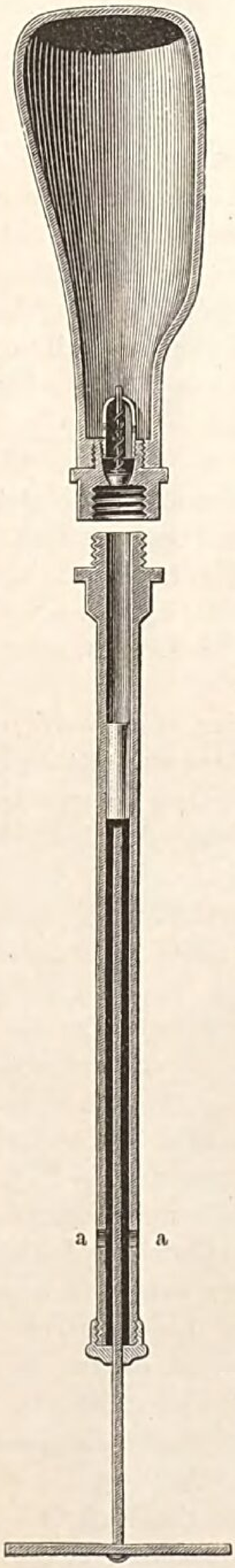


Fig. 579.

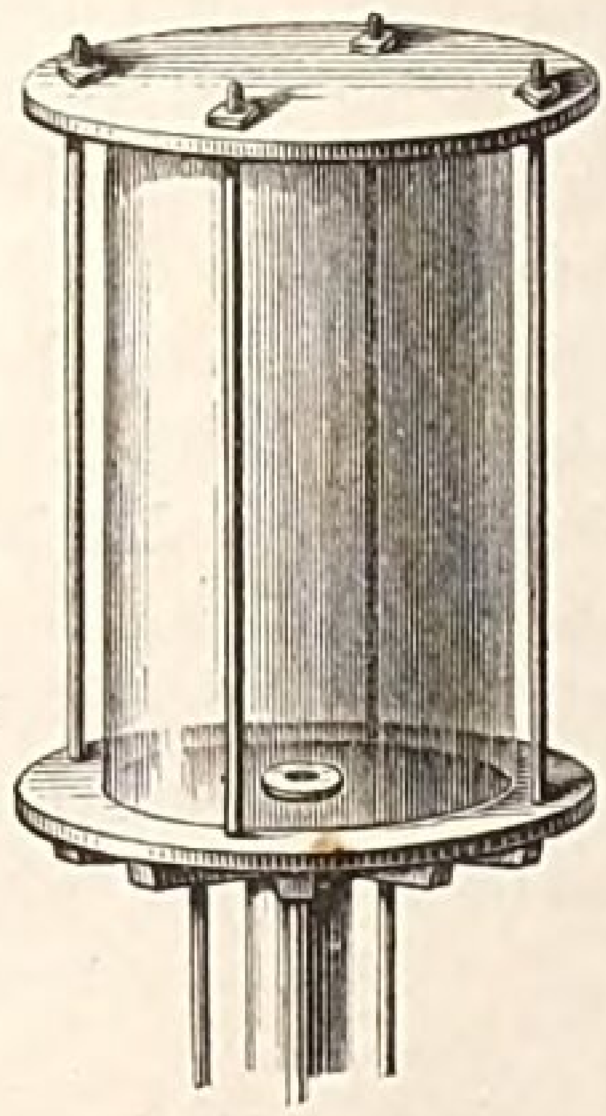


Fig. 581 zeigt die Einrichtung einer kleinen, von Silbermann jun. construirten Compressionspumpe, welche dazu dient, Gas aus einem Raume in einen anderen zu bringen. Das zu entleerende Reservoir wird bei *a*, der zu füllende Recipient wird bei *d* angeschraubt. Beim Aufziehen des massiven Kolbens öffnet sich das Ventil *b*, um das Gas in den Cylinder zu saugen, von welchem unsere Figur nur den untersten Theil zeigt. Beim Niederdrücken des Kolbens wird *b* geschlossen, das Ventil *c* aber geöffnet und das Gas durch *b* in den Recipienten getrieben.

Compressionspumpen zur Verflüssigung von Gasen werden wir in der Wärmelehre beschreiben.

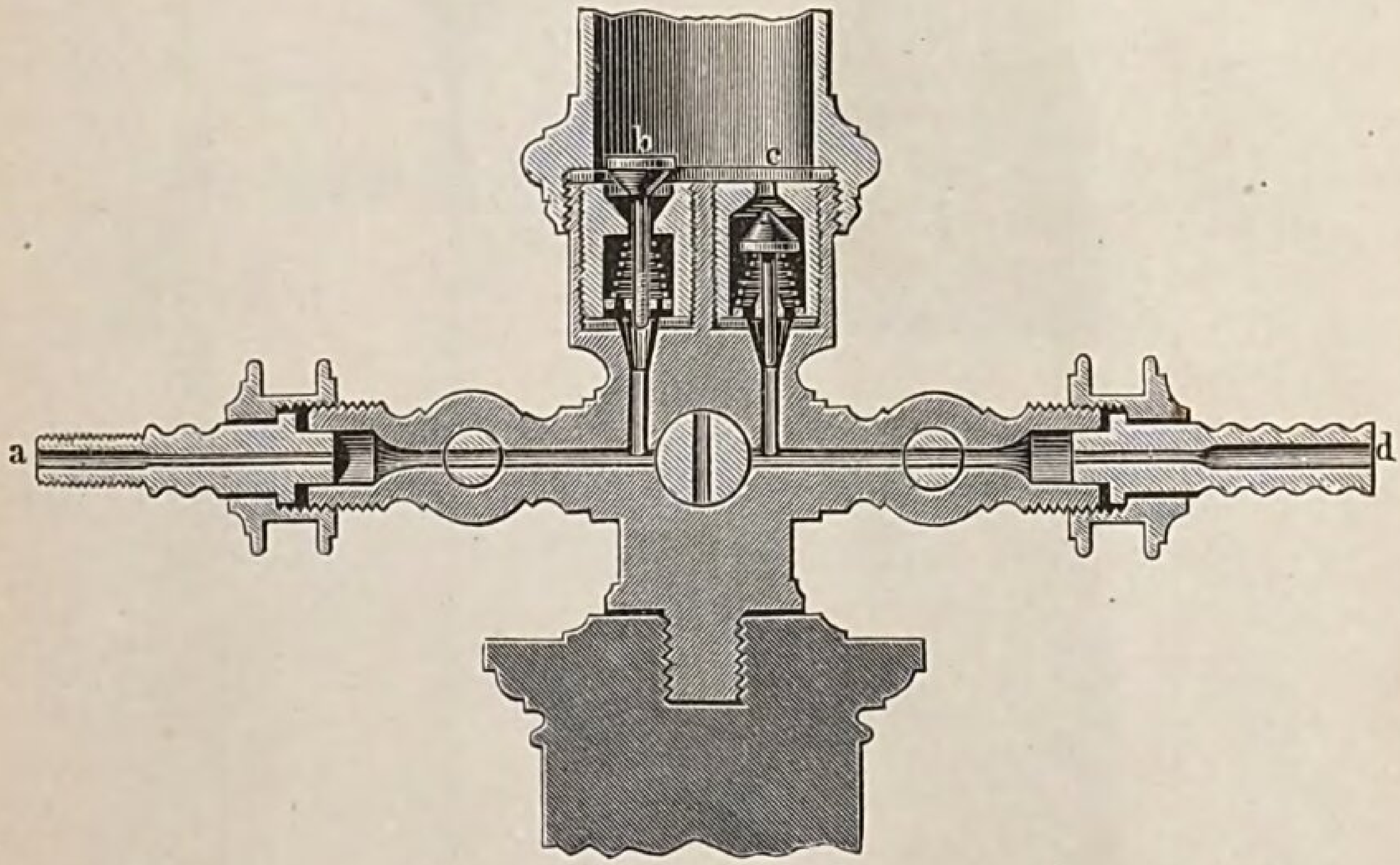
157 Heronsball und Heronsbrunnen.

Der Heronsball ist ein Gefäss, aus welchem ein Wasserstrahl durch den Druck comprimirter Luft hervorgetrieben wird. Ein Heronsball einfachster Form ist die Spritzflasche der Chemiker, Fig. 582 (a. S. 588). Eine Glasröhre *abc*, welche bei *a* zu einer feinen Spitze ausgezogen ist, geht luftdicht durch den Kork,

welcher den Hals eines Glasballons verschliesst, und zwar geht sie fast bis auf den Boden des zum Theil mit Wasser gefüllten Gefässes herab. Wenn nun durch ein zweites Rohr *d f*, welches dicht unter dem Korke mündet, Luft eingeblasen wird, so wird dadurch die Luft im oberen Theil des Ballons comprimirt und durch ihren Druck ein Wasserstrahl aus der Oeffnung der Röhre *b c a* hervorgetrieben.

Durch Blasen mit dem Munde kann man natürlich keine starke Compression im Ballon bewirken und also nur einen schwachen Wasserstrahl hervortreiben. Wenn es sich um die Erzeugung eines kräftigeren Wasserstrahls auf diesem Wege handelt, muss man der grösseren Festigkeit wegen Metallgefässe anwenden und die Zusammendrückung der Luft

Fig. 581.



durch eine Compressionspumpe besorgen. Einen derartigen Heronsball stellt Fig. 583 (a. f. S.) dar. Nachdem das Gefäss etwas über die Hälfte mit Wasser gefüllt und das Spritzrohr aufgeschraubt ist, wird die Ausflussspitze entfernt und dann der Apparat auf eine Compressionspumpe aufgeschraubt, mit Hülfe derer man so viel Luft einpumpt, dass der Druck derselben zwei bis vier Atmosphären beträgt. Nun wird der Hahn, welcher in dem Spritzrohre angebracht ist, geschlossen, und nachdem der Apparat von der Compressionspumpe entfernt ist, die Ausflussspitze wieder auf das Spritzrohr aufgeschraubt. Ein kräftiger Wasserstrahl entsteigt dem Spritzrohr, sobald man den Hahn öffnet.

Wenn man die Einrichtung trifft, dass die Luft im Heronsball durch den Druck einer Wassersäule comprimirt wird, so erhält man einen **Heronsbrunnen**. Fig. 584 (a. f. S.) stellt einen möglichst einfach construirten Heronsbrunnen dar. Wenn man in den Trichter *f* Wasser eingiesst, so

wird es durch das Rohr a in das Gefäss c herabfliessen und die Luft in demselben absperren, welche nun durch die Wassersäule in der Röhre a

Fig. 584.

Fig. 582.

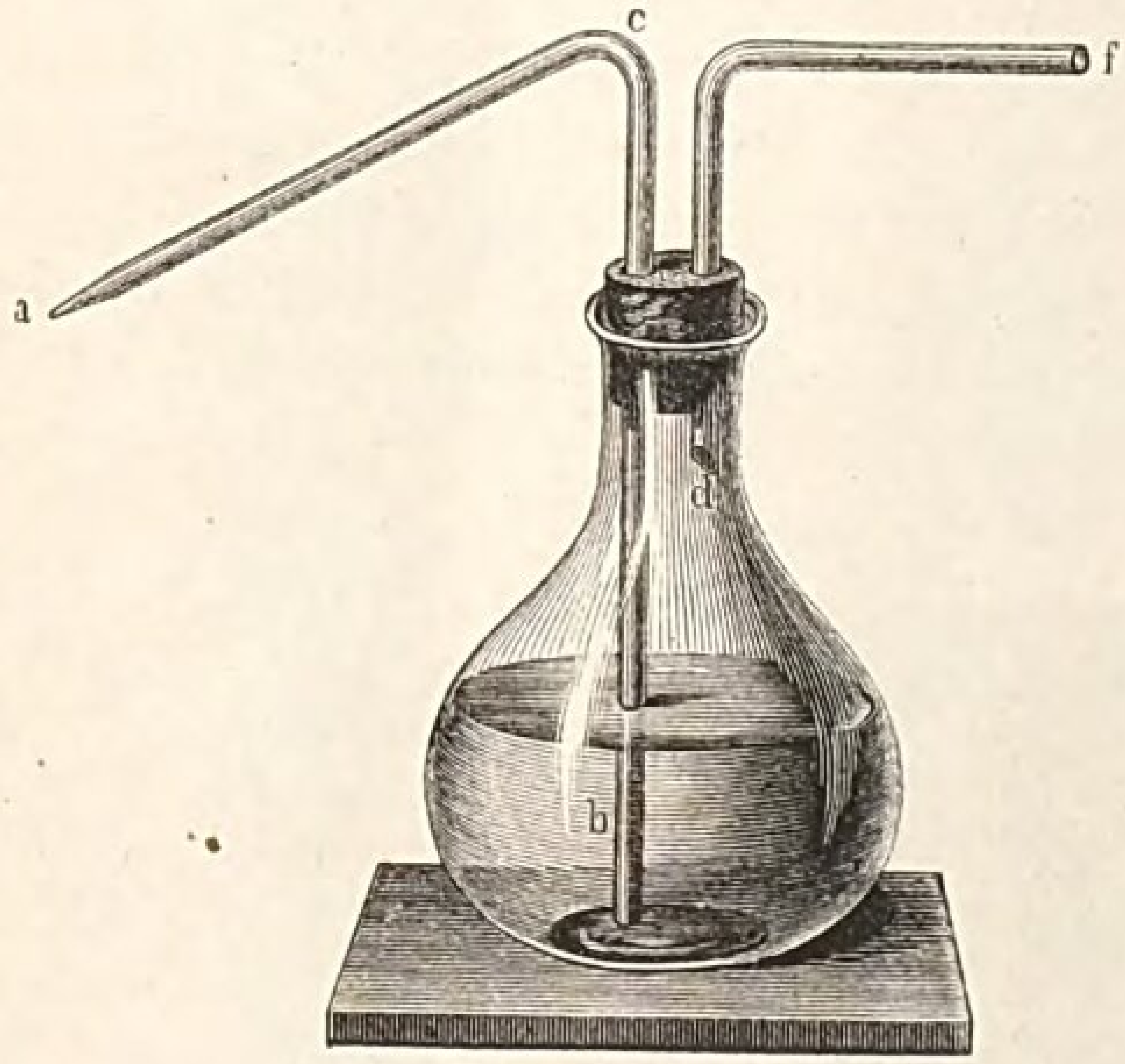
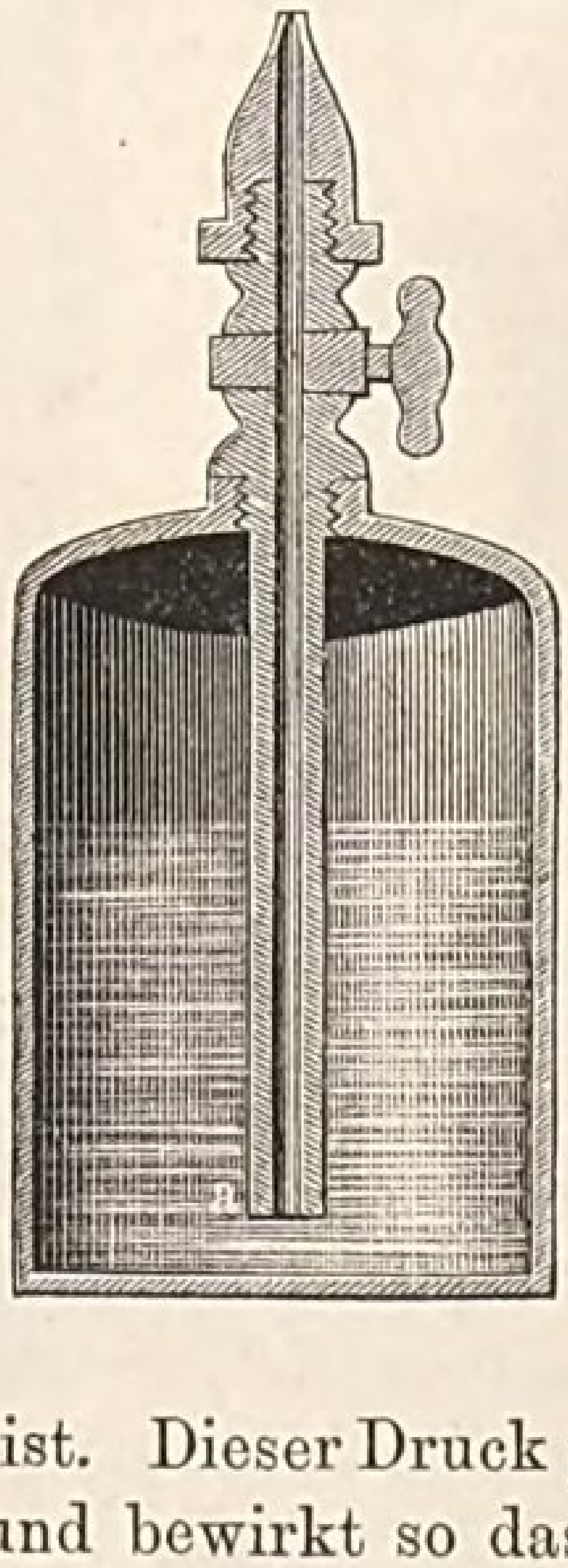
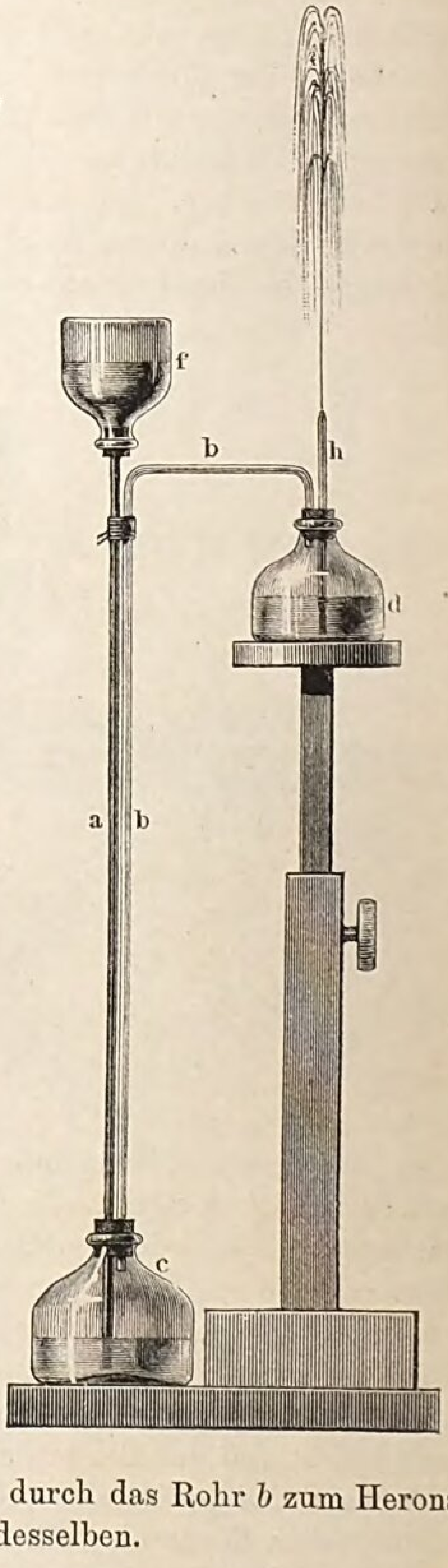


Fig. 583.



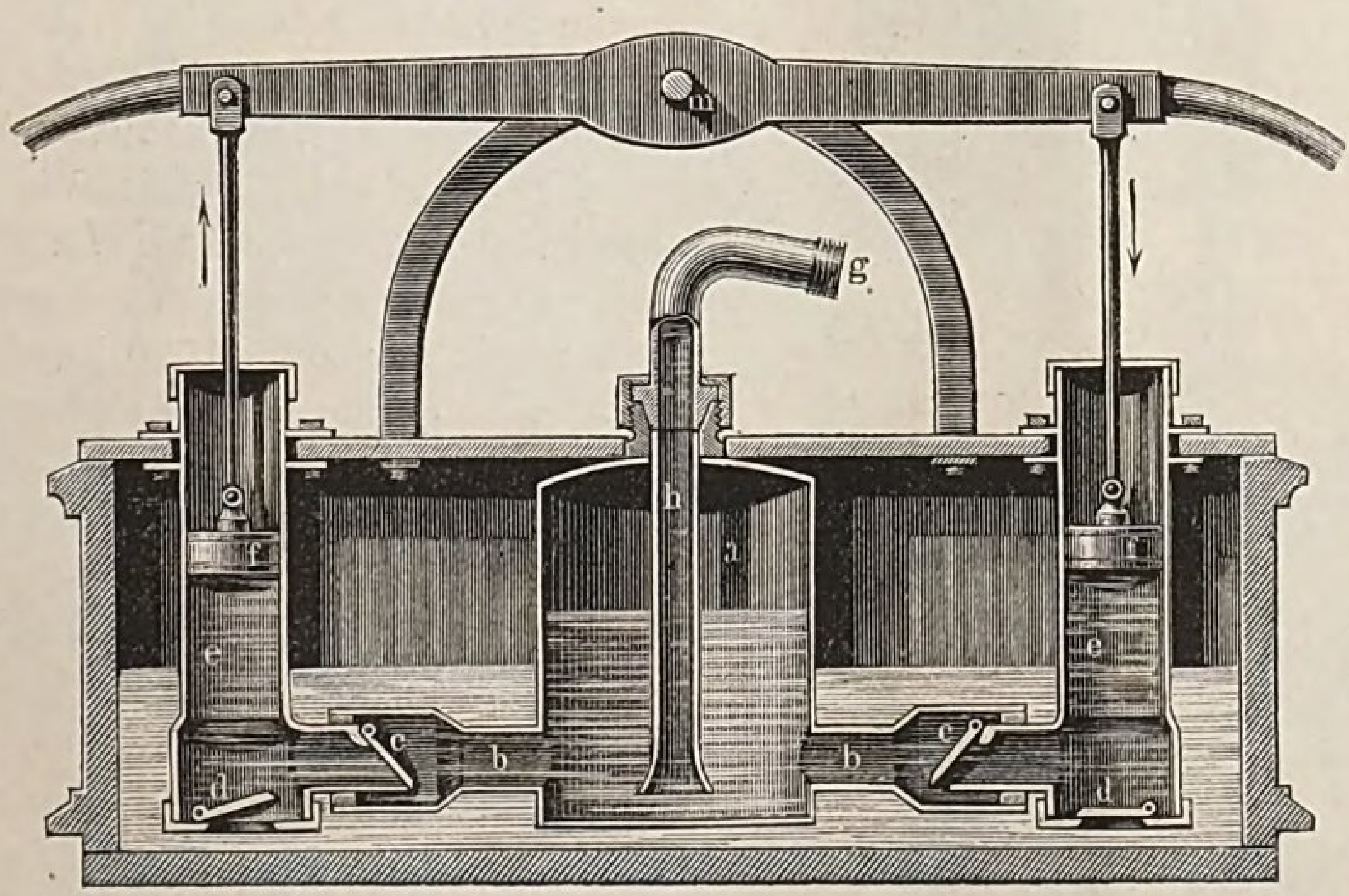


comprimirt ist. Dieser Druck pflanzt sich durch das Rohr b zum Heronsball d fort und bewirkt so das Springen desselben.

158 **Die Feuerspritze,** Fig. 585, ist eine Verbindung der Druckpumpe mit dem Heronsball. Die Pumpenstiefel, von denen wir vor der Hand nur den einen rechts betrachten wollen, stehen in einem mit Wasser ge-

füllten Kasten. Wenn der Kolben *f* aufgezogen wird, so hebt sich die Klappe *d* und das Wasser dringt in den Stiefel. Beim Niedergange des Kolbens schliesst sich das Ventil *d*, die Klappe *c* wird geöffnet und das Wasser wird durch das Gurgelrohr *b* in den Windkessel *a* gepresst. Dieser Windkessel ist nichts anderes als ein grosser Heronsball; je mehr Wasser in den Windkessel gepumpt wird, desto mehr wird die Luft im oberen Theile desselben comprimirt. Das Rohr *h* reicht fast bis auf den Boden des Windkessels, bei *g* wird eine Röhre mit enger Oeffnung, der Schwanenhals, oder ein Wasserschlauch angeschraubt. Durch den Druck, welchen die im Windkessel comprimirte Luft auf das Wasser in demselben fortwährend ausübt, wird ein starker Wasserstrahl aus der Oeffnung des Schwanenhalses hervorgetrieben. An einer Oeffnung, welche sich in der Wand des Windkessels nahe am Boden befindet, kann ein

Fig. 585.



Schlauch mit einer metallenen Spitze angeschraubt werden, welche eine Oeffnung wie der Schwanenhals hat; auch dieser Schlauch liefert einen Wasserstrahl.

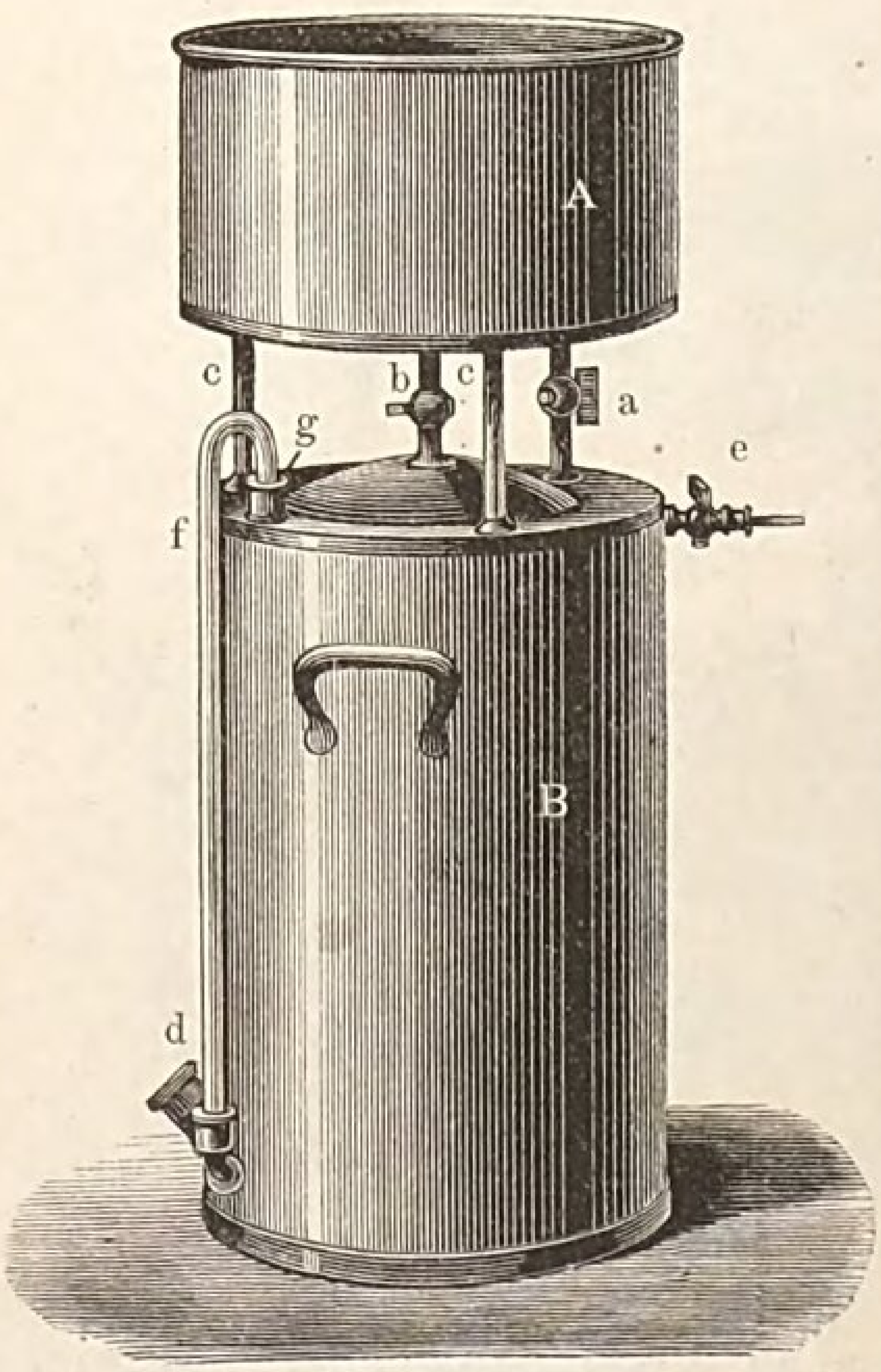
Der Auf- und Niedergang der Kolben wird durch einen zweiarmigen Hebel bewerkstelligt. An diesem Hebel sind die beiden Kolbenstangen so befestigt, dass der eine Kolben steigt, wenn der andere niedergeht, dass also durch eine Unterbrechung dem Windkessel neues Wasser zugeführt wird.

In unserer Figur ist die Spritze in einem Momente dargestellt, in welchem der Kolben rechts niedergeht, während der Kolben auf der linken Seite steigt; auf der linken Seite wird also gerade Wasser in den Stiefel eingesaugt, während auf der rechten Seite eben Wasser in den Windkessel eingepresst wird.

Es ist nicht gerade nothwendig, dass eine Feuerspritze zwei Cylinder habe, und in der That werden kleinere Feuerspritzen nur mit einem Cylinder construirt; in diesem Falle ist freilich der Wasserzugang in den Kessel alternirend, dessen ungeachtet aber wird aus dem Rohre des Windkessels ein continuirlicher Wasserstrahl hinausgetrieben, weil die comprimirte Luft auch noch wirkt, während der Kolben aufgezogen wird. Es finden dabei allerdings Schwankungen in der Kraft statt, mit welcher der Wasserstrahl hervordringt, denn diese nimmt allmälig ab, während der Kolben niedergedrückt, also eine neue Quantität Wasser in den Windkessel hineingepresst wird.

Die neueren Feuerspritzen werden meistens so construirt, dass sie nach Bedarf das Wasser statt aus dem Kasten direct aus einem Canale oder Flusse ansaugen können. Zu diesem Zwecke werden die Oeffnungen der Ventile *d* mit einem gemeinsamen Rohre verbunden, an welches ein dickes Kautschukrohr angeschraubt werden kann, dessen anderes Ende unter die Wasseroberfläche versenkt wird. Im Principe stimmt eine solche Feuerspritze ganz mit der auf S. 470 beschriebenen Saug- und Druckpumpe überein, nur dass daran ein Windkessel vorhanden ist.

Fig. 586.



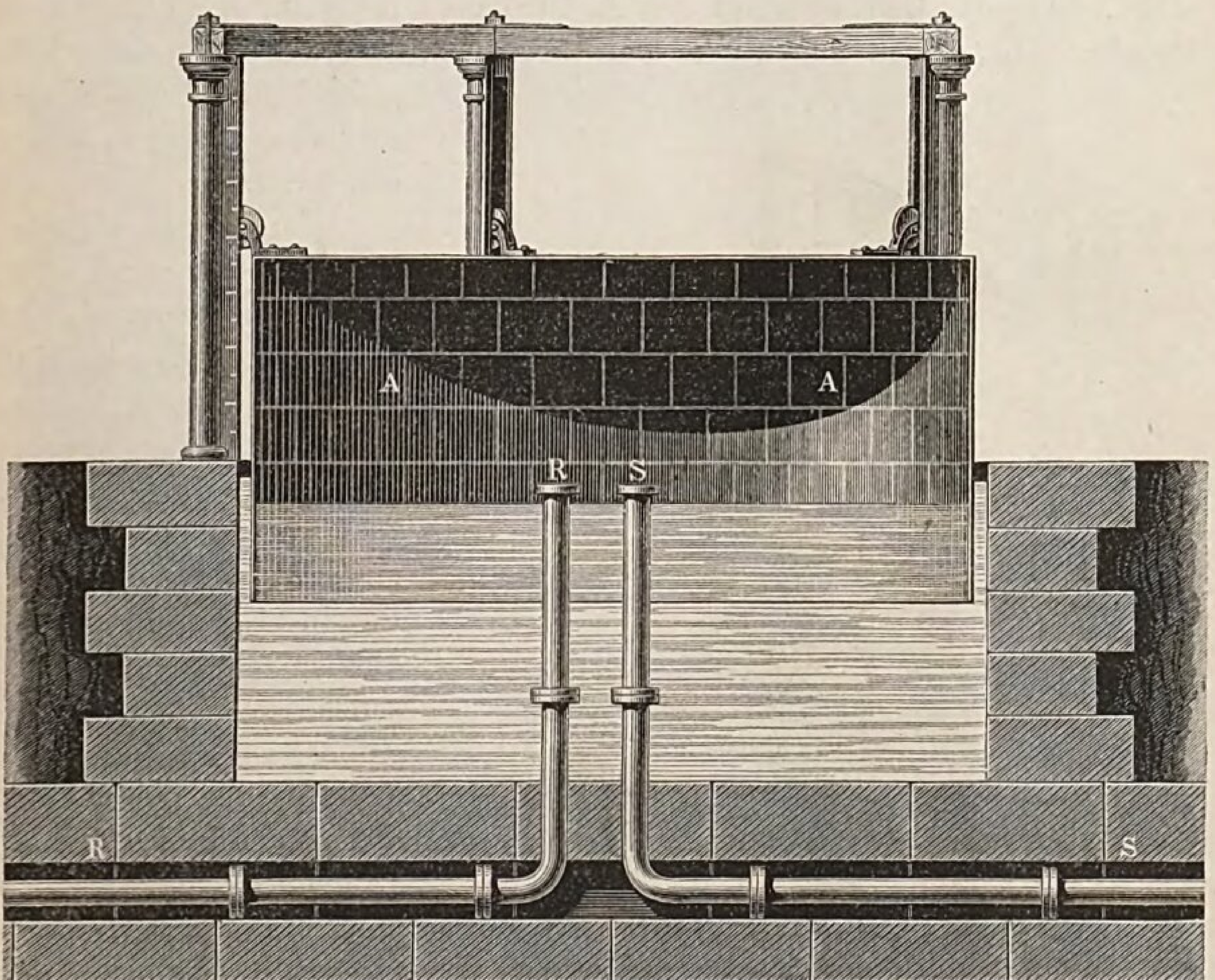
159 **Gasbehälter.** Apparate, welche dazu dienen, um Gase aufzubewahren, werden meistens mit dem wenig passenden Namen Gasometer, d. i. Gasmesser, bezeichnet, während man die eigentlichen Gasmesser mit dem Namen Gasuhren belegt. Es giebt verschiedene Formen von solchen Gasbehältern.

Fig. 586 stellt ein kleines Gasometer nach Pepy dar, wie es in chemischen Laboratorien gewöhnlich gebraucht wird. *B* ist ein Cylinder von lackirtem Blech, welcher ungefähr 40 bis 50 cm hoch ist, der 25 bis 30 cm Durchmesser hat, und dessen oberer Deckel etwas nach oben gewölbt ist. Auf diesem Deckel ruht auf vier Stützen ein zweiter, oben offener Cylinder *A*, dessen Höhe aber nur $^1/_3$ von der des unteren ist. Der obere Cylinder ist mit dem unteren durch zwei Röhren verbunden, von denen die eine, *b*, gerade in der Mitte des Deckels sich befindet. Sie darf durchaus nicht in den unteren Cylinder hineinragen. Eine zweite Verbindungsröhre *a* geht fast bis auf den Boden des unteren Cylinders.

In jeder dieser Röhren befindet sich ein Hahn, vermittelst dessen man nach Belieben die Verbindung der beiden Cylinder herstellen und unterbrechen kann. Bei *c* befindet sich eine kurze horizontale Röhre, welche ebenfalls durch einen Hahn verschlossen werden kann und an welcher vorn ein Schraubengewinde eingeschnitten ist, um andere Röhren und Ausströmungsöffnungen anschrauben zu können. Nahe am Boden des unteren Cylinders befindet sich bei *d* eine aufwärts stehende Oeffnung, welche mittelst einer Schraube oder eines Korkes verschlossen werden kann.

Wenn man den unteren Cylinder mit einem Gase füllen will, füllt man ihn erst mit Wasser, und zwar auf folgende Weise. Die Oeffnung

Fig. 587.



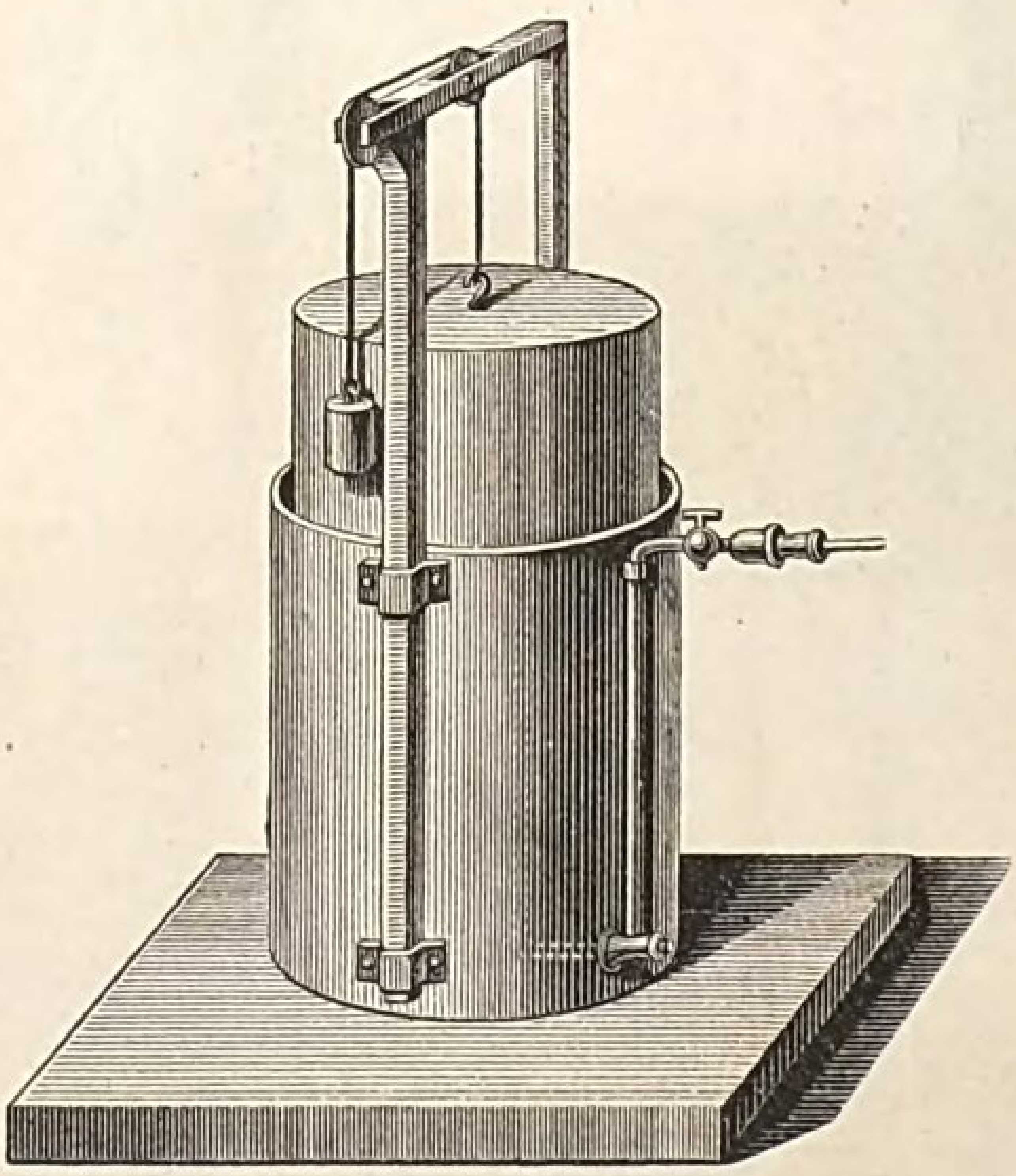
bei *d* wird verschlossen, die drei Hähne werden geöffnet und in das obere Gefäss Wasser gegossen. Das Wasser fliesst in den unteren Cylinder, und wenn dieser so weit gefüllt ist, dass Wasser bei *e* auszufliessen beginnt, schliesst man diesen Hahn. Der Rest von Luft, welcher nun noch im Cylinder sich befindet, entweicht durch das Rohr *b*. Ist der untere Cylinder auf diese Weise mit Wasser gefüllt, so werden die Hähne der Verbindungsröhren geschlossen und die Schraube oder der Kork bei *d* weggenommen. Wasser kann hier nicht ausfliessen, weil keine Luftblasen eindringen können. Wenn man aber bei *d* ein Gasleitungsrohr einsteckt, so wird neben diesem Rohre das Wasser ausfliessen, während

aus demselben fortwährend Gasblasen in den oberen Theil des Behälters aufsteigen. Auf diese Weise füllt sich der untere Cylinder mehr und mehr mit Gas. Wie weit der Cylinder mit Gas gefüllt ist, sieht man an dem Glasrohre *fg*, welches mit dem Gefässe *B* oben und unten in Verbindung steht, so dass das Wasser in diesem Glasrohre gleiche Höhe hat wie im Cylinder.

Nachdem das ganze Reservoir mit Gas gefüllt ist, wird die Oeffnung bei *d* verschlossen, der Hahn der Verbindungsröhre *a* geöffnet. Sobald nun der Hahn *e* geöffnet wird, strömt das Gas hier mit einer dem Drucke der Wassersäule in der Röhre *a* entsprechenden Geschwindigkeit aus.

Diese Gasometer haben zwei Uebelstände, deren einer darin besteht, dass das Gas während des Ausströmens nicht unter constantem Drucke steht, deren anderer in der Unbequemlichkeit beruht, dass bei jeder Füllung die Wassermasse entleert werden muss.

Fig. 588.

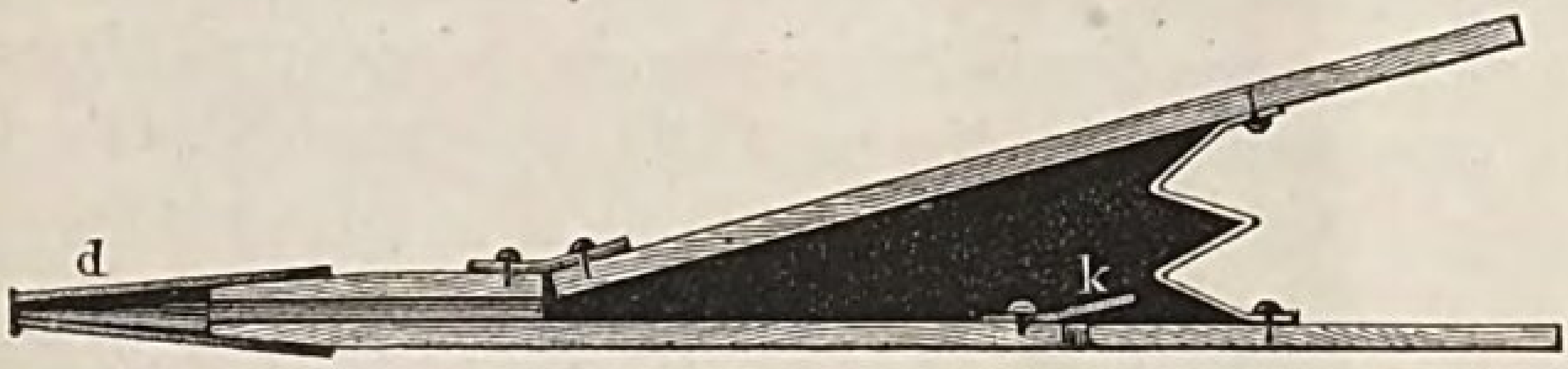


Von diesen Uebelständen frei sind die Glockengasometer. Fig. 587 (a. v. S.) zeigt ein solches von der Art, wie sie zur Aufbewahrung des Leuchtgases Verwendung finden. In ein mit Wasser gefülltes Bassin ist ein unten offener, oben geschlossener, aus zusammengenieteten Platten von Eisenblech gebildeter Cylinder *A* eingetaucht. Von unten her ragen zwei Röhrenleitungen *RR* und *SS* in diesen umgestülpten Cylinder hinein, deren Mündung sich über dem Wasserspiegel im Bassin befindet. Durch die Röhrenleitung *RR* strömt, während die andere durch einen Hahn verschlossen ist, das Leuchtgas aus den Retorten, in welchen es erzeugt wird, durch die Reinigungsapparate in die Höhlung des Cylinders *A* ein. In dem Maasse aber, in welchem das Gas einströmt, muss der ganze Cylinder *A* aus dem Wasser des Bassins emporsteigen. Fünf eiserne, an dem Rande des Bassins angebrachte Säulen dienen, wie aus der Figur leicht zu ersehen ist, dem Cylinder zur Führung, so dass er sich beim Steigen nicht auf die Seite neigen kann.

Ist das Gasometer gefüllt, so wird das Zuströmungsrohr geschlossen, der Hahn des Abströmungsrohrs, welches sich in viele enge, zu den Gasschnäbeln führende Röhren theilt, wird geöffnet; das Gas strömt nun

durch die Röhrenleitung SS ab, indem es durch das Gewicht des Blechcylinders A comprimirt wird, in Folge dessen dann auch der Wasserspiegel in A um mehrere Centimeter tiefer steht als aussen. In dem Maasse, in welchem das Gas durch die Röhrenleitung SS abströmt, sinkt der Cylinder A wieder allmälig nieder. Bei grösseren Gasometern dieser Art wird der mittlere Theil des Wasserbassins durch Mauerwerk ausgefüllt, so dass nur ein ringförmiges Bassin überbleibt, in welches die Glocke einsinkt.

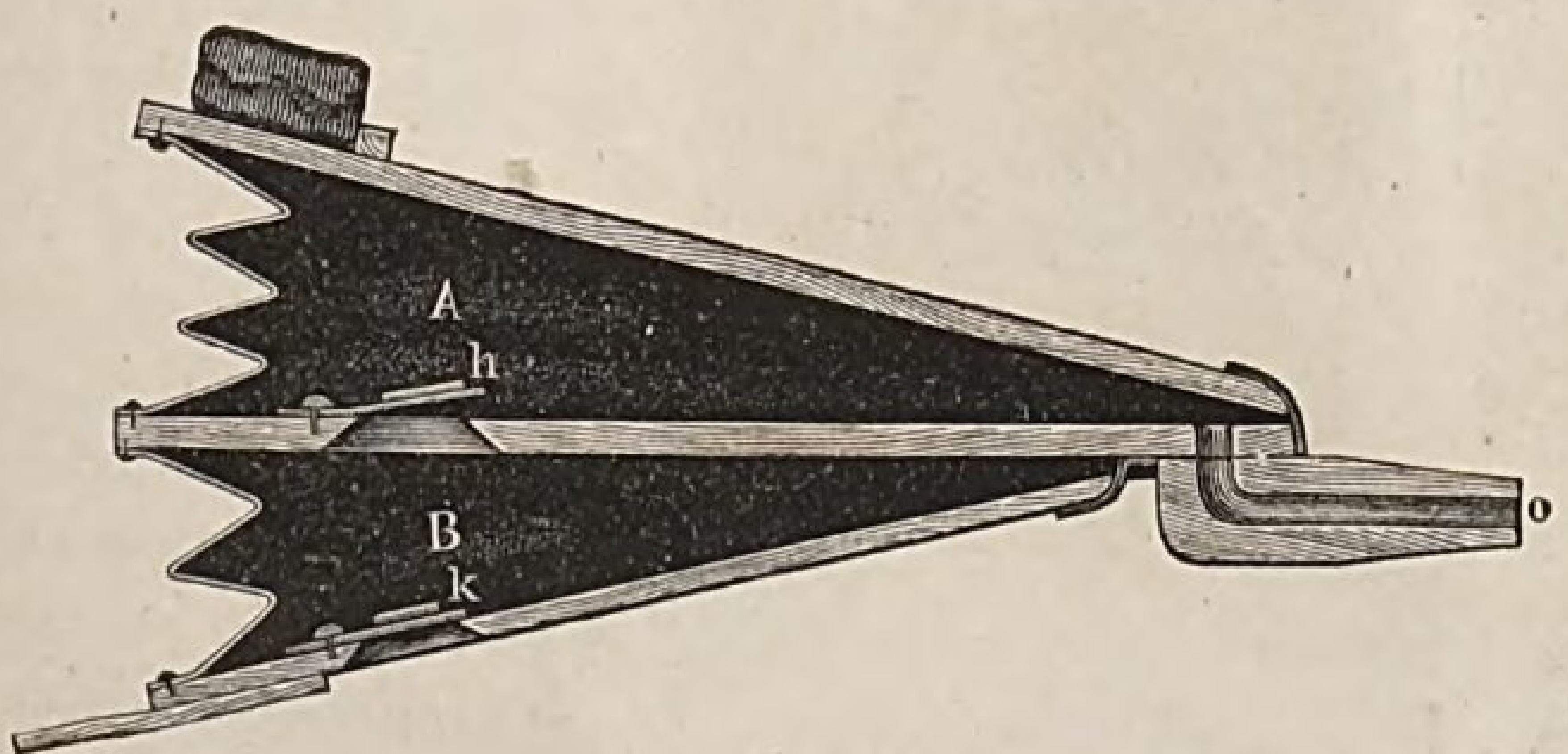
Fig. 589.



Nach demselben Principe werden auch kleinere Gasometer für Laboratorien construirt. In Fig. 588 ist ein solcher abgebildet, und wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Es befindet sich hier nur eine Zuleitungsröhre, aus welcher man erst das Gas ein- und nachher auch wieder ausströmen lässt.

Auch bei diesen Apparaten ist es vortheilhaft, den mittleren Wasserraum durch einen hohlen Blechkörper auszufüllen, wodurch das Gewicht des Ganzen sehr verringert wird.

Fig. 590.

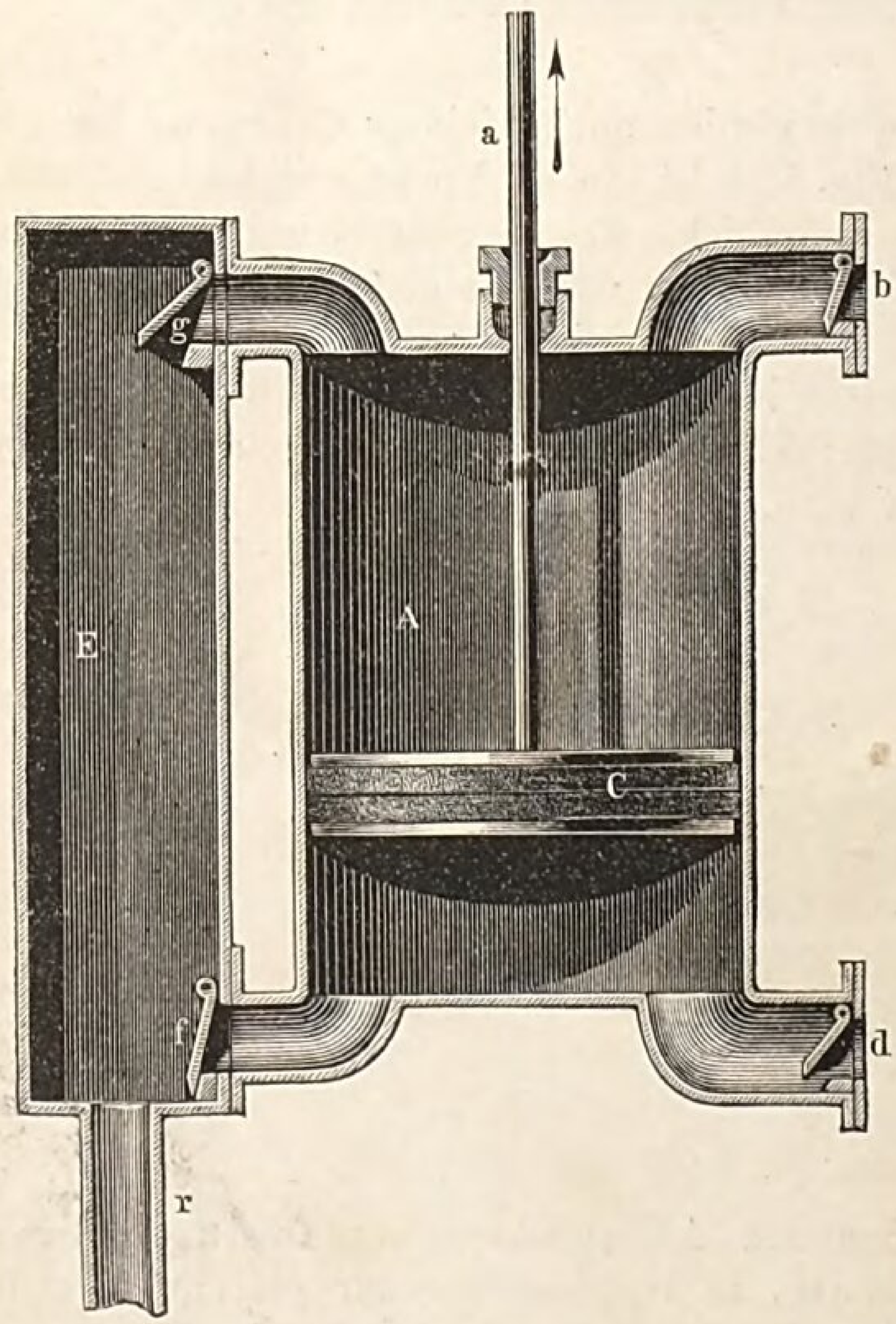


Manchmal benutzt man zur Aufsammlung von Gasen luftdichte Säcke aus Kautschukstoff, so insbesondere zur getrennten Aufbewahrung von Wasserstoff und Sauerstoff zum Zwecke der Erzeugung des Drummond'schen Lichtes (Optik). Man giebt diesen Säcken am bequemsten die Form eines Keilpolsters und legt sie beim Gebrauch zwischen zwei durch Scharnier verbundene Bretter, deren oberes belastet wird, sobald das Gas ausströmen soll. Diese Säcke lassen aber stets nach und nach die Gase hindurch diffundiren und sind deshalb nicht allgemein als Gasbehälter verwendbar.

160 **Gebläse.** Unter Gebläsen versteht man Vorrichtungen, welche dazu dienen, an eine bestimmte Stelle einen mehr oder minder starken Luftstrom hinzuleiten.

Die einfachste und bekannteste Form der Gebläse ist der Blasebalg, welcher in Fig. 589 (a. v. S.) in seiner einfachsten Form dargestellt ist. Beim Aufziehen des Deckels hebt sich das im Boden angebrachte Ventil *k*, es dringt von aussen her Luft in den inneren Raum des Blasebalges, welche beim Niederdrücken des Deckels durch die Düse *d* ausgetrieben wird, weil sich bei diesem Niederdrücken die Klappe *k* schliesst. Mit einem einfachen Blasebalge kann man aber keinen continuirlichen Luftstrom erzeugen, wie dies in Schmieden, in chemischen Laboratorien etc. nöthig ist; man wendet in diesem Falle zusammengesetzte Blasebälge an, welche construirt sind, wie Fig. 590 (a. v. S.) zeigt. Die in der oberen Abtheilung *A* eines solchen Blasebalges enthaltene Luft wird durch Gewichte, welche auf dem oberen Deckel liegen, comprimirt; sie kann aber nur durch die Düse *o* entweichen, weil das Ventil *h* zwischen *A* und *B* sich schliesst, sobald die Luft in *A* stärker comprimirt ist als in *B*. Wenn man die untere Platte des Raumes *B* hebt, so wird die Luft in *B* comprimirt, sie hebt das nach *A* führende Ventil *h* und dringt in den oberen Raum. Beim Niedergange der untersten Platte schliesst sich das Ventil *h* wieder, das Ventil *k* öffnet sich und *B* füllt sich von Neuem mit Luft, welche durch Aufziehung der untersten Platte abermals in den oberen Raum geschafft wird. Man begreift leicht, dass das Ausströmen der Luft aus *A* durch die Düse nicht unterbrochen wird, während *B* von Neuem sich mit Luft füllt.

Fig. 591.



Das vollkommenste aller Gebläse ist das Cylindergebläse, welches Fig. 591 abgebildet ist. In einem wohl ausgebohrten gusseisernen

Cylinder A, in welchem ein Kolben C, an den Wänden luftdicht schliessend, auf- und niederbewegt werden kann, geht die Kolbenstange a luftdicht durch die in der Mitte des oberen Deckels befindliche Stopfbüchse. Durch die Oeffnung bei b communicirt der obere, durch die Oeffnung bei d der untere Theil des Cylinders mit der freien Luft; die Oeffnungen bei g und f aber verbinden den Cylinder mit einem viereckigen Kasten E. Bei b und d befinden sich Klappen, die sich nach innen, bei g und f aber solche, die sich nach aussen öffnen. Wenn nun der Kolben niedergeht, schliesst sich die Klappe bei d, die bei f aber öffnet sich, und alle Luft aus dem unteren Theile des Cylinders wird in den Raum E getrieben. — Unterdessen dringt aber durch die Klappe bei b Luft von aussen her in den oberen Theil des Cylinders. Wenn der Kolben wieder in die Höhe geht, schliesst sich b, und alle Luft, die beim Niedergang des Kolbens hier eingedrungen war, wird durch die Oeffnung bei g in den Kasten E geschafft, während f geschlossen ist und sich der untere Theil des Cylinders wieder durch die geöffnete Klappe d mit Luft füllt. Die in E comprimirte Luft strömt durch ein am unteren Ende von E befestigtes Rohr nach dem Feuerraume.

Die Geschwindigkeit des Kolbens ist am grössten, wenn er die Mitte des Cylinders passirt, sie nimmt um so mehr ab, je mehr er sich der oberen oder unteren Grenze seines Weges nähert. Daraus geht hervor, dass der Wind, welchen ein solcher Cylinder liefert, nicht gleichmässig ausströmt. Da aber für die meisten Schmelzprocesse ein gleichmässiger Windstrom nöthig ist, so muss man dafür sorgen, ihn zu reguliren. Man erreicht dies entweder dadurch, dass man an demselben Windkasten E drei Cylinder anbringt, deren Kolben nicht gleichzeitig die Mitte ihres Weges passiren, oder auch dadurch, dass man die Luft aus E erst in einen Behälter treten lässt, dessen Rauminhalt sehr gross ist im Vergleich zum Volumen des Cylinders. Je grösser dieser Luftbehälter ist, welcher den Namen Regulator führt, desto weniger Einfluss hat die Unregelmässigkeit der Kolbenbewegung auf die Gleichmässigkeit des aus dem Regulator austretenden Luftstromes.

Um den Druck zu messen, welchem die Gase in den verschiedenen Behältern und Gasleitungsröhren ausgesetzt sind, bedient man sich der Manometer, welche bei Gebläsen auch den Namen der Windmesser führen.

Das Wassertrommelgebläse haben wir bereits im §. 155 beschrieben.

Gesetze des Ausströmens der Gase. Für die Ausfluss- 161
geschwindigkeit der Gase gelten dieselben Gesetze wie bei Flüssigkeiten, d. h. die Ausflussgeschwindigkeit ist (Seite 396)

$$v = \sqrt{2gs} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

wenn s die Druckhöhe bezeichnet. Hier aber ist s eine Grösse, die nicht direct durch die Beobachtung gegeben ist, wie bei tropfbar-flüssigen

Körpern. Für diese bezeichnet s die Höhe der Flüssigkeitssäule, deren Druck den Ausfluss bewirkt und welche von derselben Natur und Dichtigkeit ist, wie die ausfliessende Flüssigkeit selbst. Gase, welche in einem Gefässe eingeschlossen sind, sind aber nie durch eine Gassäule von gleichmässiger Dichtigkeit und wohl begrenzter Höhe gedrückt, sondern sie sind einem Drucke ausgesetzt, welcher durch die Höhe h einer Wassersäule oder einer Quecksilbersäule gemessen wird.

Ist das specifische Gewicht des eingeschlossenen Gases (Wasser $= 1$ gesetzt) gleich d, so ist die Höhe s einer Säule dieses Gases, welche einer Wassersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält:

$$s = \frac{h}{d},$$

mithin haben wir:

$$v = \sqrt{2g\frac{h}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Unter normalem Atmosphärendruck ist das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft 0,00129. Hat aber eine abgesperrte Luftmasse ausser dem normalen Atmosphärendruck (welcher einer Wassersäule von 10,33 m das Gleichgewicht hält) noch den Druck einer Wassersäule von h Metern zu tragen, so ist ihr specifisches Gewicht:

$$d = 0{,}00129\,\frac{10{,}33 + h}{10{,}33}.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit der Luft ist also unter diesen Umständen:

$$v = \sqrt{2g\,\frac{h\,.\,10{,}33}{0{,}00129\,(10{,}33 + h)}} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Wenn die in einem Gasometer eingeschlossene Luft bei einem Barometerstande von b Metern ausser dem Druck der Atmosphäre noch den Ueberdruck einer Quecksilbersäule von h Metern zu tragen hat, so ist ihr specifisches Gewicht:

$$d = 0{,}00129\,\frac{b + h}{0{,}76}.$$

Die Höhe s einer Luftsäule von dieser Dichtigkeit, welche einer Quecksilbersäule von h Metern das Gleichgewicht hält, ist:

$$s = h\,\frac{q}{d},$$

wenn d das specifische Gewicht der eingeschlossenen Luft, q aber das des Quecksilbers (beide auf Wasser bezogen) bezeichnen, oder wenn man für q und d ihre Werthe setzt:

$$s = h \cdot \frac{13{,}6\,.\,0{,}76}{0{,}00129\,(b + h)},$$

$$s = 8012\,\frac{h}{b + h}.$$

Setzen wir diese Werthe von s in Gleichung 1), so kommt:

$$v = \sqrt{2g \cdot 8012 \frac{h}{b+h}},$$

oder wenn man für g seinen Zahlenwerth 9,81 setzt:

$$v = 396{,}5 \sqrt{\frac{h}{b+h}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

In dieser Gleichung bezeichnet also v die Geschwindigkeit, mit welcher atmosphärische Luft aus der Oeffnung eines Gefässes, in welchem sie durch den Ueberdruck einer Quecksilbersäule von h Metern comprimirt ist, ins Freie, also in die Luft ausströmt, welche unter dem Drucke eines Barometerstandes von b Metern Höhe steht.

Nach Gleichung 4) lässt sich aber auch die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher Luft, welche sich unter dem Drucke h befindet, in den leeren Raum einströmt. Man hat für diesen Fall nur $b = 0$ zu setzen und erhält alsdann:

$$v = 396{,}5 \sqrt{\frac{h}{h}} = 396{,}5,$$

also stets den gleichen Werth von v, welches auch der Werth von h sein mag.

Die Ausflussmenge in einer Secunde würde man erhalten, wenn man den Querschnitt der Oeffnung f mit diesem Werthe von v multiplicirt, vorausgesetzt, dass in jedem Punkte des Querschnitts die ausströmenden Lufttheilchen mit dieser Geschwindigkeit passiren. Die Ausflussmenge in t Secunden würde demnach sein:

$$M = f \cdot t \cdot 396{,}5 \sqrt{\frac{h}{b+h}}.$$

Die Erfahrung aber zeigt, wie wir dies ja auch schon bei tropfbarflüssigen Körpern gesehen haben, dass die wirkliche Ausflussmenge geringer ist als die theoretische; und zwar hat man die theoretische Ausflussmenge mit einem bestimmten Factor μ zu multipliciren, um die wirkliche zu erhalten.

Für Wasser ist bekanntlich dieser Factor 0,64 und ist fast ganz unabhängig von der Druckhöhe, indem er nur sehr unbedeutend wächst, wenn die Druckhöhe abnimmt. Für Gase aber ist der Werth von μ sehr veränderlich. Nach Schmidt, welcher diesen Gegenstand zuerst einer genaueren Untersuchung unterworfen hat, ist μ bei einer Druckhöhe von 1 m (Wasser) gleich 0,52. Nach d'Aubuisson's Versuchen ist, innerhalb der Druckhöhen 3 bis 15 cm, der Werth von $\mu = 0{,}65$ zu setzen. Solche Verschiedenheiten können nicht wohl von Beobachtungsfehlern herrühren, und beweisen unzweifelhaft eine Veränderlichkeit von μ.

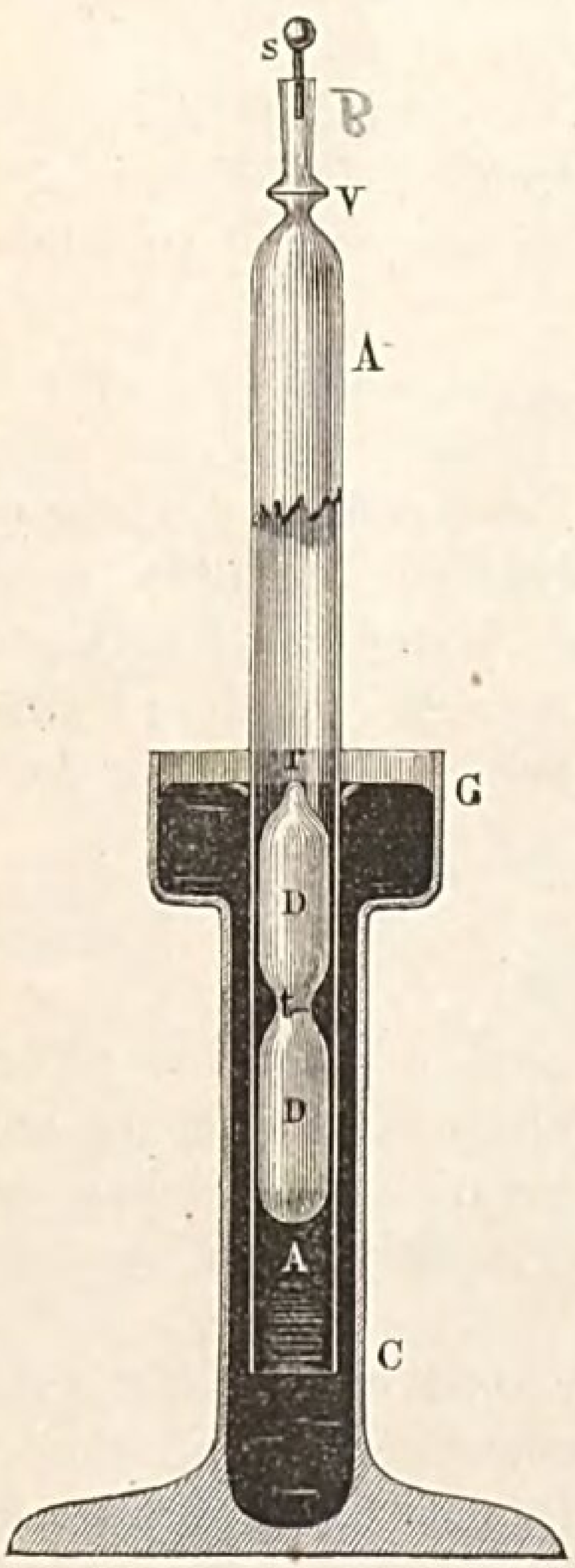
Eine sehr genaue Reihe von Versuchen hat Koch über diesen Gegenstand angestellt. Er hat gefunden, dass, wenn die Druckhöhe von 2 m (Wasser) bis 5 cm abnimmt, der Werth von μ von 0,5 bis auf 0,6 wächst. Buff hat gezeigt, dass, wenn man

$$\mu = 0{,}626\,(1 - 0{,}789\,\sqrt{h})$$

setzt, wo h, wie bisher, die Druckhöhe bezeichnet, die nach dieser Formel berechneten Werthe sehr gut mit den Koch'schen Beobachtungen übereinstimmen, dass also diese Formel das empirische Gesetz für die Veränderlichkeit des Ausflusscoëfficienten μ ist. Später hat Buff hierüber selbst genaue Versuche bei geringem Drucke, wie er besonders in der Praxis vorkommt, angestellt, welche gleichfalls die Veränderlichkeit des Coëfficienten μ in der erwähnten Weise bestätigen.

Die Differenz zwischen der theoretischen und wirklichen Ausflussmenge hat hier einen ganz analogen Grund, wie bei den tropfbar-flüssigen Körpern, und es lässt sich daraus schliessen, dass auch hier eine *Contractio venae* stattfinden muss, obgleich wir sie nicht unmittelbar beobachten können.

Fig. 592.



Cylindrische Ansatzröhren ebenso wie conische, mag nun die weite Oeffnung nach innen oder nach aussen gekehrt sein, vermehren die Ausflussmenge der Gase.

162 **Ausflussgeschwindigkeit verschiedener Gase bei gleichem Druck.** Nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen ist die Ausströmungsgeschwindigkeit v' eines Gases, dessen specifisches Gewicht nicht d, sondern $n\,d$ ist,

$$v' = \sqrt{2g\frac{h}{nd}} = v\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke ausströmen, so ist also ihre Ausströmungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus ihren specifischen Gewichten umgekehrt proportional. Ein viermal leichteres Gas wird also doppelt so schnell ausströmen. Das specifische Gewicht der Kohlensäure ist 1,5, das des Wasserstoffgases ist 0,069 mal so gross als das der atmosphärischen Luft. Die Ausströmungsgeschwindigkeit der Kohlensäure ist also $\frac{v}{\sqrt{1,5}} = 0,816\,v$, die des Wasserstoffgases ist $\frac{v}{\sqrt{0,069}} = 3,8\,.\,v$, wenn v die Ausströmungsgeschwindigkeit der atmosphärischen Luft unter gleichem Druck bezeichnet.

Da nun aber die Ausflusszeit der Ausflussgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, so folgt, dass das specifische Gewicht eines Gases dem Quadrat der Zeit proportional ist, welches ein gegebenes Gasvolumen unter sonst gleichbleibenden Umständen braucht, um aus einer feinen Oeffnung auszuströmen.

Bezeichnen wir mit t und t' die Zeiten, welche zwei gleiche Volumina verschiedener Gase brauchen, um bei gleichem Druck durch die gleiche Oeffnung auszuströmen, so haben wir also:

$$\frac{s}{s'} = \frac{t^2}{t'^2} \cdot \quad \quad 1)$$

wenn wir mit s und s' die specifischen Gewichte der beiden Gasarten bezeichnen.

Bunsen gründete darauf ein sehr sinnreiches Verfahren, um das specifische Gewicht von Gasen zu ermitteln. Zur Aufnahme des zu untersuchenden Gases dient eine Glasröhre A, Fig. 592, welche ungefähr 40 cm lang ist. Oben ist sie verengt und ein Glasröhrchen B angesetzt. In der etwas verdickten Vereinigungsstelle V ist ein dünnes Platinplättchen eingeschmolzen, welches eine feine Oeffnung hat, durch welche das Gas aus A ausströmen kann, wenn das Röhrchen B nicht durch den Glasstöpsel s geschlossen ist. Unten ist das Gas durch Quecksilber gesperrt, welches sich in einem oben erweiterten Gefäss befindet. Während der Stöpsel s wohl schliessend aufgesetzt ist, wird nun die Glasröhre A so tief in das Quecksilber niedergedrückt und durch eine entsprechende Vorrichtung festgehalten, dass die Spitze r eines aus einer Glasröhre verfertigten Schwimmers D durch ein mehrere Schritte entferntes Fernrohr genau im Niveau des Quecksilbers im Gefäss C erscheint. Nun wird der Stöpsel s weggenommen; das Gas beginnt auszuströmen, der Schwimmer D steigt, und man hat nur die Zeit zu messen, welche vom Wegnehmen des Stöpsels an vergeht, bis die an einer Verengung des Schwimmers D angebrachte Marke t im Niveau des äusseren Quecksilbers erscheint. Hat man mit demselben Instrumente gleich hinter einander diese Messung mit zwei verschiedenen Gasarten angestellt, so verhalten sich ihre specifischen Gewichte wie die Quadrate der beobachteten Ausflusszeiten. Zur Erläuterung mögen folgende von Bunsen angestellte Messungen dienen. Damit der Schwimmer D um die Höhe rt stieg, waren erforderlich:

für atmosphärische Luft	für Knallgas (elektrolytisch)
117,9 Secunden	75,4 Secunden
117 „	75,8 „
117,9 „	75,7 „
117,6 Secunden	75,6 Secunden.

Setzen wir nach diesen Versuchsresultaten in Gleichung 1) $t = 75{,}6$, $t' = 117{,}6$ und $s' = 1$, so ergiebt sich für das specifische Gewicht des Knallgases:

$$s = \frac{75{,}6^2}{117{,}6^2} = 0{,}413,$$

was mit dem aus dem specifischen Gewichte der Bestandtheile berechneten specifischen Gewichte des Knallgases (0,415) sehr nahe übereinstimmt.

Fig. 593 zeigt eine verbesserte Form des Ausströmungsapparates, welchen Bunsen zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Gase angewendet (Bunsen, Gasometrische Methoden, S. 129).

Wenn die Gase nicht durch Oeffnungen in dünner Wand, sondern durch Capillarröhren ausströmen, so erscheinen die Ausströmungsgesetze in ähnlicher Weise modificirt, wie die der tropfbar-flüssigen Körper.

Um die Gesetze zu ermitteln, nach welchen das Ausströmen eines Gases durch die capillaren Canäle eines Gypspfropfens stattfindet, wandte Bunsen (Gasometrische Methoden, Seite 214) die in Fig. 594 abgebildete Vorrichtung an. Eine graduirte Röhre ist oben mit einem bei 60° C. getrockneten Gypspfropfen geschlossen. Durch ein seitliches Rohr kann man sie mit einem beliebigen Gase füllen und dann mittelst eines Quetschhahnes absperren, welcher das Kautschukröhrchen *q* zudrückt. — Ueber dem Gypspfropfen *b* erweitert sich die Glasröhre etwas und in diese conische Erweiterung passt der eingeriebene Glasstöpsel *o*. Erst wenn dieser in die Höhe gezogen ist, kann eine Durchströmung des Gypspfropfens nach der einen oder anderen Richtung hin beginnen. Durch den Raum über dem Gypspfropfen *b* kann man nun aber mittelst des Röhrchens *i* einen Gasstrom von der rechten Seite her einführen, während auf der linken Seite eine gleiche Gasmenge ausströmt, und so ist es möglich, auch über dem Gypspfropfen *b* eine beständig erneuerte Atmosphäre irgend eines Gases zu erhalten.

Es sei nun das Rohr ähnlich wie in Fig. 592 (S. 568) durch Quecksilber abgesperrt und mit Sauerstoffgas gefüllt, während über den Gypspfropfen ein Strom von Sauerstoffgas hinwegstreicht; wenn unter diesen Umständen das Rohr so hoch in die Höhe gezogen wird, dass der Spiegel des Quecksilbers im Rohr einige Centimeter höher steht als aussen, so wird unter dem Einfluss dieser Druckdifferenz Sauerstoffgas von oben her durch den Gypspfropfen in die Röhre eintreten und man kann nun messen, wie viel Zeit erforderlich ist, damit bei constant erhaltener Druckdifferenz ein gegebenes Volumen Sauerstoff eindringt.

Bunsen hat den Versuch für das nämliche Gas bei verschiedener Druckdifferenz angestellt und ihn dann in gleicher Weise mit verschiedenen Gasen wiederholt. Aus diesen Versuchen ergab sich zunächst, dass die in gleichen Zeiten durch den Gypspfropfen eingeströmten Volumina desselben Gases der Druckdifferenz proportional sind.

Vergleicht man aber die Volumina verschiedener Gase, welche unter gleicher Druckdifferenz in derselben Zeit einströmen, so verhalten sich diese nicht umgekehrt wie die Quadratwurzel aus den specifischen Gewichten der Gase. Die unter gleicher Druckdifferenz in gleichen Zeiten eingetretenen Volumina von Sauerstoffgas und Wasserstoffgas verhalten sich nach dem Versuche wie 1 : 2,73; während die Quadratwurzeln aus den specifischen Gewichten im Verhältniss von 1 : 3,995 stehen.

Es geht daraus hervor, dass der Durchgang eines Gases durch einen Gypspfropfen durch einen Reibungscoefficienten modificirt ist, welcher von der Natur des Gases abhängt, und dass also die Hohlräume des

Fig. 593.

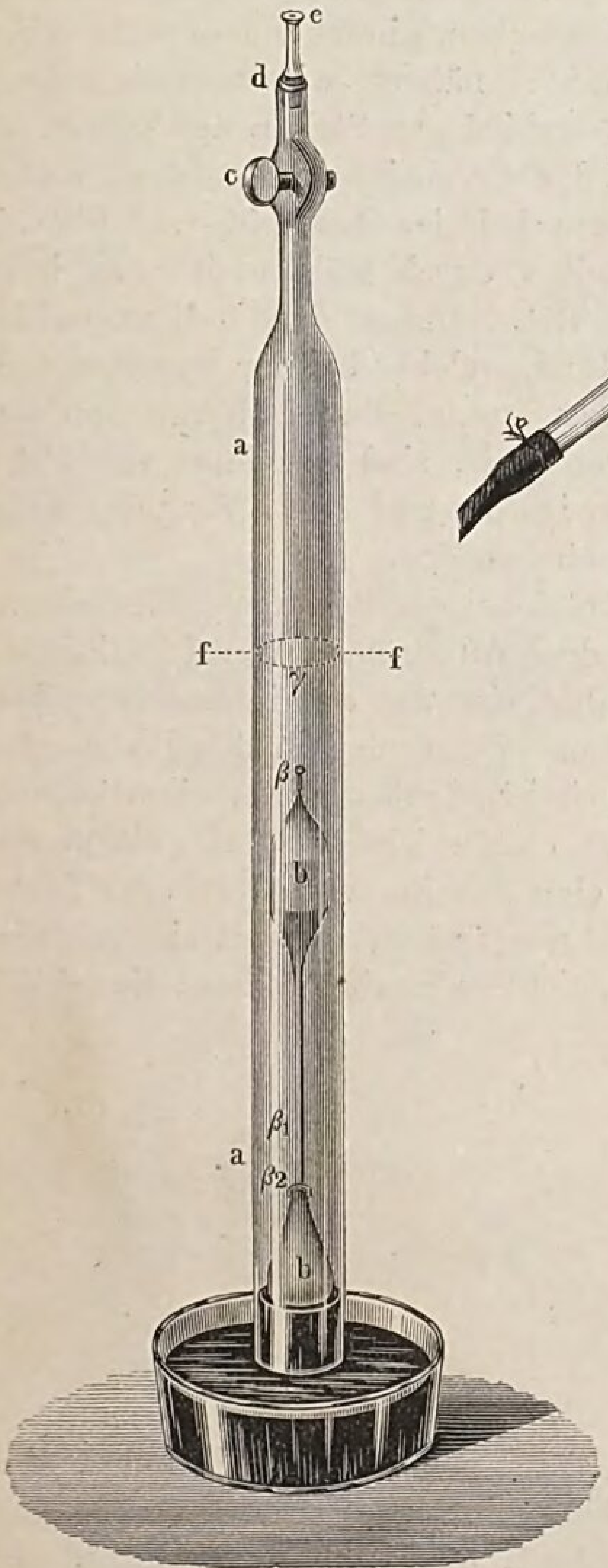
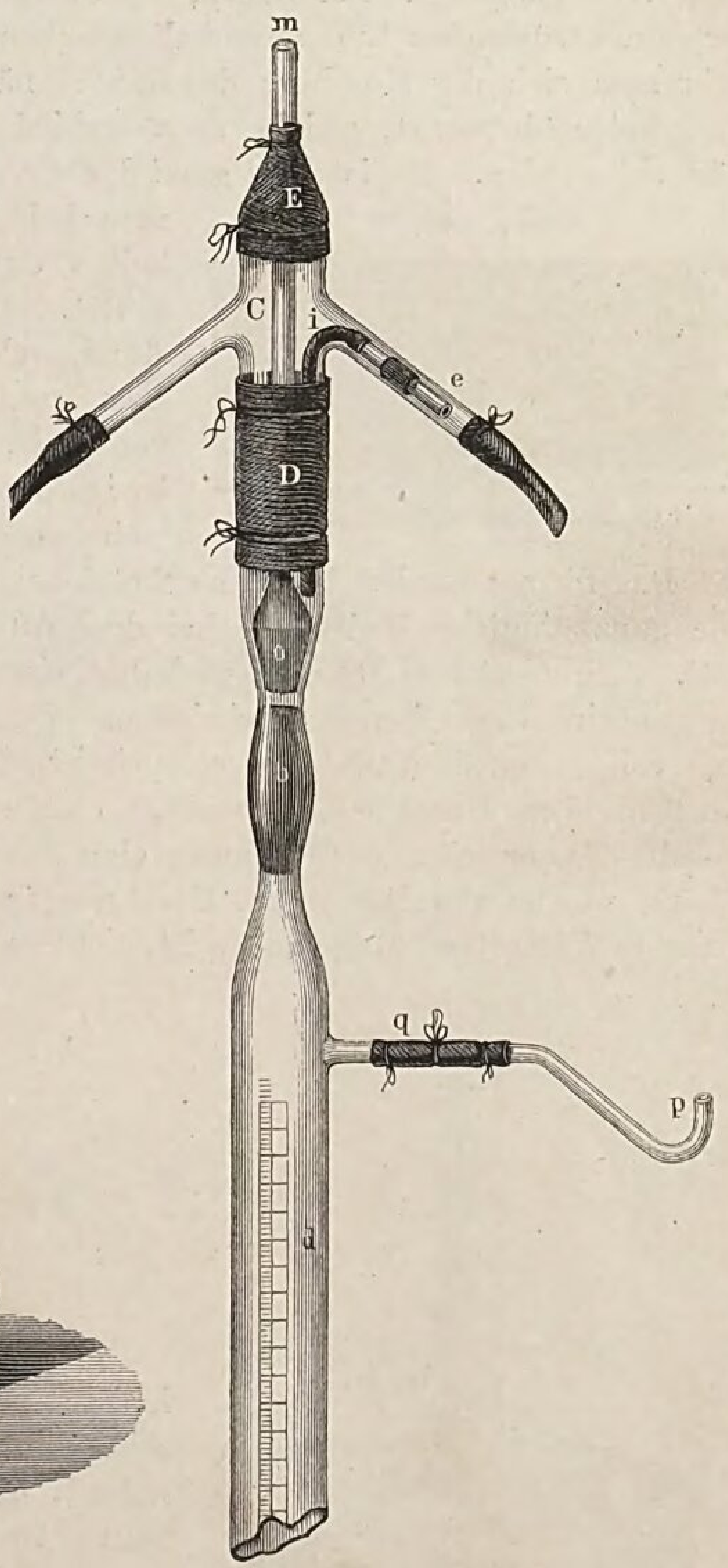


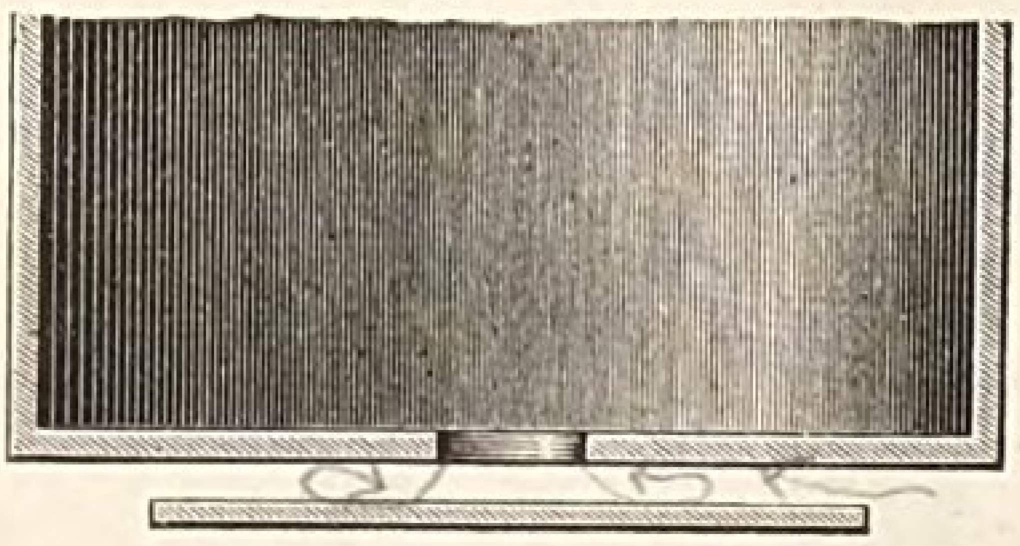
Fig. 594.



Gypses gegen hindurchströmende Gase sich nicht wie ein System von feinen Oeffnungen in dünner Wand, sondern wie ein System capillarer Röhren verhalten.

163 **Seitendruck der Gase beim Ausströmen, aërostatisches Paradoxon.** Wenn sich Luft durch Röhrenleitungen bewegt, so ist ein Reibungswiderstand zu überwinden, und dazu wird ein Theil der Spannung des comprimirten Gases verwandt werden, also für die Bewegung verloren gehen. Der Druck, den die Röhrenwände von der Tension der durchströmenden Luft auszuhalten haben, nimmt um so mehr ab, je mehr man sich der Mündung des Rohres nähert, wie man sich durch Manometer überzeugt, welche an verschiedenen Stellen des Rohres angebracht werden. Es ist dies ganz den Erscheinungen analog, welche man bei der Bewegung von Flüssigkeiten durch Röhrenleitungen beobachtet. Ueber den Reibungswiderstand, welcher bei der Bewegung der Luft durch Röhren überwunden werden muss, sind besonders von d'Aubuisson und Buff Versuche angestellt worden.

Fig. 595.



Das Phänomen des Saugens findet bei der Bewegung der Gase auf eine ganz ähnliche Weise wie bei dem Ausströmen von Flüssigkeiten statt. Clement und Desormes haben eine äusserst interessante, hierher gehörige Erscheinung beschrieben. Wenn man in den Boden eines Reservoirs, Fig. 595, welches comprimirte Luft enthält, eine Oeffnung von 2 bis 5 cm Durchmesser macht, so entweicht die Luft mit grosser Gewalt. Wenn man der Oeffnung eine Scheibe von Holz oder Metall nähert, welche ungefähr 20 cm Durchmesser hat, so wird sie, nachdem der erste Widerstand überwunden ist, nicht mehr abgestossen; sie oscillirt lebhaft, indem sie in sehr kurzen Zwischenräumen sich der Oeffnung bald nähert, bald von ihr entfernt. Die Luft entweicht dabei mit grossem Geräusch zwischen der Scheibe und der Wand. Wenn man versucht, die Scheibe wegzunehmen, so muss man grosse Kraft anwenden, wie wenn sie auf die Wand festgeleimt wäre. Clement und Desormes erklärten dies Phänomen ganz richtig. Der Luftstrahl, welcher die Oeffnung verlässt, muss sich in eine dünne Schicht zwischen der Scheibe und

Fig. 596.

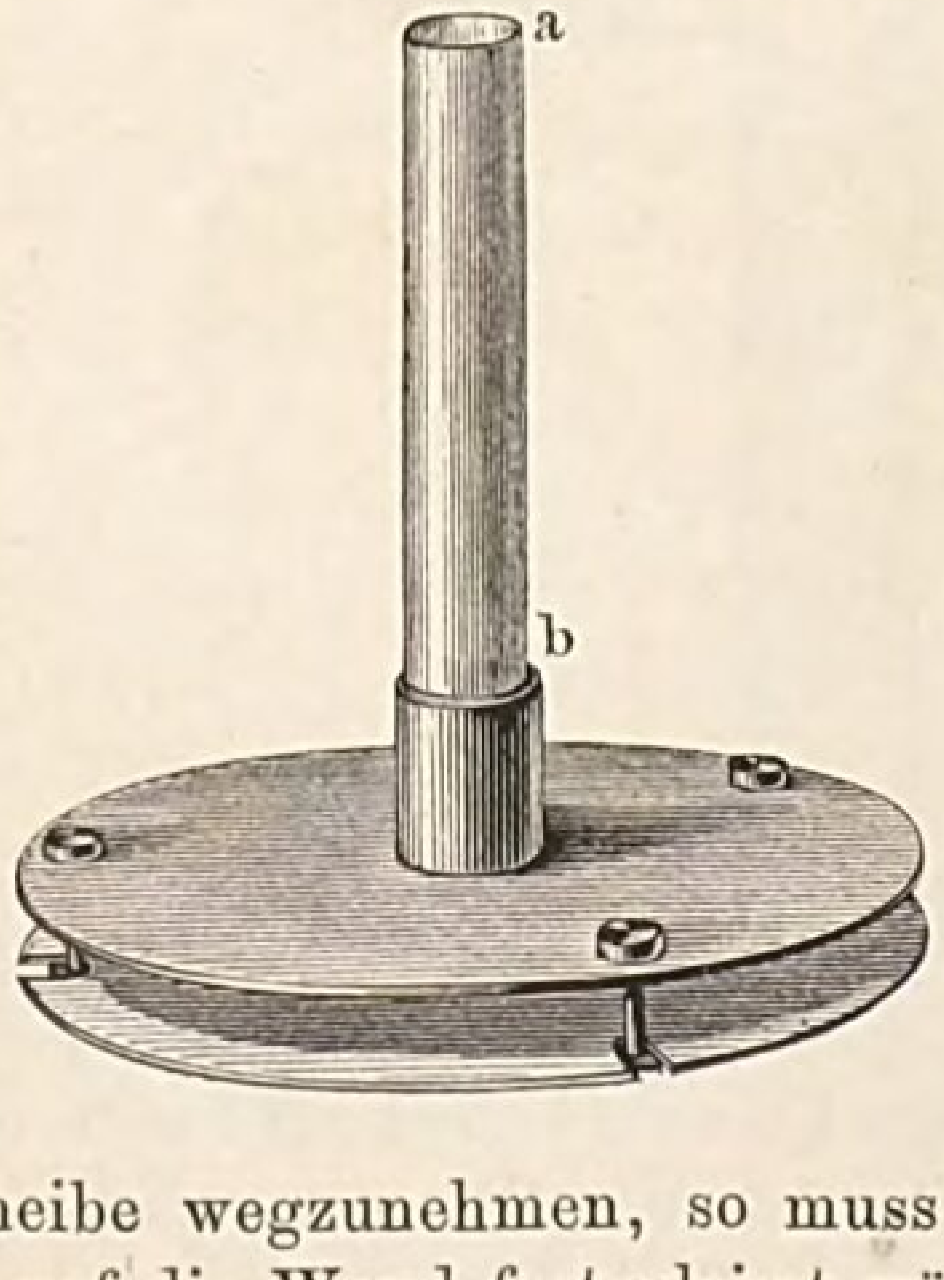
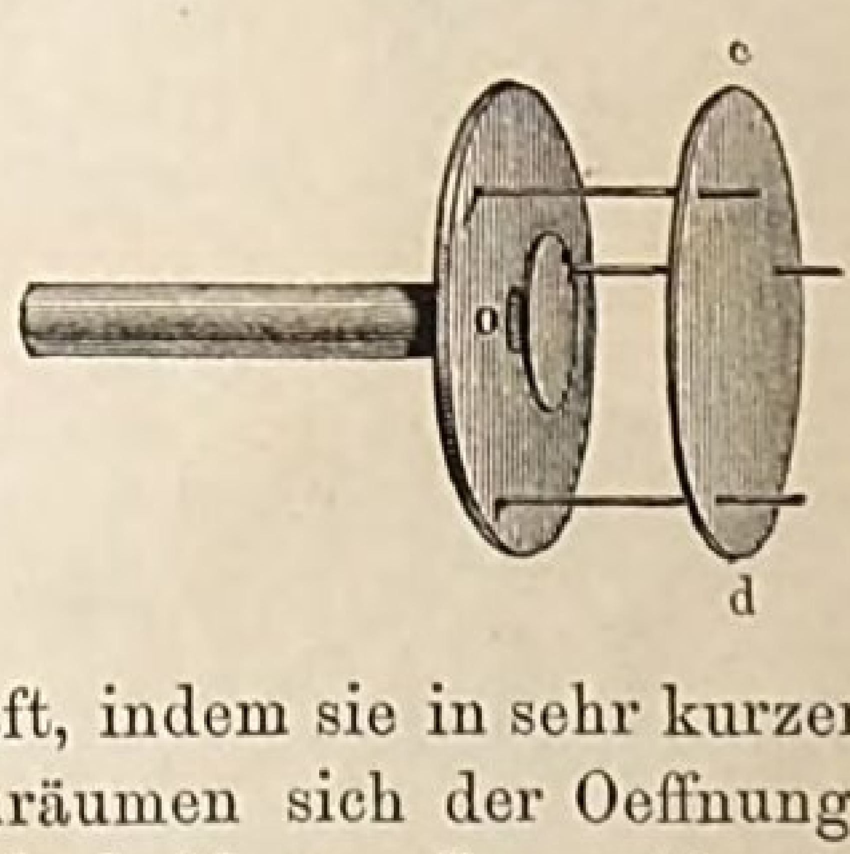


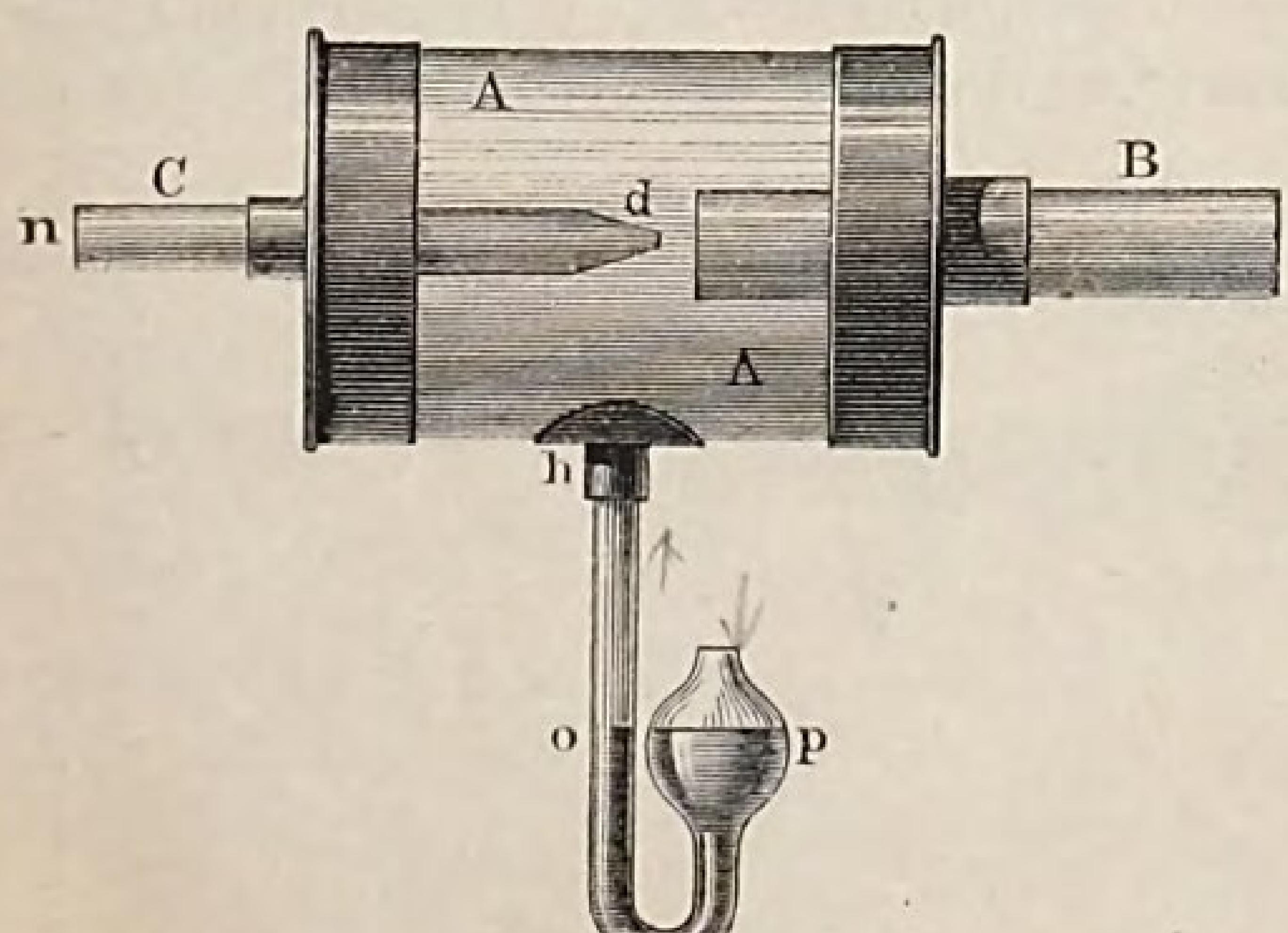
Fig. 597.



der Wand ausbreiten. Bei unveränderter Dicke muss sie sich um so mehr ausbreiten, je mehr sie sich dem Rande der Scheibe nähert; sie befindet sich also in dem Falle wie ein flüssiger Strahl, welcher die immer wachsenden Querschnitte eines conischen Ansatzrohres ausfüllen soll. Zwischen der Scheibe und der Wand bildet sich ein luftverdünnter Raum, in Folge dessen die atmosphärische Luft, von unten gegen die Scheibe drückend, sie an die Wand anpresst.

Man kann diesen Versuch auch im Kleinen anstellen, wenn man Luft mit dem Munde durch eine Röhre bläst, welche mit einer ebenen Scheibe endigt, wie dies Fig. 596 dargestellt ist. Diese Scheibe hat in der Mitte ein Loch. Nahe am Rande sind drei Stäbchen, etwa von Draht, befestigt. An ihrem unteren Ende ist an jedem dieser Stäbchen ein Knopf angebracht, und auf diesen drei Knöpfchen liegt endlich frei nach oben beweglich eine Scheibe von Kartenpapier; sie hat drei Einschnitte, durch welche die drei Stäbchen hindurchgehen. Sobald man bei *a* in die Röhre *a b* kräftig hineinbläst, wird die bewegliche Scheibe gehoben und bleibt nahe der oberen Scheibe hängen, bis man mit Blasen aufhört.

Fig. 598.



Eine andere Form dieses Versuchs ist in Fig. 597 dargestellt. Vor der Mündung *o* des horizontal gehaltenen Rohres ist in geringem Abstande ein Messingscheibchen befestigt, dessen Durchmesser etwas grösser ist als der der Oeffnung, so dass der bei *o* austretende Luftstrom alsbald eine seitliche Richtung annehmen muss. Bei richtiger Stellung dieses kleinen Scheibchens kann der gegen die bewegliche Scheibe *cd* von aussen her wirkende Druck so stark werden, dass sie schon aus einer Entfernung von 5 cm angezogen wird.

Den Durchmesser der Scheiben kann man ungefähr 1 dcm, die verticale Entfernung der beiden Scheiben 1 cm machen.

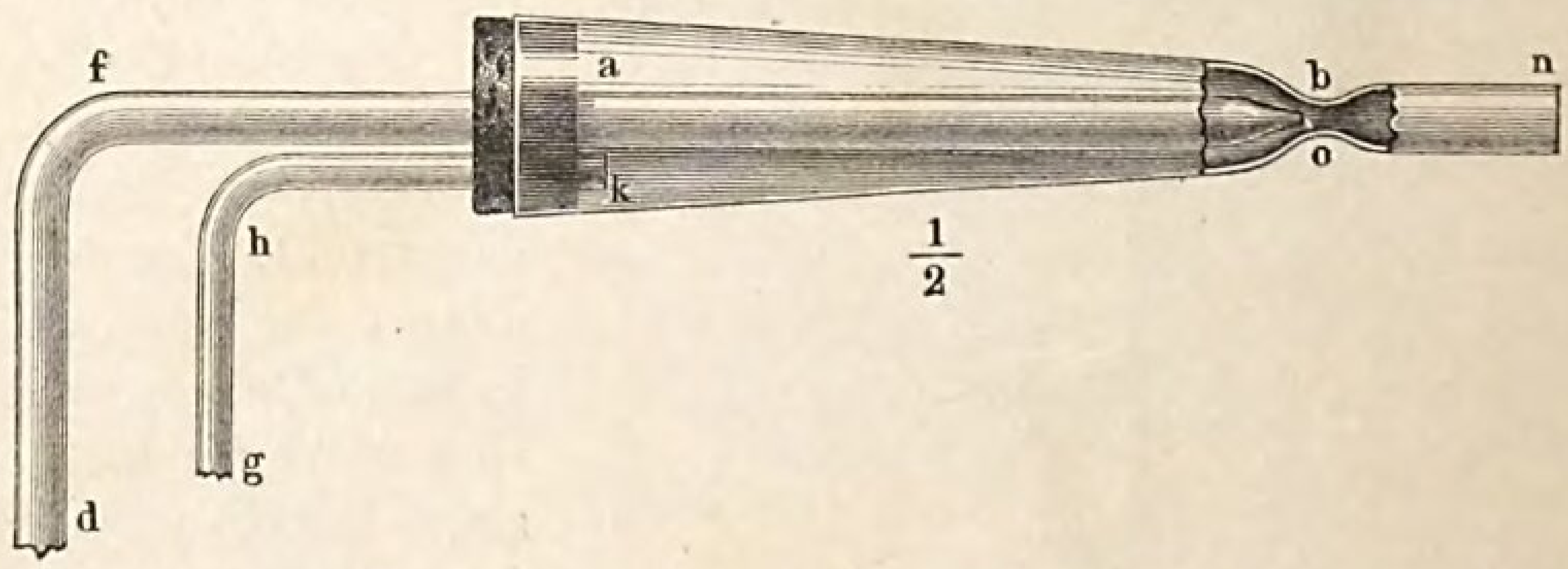
Die einfachste Art, diesen Versuch anzustellen, hat Faraday angegeben. Man schliesse die Finger der offenen Hand fest an einander, so wird doch noch von Gelenk zu Gelenk ein spaltartiger Zwischenraum bleiben. Während man nun die Hand auf diese Weise horizontal hält, so dass die Fläche abwärts gekehrt ist, applicire man die Lippen dem Intervall zwischen dem Zeige- und Mittelfinger nahe an ihren Wurzeln und blase möglichst stark. Bringt man nun ein Stück Papier von ungefähr 16 qcm an die Oeffnung, durch welche der Luftstrom hindurchgeht, so wird es weder durch diesen Luftstrom fortgeblasen, noch fällt

es durch sein Gewicht herab, was aber sogleich geschieht, sobald man mit Blasen aufhört.

Das Phänomen des Saugens durch ausströmende Gase wollen wir auch mittelst des Apparates Fig. 598 (a. v. S.) erläutern. Ein etwas weiteres, kurzes Glasrohr *A* ist auf beiden Seiten durch aufgekittete Klappen von Messingblech geschlossen. In die eine derselben ist die Glasröhre *B*, in die andere ist die noch engere Glasröhre *C* so eingekittet, dass die etwas eingezogene, etwa 2 mm weite Mündung *d* der Röhre *C* ganz nahe vor dem einen Ende der Röhre *B* steht. Bei *h* ist die Röhre *A* durchbohrt und in eine hier aufgekittete Messingfassung ein auf der einen Seite kugelförmig erweitertes Manometerrohr eingekittet. Das Manometerrohr wird ungefähr bis zur Höhe *op* mit gefärbtem Wasser gefüllt. Wenn man nun bei *n* stark in das Rohr *C* hineinbläst, so sieht man alsbald, wie die Flüssigkeit im Manometerrohr von *o* aus mehrere Centimeter hoch in die Höhe steigt, ein Beweis, dass durch das Blasen eine Luftverdünnung in *A* hervorgebracht wird.

Die Luftverdünnung rührt daher, dass der bei *d* mit ziemlicher Geschwindigkeit austretende Luftstrom, in dem weiteren Rohre *b* sich ausbreitend, eine saugende Wirkung auf die Luft in *A* ausübt. Dieser Versuch erklärt sehr gut die Wirkung des sogenannten Blaserohrs der Locomotiven.

Fig. 599.



Weit kräftiger noch lässt sich die Wirkung des Saugens mit dem von Reichert ganz aus Glas und Korkstopfen construirten Apparat, Fig. 599, zeigen, dessen Einrichtung nach dem Vorangehenden wohl ohne Weiteres verständlich sein wird. Zur Erläuterung der Figur ist nur noch zu bemerken, dass die äussere Glasröhre bei *b* im Durchschnitt dargestellt ist. Der links aus dem Korkstopfen hervorragende Theil der Röhre *ofd* und *khg* ist in horizontaler und verticaler Richtung weit länger, als es in der Figur der Raumersparniss wegen dargestellt ist.

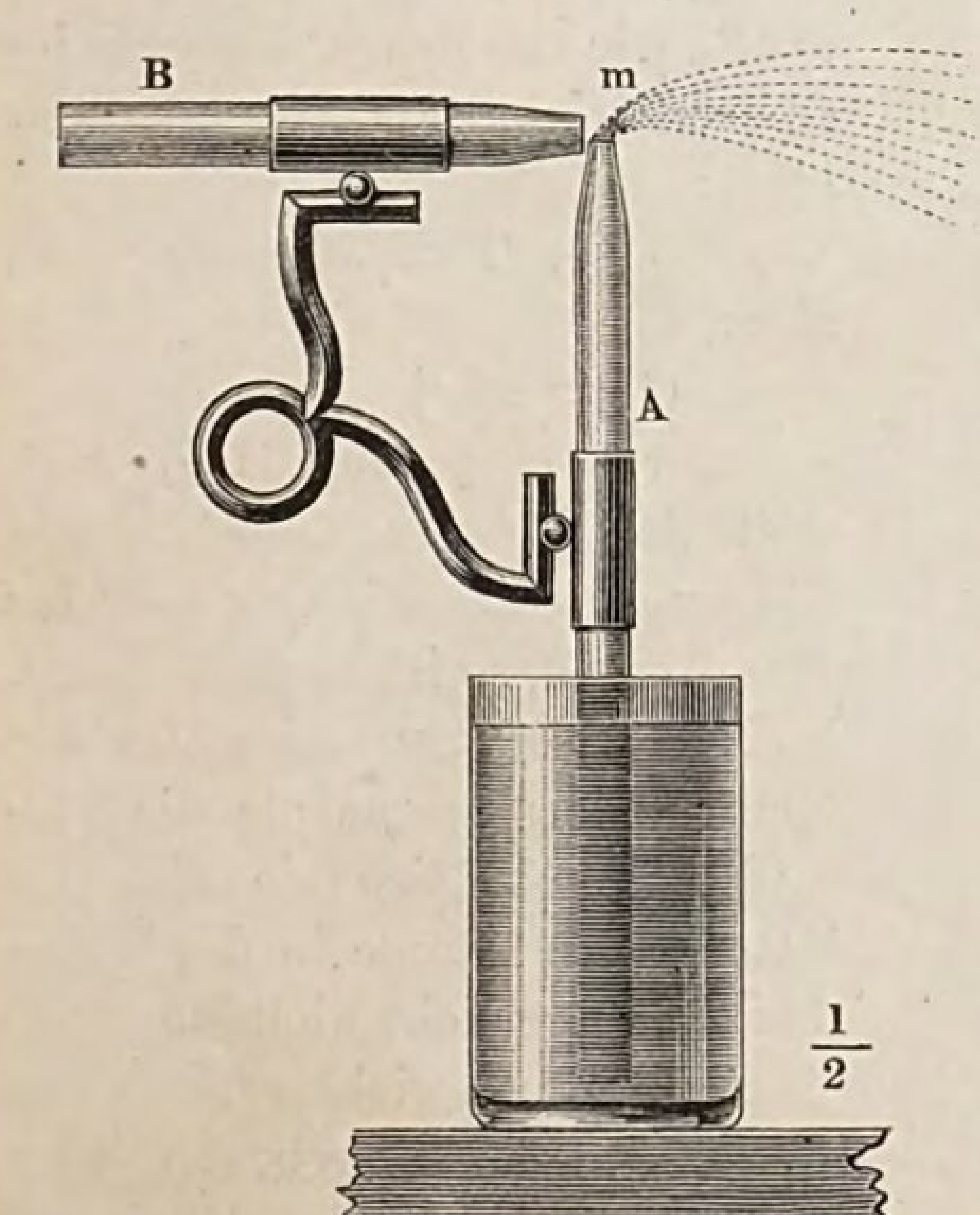
Das vertical herabgehende Röhrenstück *fd* ist in den Hals eines Kochgefässes, etwa eines kleinen Papinianischen Topfes, eingesetzt, dessen Wasser erhitzt wird. Sobald die Dämpfe bei *o* mit hinreichender Gewalt ausströmen, saugen sie nicht nur das Wasser aus einem Gefäss, in welches das untere Ende von *hg* eingetaucht ist, empor, sondern sie treiben das-

selbe auch noch zur Oeffnung bei n hinaus. Setzt man bei n mittelst eines Kautschukröhrchens ein kurzes Glasrohr an, welches mit einer verengten Mündung versehen ist, wie die bei o, so strömt aus dieser Mündung ein continuirlicher Wasserstrahl hervor, welcher unter günstigen Umständen bis zur Decke des Zimmers aufsteigt, wenn diese Mündung vertical nach oben gerichtet ist.

Diese Vorrichtung dient auch sehr gut, um die Wirkung der Dampfstrahlpumpe (des Injectors) zu erläutern, welche in neuerer Zeit vielfach zur Speisung der Dampfkessel benutzt wird, für deren nähere Besprechung aber hier nicht der Ort ist.

Die Gebrüder Körting in Hannover haben nach diesem Principe eine Reihe von Apparaten construirt, welche zum Fortbewegen und Heben von Flüssigkeiten, als Ersatz von Pumpen, dann zum Fortbewegen von Gasen, als Gebläse, Ventilatoren, Exhaustoren, Luftpumpen, ja selbst zum Fortblasen und Heben von festen Körpern (Korn, Knochenkohle etc.) eine vielfache und sehr vortheilhafte Anwendung finden.

Fig. 600.



Eine in neuerer Zeit sehr verbreitete Anwendung des Saugphänomens sind auch die Flüssigkeitszerstäuber, deren einfachste Form in Fig. 600 in $^1/_2$ der natürlichen Grösse dargestellt ist. Dicht bei der etwas verengten oberen Oeffnung des verticalen Glasrohres A, dessen untere Oeffnung in die zu zerstäubende Flüssigkeit eingetaucht ist, mündet das bei m gleichfalls etwas verengerte horizontale Glasröhrchen B. Wird nun kräftig in das Röhrchen B hineingeblasen, so strömt die Luft mit solcher Gewalt bei m aus, dass die Flüssigkeit in A nicht allein bis zur oberen Mündung dieses Röhrchens aufgesaugt, sondern auch in die zartesten Tröpfchen aufgelöst von dem Luftstrome mit fortgerissen wird. Der Luftstrom kann auch hier durch einen Dampfstrom ersetzt werden.

Der Luftballon. Das Gesetz des Archimedes gilt für Gase 164
ebenso wie für Flüssigkeiten. Ein Körper, welcher in ein Gas eingetaucht ist, verliert einen Theil seines Gewichtes, welcher dem Gewichte des verdrängten Gases gleich ist. Es lässt sich dies mit Hülfe des Apparates Fig. 601 (a. f. S.) nachweisen, welcher den Namen des Baroskops oder

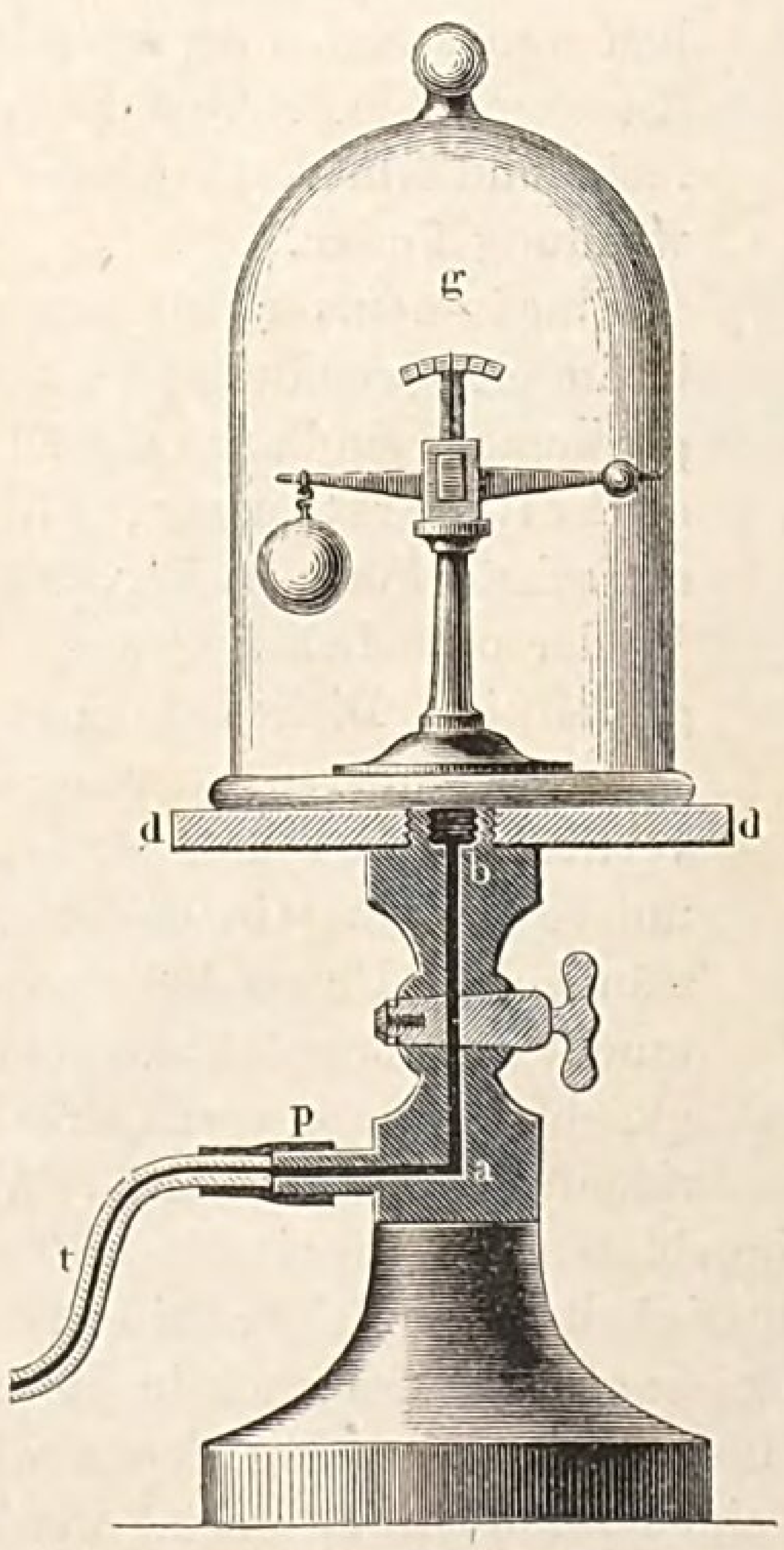
des **Dasymeters** führt. Er besteht aus einem Wagebalken, an welchen auf der einen Seite eine hohle Glaskugel angehängt ist, während der andere Arm eine weit kleinere massive Metallkugel trägt, die an einem Schraubengewinde etwas nach rechts oder links geschoben werden kann, um dadurch das Gleichgewicht mit der hohlen Glaskugel herzustellen.

Ist das Gleichgewicht in der Art hergestellt, dass der Wagebalken horizontal steht, wenn der ganze Apparat von Luft umgeben ist, so wird er unter die Glocke der Luftpumpe gebracht. Sobald man evacuirt, hört das Gleichgewicht auf; der Arm, an welchem die hohle Glaskugel hängt, sinkt um so tiefer, je verdünnter die Luft unter der Glocke wird.

Es lässt sich davon leicht Rechenschaft geben. Es sei:

G das Gewicht der Glaskugel, M das Gewicht der Metallkugel } im leeren Raume,
L der Gewichtsverlust der Glaskugel, l der Gewichtsverlust der Metallkugel } wenn sie in Luft eingetaucht sind,

Fig. 601.



so ist, wie uns das ursprüngliche Gleichgewicht am Wagebalken lehrt:

$$G - L = M - l,$$

also:

$$G = M + L - l,$$

da nun aber jedenfalls $L > l$, weil das Volumen der hohlen Glaskugel grösser ist als das der Metallkugel, so ist auch $G > M$, im luftleeren Raume ist also die Glaskugel schwerer als die Metallkugel, obgleich sie sich im lufterfüllten Raume in der Wage das Gleichgewicht hielten.

Auf dem Gewichtsverlust der rings von Luft umgebenen Körper beruht auch das **Steigen des Luftballons**. Ein Körper muss nämlich in der Luft aufsteigen, sobald sein Gesammtgewicht kleiner ist als das Gewicht eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft.

Einen solchen Körper kann man aber herstellen, wenn man eine entsprechende Hülle mit einem Gase füllt, welches leichter ist als die Luft. Eine solche Vorrichtung wird ein **Luftballon** genannt.

Die Brüder **Montgolfier** construirten einen grossen Ballon von gefirnisstem Papier oder Taffet, welcher unten eine Oeffnung von einigen Quadratfussen hatte. In einiger Entfernung unter dieser Oeffnung war

ein Korb von Metalldraht angehängt, welcher mit brennenden Stoffen gefüllt war. Durch die Verbrennung derselben wird eine Menge warmer, leichter Luft gebildet, welche aufsteigt und bald den ganzen Ballon anfüllt. Sobald die warme Luft im Ballon sammt der Hülle und Allem, was daran hängt, leichter ist als die verdrängte Luftmenge, muss der Ballon steigen; er nimmt den brennenden Körper, der ihm die Steigkraft verleiht, mit in die Höhe. Der Ballon muss so lange steigen, bis er in eine Höhe kommt, in welcher die Luft schon so verdünnt ist, dass das Gewicht des Ballons dem der verdrängten Luftmenge gleich ist. Der erste Luftballon dieser Art, welche man Montgolfieren nennt, stieg zu Anonay den 5. Juni 1783.

Fig. 602.



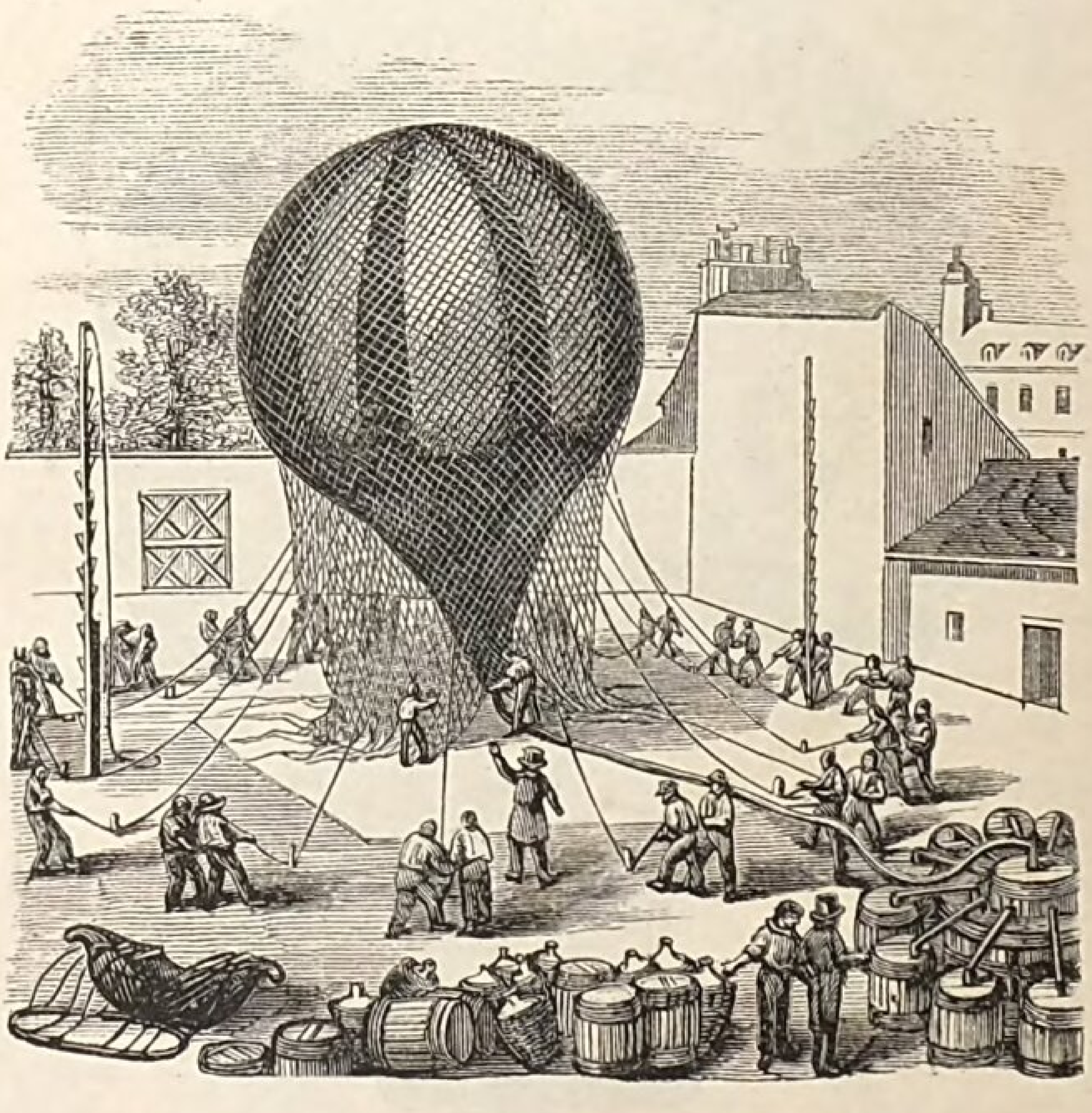
Am 19. September desselben Jahres liess Montgolfier in Gegenwart des Königs zu Versailles einen Luftballon steigen, an welchem ein Käfig mit einem Schaf, einem Hahn und einer Ente angehängt war. Pilatre de Rozier und der Marquis von Arlandes unternahmen mit einer Montgolfiere, welche Fig. 602 abgebildet ist, am 21. November 1783 die erste Luftfahrt.

Der Physiker Charles zu Paris hatte den glücklichen Gedanken, zur Füllung des Luftballons Wasserstoffgas statt der erwärmten Luft anzuwenden, von welchem Cavendish bereits im Jahre 1766 nachge-

wiesen hatte, dass sein specifisches Gewicht beinahe 14 mal geringer ist als das der atmosphärischen Luft.

Den ersten mit Wasserstoffgas gefüllten Ballon liess Charles am 27. August 1783 steigen und am 1. December 1783 stieg er mit einem solchen 500 cbm Wasserstoffgas haltenden, von Robert begleitet, in die Luft. In wenigen Minuten hatten sie eine Höhe von 3000 Fuss erreicht und legten in diesen Regionen einen Weg von fünf Meilen in zwei Stunden zurück. Charles stieg in den Tuilerien auf. Die ganze Bevölkerung von Paris war in Bewegung. Alle öffentlichen Plätze, alle hochliegenden Orte waren mit Zuschauern bedeckt. Ein Kanonenschuss gab das Signal der Abfahrt, und man sah den Ballon sich wie ein Meteor am Horizont erheben. Hoch in den Lüften sah man noch die flatternden Fähnchen, von der Sonne beleuchtet, und die Schiffer, welche ruhig die Erde

Fig. 603.



grüssten. Nie hat wohl ein physikalisches Experiment solche allgemeine Bewunderung erregt.

In der Schlacht bei Fleurus am 26. Juni 1794 bedienten sich die Franzosen eines Luftballons, um die Bewegungen der Oesterreicher zu beobachten. Im Jahre 1804 unternahmen Gay-Lussac und Biot eine Luftfahrt zu wissenschaftlichen Zwecken, bei welcher sie eine Höhe von 4000 m erreichten. Eine zweite Fahrt unternahm Gay-Lussac allein und erreichte eine Höhe von 7000 m, die grösste Höhe, zu der bis dahin ein Mensch gelangt war. In einer solchen Höhe fühlte man eine empfind-

liche Kälte: Gay-Lussac's Thermometer zeigte — 10° C., während am Boden eine Hitze von 30° C. war. Die Luft war so trocken, dass die hygroskopischen Körper rasch ihre Feuchtigkeit verloren, der Himmel erschien sehr dunkelblau. Nach einer Fahrt von sechs Stunden hatte Gay-Lussac in horizontaler Richtung einen Weg von 15 Meilen zurückgelegt und sank in der Nähe von Rouen langsam nieder.

Fig. 603 stellt einen Luftballon dar, welcher eben mit Wasserstoffgas gefüllt wird.

In neuerer Zeit werden die Luftballons häufig mit Leuchtgas gefüllt.

Kleine Luftballons zu Experimenten bei Vorlesungen werden aus Goldschlägerhaut oder aus Collodium verfertigt.

Seifenblasen, welche mit Wasserstoffgas gefüllt sind, steigen gleichfalls in die Höhe. Es sind dies ohne Zweifel die kleinsten Luftballons, welche man zu machen im Stande ist.

Füllt man ein weites, oben offenes Glasgefäss mit kohlensaurem Gase, so kann man mit Luft gefüllte Seifenblasen darauf legen; sie schwimmen auf der Oberfläche dieses Gases. Füllt man dagegen ein mit der Mündung nach abwärts gerichtetes Gefäss mit Wasserstoffgas oder Leuchtgas, so werden mit denselben Gasen gefüllte Seifenblasen, welche in der Luft aufsteigen, an der Grenze dieser Gase schwebend zurückgehalten.

Steigkraft des Luftballons. 1 cbm Luft im Normalzustande 165
(Temperatur 0° C., Luftdruck 760 mm) wiegt nahezu 1,3 (genauer 1,293 kg). Das Wasserstoffgas ist unter übrigens gleichen Umständen 0,07 (genauer 0,0688) mal leichter als atmosphärische Luft, 1 cbm Wasserstoffgas im Normalzustande wiegt also 1,3 × 0,07 oder in runder Zahl 0,09 kg. Die Differenz dieser Gewichte, 1,3 — 0,09 = 1,21 kg, repräsentirt also die Steigkraft von 1 cbm Wasserstoffgas.

Der Luftballon, in welchem Charles und Robert aufstiegen, hatte einen Rauminhalt von 500 cbm. Bei 0° C. Temperatur und 760 mm Barometerstand würde also die Steigkraft des Wasserstoffgases im Ballon 500 . 1,21 oder 605 kg betragen.

Das Leuchtgas, welches in neuerer Zeit häufig zur Füllung von Luftballons angewandt wird, ist weit schwerer als Wasserstoffgas, sein specifisches Gewicht ist ungefähr 0,63 von dem der atmosphärischen Luft, 1 cbm Leuchtgas wiegt also im Normalzustande ungefähr 0,82 kg; es bleibt also für jedes Cubikmeter Leuchtgas noch eine Steigkraft von 1,3 — 0,82 = 0,48 kg. 500 m Leuchtgas haben demnach nur eine Steigkraft von 240 kg, sie ist also weit geringer als die Steigkraft eines gleichen Volumens Wasserstoffgas. Für gleiche Steigkraft müssen also die mit Leuchtgas zu füllenden Ballons weit grösser sein als die mit Wasserstoffgas zu füllenden. Die kleineren Leuchtgasballons haben 700 cbm Rauminhalt und wiegen mit Zubehör sammt Gondel 150 kg; sie können noch zwei Personen sammt einigem Ballast aufnehmen. —

Godard's Riesenballon, der „Adler", hatte 14000 cbm Rauminhalt und wog mit Zubehör 1300 kg.

Während einerseits das Wasserstoffgas wegen seines geringeren specifischen Gewichtes zur Füllung der Luftballons geeigneter erscheint, ist andererseits die Füllung mit Leuchtgas viel leichter zu bewerkstelligen, weil dasselbe von jeder Gasanstalt geliefert werden kann; ausserdem aber ist noch zu berücksichtigen, dass die Hülle des Luftballons für Gase keineswegs undurchdringlich ist und dass das Wasserstoffgas durch dieselbe weit rascher entweicht als das Leuchtgas.

Für die Montgolfiere ist die Steigkraft noch weit geringer. In einem grossen Ballon steigt die Temperatur der heissen Luft höchstens auf 60 bis 70° C., so dass die Dichtigkeit der im Ballon eingeschlossenen Luft ungefähr 0,8 von der der Luft von 0° C. ist, woraus sich für das Cubikmeter der erwärmten Luft nur eine Steigkraft von 0,26 kg, für 500 cbm also nur eine Steigkraft von 130 kg ergiebt. Man muss also einer Montgolfiere schon sehr grosse Dimensionen geben, wenn sie einigermaassen bedeutende Lasten mit in die Höhe nehmen soll.

Bezeichnen wir allgemein mit s das Gewicht von 1 cbm atmosphärischer Luft, mit s' das Gewicht von 1 cbm eines anderen Gases, so ist die Steigkraft für 1 cbm dieses ringsum von atmosphärischer Luft umgebenen Gases:

$$s - s',$$

und für V Cubikmeter ist alsdann die Steigkraft:

$$V(s - s').$$

Bezeichnen wir mit G das Gewicht des Ballons, d. h. das Gewicht der Hülle mit Allem, was daran hängt, so ist die Steigkraft, mit welcher die ganze Vorrichtung aufsteigt,

$$K = V(s - s') - G.$$

166 **Widerstand der Flüssigkeiten und Gase.** Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit oder in einem Gase bewegt werden soll, so muss er nothwendig mehr oder weniger Flüssigkeits- oder Lufttheilchen vor sich herschieben und auf die Seite treiben, und dadurch wird stets ein Theil der beschleunigenden Kraft verzehrt, welche auf den festen Körper wirkt; kurz Flüssigkeiten und Gase üben einen Widerstand gegen die Bewegung fester Körper innerhalb ihrer Masse aus.

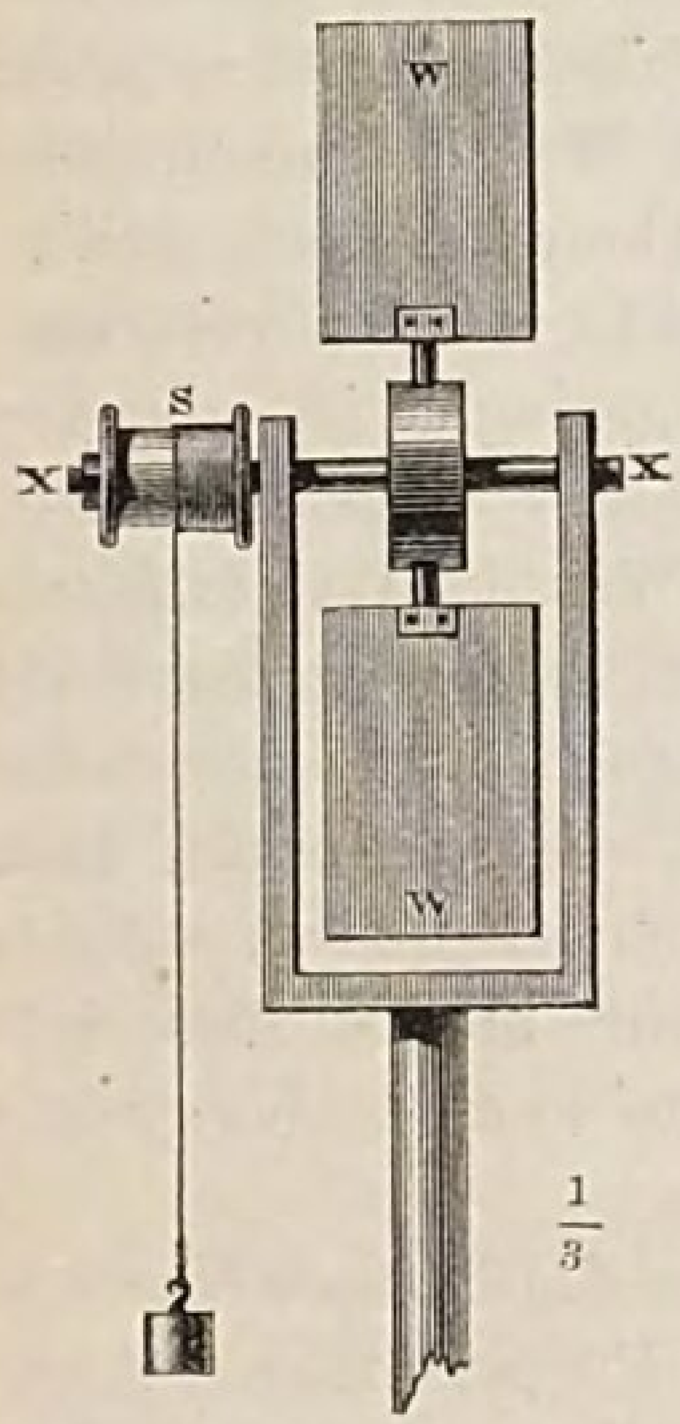
Die Grösse dieses Widerstandes hängt ab

1) von der Grösse des Querschnittes des bewegten Körpers, und
2) von der Geschwindigkeit desselben.

Aus 1) folgt, dass ein und derselbe Körper bei gleicher Geschwindigkeit bald mehr, bald weniger Widerstand zu überwinden hat, je nachdem er mit seiner breiten oder mit seiner schmalen Seite gegen die Luft oder das Wasser stösst, wovon man sich leicht mit Hülfe eines etwas breiten hölzernen Lineals überzeugen kann.

Den Einfluss des Querschnittes kann man auch mit Hülfe des Apparates Fig. 604 nachweisen. Die Umdrehung der horizontalen Achse *xx* wird durch ein Gewicht bewerkstelligt, welches an einer um die Spule *s* geschlungenen Schnur hängt; die Windflügel *w* können nach Belieben so gestellt werden, dass ihre Oberfläche rechtwinkelig zur Achse *xx* oder dass sie parallel mit ihr steht. Unsere Figur zeigt die letztere dieser beiden Stellungen. In der ersten Stellung durchschneiden die Windflügel gleichsam die Luft und es erfolgt eine rasche Rotation; im letzteren Falle aber, wo sie mit ihrer vollen Breite gegen die Luft drücken, ist der zu überwindende Widerstand so bedeutend, dass nur eine langsame Umdrehung erfolgt.

Fig. 604.

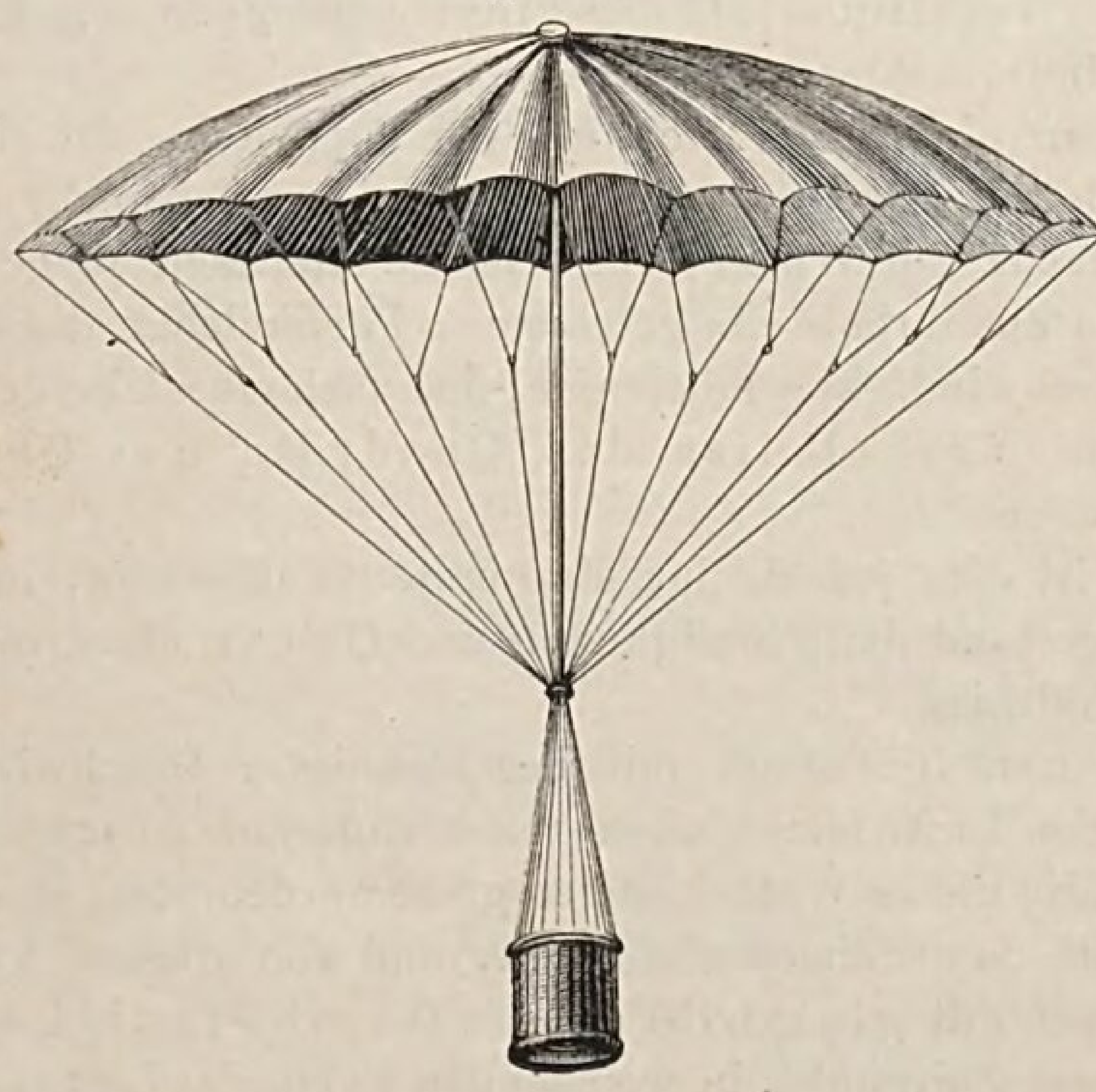


Der verzögernde Einfluss des Luftwiderstandes (oder Wasserwiderstandes) ist um so bedeutender, je grösser der Querschnitt des zu bewegenden Körpers im Vergleich zu der beschleunigenden Kraft ist, welche ihn treibt. Um zu bewirken, dass ein Körper in der Luft langsam fällt, hat man nur dafür zu sorgen, dass er bei gleicher Masse einen möglichst grossen Querschnitt habe. Eine Seifenblase fällt langsamer

Fig. 605.



Fig. 606.



als ein Wassertropfen von gleichem Gewicht. Auf diesem Umstande beruht auch das langsame Fallen einer Flaumfeder, die Wirkung des Fallschirmes, Fig. 605 und 606.

Je mehr man einen Körper verkleinert, desto langsamer wird er im Wasser oder in der Luft fallen, weil bei der Verkleinerung seine Masse, also auch die beschleunigende Kraft, welche ihn niedertreibt, in weit rascherem Verhältniss abnimmt als sein Querschnitt. Betrachten wir z. B. eine Kugel von Kreide, welche 1 mm im Durchmesser hat, so wird dieselbe mit einer bestimmten Geschwindigkeit im Wasser sinken; ein Kreidekügelchen aber, welches nur $^1/_{10}$ mm Durchmesser hat, wiegt 1000 mal weniger, die Kraft, welche es fallen macht, ist also 1000 mal geringer, während sein Querschnitt nur 100 mal geringer ist als der Querschnitt einer 1 mm dicken Kugel. Für die kleine Kugel ist also, wenn dieselbe im Wasser fällt, der Widerstand des Wassers im Vergleich zur beschleunigenden Kraft, welche sie niedertreibt, 10 mal grösser als für die grosse Kugel, die kleine Kugel wird also auch weit langsamer fallen als die grosse. Dieser Umstand erklärt auch, wie es kommt, dass ganz fein zertheilte Substanzen, wie Kreidepulver, Lehmtheilchen, welche das Wasser trüben, so lange in demselben suspendirt bleiben und sich nur sehr langsam absetzen; er erklärt ferner, wie es kommt, dass feine Stäubchen, Nebelbläschen etc. in der Luft schweben.

Untersuchen wir nun, in welcher Beziehung der Luft- und Wasserwiderstand zur Geschwindigkeit der bewegten Körper steht.

Während der Widerstand der Reibung von der Geschwindigkeit des über einen anderen hingleitenden Körpers unabhängig ist, wächst der Widerstand der Flüssigkeiten und Gase, wenn die Geschwindigkeit der in ihnen sich bewegenden Körper zunimmt, und zwar in einem weit rascheren Verhältniss als diese Geschwindigkeit selbst, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt:

Wenn ein Körper sich mit der doppelten, mit der dreifachen Geschwindigkeit bewegt, so muss er in gleicher Zeit nicht allein die doppelte, die dreifache Luft- oder Wassermasse aus dem Wege räumen, sondern auch den aus ihrer Stelle getriebenen Partikelchen die doppelte, die dreifache Geschwindigkeit mittheilen; demnach muss also der fragliche Widerstand im Verhältniss des Quadrats der Geschwindigkeit zunehmen.

Es ist dies jedoch nur eine erste Annäherung; in der That wächst der Widerstand der Flüssigkeiten und Gase in einem noch etwas rascheren Verhältniss.

Da nun für einen mit beschleunigter Geschwindigkeit fallenden Körper der Luftwiderstand so rasch zunimmt, so muss nach einiger Zeit nothwendig dieser Widerstand so gross werden, dass er der beschleunigenden Kraft das Gleichgewicht hält, und von diesem Augenblick an fällt der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Dieser Zeitpunkt, in welchem in Folge des Luftwiderstandes die beschleunigte Bewegung des fallenden Körpers in eine gleichförmige übergeht, muss nothwendig um so eher eintreten, je grösser sein Querschnitt im Vergleich zu seinem Gewichte ist. Eine Seifenblase, eine Flaumfeder,

Schneeflocken etc. sehen wir mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinken. — Auch die Regentropfen dürften wohl mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fallen, welche bei Weitem geringer ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher sie auf dem Boden ankommen würden, wenn ihr Fall nicht durch den Luftwiderstand verzögert worden wäre. Ein Wassertropfen, der von einer Höhe von 1000 m herabgefallen ist, müsste ohne eine solche Verzögerung mit der enormen Geschwindigkeit von 140 m aufschlagen, während die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen schwerlich viel grösser ist als 10 m in der Secunde.

Wie durch den Luftwiderstand eine beschleunigte Bewegung sehr bald in eine gleichförmige übergeführt werden kann, lässt sich auch mit Hülfe des schon oben beschriebenen Apparates, Fig. 604, nachweisen. Der Windflügel bedient man sich auch, um einen gleichförmigen Gang der Uhrwerke zu erzielen, welche die Umdrehung der grösseren Aequatorealinstrumente (J. Müller's Kosmische Physik, 4. Aufl. S. 46) um ihre Hauptachse besorgen. Durch eine Pendeluhr könnte diese Umdrehung nur stossweise erfolgen.

Anwendung des Wasser- und Luftwiderstandes. Gerade 167
so wie die Reibung den Füssen des Pferdes den festen Stützpunkt verleiht, dessen es bedarf, um eine Last fortzuziehen, so bietet auch der Widerstand des Wassers dem Ruder, dem Schaufelrad einen, wenn auch nicht vollkommen festen Stützpunkt, durch welchen es möglich wird, den Kahn und das Dampfschiff auf dem Wasser fortzubewegen.

Die Wirkungsweise des Ruders und des Schaufelrades bedarf wohl kaum einer weiteren Erläuterung, da es sich ja hier nicht darum handelt, die Grösse des Nutzeffectes zu ermitteln, welche man mit diesen Vorrichtungen erreicht. Fast ebenso leicht ist die Wirkungsweise der Schiffsschraube zu übersehen, welche von dem Schweizer Daniel Bernoulli 1752 erdacht, von dem Oesterreicher Jos. Ressel 1826 zuerst praktisch ausgeführt wurde und in neuerer Zeit eine grosse Bedeutung für Kriegsschiffe gewonnen hat.

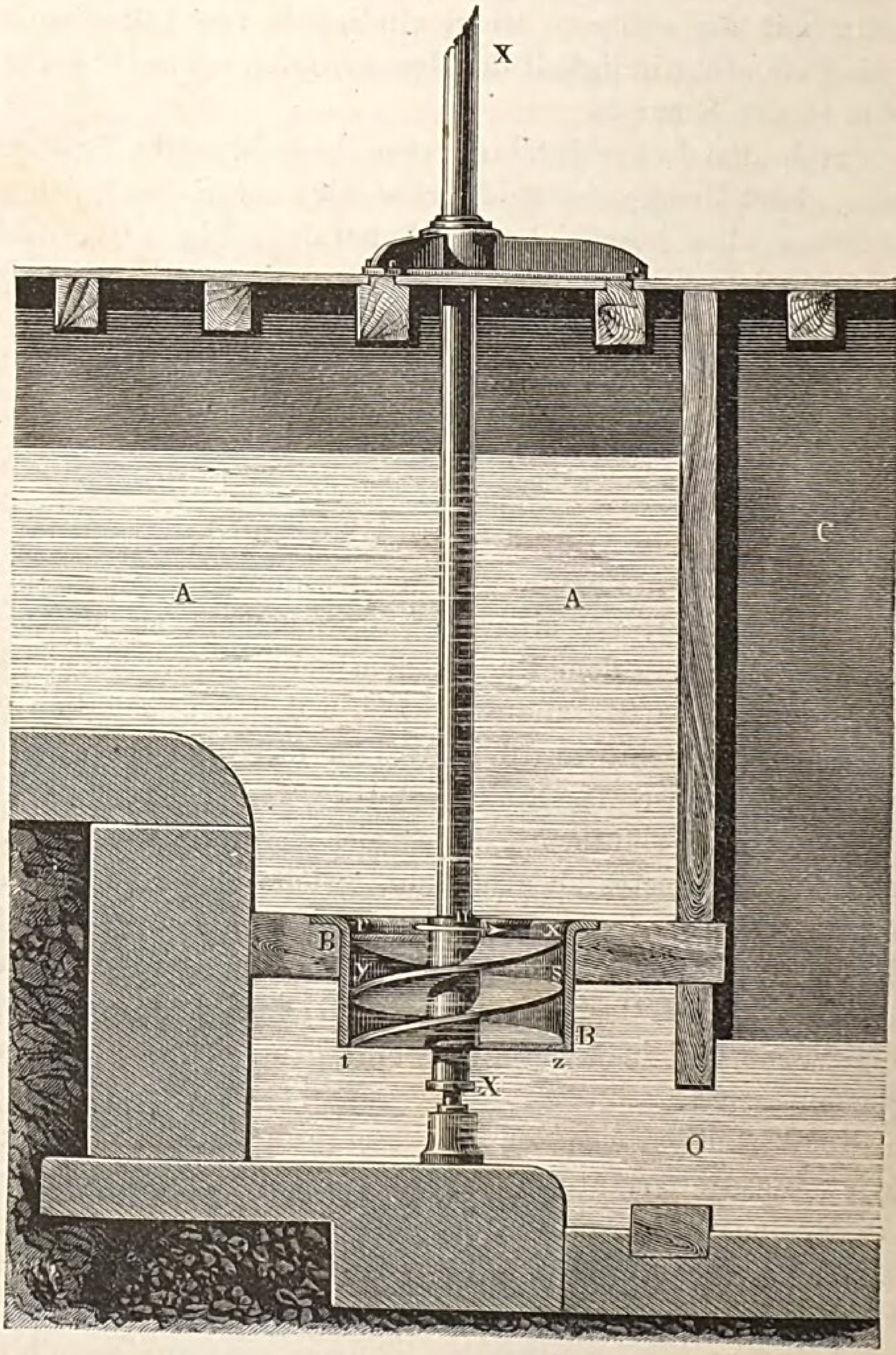
Um die Wirkungsweise der Schiffsschraube anschaulich zu machen, wollen wir eine sie erläuternde Form des horizontalen Wasserrades, nämlich die Schraubenturbine, Fig. 607 (a. f. S.), etwas näher betrachten.

Das Wasser des Gefälles strömt aus dem Behälter *A* durch den hohlen Cylinder *BB* herab. In diesen hohlen Cylinder ist aber ähnlich einer Wendeltreppe in einem runden Thurme eine aus Eisenblech gebildete Schraubenfläche gelegt, welche an einem centralen Dorn befestigt, sich mit diesem um eine verticale Achse drehen kann. — Nehmen wir nun zunächst an, der centrale Dorn sei festgestellt, so könnte offenbar das Wasser nicht vertical durch den Cylinder *BB* herabfallen, sondern es müsste über die Schraubenfläche herunterfliessen. Dabei aber übt das Wasser in verticaler Richtung einen Druck auf die Schraubenfläche aus, welchen man in zwei Seitenkräfte zerlegen kann, von welchen die eine

parallel mit der Schraubenfläche wirkt, während die andere horizontale Seitenkraft dahin strebt, die Schraube um ihre verticale Achse umzudrehen.

Nach dieser Auseinandersetzung begreift man nun leicht, dass das durch die Schraube niederströmende Wasser, wenn die Achse *XX* dreh-

Fig. 607.

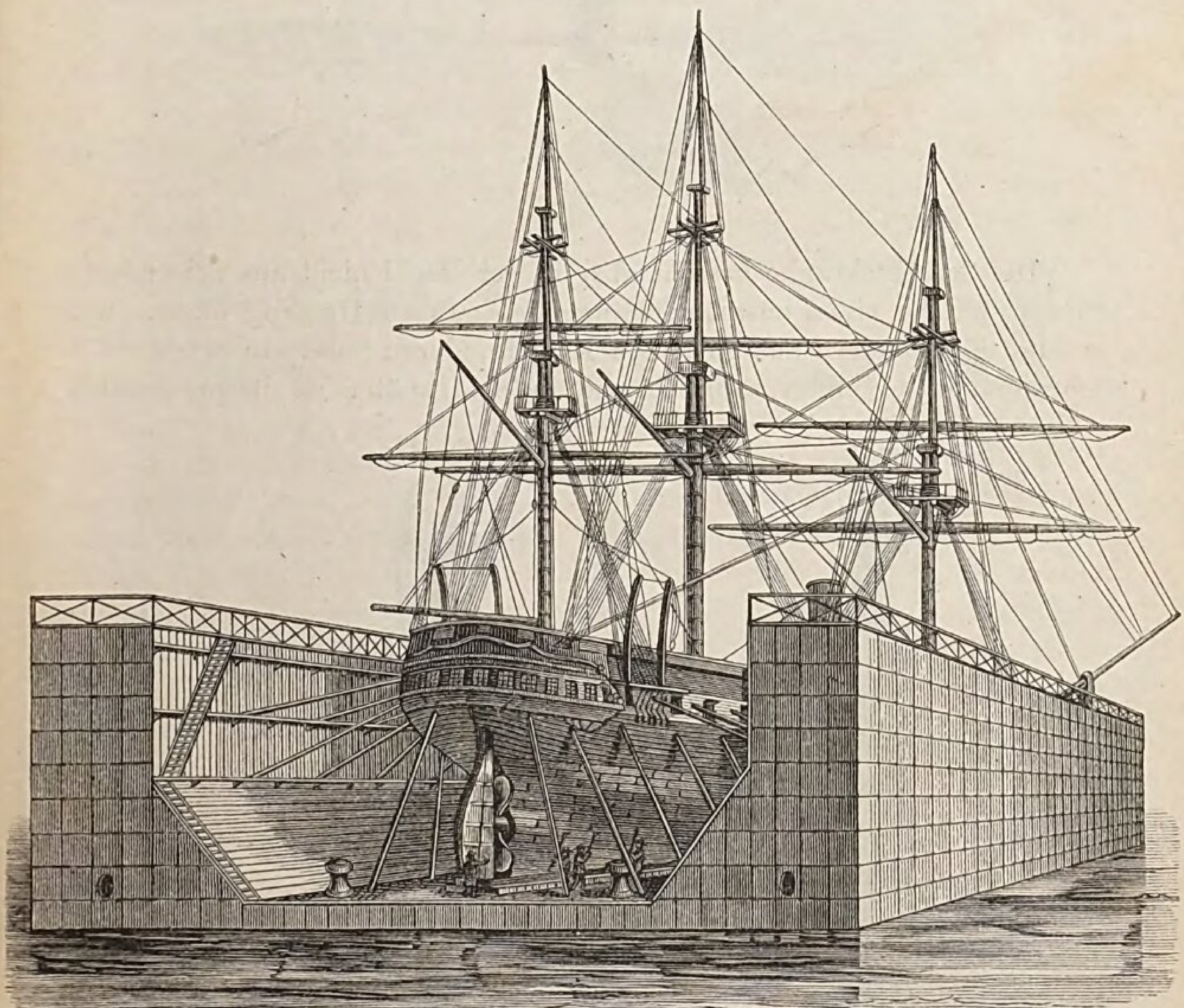


bar ist, eine Rotation derselben in solcher Richtung bewirken wird, dass sich der vordere Theil der Schraube in der Richtung des kleinen Pfeiles *n* dreht.

Es ist bisher nur von einer Schraubenfläche die Rede gewesen; in der That haben wir es aber bei der Turbine, Fig. 607, mit einer doppelten Schraube zu thun, indem um denselben Dorn zwei Schraubenflächen gelegt sind; die eine ist *rst*, die andere *xyz*.

Denken wir uns nun die Schraube nicht in einem Gefälle, sondern in ruhigem Wasser stehen, nehmen wir z. B. an, das Wasser stände jenseits der Abflussöffnung O in dem Raume C gerade so hoch wie in A, so könnte man eine Strömung des Wassers aus A nach C dadurch hervorbringen, dass man durch eine äussere Kraft eine Rotation um die Achse XX in der Richtung bewerkstelligt, wie sie durch den kleinen Pfeil bei n angedeutet wird. Bei einer solchen Rotation wird nämlich die untere Fläche der Schraubenwindungen, gegen das Wasser pressend,

Fig. 608.

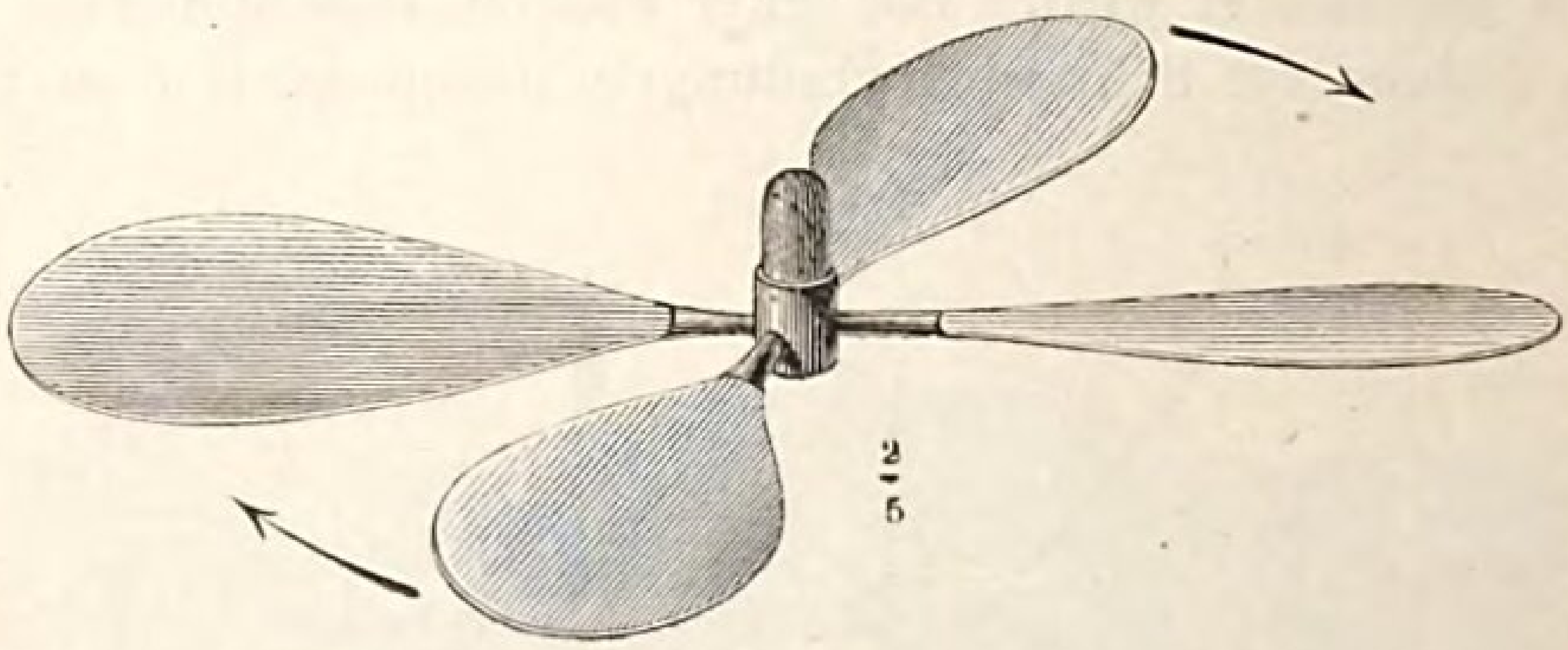


es unten aus dem Cylinder BB hinausschaffen, während dem entsprechend das Wasser aus A nachströmen wird.

Dabei hat aber natürlich die untere Fläche der Schraubenwindungen einen bedeutenden Druck auszuhalten, welcher die ganze Schraube heben würde, wenn die Achse XX oben nicht genügend belastet oder auf eine andere Weise festgehalten wäre. Sobald ein solcher Widerstand fehlt, wird die Schraube bei einer Rotation nach der angegebenen Richtung nothwendig eine fortschreitende Bewegung nach oben annehmen müssen.

Wenn die Umdrehungsachse einer solchen frei beweglichen, ganz in Wasser eingetauchten Schraube eine horizontale Lage hat, so muss eine rasche Rotation um diese Achse nothwendig eine fortschreitende Bewegung in horizontaler Richtung bewirken, wie dies in der That bei den Schraubendampfschiffen der Fall ist.

Fig. 609.



Die Schiffsschraube besteht aber in der Regel nicht aus Schraubenflächen, welche einen zusammenhängenden ganzen Umgang bilden, wie in Fig. 607, sondern aus einzelnen Flügeln, deren jeder ein Stück einer Schraubenfläche bildet, ähnlich wie in dem später zu besprechenden

Fig. 610.

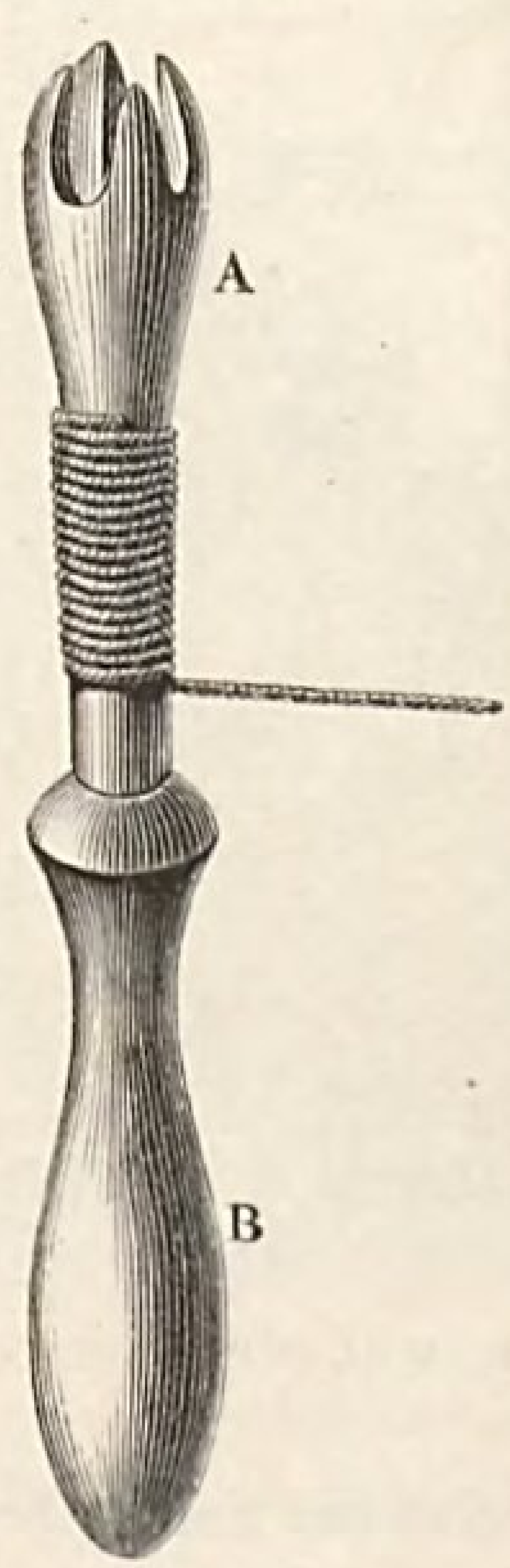
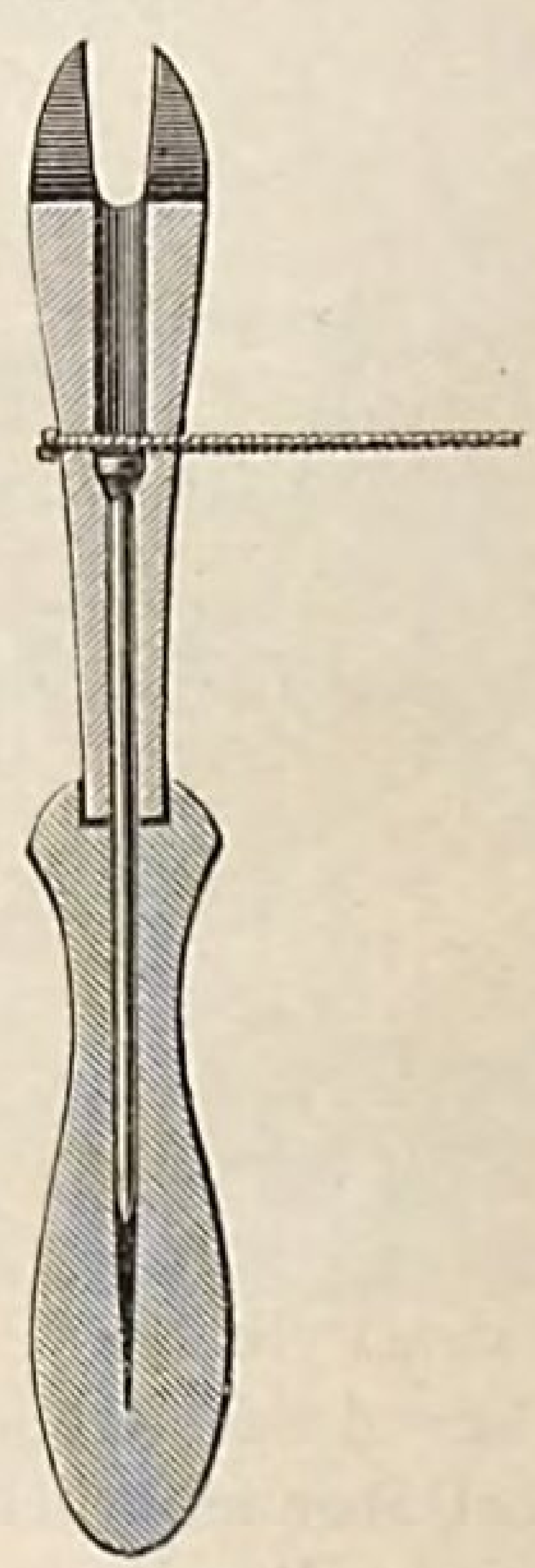


Fig. 611.



Apparat Fig. 609, und zwar werden die Schiffsschrauben meist nur aus zwei, oder auch aus drei oder vier solcher Flügel gebildet.

Die Achse der Schiffsschraube, welche unmittelbar vor dem Steuerruder angebracht ist, und welche sich ganz unter Wasser befindet, ist

dem Kiele, also der Längsachse des Schiffes, parallel, und ihre Umdrehung wird durch eine Dampfmaschine bewerkstelligt. Fig. 608 (a. S. 585), welche die hintere Ansicht einer gedeckten Schraubencorvette darstellt, zeigt, wie die (hier zweiflügelige) Schraube zwischen dem Hintertheil des Schiffes und dem Steuerruder angebracht ist und lässt auch die Grössenverhältnisse der Schraube erkennen.

Für Kriegsschiffe liegt der Hauptvortheil der Schraube vor den Schaufelrädern der gewöhnlichen Dampfschiffe darin, dass sie den feindlichen Kugeln nicht so ausgesetzt ist und dass die ganze Breitseite des Schiffes mit Geschützen besetzt werden kann.

Je nach der Richtung, in welcher die Schraube umgedreht wird, geht das Schiff vorwärts oder rückwärts.

Der erste Schraubendampfer wurde 1829 nach Ressel's Angaben in Triest gebaut, blieb aber trotz der guten Erfolge unbeachtet.

Das erste grössere Schraubenschiff „Archimedes", welches der Engländer Smith im Jahre 1838 construirte, hatte eine Schraube, welche nur aus einer einzigen Windung von 360^0 bestand, also ähnlich wie die Schraube Fig. 607, S. 584, wenn man sich die Schraubenfläche rst entfernt denkt.

Um die Wirkung der Schiffsschraube anschaulich zu machen, ist wohl nichts geeigneter als ein unter dem Namen des Fliegers oder Spiralifer bekanntes Kinderspielzeug. An einem kurzen aus Blech gemachten Cylinder, Fig. 609, sind vier Flügel befestigt; dieselben sind nun sämmtlich etwas gegen die Ebene geneigt, welche rechtwinkelig auf der Achse des centralen Cylinders steht, jeder dieser Flügel bildet also ein Stück einer sehr schwach aufsteigenden um den centralen Dorn gelegten Schraubenfläche. Diese Vorrichtung wird nun in die Gabel der Rotationsvorrichtung AB, Fig. 610, gelegt. Den Handgriff B hält man in der linken Hand, während man durch rasches Abziehen einer Schnur, welche um den oberen, um seine verticale Achse drehbaren Theil gewunden ist, diesen in rasche Rotation versetzt. Diese Rotation theilt sich auch dem Flieger mit, der sich nun in Folge derselben in der Luft gleichsam hinaufschraubt und eine ziemlich bedeutende Höhe erreichen kann. Wenn man den Versuch im Zimmer anstellt, so steigt der Flieger bis an die Decke, an welcher er so lange verweilt, bis die Rotationsgeschwindigkeit so weit abgenommen hat, dass sie ihn nicht mehr in der Luft zu erhalten vermag.

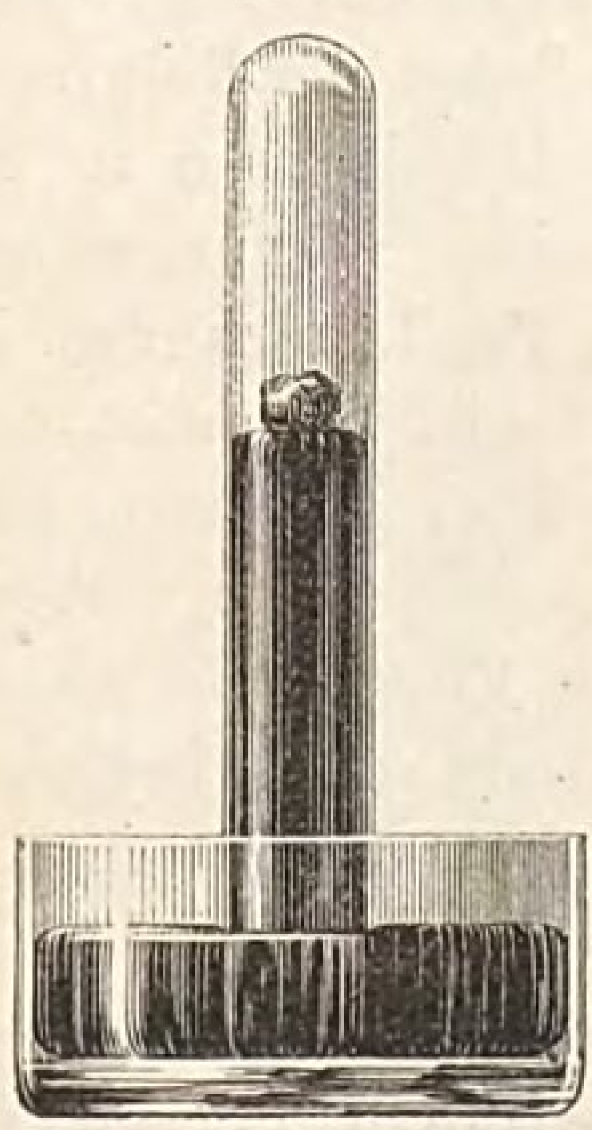
Fig. 611 zeigt einen Durchschnitt der Vorrichtung, durch welche man den Flieger in Rotation versetzt. Das Experiment gelingt am leichtesten, wenn man die Schnur zuerst entgegengesetzt aufwickelt und durch rasches Abziehen den Apparat so in Rotation versetzt, dass sich die Schnur nachher von selbst aufwickelt. Beim neuerlichen Abziehen steigt dann der Flieger in die Höhe.

Siebentes Capitel.

Von den Molekularkräften in gasförmigen Körpern.

168 **Absorption der Gase durch feste Körper; Adsorption, Occlusion.** Dass zwischen den Theilchen fester und gasförmiger Körper eine bedeutende Anziehung stattfindet, geht am augenscheinlichsten aus folgendem Versuche hervor. Löscht man eine glühende Kohle unter Quecksilber ab, lässt man sie dann in einem Glascylinder, Fig. 612, in die Höhe steigen, dessen oberer Theil mit Kohlensäure gefüllt ist, welche durch Quecksilber von der Verbindung mit der äusseren Luft abgesperrt wird, und deren Volumen ungefähr 20 mal so gross ist als das der Kohle, so wird in kurzer Zeit die Kohlensäure von der Kohle dermaassen verdichtet, dass das Quecksilber im Cylinder bis oben hin steigt. Die Masse der Kohlensäure, welche vorher den ganzen oberen Theil des Cylinders erfüllte, ist jetzt durch die zwischen der Kohle und dem Gase stattfindende Anziehung in den Poren der Kohle verdichtet, das Gas ist absorbirt worden. Dieser Versuch gelingt auch mit anderen Gasen, am besten mit Ammoniakgas.

Fig. 612.



Wenn die Kohle längere Zeit an der Luft gelegen hat, so gelingt der Versuch weniger gut, was sehr begreiflich ist, wenn man bedenkt, dass die Kohle atmosphärische Luft und den in der Luft verbreiteten Wasserdampf absorbirt, und dass dadurch natürlich ihre Absorptionsfähigkeit für andere Gase vermindert wird.

Wenn man eine Kohle, welche Gase absorbirt hat, unter die Luftpumpe bringt oder glüht, so entweichen die absorbirten Gase wieder.

Nach den Versuchen von Saussure absorbirt ein Volumen luftfreie Buchsbaumkohle bei 12° C. und einem Barometerstande von 723 mm folgende Gasvolumina:

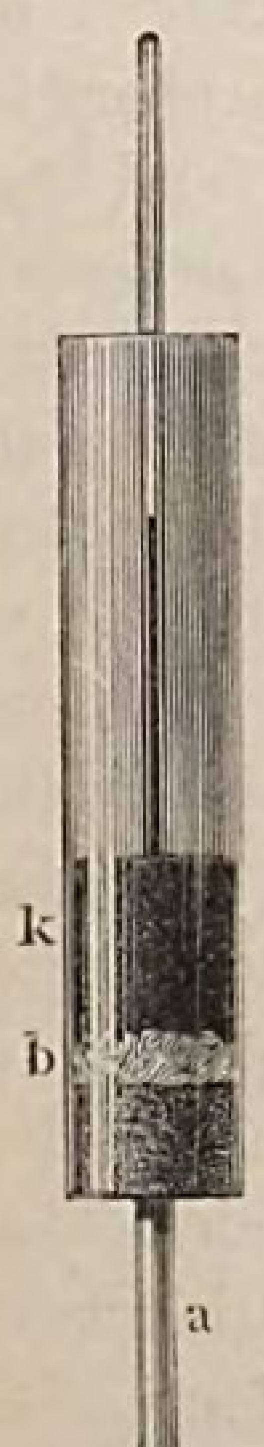
Ammoniak	90
Schweflige Säure	65
Schwefelwasserstoffgas	55
Kohlensäure	35
Sauerstoff	9,4
Stickstoff	7,5
Wasserstoff	1,75

Die leicht condensirbaren Gase werden also stärker absorbirt als die sogenannten permamenten.

Die Absorptionsfähigkeit verschiedener Kohlenarten ist nicht dieselbe; so absorbirt z. B. ein Volumen Buchsbaumkohle 7,5, ein Volumen Tannenkohle nur 4,5 Volumina atmosphärischer Luft.

Die Absorption der Gase ist jederzeit von einer Wärmeentwickelung begleitet, die um so bedeutender ist, je heftiger die Absorption vor sich geht. Die Wärmeentwickelung, welche eine jede Gasabsorption begleitet, lässt sich auf folgende Weise anschaulich machen. Das untere Ende einer 2 bis 3 cm weiten Glasröhre wird durch einen Kork geschlossen und in diesen ein Glasröhrchen *a*, Fig. 613, gesteckt, dessen oberes Ende ungefähr bis zur oberen Fläche das Korkes reicht. Ueber dem Kork wird zunächst eine Schicht Baumwolle *b* ausgebreitet und darauf eine Partie Kohlenpulver *k* geschüttet, welches eine Zeit lang unter der Glocke der Luftpumpe gestanden hat und dadurch von Luft befreit worden ist. In dieses Kohlenpulver wird das Gefäss eines Thermometers eingesenkt. Lässt man nun durch das Röhrchen *a* einen Strom von Kohlensäuregas eintreten, so steigt alsbald das Thermometer. Bei einem derartigen Versuche, bei welchem das Kohlenpulver nicht luftfrei gemacht worden war, stieg das Thermometer von 15 auf 20° C.

Fig. 613.



Die durch Condensation von Gasen entwickelte Wärme kann unter Umständen bis zur Entzündung steigen, wie z. B. wenn grössere Mengen von Kohlen, welche zum Behuf der Pulverfabrikation durch Destillation in geschlossenen Gefässen hergestellt, alsbald in Mahlfässern zu Pulver verrieben und zu grossen Haufen aufgeschüttet werden.

Nicht bloss poröse Körper, sondern auch solche mit anscheinend glatter Oberfläche, wie z. B. Glas und Metall, zeigen die Eigenschaft, Gase auf ihrer Oberfläche zu verdichten. Dieser Vorgang wird oft unter dem Namen Adsorption von der Absorption unterschieden, bei welcher letzteren man ein Eindringen der Gase ins Innere eines porösen Körpers

voraussetzt. Im Wesentlichen sind beide Vorgänge wohl derselben Art, nur dass bei der Absorption durch poröse Körper die Oberfläche, an welcher die Verdichtung stattfindet, viel grösser ist und daher auch viel grössere Mengen des Gases verdichtet werden.

Wenn man ein Stück Platin mit vollkommen metallischer Oberfläche in ein Gemenge von Sauerstoffgas und Wasserstoffgas bringt, so werden die beiden Gase so sehr verdichtet, dass sie sich allmälig zu Wasser verbinden.

Sauerstoffgas wird von Platinschwamm (fein zertheiltem Platin) sehr stark absorbirt. Wenn Wasserstoffgas auf einen mit verdichtetem Sauerstoffgase gesättigten Platinschwamm strömt, so verdichten sich die Gase unter solcher Wärmeentwickelung, dass das Platin glühend wird und den Strom von Wasserstoffgas entzündet. Darauf gründet sich die Döbereiner'sche Zündmaschine.

Umfangreiche Versuche wurden von mehreren Physikern über die Adsorption von Glasoberflächen angestellt. Um die wirksame Oberfläche im Verhältniss zum Rauminhalt der Gefässe möglichst zu vergrössern, füllte man die letzteren mit Glaspulver, Glasfäden oder sogenannter Glaswolle.

Bunsen hat in einer ausgedehnten Versuchsreihe, betreffs welcher wir auf die Originalabhandlung*) verweisen müssen, gefunden, dass solche Glaswolle binnen drei Jahren per Quadratmeter Glasoberfläche 5,135 cbcm Kohlensäure durch Adsorption verdichte. Er fand dabei überdies im Gegensatze zu anderen Forschern, dass keineswegs in wenigen Stunden eine Grenze der Wirkung, nämlich eine Sättigung der Oberfläche mit Kohlensäure eintrete, sondern dass die Verdichtung Jahre lang fortdauere, dass ferner weder durch plötzliche oder langsame Druckänderungen noch durch Erhöhung der Temperatur von — 0,8 bis 23^0 eine Loslösung der einmal verdichteten Kohlensäure eintrete, ja dass sogar bei höherer Temperatur die Verdichtung rascher fortschreite als bei niedrigerer. Den von Kayser**) erhobenen Einwurf, dass bei diesen Versuchen ein Theil der Kohlensäure auf dem Wege der Diffusion durch das Fett der Schliffstücke des Apparates entwichen sein könne, wies Bunsen***) zurück, indem er die Versuche mittelst eines Apparates ohne Schliffstücke mit demselben Erfolge wiederholte. Noch später†) zeigte dann Bunsen, dass bei diesen Versuchen die an den Glasoberflächen hartnäckig adhärirende Wasserschichte eine entscheidende Rolle spiele. Befreit man die Oberfläche durch sorgfältiges Trocknen bei 500^0 von den letzten Spuren des Wassers, so wird die Adsorption der Kohlensäure unmerklich kleiner. Sind Spuren von Wasser vorhanden, so hängen Stärke und Dauer der Adsorption von der Dicke der Wasserschichte ab.

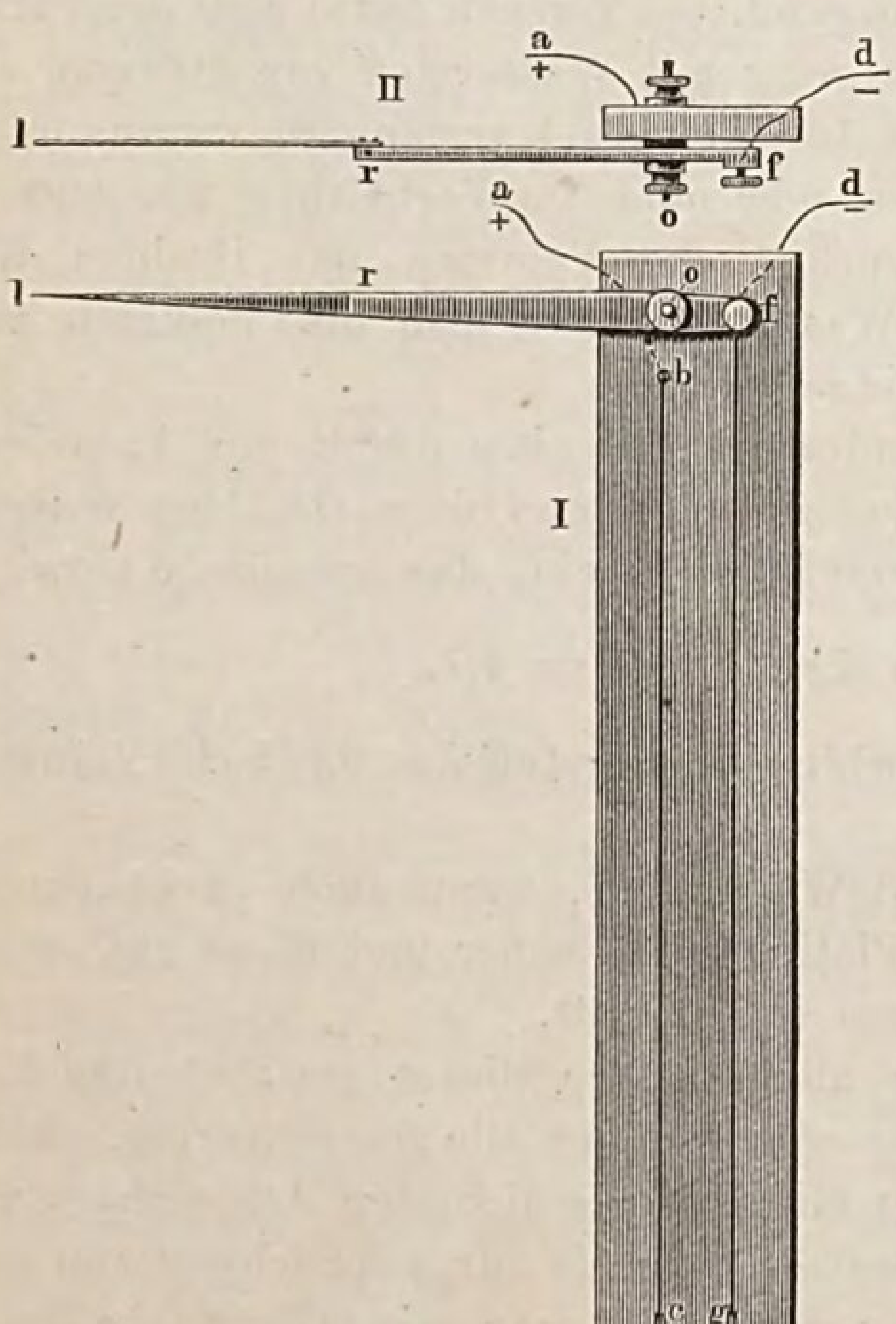
Sehen wir von den besprochenen Versuchen Bunsen's ab, so zeigt

*) Wiedem. Ann. 20, S. 546, 1883.
**) Wiedem. Ann. 21, S. 495.
***) Wiedem. Ann. 22, S. 145.
†) Wiedem. Ann. 24, S. 321.

sich sonst die Absorption von Gasen durch feste Körper sehr abhängig von Druck und Temperatur. Hoher Druck und niedrige Temperatur befördern, umgekehrte Zustände vermindern die Absorption. Erhitzen bis zum Glühen ist das sicherste Mittel, absorbirte Gase vollkommen auszutreiben.

Unter dem Namen Occlusion wird eine der Absorption ähnliche Erscheinung bei Metallen genannt, bei welcher, wie es scheint, die Gase nicht bloss oberflächlich verdichtet, sondern in das Innere der Metallmasse aufgenommen werden. Man könnte sich dahin ausdrücken, dass dabei eine Art Legirung des Gases mit dem Metalle eintrete. Dies ist besonders auffallend bei der Occlusion des Wasserstoffes durch Palladium, welches dabei eine merkliche Zunahme des Volumens erleidet. Graham (Pogg. Ann. CXXXVI, 1869) wies dies nach, indem er die Verlängerung eines Palladiumdrahtes ermittelte, welcher einige Zeit lang in verdünnter Schwefelsäure stehend, als negativer Pol einer galvanischen Säule gedient hatte. Um die Erscheinung recht anschaulich zu machen, hat v. Babo dem Apparate folgende Einrichtung gegeben. Auf einer ungefähr 1 mm dicken, 5 cm breiten und 30 cm langen Glasplatte sind 16 mm von einander abstehend zwei Drähte parallel ausgespannt, von denen *abc* (Fig. 614 I.) ein Platindraht, *dfg* aber ein Palladiumdraht von ungefähr 1 mm Durchmesser ist. Unten ist jeder dieser Drähte in einen Einschnitt der Glastafel eingeklemmt. Oben ist der Platindraht durch ein bei *b* in die Glasplatte gebohrtes Loch hindurchgesteckt und mittelst eines Holzstiftchens befestigt, während das obere Ende des Palladiumdrahtes bei *f* in dem einen Ende eines messingenen um die Achse *o* drehbaren Hebelarmes *fol* eingeklemmt ist. Der längere Hebelarm *ol* ist in der Figur der Raumersparung wegen zu kurz gezeichnet, er müsste im Verhältniss zu den übrigen Theilen der Figur noch einmal so lang sein. Wie die Achse *o* angebracht ist, um welche sich der Hebel *lf* dreht, ist deutlich aus Fig. 614 II. zu ersehen. Bei *r* ist ein Gewicht von 40 bis 50 g angehängt, um dem Palladiumdraht die nöthige Spannung zu geben.

Fig. 614.



Die Glasplatte wird nun ungefähr bis zur Höhe *b* in verdünnte Schwefelsäure eingetaucht und das freie Ende *a* des Platindrahtes mit dem positiven, das freie Ende *d* des Palladiumdrahtes mit dem negativen Pole einer Säule von vier bis sechs Bunsen'schen Bechern verbunden. Während am Platindraht Bläschen von Sauerstoff aufsteigen, ist am Palladiumdraht keine Entwickelung von Wasserstoffgas sichtbar, weil dasselbe vom Draht absorbirt wird. In Folge davon verlängert sich der Palladiumdraht so stark, dass das freie Ende *l* des Hebels an einer passend angebrachten Scala um 5 bis 6 cm herabgeht. Wird der Strom umgekehrt, so wird dem Palladiumdraht der Wasserstoff wieder entzogen, er verkürzt sich wieder und *l* geht wieder in die Höhe.

Bei einem von Graham ausgeführten Versuch hatte sich der Palladiumdraht bei vollständiger Sättigung mit Wasserstoff von 609 mm auf 619 mm, also im Verhältniss von 100 zu 101,64 verlängert, woraus folgt, dass das Volumen des Drahtes sehr nahe im Verhältniss von 100 zu 105 gewachsen ist. Das ursprüngliche Volumen des Drahtes war 0,1358 cbcm, der absorbirte Wasserstoff hat also ein Volumen von 0,1358 . 0,05 = 0,0067 cbcm eingenommen.

Das Gewicht des Palladiumdrahtes hat aber durch die Aufnahme des Wasserstoffs um 0,0115 g zugenommen und diese 0,0115 g Wasserstoff nehmen ein Volumen von 0,0067 cbcm ein, das specifische Gewicht des absorbirten Wasserstoffs ist also $\frac{0,0115}{0,0067} = 1,7$.

In Gasform würde der absorbirte Wasserstoff das 936fache Volumen des Drahtes einnehmen.

Ausser von Palladium wird Wasserstoff, wenn auch in bedeutend geringerem Grade, von Nickel, Platin, Gold, Silber und Eisen etc. occludirt. Dasselbe findet mit anderen Gasen statt.

Nicht die genannten Stoffe allein zeigen dieses merkwürdige Verhalten gegen Gase, sondern mehr oder weniger alle festen Körper. Jeder feste Körper ist daher gleichsam mit einer verdichteten Atmosphäre von irgend einem Gase umgeben, welche sich oft nur sehr schwer von ihm trennen lässt, und mit welcher er sich, wenn man seine Oberfläche davon auch vollkommen befreit, nach einiger Zeit doch wieder umgiebt, wenn er in Berührung mit Gasen bleibt. So ist z. B. das Glas stets mit einer Hülle von verdichteter Luft umgeben, die man bei der Anfertigung von Barometern nur durch das Kochen des Quecksilbers in der Röhre entfernen kann. Giesst man Wasser in einen Glaskolben und bringt man dann denselben über Feuer, so sieht man bald, wie sich an dem Boden eine Menge kleiner Bläschen bilden, noch lange ehe das Kochen des Wassers beginnt. Es ist dies die vorher wegen ihrer grossen Verdichtung gar nicht wahrgenommene Luftschicht, die nun, durch die Wärme ausgedehnt, Bläschen bildet. Aehnliche Bläschen sieht man auch, wenn man das Gefäss mit Wasser unter den Recipienten der Luftpumpe bringt und dann auspumpt.

Solche gasförmige Körper, welche leicht in den flüssigen Zustand übergehen (Dämpfe), werden bei der Verdichtung an der Oberfläche fester Körper flüssig gemacht. So verdichtet z. B. Chlorcalcium den Wasserdampf an seiner Oberfläche zu Wasser und löst sich in letzterem. Aehnlich wirken viele andere Körper, z. B. wasserfreie Phosphorsäure, Kalihydrat, Kochsalz; letzteres insbesondere, wenn es mit Chlormagnesium verunreinigt ist. Bei anderen Körpern, wie z. B. Holz, Haaren, Fischbein, Darmsaiten, findet die Verdichtung des Wasserdampfes ohne chemische Wirkung statt. Man nennt alle Körper, welche den Wasserdampf aus der Luft verdichten, hygroskopische Körper.

Hauchbilder. Eine Reihe höchst interessanter, von Moser ent- 169
deckter Erscheinungen findet durch die Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern ihre Erklärung.

Wenn man auf eine Glastafel mit einem Holzstäbchen oder irgend einem anderen Körper schreibt, so werden durch Behauchen die Charaktere deutlich hervortreten. Jeder polirte Körper, Metalle, Harz, Holz etc. zeigt dasselbe wie die Glastafel.

Auf eine jodirte Silberplatte wurde ein gravirter Metallstempel, eine vertieft geschnittene Achatplatte und ein Hornring gelegt. Als nachher die jodirte Platte den Quecksilberdämpfen ausgesetzt wurde, zeigte sich ein deutliches Bild aller Figuren des Steins, der Buchstaben des Metallstempels und des Ringes.

Eine jodirte Silberplatte ist zu diesen Versuchen nicht nöthig; wenn man einen Stempel auf irgend einer Metallplatte einige Zeit stehen lässt, so zeigt sich nachher beim Behauchen der Platte, oder noch besser, wenn man sie den Quecksilberdämpfen aussetzt, ein Bild des Stempels. Die Dämpfe schlagen sich bald an denjenigen Stellen nieder, an welchen eine Berührung stattfand, bald an den nicht berührten Stellen.

Eine unmittelbare Berührung ist nicht einmal nöthig; wenn der Stempel in ganz geringer Entfernung über die Platte gehalten wird, so tritt das Bild gleichfalls hervor, sobald man die Platte behaucht oder den Quecksilberdämpfen aussetzt.

Diese Wirkungen haben allerdings viel Aehnlichkeit mit den Wirkungen des Lichts auf Daguerre'sche Platten, und Moser sucht sie deshalb durch die Annahme zu erklären, dass jeder Körper gewissermaassen selbstleuchtend sei, dass er also Strahlen aussende, welche auf andere Körper gerade so wirken wie die Lichtstrahlen, obgleich sie die Netzhaut im Auge nicht afficiren. Waidele erklärt dagegen diese Erscheinungen folgendermaassen:

Im Allgemeinen ist jeder Körper von einer verdichteten Gasschicht eingehüllt; das absorbirte Gas bildet auf seiner Oberfläche eine Atmosphäre, wie die Luft um den Erdball. Wenn man einen Körper ausglüht, so wird er dadurch von den bereits absorbirten Gasen befreit; eine Silberplatte, welche mit frisch ausgeglühtem Trippel geputzt wird, erhält da-

durch den höchsten Grad von Reinheit. Ein Körper, welcher frisch gereinigt ist, wird natürlich Dämpfe weit stärker an seiner Oberfläche verdichten können als ein solcher, welcher schon in eine Gasschicht eingehüllt ist.

Wenn nun ein Stempel auf eine Platte gesetzt wird, so werden sich im Allgemeinen die Oberflächen beider Körper nicht in einem gleichen Zustande der Reinheit befinden; an den Berührungsstellen geht also gewissermaassen ein Austausch der Atmosphären vor sich. Die Platte wird an der Stelle, wo der Stempel lag, je nach den Umständen mehr oder weniger Gase verdichtet haben als an anderen Stellen, hier werden also auch die Dämpfe schwächer oder stärker condensirt werden.

Diese Erklärungsweise begründet Waidele durch viele Versuche, von denen wir nur die wichtigsten anführen wollen.

Auf die eine Hälfte einer mit frisch geglühtem Trippel geputzten Silberplatte wurde frisch ausgeglühtes Kohlenpulver gestreut, auf die andere Hälfte solches Kohlenpulver, über welches ein Strom von Kohlensäure geleitet worden war. Nach ein bis zwei Minuten wurde alles Kohlenpulver mit reiner Baumwolle von der Platte abgekehrt. Wenn man sie nun behauchte, so condensirte sich der Wasserdampf auf der Hälfte, auf welcher das kohlensäurehaltige Kohlenpulver gelegen hatte, mit bräunlicher, auf der anderen Hälfte mit bläulicher Färbung. Den Quecksilberdämpfen ausgesetzt, condensirten sich dieselben nur auf der Hälfte der Platte, auf welcher das frisch ausgeglühte Kohlenpulver gelegen hatte.

Da, wo das frisch ausgeglühte Pulver gelegen hatte, ist die Oberfläche der Platte fast noch ganz rein, hier werden also die Wasserdämpfe sowohl als die Quecksilberdämpfe stärker verdichtet als da, wo die Platte durch die Berührung mit dem kohlensäurehaltigen Kohlenpulver schon mit einer dichten Atmosphäre von Kohlensäure bedeckt ist.

Wenn man auf eine frisch präparirte, also ganz reine Platte einen Stahlstempel aufsetzt, der durch längeres Liegen im Kohlenpulver, welches mit Kohlensäure gesättigt war, mit einer dichten Atmosphäre von Kohlensäure überzogen ist und ihn nach 10 Minuten wegnimmt, so erscheint sein Bild, wenn man die Platte den Quecksilberdämpfen aussetzt, die sich vorzugsweise da condensiren, wo Platte und Stempel nicht in unmittelbarer Berührung waren, denn hier konnte sich die Platte nicht so schnell mit einer Gasatmosphäre bedecken, als da, wo sie mit einer dichten Atmosphäre des Stempels in Berührung war.

Wenn dagegen die Platte mit einer Gasatmosphäre versehen ist, und man einen frisch gereinigten Stempel aufsetzt, so werden nach Wegnahme desselben die Quecksilberdämpfe umgekehrt da condensirt, wo der Stempel und die Platte in Berührung waren.

Wenn Platte und Stempel ganz rein sind, oder wenn Platte und Stempel in Kohlenfeuer gelegen haben, welches mit Kohlensäure gesättigt war, so erhält man gar kein Bild des Stempels.

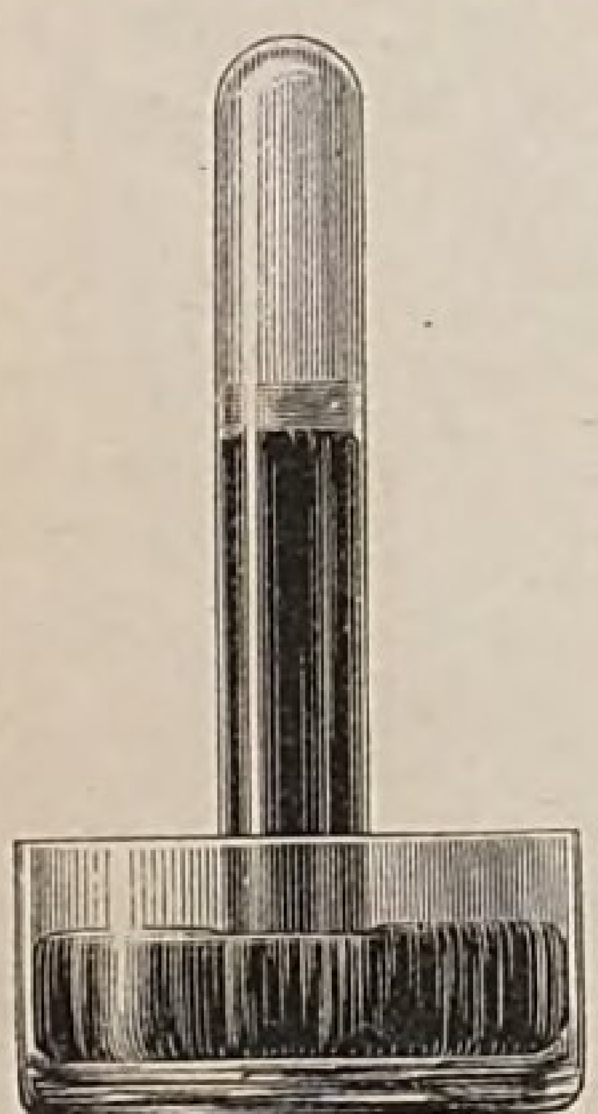
Absorption der Gase durch Flüssigkeiten. Man hat 170
unter den Absorptionen von Gasen durch Flüssigkeiten (und feste Körper) dreierlei Arten zu unterscheiden.

Bei der ersten Art werden die Gase nach stöchiometrischen Mengenverhältnissen derartig fest chemisch gebunden, dass sie nachher durch Verminderung des Druckes oder mässige Temperaturerhöhung nicht mehr wieder frei werden. So z. B. wird Kohlensäure von Kalilauge, Schwefelwasserstoff von Metalllösungen absorbirt und da hierbei kohlensaures Kali, beziehungsweise Schwefelmetalle entstehen, die sich durch Druckänderungen oder Erwärmen nicht mehr zersetzen, so haben wir hier Beispiele der ersten Art.

Bei der zweiten Art von Absorptionen treten ebenfalls chemische Anziehungskräfte ins Spiel, die Menge der absorbirten Gase ist verhältnissmässig gross aber nicht constant; die entstandenen chemischen Verbindungen sind mehr oder minder leicht zersetzlich (in Dissociation begriffen), so zwar, dass es durch Verminderung des Druckes oder mässige Erhöhung der Temperatur gelingt, einen entsprechenden Theil des absorbirten Gases wieder auszutreiben. Hierher gehören die Absorptionen von Ammoniakgas, Chlorwasserstoffgas, schwefliger Säure etc. durch Wasser.

Bei der dritten Art von Absorptionen, die wir im Gegensatze zu den vorigen die eigentlichen oder physikalischen Absorptionen nennen können, findet keine chemische Verwandtschaft statt, die absorbirten Gasmengen sind verhältnissmässig klein und hängen nur von physikalischen Bedingungen ab. Z. B. die Absorption von Sauerstoff und Stickstoff in Wasser.

Fig. 615.



Zwischen der zweiten und der dritten Classe ist die Grenze nicht immer strenge zu ziehen; es scheint, dass beide Arten zugleich vorkommen, indem ein Theil des Gases chemisch gebunden, ein anderer kleinerer Theil zugleich physikalisch gelöst sein kann. Z. B. Kohlensäure in Wasser.

Auch zwischen der ersten und der zweiten Art ist insofern ein Uebergang möglich, als eine bei niedrigerer Temperatur unzersetzliche chemische Verbindung durch Erhitzen in das Stadium der Dissociation eintreten kann, von wo an die absorbirten Mengen des Gases nicht mehr den stöchiometrischen Verhältnissen folgen, sondern von Druck und Temperatur abhängen.

Die Absorptionen der ersten Art gehören in die Chemie. Um eine Absorption der zweiten Art zu zeigen, kann man ähnlich verfahren, wie bei der Gasabsorption durch Kohle. Man sperrt z. B. reines Ammoniakgas in einer Glasglocke mit Quecksilber ab, Fig. 615, und lässt dann einige Tropfen Wasser aufsteigen; dasselbe wird das Gas sofort ganz

oder zum grössten Theile absorbiren. Soll noch Gas unabsorbirt bleiben, so muss sein Volumen mehr als das 780fache des Wassers betragen.

Hat man bei diesem Versuche die äussere Oberfläche des Quecksilbers mit einer Schicht Wasser bedeckt und zieht darauf die Glasglocke in die Höhe, so dass das eingeschlossene Ammoniakgas plötzlich mit viel Wasser in Berührung kommt, so erfolgt die Absorption so heftig, dass das Wasser in die Glocke hineingesaugt wird, wie in einen luftleeren Raum.

Für die Abhängigkeit der absorbirten Menge des Gases liegen Beobachtungen vor, von denen wir beispielsweise jene für Ammoniak und Wasser hier anführen wollen.

1 g Wasser absorbirt:

		Nach Roscoe und Dittmar beim Partialdrucke = 760 mm	
Nach Sims bei 20° und beim Drucke	Ammoniak in Grammen	bei der Temp.	Ammoniak in Grammen
60 mm	0,119	0°	0,875
100 „	0,158	10	0,679
200 „	0,232	20	0,526
300 „	0,296	30	0,403
400 „	0,353	40	0,307
500 „	0,403	50	0,229
600 „	0,447	:	
700 „	0,492	100	0,074
800 „	0,535		
900 „	0,574		
1000 „	0,613		
1100 „	0,653		
1200 „	0,658		
1300 „	0,722		
:			
2000 „	0,992		

Die absorbirte Gasmenge nimmt also in diesem Falle mit dem Drucke, jedoch langsamer als dieser, zu, mit der Temperatur ab.

Bei den eigentlichen Absorptionen hat W. Henry*) ein nach ihm benanntes Gesetz nachgewiesen, welches dahin lautet, dass von demselben Quantum Flüssigkeit unter verschiedenen Drucken gleiche Volumina Gas (gemessen bei diesen Drucken) absorbirt werden. Da nun aber die Gasmengen bei gleichen Volumen den Drucken proportional sind, so besagt das Gesetz von Henry auch, dass

*) Gilbert's Ann. XX.

die unter sonst gleichen Umständen absorbirten Gasmengen den Drucken proportional seien.

Fig. 616.

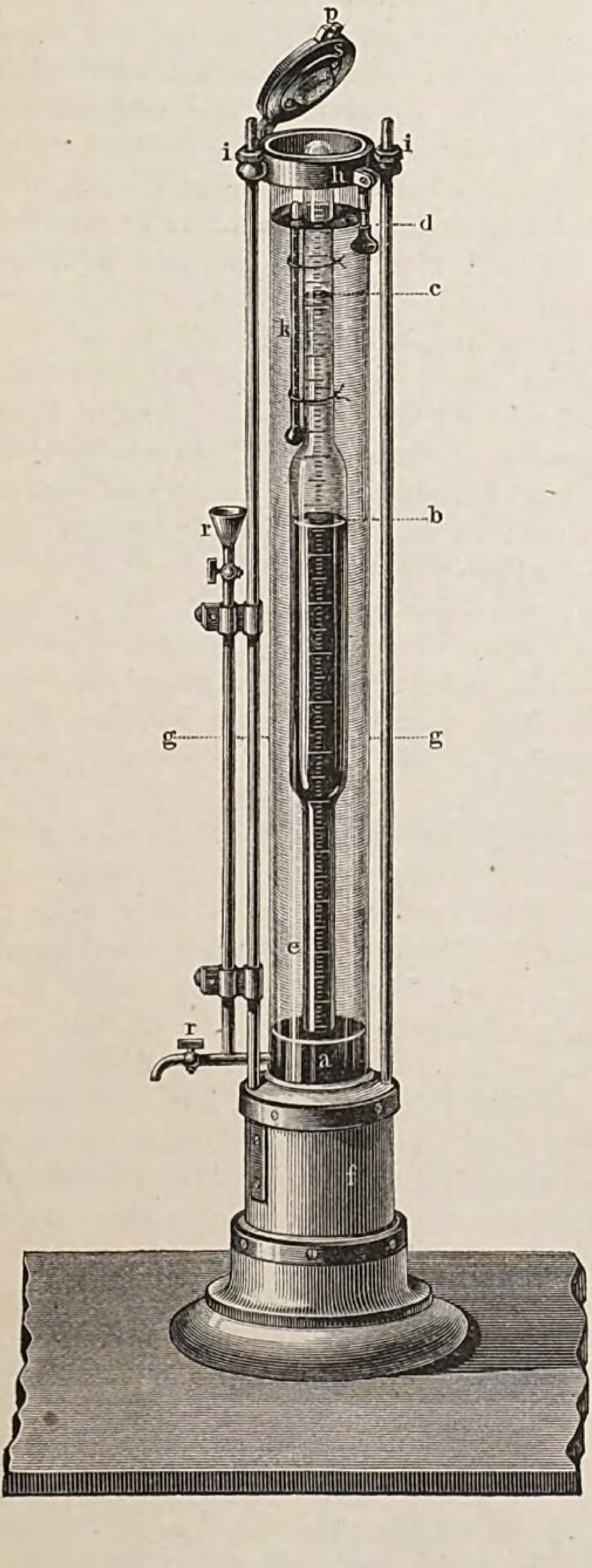
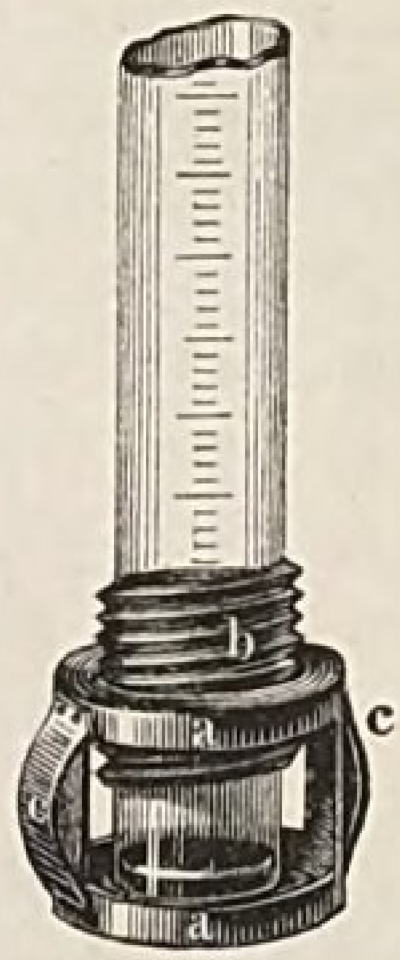


Fig. 617.



So z. B. absorbirt nach Priestley ein gegebenes Volumen Wasser ungefähr ein ebenso grosses Volumen Kohlensäure von Atmosphärendruck. Bringt man Wasser mit Kohlensäure in Berührung, welche auf zwei Atmosphären comprimirt ist, so wird nach Henry von dieser ein gleiches Volumen, mithin die doppelte Menge, absorbirt.

Die Angaben verschiedener Physiker für ein und dasselbe Gas sind sehr abweichend, was daher rührt, dass ihre Beobachtungsmethoden mehr oder weniger mangelhaft waren. In neuerer Zeit hat Bunsen eine sehr genaue Methode zur Messung der Absorption der Gase in Wasser angegeben und nach derselben von den früheren oft sehr abweichende Resultate gefunden.

Der zu diesen Versuchen angewandte Apparat hat folgende Einrichtung: Das in Millimeter getheilte und kalibrirte Absorptionsrohr *e*, Fig. 616 (a. v. S.), ist an seinem unteren offenen Ende mit einer aufgekitteten, in die Schraubenmutter des kleinen Stuhles *a*, Fig. 617 (a. v. S.), passenden Schraubenspindel *b* versehen, vermittelst deren man das offene Ende des Absorptionsrohres gegen die mit vulcanisirtem Kautschuk überzogene Bodenplatte des kleinen Stuhles *a* schrauben und dadurch verschliessen kann. An dem Stuhle befinden sich die beiden Stahlfedern *cc*, welche in zwei perpendiculär laufende Falze der inneren Höhlung des Fusses *f*, Fig. 616, passen, so dass sich der Stuhl, wenn er in die Höhlung des Fusses gesenkt ist, auf und nieder bewegen, aber nicht um seine Achse drehen lässt. Es wird dadurch bewirkt, dass die Absorptionsröhre, welche gegen die Kautschukplatte des in den Falzen festgehaltenen Stuhles geschraubt ist, durch eine geringe Achsendrehung nach links oder rechts geöffnet oder wieder verschlossen werden kann.

In dieses mit Quecksilber gefüllte, in einer Quecksilberwanne stehende Absorptionsrohr lässt man nun zunächst eine Portion des zu untersuchenden Gases eintreten, und nachdem man die zur Bestimmung seines Volumens v, seiner Temperatur und des Druckes b, unter dem es steht, nöthigen Ablesungen vorgenommen hat, wird eine angemessene Quantität luftfreien Wassers zugelassen, das Absorptionsrohr durch Aufschrauben des oben besprochenen kleinen Stuhles unter Quecksilber geschlossen und dann in den unten mit Quecksilber, oben mit Wasser gefüllten Glascylinder *gg*, Fig. 616, eingetaucht. — Die Temperatur dieses Wassers wird an dem Thermometer *k* abgelesen.

Hierauf wird das Absorptionsrohr durch Drehen auf die oben angegebene Weise geöffnet, der Druck, unter welchem das eingeschlossene Gas steht, durch Eingiessen von Quecksilber in den Trichter *r* bis zu einem beliebigen Grade vermehrt, das Absorptionsrohr unten wieder zugeschraubt und dann das Glasrohr *gg* oben durch Aufschrauben eines Deckels vollkommen geschlossen. Dieser Deckel ist in der Mitte mit einer Kautschukplatte versehen, welche, auf den Gipfel des Absorptionsrohres aufgedrückt, dasselbe so fest hält, dass man nun den ganzen Apparat tüchtig schütteln kann. Nachdem diese Operation nun so lange wiederholt worden ist, bis sich nach dem Oeffnen des Absorptionsrohres keine Verminderung des Gasvolumens mehr zeigt, werden abermals die nöthigen Ablesungen vorgenommen, um das Volumen v' des übrigen Gases, das Volumen des Wassers im Absorptionsrohre, den Druck b', unter welchem das eingeschlossene Gas steht, etc. zu erfahren.

Da nun v das Volumen des in das Absorptiometer gebrachten Gases unter dem Druck b vor der Absorption ist, so ist das auf den Normaldruck 760 mm reducirte Volumen dieser Gasmenge $V = \frac{b \cdot v}{760}$ (§. 142). Das nach der Absorption bei unveränderter Temperatur unter dem Druck b' übrig bleibende Volumen v' würde unter dem Normaldruck

das Volumen $V' = \frac{b'\,v'}{760}$ eingenommen haben; mithin ist das auf den Normaldruck reducirte Volumen g des absorbirten Gases:

$$g = V - V' \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Die von der gleichen Wassermenge bei der gleichen Temperatur einmal unter dem Druck 523 mm und dann unter dem Druck 725 mm absorbirten in der eben angedeuteten Weise auf den Normaldruck reducirten Volumina von Kohlensäure waren nach einem Versuche von Bunsen 27,3 und 38,6.

Da nun 38,6 : 27,3 in der That sehr nahe gleich 725 : 523 ist, so ergiebt sich aus diesem wie aus einer Reihe von anderen Versuchen die Richtigkeit des bereits oben ausgesprochenen Henry'schen Gesetzes.

Mit dem Namen des Absorptionscoëfficienten einer Gasart bezeichnet man nach Bunsen das (auf 0° C. reducirte) Gasvolumen, welches von der Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Quecksilberdruck von 760 mm absorbirt wird.

Dieser Absorptionscoëfficient lässt sich leicht berechnen, wenn man das Gasvolumen g ermittelt hat, welches unter dem Druck b' von dem Flüssigkeitsvolumen h absorbirt wird.

Nach dem oben angeführten Gesetz würde nämlich von demselben Flüssigkeitsvolumen h unter dem Normaldruck von 760 mm das Gasvolumen

$$g \frac{760}{b'}$$

absorbirt werden. Das von der Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Normaldruck absorbirte Gasvolumen ist demnach:

$$\alpha = \frac{g}{h} \frac{760}{b'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Setzen wir in Gleichung 2) für g seinen Werth bei 1), so kommt:

$$\alpha = \frac{1}{h} (V - V') \frac{760}{b'}$$

und wenn wir für V und V' ihre obigen Werthe setzen:

$$\alpha = \frac{1}{h} \left(\frac{v \,.\, b}{760} - \frac{v' \,.\, b'}{760} \right) \frac{760}{b'}$$

$$\alpha = \frac{1}{h} \left(\frac{v\, b}{b'} - v' \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Die Grösse α ist aber nichts anderes als der Absorptionscoëfficient.

Bei einem mit Stickstoffgas und Wasser bei einer Temperatur von 18° C. angestellten Versuch ergaben sich aus den Beobachtungen am Absorptiometer:

$v = 32{,}608 \qquad b = 429{,}3$

$v' = 16{,}52 \qquad b' = 730{,}5$

$h = 182{,}37$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 3), so ergiebt sich:

$$\alpha = 0{,}01448$$

als Absorptionscoëfficient des Stickstoffs in Wasser bei einer Temperatur von 18° C.

Für dieselben Substanzen ändert sich der Absorptionscoëfficient mit der Temperatur.

Für Kohlensäure und Wasser fand Bunsen folgende zusammengehörige Werthe der Temperatur und des Absorptionscoëfficienten:

t	α	t	α
4,4° C.	1,4698	16,6° C.	0,9692
8,4	1,2426	19,1	0,8963
13,8	1,0652	22,4	0,8642

woraus er die Interpolationsformel

$$\alpha = 1{,}7967 - 0{,}07761\,t + 0{,}0016424\,t^2$$

ableitet, welche das empirische Gesetz darstellt, nach welchem der Absorptionscoëfficient der Kohlensäure in Wasser von der Temperatur abhängt.

In ähnlicher Weise fand Bunsen für die Absorptionscoëfficienten verschiedener Gase folgende Interpolationsformeln:

Stickstoff in Wasser . . .	0,020346	— 0,00053887 t	+ 0,000011156 t^2
„ „ Alkohol . . .	0,126338	— 0,000418 t	+ 0,000006 t^2
Wasserstoff in Wasser . .	0,0193		
„ „ Alkohol . .	0,06925	— 0,0001487 t	+ 0,000001 t^2
Kohlenoxyd in Wasser . .	0,032874	— 0,00081632 t	+ 0,0000164 t^2
„ „ Alkohol . .	0,20443		
Grubengas in Wasser . .	0,05449	— 0,0011807 t	+ 0,000010278 t^2
„ „ Alkohol . .	0,522586	— 0,0028655 t	+ 0,0000142 t^2
Methylgas in Wasser . . .	0,0871	— 0,0033242 t	+ 0,0000603 t^2
Oelbildendes Gas in Wasser	0,25629	— 0,00913631 t	+ 0,000188108 t^2
„ „ „ Alkohol	3,59498	— 0,057716 t	+ 0,0006812 t^2
Kohlensäure in Wasser . .	1,7967	— 0,07761 t	+ 0,0016424 t^2
„ „ Alkohol . .	4,32955	— 0,09395 t	+ 0,00124 t^2
Sauerstoff in Wasser . . .	0,04115	— 0,000109 t	+ 0,00002256 t^2
„ „ Alkohol . .	0,2825		

Der Absorptionscoëfficient von Wasserstoff in Wasser bleibt zwischen 0° und 20° C., der von Kohlenoxyd in Alkohol und von Sauerstoff in Alkohol bleiben zwischen 0° und 24° ungeändert.

Zur Bestimmung der Absorptionscoëfficienten solcher Gase, welche das Quecksilber angreifen oder welche vom Wasser in unverhältnissmässiger Menge verschluckt werden, lässt sich das Absorptiometer nicht mehr anwenden. Was die in diesen Fällen von Bunsen angewandten experimentellen Methoden betrifft, so müssen wir auf dessen „gaso-

metrische Methoden" (Braunschweig 1857) verweisen, und begnügen uns, die wichtigsten seiner hierher gehörigen Resultate anzuführen:

Schwefelwasserstoff in Wasser	4,3706	— 0,083687 t	+ 0,0005213 t^2
„ „ Alkohol	17,891	— 0,65598 t	+ 0,00661 t^2
Schweflige Säure in Wasser .	79,789	— 2,6077 t	+ 0,02935 t^2
„ „ „ Alkohol .	328,62	— 16,95 t	+ 0,312 t^2
Ammoniak in Wasser . . .	1049,63	— 29,496 t	+ 0,6769 t^2

Absorption von Gasgemengen. Wenn zwei oder mehrere 171
Gase mit einander gemischt sind, so erfolgt die Absorption proportional dem Drucke, welchen jeder der Gemengtheile ausüben würde, wenn er sich allein in dem vom Gasgemenge erfüllten Raume befände. Diesen, die Absorption des Gemengtheils bedingenden Druck nennt Bunsen den partiären Druck (Partialdruck). Die atmosphärische Luft besteht z. B. aus

0,2096 Volumtheilen Sauerstoff und
0,7904 Volumtheilen Stickstoff.

Steht nun eine bestimmte Menge atmosphärischer Luft unter dem Druck P, so ist der partiäre Druck, unter welchem das Sauerstoffgas absorbirt wird, $0,2096\,P$, während die Absorption des Stickstoffs unter dem Druck $0,7904\,P$ vor sich geht.

Bezeichnen α und β die Absorptionscoëfficienten des Sauerstoffs und des Stickstoffs, so werden demnach von der Einheit des Wasservolumens aus einer unter dem Normaldruck stehenden Luftmasse absorbirt:

$0,2096\,\alpha$ Volumina Sauerstoff und
$0,7904\,\beta$ Volumina Stickstoff;

demnach ergiebt sich für atmosphärische Luft der Absorptionscoëfficient:

$$\gamma = 0,2096\,\alpha + 0,7904\,\beta.$$

Setzt man für α und β die Werthe der Absorptionscoëfficienten von Sauerstoff und Stickstoff bei 0° C., so kommt:

$$\gamma = 0,008625 + 0,016151 = 0,024776.$$

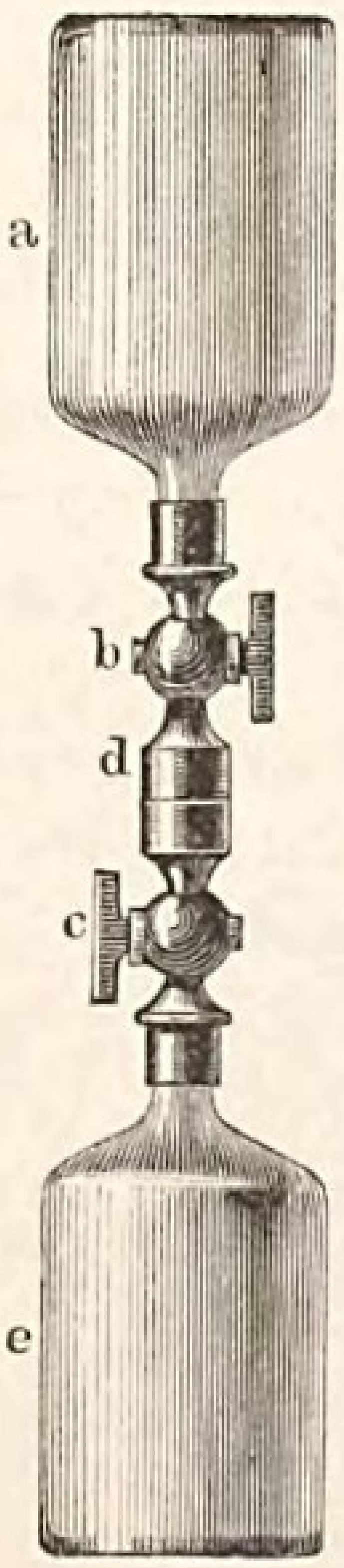
Das bei 0° C. von der Einheit des Wasservolumens aus der atmosphärischen Luft absorbirte Gasvolumen 0,024776 besteht aber aus 0,008625 Volumtheilen Sauerstoff und 0,016151 Volumtheilen Stickstoff, es enthält also 34 Proc. Sauerstoff und 66 Proc. Stickstoff. Das von Wasser aus der Atmosphäre absorbirte Gasgemenge ist also an Sauerstoff reicher als die atmosphärische Luft selbst.

In der angegebenen Weise geht jedoch die Absorption von Sauerstoff und Stickstoff aus der atmosphärischen Luft nur dann vor sich, wenn die procentische Zusammensetzung des Rückstandes unverändert bleibt, wenn also das Volumen des absorbirenden Wassers verschwindend klein ist gegen das Luftvolumen, welches mit demselben in Berührung ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so wird in Folge der ungleichen

Absorption der Bestandtheile die procentische Zusammensetzung des unabsorbirt zurückbleibenden Gases, also auch der partiäre Druck, verändert und dadurch die Berechnung der absorbirten Gasmengen verwickelter. Aus diesem Grunde würde man auch aus directen Versuchen mit dem Absorptiometer einen anderen Werth für den Absorptionscoëfficienten der atmosphärischen Luft finden.

172 **Diffusion der Gase.** Flüssigkeiten, welche sich nicht gegenseitig lösen oder chemisch mit einander verbinden, können wohl auf einige Augenblicke gemengt sein; bald aber trennen sie sich, sie lagern sich nach der Oeffnung ihrer specifischen Gewichte, wie z. B. das Oel auf dem Wasser schwimmt. Bei Gasen findet stets eine ganz gleichförmige Mengung statt.

Fig. 618.



Diese Fundamentalwahrheit ist durch directe Versuche ausser Zweifel gesetzt worden. Berthollet verband zwei Ballons, von denen der eine *a*, Fig. 618, mit Wasserstoffgas, der andere *e* mit Kohlensäuregas gefüllt war, durch eine Röhre, die durch Hähne gesperrt werden konnte. Nachdem der Apparat so aufgestellt war, dass der mit dem leichteren Wasserstoffgas gefüllte Ballon über dem anderen stand, wurden die Hähne geöffnet. Nach einiger Zeit hatte sich die Hälfte des Wasserstoffgases trotz seiner Leichtigkeit in dem unteren Ballon verbreitet, während die Hälfte des Kohlensäuregases in den oberen Ballon hinaufgestiegen war.

Jedes der beiden Gase verbreitet sich also gleichförmig in dem ganzen Raume gerade so, als ob das andere gar nicht da wäre.

Diese Erscheinung der gleichförmigen Mengung der Gase wird mit dem Namen der Diffusion bezeichnet.

Was für die Mischung zweier Gase gilt, gilt auch für die Mischung mehrerer. Das allgemeine Princip, nach welchem die Mischung gasförmiger Körper vor sich geht, ist folgendes: Wenn man in einen und denselben Raum verschiedene Gase bringt, welche keine chemische Wirkung auf einander ausüben, so verbreitet sich jedes gleichförmig durch den ganzen Raum.

Das Gesammtvolumen ist dabei gleich der Summe der Volumina der einzelnen Gase und ebenso der Gesammtdruck gleich der Summe der Partialdrucke. Die Mengung kann in allen Verhältnissen vor sich gehen.

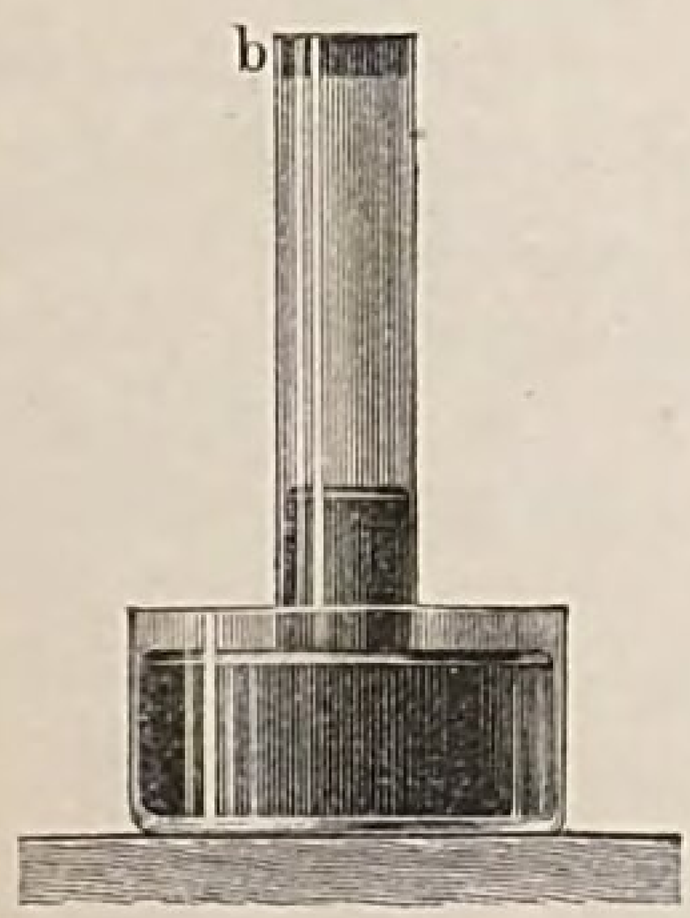
Die Diffusion eines Gases in ein anderes erfordert eine gewisse Zeit. Es sind über die Geschwindigkeit der Diffusion von mehreren Physikern *)

*) Graham, Loschmidt, Stefan u. A. (Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 61, 62, 63, 65). Ausführliches hierüber bei O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, S. 162.

sehr wichtige experimentelle und theoretische Untersuchungen angestellt worden, auf deren Einzelheiten wir hier nicht eingehen können.

Sobald zwei Gase gegen einander diffundiren, haben dieselben an Stellen, welche in der Richtung der Diffusion um die Längeneinheit von einander entfernt sind, verschieden hohen Partialdruck. Je grösser diese Druckdifferenz, desto grösser ist die Diffusionsgeschwindigkeit. Dieselbe hängt jedoch noch von einer besonderen Constanten, welche von einem Gase zum anderen wechselt, ab, welche die Diffusionsconstante oder der Diffusionscoëfficient genannt wird. Derselbe ist somit analog dem Wärmeleitungsvermögen fester Körper. Wie bei diesen die Stärke der Wärmeströmung nicht allein proportional der Temperaturdifferenz zweier um die Längeneinheit abstehender Stellen, sondern ausserdem proportional dem Leitungsvermögen ist, so ist die Stärke der Diffusionsströmung dem Unterschiede der Dichtigkeit des diffundirenden Gases an zwei um die Längeneinheit abstehenden Stellen und der Diffusionsconstante proportional. Die letztere ist nach Loschmidt's Versuchen dem Gesammtdrucke der Gase umgekehrt proportional und ausserdem mit der Temperatur, jedoch in rascherem Verhältnisse wachsend.

Fig. 619.



Von der freien Diffusion der Gase verschieden und besonderen Gesetzen folgend ist die Diffusion durch poröse Wände, zum Unterschiede auch Transfusion der Gase genannt. Dieselbe hat eine gewisse Aehnlichkeit mit der Endosmose der Flüssigkeiten; man findet nämlich, dass verschiedene Gase nicht mit gleicher Geschwindigkeit durch die poröse Scheidewand hindurchdringen, so dass die Gasmenge auf der einen Seite ab- oder zunimmt. Um dies durch den Versuch anschaulich zu machen, kann man in folgender Weise verfahren: Eine 2 bis 3 cm weite, oben durch einen 2 bis 4 mm dicken vollkommen trockenen Gypspfropfen *b*, Fig. 619, geschlossene Glasröhre wird mit Wasserstoffgas oder mit Leuchtgas gefüllt und dann rasch ihr unteres Ende in Quecksilber oder Wasser eingetaucht, wie die Figur andeutet. Ueberlässt man nun die Vorrichtung sich selbst, so sieht man alsbald die Flüssigkeit in die Röhre steigen und schon nach einigen Minuten steht sie um eine namhafte Höhe über dem äusseren Flüssigkeitsspiegel. Das Gasvolumen in der Röhre hat also abgenommen, weil Wasserstoffgas durch den Gypspfropfen hindurch in die Atmosphäre diffundirt ist. Freilich ist auch in umgekehrter Richtung durch den Pfropfen atmosphärische Luft in den Cylinder eingedrungen, allein das Volumen der eingetretenen Luft ist weit geringer als das Volumen des ausgetretenen Wasserstoffs.

Noch viel auffallender lässt sich die Erscheinung mit Hülfe des Apparates Fig. 620 (a. f. S.) zeigen, weil bei grösserer Oberfläche der

diffundirenden Wand die Steigröhre weit enger ist. A ist eine poröse Thonzelle, wie solche zum Aufbau der Bunsen'schen Zink-Kohlenbatterien gebraucht werden. Die Oeffnung ist durch einen Korkstopfen verschlossen, durch welchen zwei Glasröhren b und c hindurchgehen. Durch Siegellacklösung ist der Kork luftdicht schliessend gemacht. Die Röhre b ist ungefähr 4 dm lang und ihr unteres Ende in ein Gefäss mit gefärbtem Wasser getaucht. An die kurze umgebogene Röhre c ist ein Gummischlauch angesteckt, welcher zu dem Behälter führt, welcher das Gas liefert, mit dem A gefüllt werden soll. Während das Gas hier einströmt, steigen Luftblasen am unteren Ende von b auf, bis man das Kautschukrohr durch einen Quetschhahn schliesst und ein ferneres Einströmen von

Fig. 620.

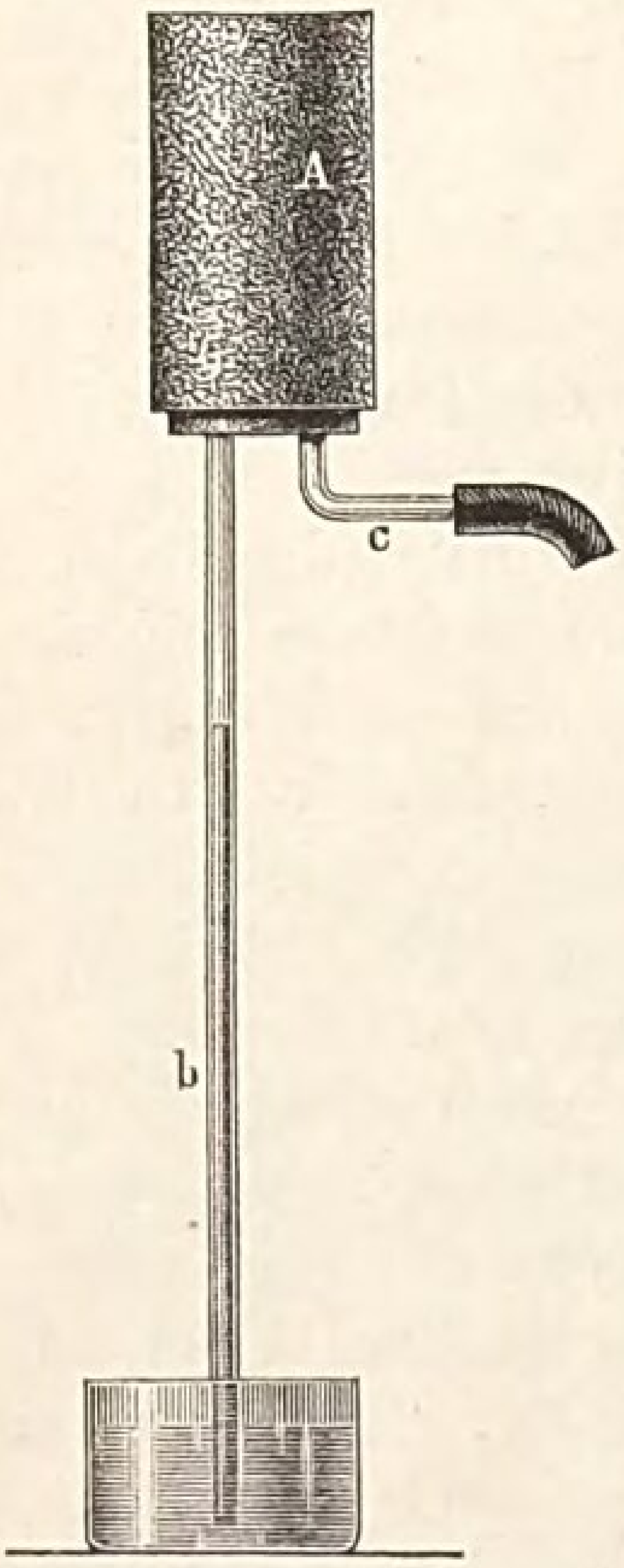


Fig. 621.

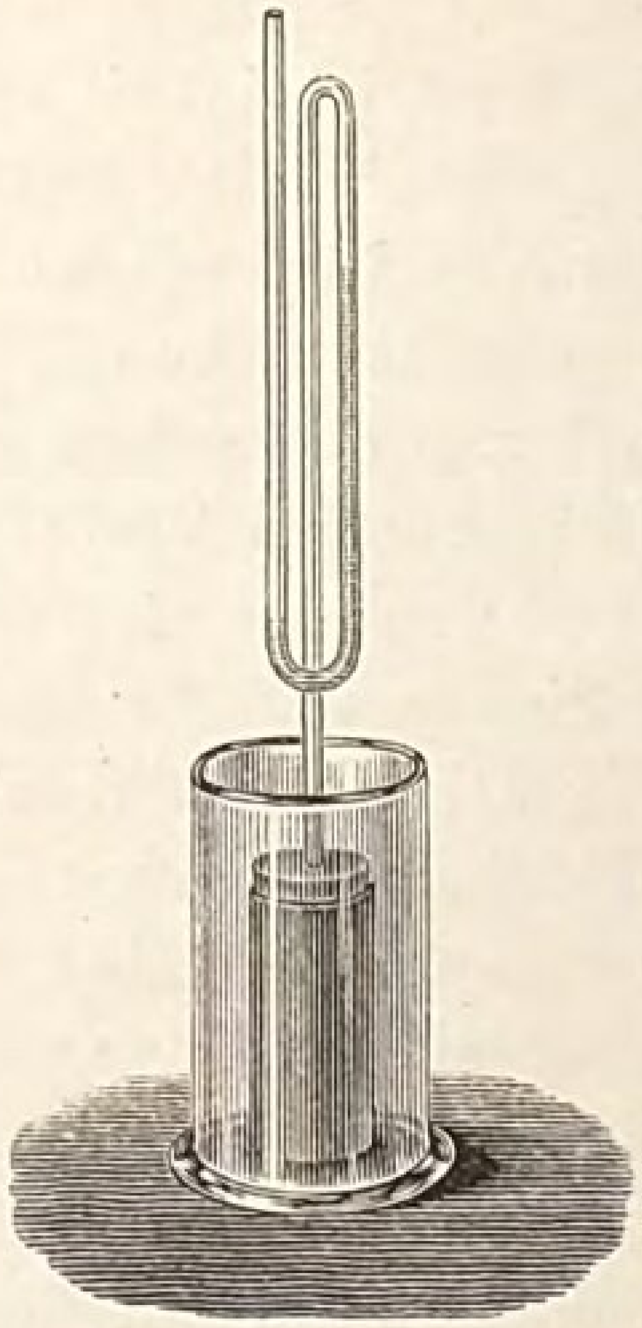
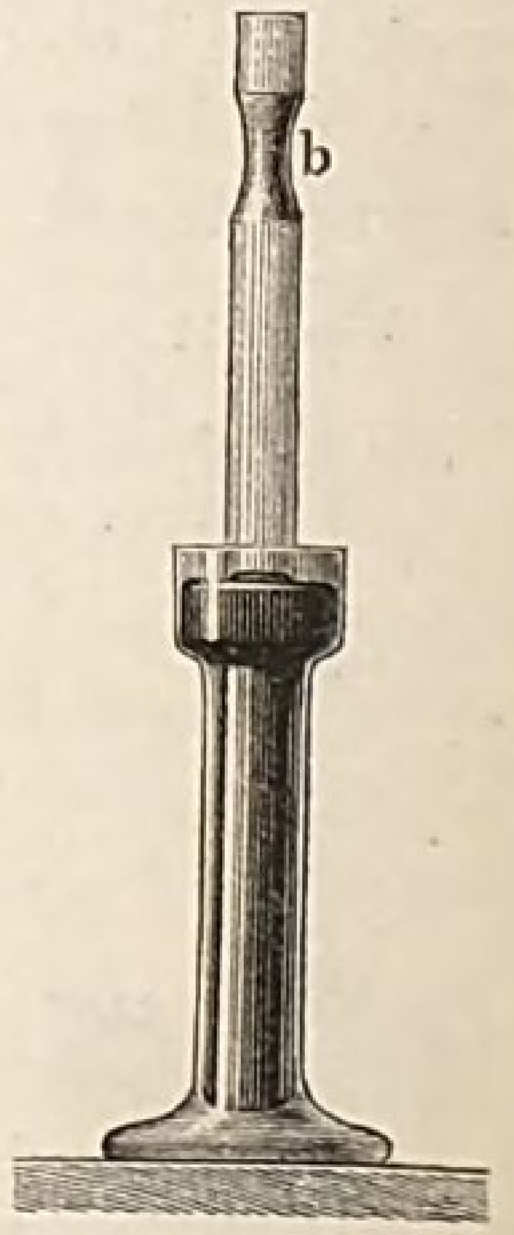


Fig. 622.



Gas verhindert. Nun aber sieht man, wenn das Gas in A leichter ist als atmosphärische Luft, wenn man etwa mit Leuchtgas oder mit Wasserstoffgas experimentirt, das Wasser in b ziemlich rasch um 2 bis 3 dm steigen, um alsdann langsamer wieder zu sinken, wenn das Gas in A so weit verdünnt ist, dass das Einströmen der atmosphärischen Luft überwiegend wird.

Bringt man eine poröse Thonzelle, welche durch einen Pfropfen mit eingesetztem Hebermanometer geschlossen ist, in ein Glasgefäss, Fig. 621, in welchem man durch Eintröpfeln von Schwefeläther eine Atmosphäre von Aetherdampf hergestellt hat, so sinkt die manometrische Flüssigkeit im offenen Schenkel, weil die atmosphärische Luft aus dem Inneren der Thonzelle durch deren Poren rascher entweicht, als der 5 mal schwerere Aetherdampf einzudringen vermag.

Um das Gesetz der Diffusion durch poröse Scheidewände hindurch zu ermitteln, muss man den durch Fig. 619 erläuterten Versuch dahin

abändern, dass man die Röhre allmälig tiefer und tiefer einsenkt, damit das Niveau des Quecksilbers in der Röhre stets dem äusseren gleich bleibt, weil ohne diese Vorsichtsmaassregel mehr atmosphärische Luft eindringt, als wenn bloss eine Diffusionswirkung stattgefunden hätte. Um aber das Diffusionsrohr nach und nach tiefer einsenken zu können, wählt man zur Aufnahme der Sperrflüssigkeit einen Glascylinder von der Fig. 622 dargestellten Form.

Graham hat diese Erscheinung zuerst näher untersucht. Nach dem von ihm aufgestellten Gesetz verhalten sich die Geschwindigkeiten, mit welchen die Gase in entgegengesetzter Richtung die Scheidewand durchziehen, umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus ihren specifischen Gewichten. Setzen wir das specifische Gewicht der Luft gleich 1, so ist das des Wasserstoffgases 0,06926; gegen 1 Volumen Wasserstoff, welches austritt, werden also $\sqrt{0,06926}$ Volumina Luft eintreten; das Volumen des austretenden Wasserstoffgases soll also $\frac{1}{\sqrt{0,06926}} = 3,80$ mal grösser sein als das der eintretenden Luft.

Zwischen Endosmose und der Diffusion der Gase findet also ein wesentlicher Unterschied statt. Während die Ungleichheit der entgegengesetzten Strömungen bei der Endosmose lediglich durch die ungleiche Molekularanziehung bedingt wird, welche die Scheidewand auf die Flüssigkeiten ausübt, kommt bei der Diffusion der Gase die Natur der Scheidewand gar nicht in Betracht; das Verhältniss der Strömungen hängt von dem Verhältniss der specifischen Gewichte der Gase ab.

Nach höchst sorgfältig angestellten Versuchen von Bunsen ist Graham's Diffusionsgesetz nicht genau. Ein mit Wasserstoffgas angestellter Versuch, bei welchem Wasser als Sperrflüssigkeit angewendet wurde, gab z. B. folgende Resultate: Das Anfangsvolumen des Wasserstoffs im Diffusionsrohr war 645, als das Wasserniveau in der Röhre 1 mm höher stand als aussen. Während nun das Wasserstoffgas durch den Gypspfropfen diffundirte, also das Gasvolumen in der Röhre abnahm, wurde das Diffusionsrohr immer in der Weise niedergesenkt, dass der Höhenunterschied zwischen dem inneren und äusseren Wasserspiegel stets 1 mm betrug.

Nachdem das Gasvolumen im Diffusionsrohr auf 193 abgenommen hatte, fand keine weitere Aenderung des Volumens mehr statt, die Diffusion des Wasserstoffs war also beendigt, es waren also 193 Volumtheile atmosphärischer Luft gegen 645 Volumtheile Wasserstoffgas eingetreten. Der Quotient $\frac{645}{193} = 3,34$ ist aber merklich geringer als 3,80, wie er nach dem Graham'schen Gesetze hätte sein müssen.

Diese Abweichung von Graham's Gesetz hängt mit den in §. 162 besprochenen Ausströmungsgesetzen zusammen.

173 **Reibung der Gase.** Was in §. 122 über die Reibung der Flüssigkeiten vorgetragen wurde, gilt auch für die Reibung der Gase. Ebenso sind die angewendeten Methoden zur Bestimmung des Reibungscoëfficienten im Wesentlichen dieselben. Der in Fig. 464, S. 449, abgebildete Apparat von Röntgen kann ebenso für Gase benutzt werden. Zu diesem Zwecke wird die Kugel A durch den Kautschukschlauch mit einem Gasometer in Verbindung gesetzt, in welchem Luft oder ein anderes Gas unter einem passenden, möglichst constanten Druck enthalten ist. Die Kugeln A und B werden nur so weit mit gefärbtem Wasser gefüllt, dass dasselbe zwar zur Füllung der auch jetzt als Manometer dienenden Röhren ch und gi ausreicht, die Capillarröhren aber trocken bleiben. Die Ueberdrucke werden selbstverständlich diesmal vom Niveau der Flüssigkeit in den Kugeln aus gemessen. Die Wanne ist bei diesen Versuchen überflüssig.

Genaue Messungen des Reibungscoëfficienten liegen insbesondere für Luft vor und zwar sowohl solche nach der Methode mit schwingenden Scheiben*), als auch solche mittelst Ausflussversuchen**).

Die Zahlenwerthe (auf Gramm und Centimeter bezogen) schwanken zwischen $\eta = 0{,}000197$ und $0{,}000169$.

Der Reibungscoëfficient ist unabhängig von dem Drucke (der Dichte), dagegen wächst derselbe mit der Temperatur.

Ausser der inneren Reibung der Gase giebt es noch eine äussere Reibung derselben sowohl an festen als an flüssigen Körpern. Die Reibung an festen Körpern ist von Kundt***), jene an flüssigen (Wasser) von V. v. Lang†) mittelst eines eigens hierzu erdachten Apparates gemessen worden.

*) Von Maxwell, O. E. Meyer, Kundt und Warburg.

**) Von O. E. Meyer, Puluy, Obermayer, Warburg. Diese, sowie die einschlägigen wichtigen Untersuchungen von V. v. Lang, Stefan und Boltzmann finden sich theils in Pogg. Ann. Bd. 125 bis 148, theils in den Sitzungsber. der Wiener Akademie Bd. 64 bis 76.

***) Pogg. Ann. Bd. 155, S. 512.

†) Proc. Roy. Soc. Bd. 24, S. 341.

Ende des ersten Buches.

ZWEITES BUCH.

DIE AKUSTIK.

Erstes Capitel.

Von den Schallwellen.

Begriff des Schalles und seiner Arten, Fundamentalversuche über seine Entstehung und Fortpflanzung. 174 Die Akustik ist derjenige Theil der Physik, welcher sich mit jenen Vorgängen beschäftigt, die wir mit dem Gehör wahrnehmen. Die Gesammtheit dieser Gruppe von Sinneseindrücken fassen wir unter dem Worte Schall zusammen. Wir unterscheiden jedoch darunter einzelne Arten, die wir durch die Bezeichnungen Geräusch, Knall, Ton, Klang etc. näher charakterisiren. Unter Geräusch verstehen wir einen unregelmässigen, unter Knall einen momentanen Schall, Ton und Klang sind regelmässige (periodisch organisirte) Schallarten, welche auch in der Musik gebraucht werden. Wie wir später hören werden, ist Ton ein solcher Schall, welcher vom Gehör als einfache Empfindung wahrgenommen wird, Klang dagegen ist als eine Zusammensetzung von Tönen zu betrachten. Die musikalisch gebrauchten „Töne" sind fast ausnahmslos nicht einfache physikalische Töne, sondern Klänge.

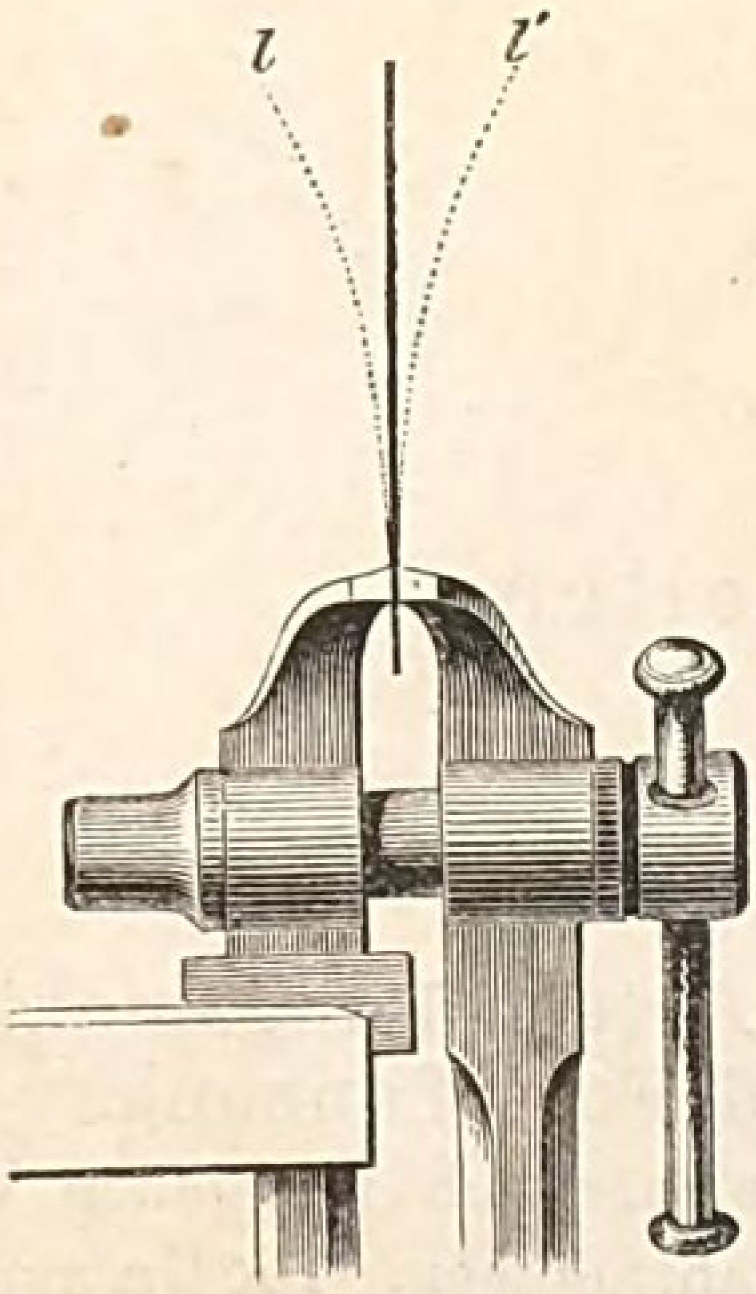
Ueber die Entstehung und Verbreitung des Schalles hatten die alten Griechen nur sehr mangelhafte Vorstellungen. Allerdings war man schon in den ältesten Zeiten der Meinung, dass der Schall durch irgend eine Bewegung des tönenden Körpers erzeugt und durch eine entsprechende Bewegung der Luft bis zum Ohre fortgepflanzt werde; was aber die Art dieser Bewegung betrifft, so begnügte man sich mit den vagsten Ideen, wie dies unter Anderen aus verschiedenen Stellen der Schriften des Aristoteles hervorgeht.

Besser schon sind die Erklärungen Vitruv's, welcher bereits ganz richtig die Verbreitung der Schallwellen mit der Verbreitung der Wasserwellen vergleicht. Aber erst Newton hat in seinem unsterblichen Werke:

Philosophiae naturalis principia mathematica eine richtige Definition der Schallwellen und ihrer Verbreitung gegeben.

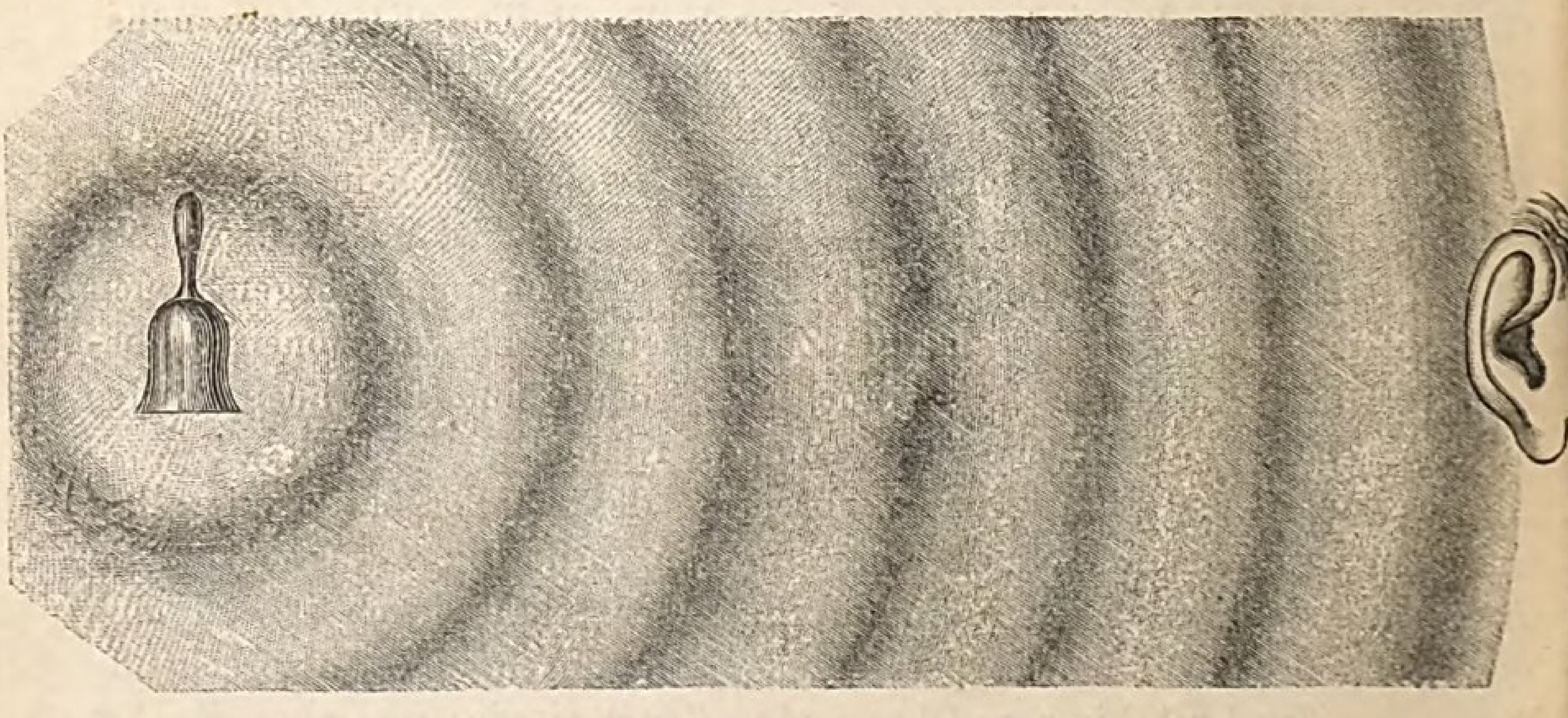
Der Schall entsteht durch eine zitternde Bewegung (Oscillationsbewegung) elastischer Körper; durch eine solche Oscillationsbewegung werden in der umgebenden Luft abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen erzeugt, welche die Oscillationsbewegung bis zu unserem Ohr fortpflanzen und hier den entsprechenden Nervenapparaten mitgetheilt die Schallempfindung hervorrufen.

Fig. 623.



Suchen wir dies noch etwas anschaulicher zu machen! Wenn irgend ein elastischer Körper, z. B. ein elastischer Stahlstreifen, Fig. 623, dessen eines Ende fest eingeklemmt ist, aus seiner Gleichgewichtslage herausgebogen und dann sich selbst überlassen wird, so oscillirt er eine Zeit lang mit mehr oder minder grosser Geschwindigkeit zwischen zwei Grenzlagen hin und her, wie dies in unserer Figur angedeutet ist. Indem sich nun das obere Ende des Stahlstreifens

Fig. 624.



rasch von l bis l' bewegt, werden die zunächst rechts von ihm liegenden Luftschichten gleichfalls nach der rechten Seite hingetrieben und dadurch entsteht hier eine Verdichtung der Luft. Indem aber die comprimirte Luft sich in Folge ihrer Elasticität wieder ausdehnt, übt sie einen Stoss auf die zunächst folgenden Luftschichten aus und so wird die ursprünglich vom oscillirenden Körper ausgehende Bewegung, wie

später noch ausführlicher nachgewiesen werden soll, der Reihe nach von einer Luftschicht zur anderen übertragen, und die Verdichtung, welche der oscillirende Körper zunächst nur in den benachbarten Schichten hervorgebracht hatte, pflanzt sich in Folge dessen mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fort.

Während nun so die Verdichtungswelle mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortpflanzt, schwingt der oscillirende Körper in seine Grenzlage zur Linken zurück; dadurch werden nun die zunächst rechts vom Stahlstreif befindlichen Luftschichten gleichfalls nach der Linken gerissen, es entsteht rechts vom Stahlstreif eine Luftverdünnung, die sich in gleicher Weise verbreitet, wie vorher die Verdichtung, indem nun die auf einander folgenden Luftschichten der Reihe nach ihre Oscillationsbewegung nach der linken Seite hin ausführen.

So erzeugt denn jede vollständige Oscillation des tönenden Körpers, d. h. jede hin und her gehende Bewegung desselben eine neue Verdichtungs- und eine ihr folgende Verdünnungswelle, welche alle mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitend sich in gleichen Zwischenräumen einander folgen, wie dies durch Fig. 624 anschaulich gemacht werden soll, wo die Verdichtungswellen, welche von der etwa durch den Anschlag eines Hammers zum Tönen gebrachten Glocke ausgehen, durch dunklere Schattirung angedeutet sind.

In der Optik werden wir einen von A. Töpler erfundenen Apparat (Schlierenapparat) beschreiben, mittelst welchem diesem Physiker das höchst interessante Experiment gelungen ist, die durch einen elektrischen Funken entstandenen und durch einen zweiten Funken beleuchteten Schallwellen direct sichtbar zu machen.

Es ist wichtig, von Anfang an die unrichtige Vorstellung zurückzuweisen, als ob bei der Fortpflanzung des Schalles vom Schall erregenden Körper bis ins Ohr die Lufttheilchen diesen Weg mit zurücklegen würden. Dies ist durchaus nicht der Fall; die Lufttheilchen bleiben vielmehr, von ihrer geringen Oscillation abgesehen, im Wesentlichen an Ort und Stelle. Man kann dies experimentell nachweisen, indem man die den Schallerreger umgebenden Lufttheilchen durch Rauch sichtbar macht. So pflanzt sich z. B. der Schall eines Geschützes viele Kilometer weit fort, während der gleichzeitig entstandene Pulverrauch nur wenige Meter weit fortgeschleudert wird. Würden die vor der Mündung der Kanone befindlichen Luftmassen mit dem Schalle gleich schnell sich fortbewegen, so würde der Rauch mit fortgetragen werden und es müsste dadurch ein Orkan von sonst nie beobachteter Stärke entstehen.

Ein anderer Nachweis hierfür folgt aus der wichtigen Thatsache, dass nicht allein die Luft, sondern alle mehr oder minder elastischen materiellen Medien den Schall fortzupflanzen vermögen, also auch die festen Körper, bei denen von einem Fortbewegen ihrer Theilchen mit dem Schalle überhaupt nicht die Rede sein kann.

Im Wasser pflanzt sich der Schall sehr gut fort, die Taucher hören, was am Ufer gesprochen wird, und am Ufer hört man deutlich, wenn in grossen Tiefen zwei Steine an einander geschlagen werden.

Als Vorlesungsexperiment zum Nachweise der Schallleitung flüssiger Körper eignet sich das folgende. Eine Stimmgabel, deren Stiel in ein Stück Holz eingeschraubt ist, wird angeschlagen und nachdem sie beinahe ausgeklungen, mit dem Holze in ein Glas Wasser getaucht, das auf dem Tische steht. Sofort wird der Ton der Stimmgabel wieder hörbar. Die Stimmgabel muss hierbei am Stiele gehalten werden.

Um die Schalleitung in festen Körpern zu zeigen, kann man zunächst die angeschlagene Stimmgabel mit dem Stiele auf den Tisch aufstemmen, wodurch ihr Ton sofort stärker hörbar wird. Ein anderer auffälliger Versuch ist folgender: Man legt eine Taschenuhr auf einen gepolsterten Sessel und bedeckt sie mit mehrfachen Lagen eines Tuches. Man wird dann ihr Ticken kaum hören. Stellt man nun aber einen hölzernen Stab direct auf das Uhrgehäuse, so hört man das Ticken, wenn man auch die Uhr selbst sorgfältig einhüllt, und zwar kommt der Ton vom oberen Theile des Stabes. Derselbe wird bedeutend stärker, sobald man auf das obere Ende des Stabes ein grösseres Brettchen von gut getrocknetem Holze auflegt, da nun die Zahl der Stellen, wo der Schall in die Luft übergeht, vermehrt wird. Man kann endlich noch eine sehr lange horizontale hölzerne Stange mit dem einen Ende auf den erstgenannten Stab auflegen und wird dann das Ticken der Taschenuhr noch deutlich hören, wenn man das Ohr an das andere Ende der Stange anlegt.

Es ist überhaupt nicht nöthig, dass der Schall durch die Luft in das Ohr gelange, er kann auch direct durch die festen Theile des Kopfes zum Gehörnerven gelangen. Verschliesst man sich die Ohren mit den Fingern und fasst die oben genannte Stange zwischen die Zähne, so hört man ebenfalls ganz deutlich das Ticken der Uhr.

Die festen Körper brauchen auch nicht gerade starre Körper zu sein; auch eine stramm gespannte Schnur leitet beispielsweise den Schall ganz gut. Man hänge an die Mitte einer Schnur irgend eine Metallstange (eiserne Schaufel, Feuerzange etc.), wickele die beiden Schnurenden um die Spitzen der beiden Zeigefinger und stecke diese fest in die Ohrengänge. Lässt man hierauf den frei hängenden Körper an einen anderen anschlagen, so dröhnt der Schall mit auffallender Stärke in die Ohren.

Zur Fortpflanzung des Schalles sind materielle Medien unbedingt erforderlich; das Vacuum kann den Schall nicht leiten.

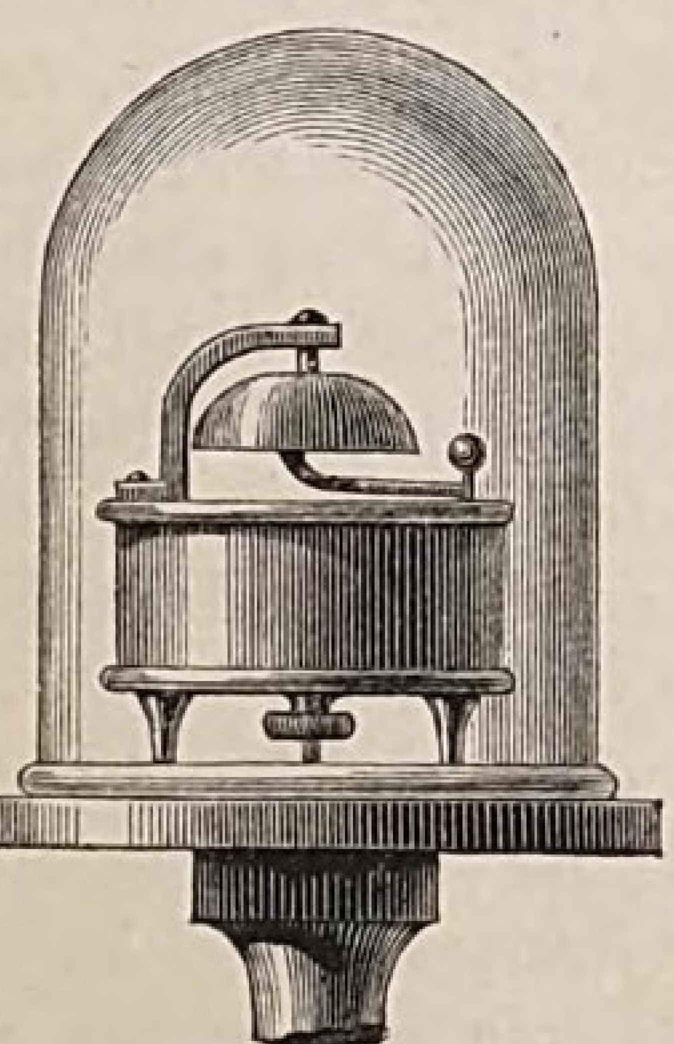
Um dies zu zeigen, setze man auf den Teller der Luftpumpe ein aufgezogenes Weckerwerk, Fig. 625, jedoch so, dass die Füsse desselben nicht direct auf dem Teller aufstehen, sondern auf einem Kissen von Wolle oder Kattun oder auch auf einigen auf einander gelegten Plättchen von dickem vulcanisirtem Kautschuk ruhen. Durch das Uhrwerk

wird ein Hammer, welcher sich bei unserer Vorrichtung im Inneren der Glocke befindet, bald auf der einen, bald auf der anderen Seite derselben angeschlagen. Der dadurch erzeugte Schall wird sogleich schwächer, wenn man die gläserne Luftpumpenglocke aufsetzt, aber immerhin bleibt er noch deutlich hörbar; wird aber nun evacuirt, so verschwindet der Ton vollständig. Lässt man dann die Luft allmälig wieder eintreten, so unterscheidet man alsbald den Ton, welcher stärker und stärker wird, wenn sich die Glocke mehr und mehr mit Luft füllt. Der Schall kann sich also nicht durch den leeren Raum fortpflanzen.

Der grösste Lärm auf der Erde kann sich demnach nicht über die Grenzen unserer Atmosphäre verbreiten, dagegen kann aber auch von keinem anderen Himmelskörper nur das mindeste Geräusch bis zu unserer Erde dringen; die furchtbarsten Explosionen könnten auf dem Monde stattfinden, ohne dass wir davon etwas hörten.

Saussure sagt, dass auf dem Gipfel des Montblanc ein Pistolenschuss weniger Geräusch macht, als wenn man in der Ebene ein Kinderkanönchen losschiesst, und Gay-Lussac fand mit seinem Ballon in einer Höhe von 7000 m, also in einer sehr verdünnten Luft schwebend, dass die Intensität seiner Stimme ungemein abgenommen hatte.

Fig. 625.



Nicht in der Luft allein, sondern in allen Gasen und Dämpfen kann sich der Schall verbreiten. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur die Gase oder Dämpfe in das Vacuum eintreten zu lassen, in welchem sich das gehende Weckerwerk, Fig. 625, befindet.

Leslie*) hat auf diese Weise gezeigt, dass Wasserstoff den Schall am schlechtesten leitet. Entleert man nämlich die Glocke der Luftpumpe zur Hälfte von der Luft, so dass der Schall merklich geschwächt wird, und lässt dann Wasserstoffgas ein, bis der Druck dem ursprünglichen gleich geworden, so wird der Schall nach aussen nicht nur nicht verstärkt, sondern gänzlich unhörbar. Dieses Experiment wurde von Stokes**), dann insbesondere von Dvořák***) einer näheren Prüfung unterzogen. Der letztere Physiker hat gezeigt, dass bei diesem Versuche die Resonanz einen wesentlichen Einfluss habe†).

*) Trans. of Cambridge Soc. I, 267.

**) Phil. Mag. [4] XXXVI, 401.

***) Wien. Akad. Ber. Band LXIX, 2. Abth. S. 151.

†) Da die Resonanz erst später zur Erklärung gelangt, so können wir hier nur vorgreifend Folgendes beifügen. Die Stärke des Schalles ausserhalb des Recipienten hängt wesentlich von den Dimensionen des letzteren beziehungsweise von dem Verhältniss der Eigentöne desselben zu den Partialtönen des tönenden Körpers ab. Es kann daher geschehen, dass bei langsamem Zuströmen des Wasserstoffs die Schallstärke abwechselnd zunimmt und wieder ab-

175 **Stehende Schwingungen und fortschreitende Wellen.** Betrachtet man die im vorigen Paragraphen besprochenen Vorgänge näher, so zeigt sich zunächst ein wesentlicher Unterschied zwischen den Schwingungen des schallerzeugenden Körpers und den Vibrationen der Theilchen des schallverbreitenden Mediums. Die Schwingungen des schallerzeugenden Körpers sind der Art, dass alle Theilchen gleichzeitig in Bewegung gerathen, gleichzeitig ihre Gleichgewichtslage passiren, gleichzeitig die Grenzen ihrer Oscillationsamplitude erreichen und gleichzeitig ihren Rückweg beginnen. Von dieser Art, welche Weber als stehende Schwingungen bezeichnet, sind die Schwingungen des Stahlstabes, Fig. 623, die Schwingungen einer gespannten Saite u. s. w. Alle tönenden Körper befinden sich im Zustande stehender Schwingungen.

Nur Körper von verhältnissmässig geringen Dimensionen, bei denen eine an irgend einer Stelle bewirkte Verschiebung der Theilchen aus ihrer Gleichgewichtslage sich momentan oder doch in verschwindend kleinen Zeittheilchen bis zu den äussersten Grenzen fortpflanzt, können direct in den Zustand stehender Schwingungen versetzt werden. Sind dagegen die Dimensionen eines elastischen Mediums so bedeutend, dass eine namhafte Zeit vergeht, bis die an irgend einer Stelle erregte Oscillationsbewegung auf entfernte Stellen fortgepflanzt wird, so entstehen zunächst fortschreitende Wellen, deren Wesen darin besteht, dass jedes folgende Theilchen dieselben Oscillationen macht wie das vorhergehende, nur mit dem Unterschiede, dass es seine Bewegung um so später beginnt, je weiter es von dem Ursprunge der Wellenbewegung entfernt ist.

Beispiele von Wellenbewegung liefert uns eine ruhige Wasserfläche, auf welche man einen Stein fallen lässt (wo aber nicht die Elasticität des Wassers, sondern die Schwere desselben die Kraft ist, welche die Oscillationsbewegung der Wassertheilchen bedingt); ein sehr langes ge-

nimmt, je nachdem der auf diese Weise veränderliche Eigenton des Recipienten mit dem Grundtone oder einem der Obertöne des tönenden Körpers übereinstimmt.

Die mathematische Theorie lehrt, dass der tönende Körper den verschiedenen (reinen oder gemischten) Gasen eine lebendige Kraft ertheilt, welche der Quadratwurzel aus dem Producte der Dichte mit der Spannkraft des Gases proportional ist. Andererseits geben nach den Gesetzen des elastischen Stosses die Gase an die Wände des Recipienten eine lebendige Kraft ab, die wiederum proportional derselben Quadratwurzel ist. Daraus folgt, dass die vom tönenden Körper an den Recipienten abgegebene lebendige Kraft, also auch die Schallstärke, proportional sein muss dem Producte der beiden Quadratwurzeln, also proportional dem Producte aus Dichte und Spannkraft der Gase. Bei gleicher Spannkraft wäre also der Theorie nach die nach aussen übertragene Schallstärke bei Wasserstoff nur ungefähr $^1/_{14}$ von der bei Luft. Die letztere müsste auf $^1/_4$ verdünnt werden, um gleiche Schallstärke zu liefern wie Wasserstoff. Dieses Gesetz, welches bei dem Versuche von Leslie durch die Resonanz modificirt wird, hat Dvořák durch andere Versuche bestätigt gefunden.

spanntes Seil, gegen welches man nahe an einem Ende einen kräftigen Schlag führt; die Schallwellen in der Luft etc. Wir werden diese verschiedenen Wellenbewegungen alsbald näher betrachten.

Die Oscillationsdauer eines im Zustande stehender Schwingungen befindlichen Körpers kann nun unter Umständen grösser oder kleiner sein. Ist sie gross, so dass nur wenige Schwingungen in einer Secunde ausgeführt werden, so kann man die einzelnen Oscillationen mit dem Auge verfolgen; das ist aber nicht mehr möglich, wenn die Schwingungsdauer zu kurz, also die Schwingungszahl (d. h. die Zahl der in einer Secunde vollendeten Oscillationen) zu gross ist. In diesem Falle aber, in welchem man die einzelnen Oscillationen nicht mehr unterscheiden kann, kann ihre Gesammtwirkung noch einen Eindruck hervorbringen, indem sie in den umgebenden Medien Wellenbewegungen erzeugt, durch welche sie bis zu besonders eingerichteten Sinnesorganen fortgeleitet werden und hier eine eigenthümliche Empfindung veranlassen.

So veranlassen Vibrationen elastischer Körper, deren Schwingungsdauer innerhalb gewisser, bald näher zu besprechender Grenzen liegt, in der Luft oder anderen elastischen Medien Wellen, welche, in abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen bestehend, bis zum Ohre fortgepflanzt als Schall wahrgenommen werden.

Noch ungleich schnellere Vibrationen eines eigenthümlichen elastischen Mediums, welches wir Lichtäther nennen, erzeugen nach unserer Annahme diejenigen Wellen, welche in unserem Auge den Eindruck des Lichtes hervorbringen.

Da nun sowohl Schall- als Lichtvibrationen durch Wellenbewegungen fortgepflanzt werden, so wollen wir zunächst die wichtigsten Gesetze der Wellenbewegung überhaupt etwas näher betrachten und diese Betrachtung mit den Wasserwellen beginnen, weil von ihnen doch der Begriff der Welle entnommen ist und weil durch das Verständniss der Wasserwellen das Verständniss anderer Wellenbewegungen, namentlich der Schallwellen, welche uns hier vorzugsweise interessiren, sehr erleichtert wird.

Wasserwellen. Wenn man einen Stein ins Wasser wirft, so 176
bilden sich kreisförmige Wellen, welche sich von einem Mittelpunkte (der Stelle, wo der Stein ins Wasser fiel) aus nach allen Richtungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit verbreiten, wenn nicht irgend eine störende Ursache wirkt. Die Wellen bestehen aus abwechselnden Bergen und Thälern, welche ziemlich rasch auf einander folgen und welche in der Richtung von dem Mittelpunkte nach aussen hin fortschreiten.

Während nun ein Wellenberg nach aussen hin fortschreitet, nehmen nicht etwa auch die einzelnen Wassertheilchen an dieser fortschreitenden Bewegung Theil; denn wenn ein Stückchen Holz auf dem Wasser schwimmt, so sieht man, wie es abwechselnd gehoben wird und sich dann wieder senkt, wenn Wellenberge und Wellenthäler gleichsam unter ihm wegziehen.

Die Kraft, durch welche die Wasserwellen hier fortgepflanzt werden, ist die Schwere; denn wenn durch irgend eine Ursache in der horizontalen Wasserfläche eine Erhöhung oder Vertiefung hervorgebracht wird, so wirkt alsbald die Schwere der einzelnen Wassertheilchen, um die gestörte horizontale Ebene wieder herzustellen; dadurch wird eine Oscillationsbewegung hervorgebracht, welche nach und nach von Theilchen zu Theilchen fortgepflanzt wird.

Sobald sich einmal regelmässige Wellen gebildet haben, beschreiben die einzelnen Wassertheilchen an der Oberfläche während des Fortschreitens der Welle in sich zurückkehrende Curven, welche im Falle der grössten Regelmässigkeit Kreise sind; nur in solchen Fällen, in welchen der dem Gipfel vorangehende Theil des Wellenberges dem folgenden nicht gleich ist, beschreiben die einzelnen Wassertheilchen Curven, die nicht in sich geschlossen sind, von der Art, wie sie Fig. 626 dargestellt sind.

Die Bewegung der einzelnen Wassertheilchen während des Fortschreitens der Welle ist von den Gebrüdern Weber*) durch eine Reihe genauer Versuche ermittelt worden. Sie bedienten sich zu diesen Versuchen einer grösseren und einer kleineren Wellenrinne. Die kleinere war ungefähr $1\frac{1}{2}$ m lang und über 20 cm tief; die beiden Seitenwände wurden durch Glastafeln gebildet, welche ungefähr 14 mm weit von einander abstanden; bei der grösseren, welche einen 2 m langen, 80 cm tiefen und ungefähr 3 cm breiten Raum einschloss, waren die Seitenwände durch Bretter gebildet, in denen nur an einzelnen Stellen Glasstreifen wasserdicht eingesetzt waren.

Fig. 626.



Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen der Bewegung der einzelnen Wassertheilchen und dem Fortschreiten der Welle etwas genauer.

Nehmen wir an, eine ganz regelmässige Wellenbewegung habe sich, von der Linken zur Rechten fortschreitend, bis zu dem Wassertheilchen 0, (Fig. 627) fortgepflanzt und veranlasse dieses Theilchen, nun eine kreisförmige Bahn zurückzulegen. Während nun das Theilchen 0 zum ersten Male seine Kreisbahn vollendet, wird die Bewegung eine bestimmte Strecke sich fortpflanzen. Das mit 12 bezeichnete Wassertheilchen sei nun dasjenige, bis zu welchem sich die Oscillationsbewegung von 0 aus fortpflanzt, während 0 eine Umdrehung vollendet; es wird also 12 seine erste Umdrehung in demselben Momente beginnen, in welchem 0 seine zweite Umdrehung beginnt.

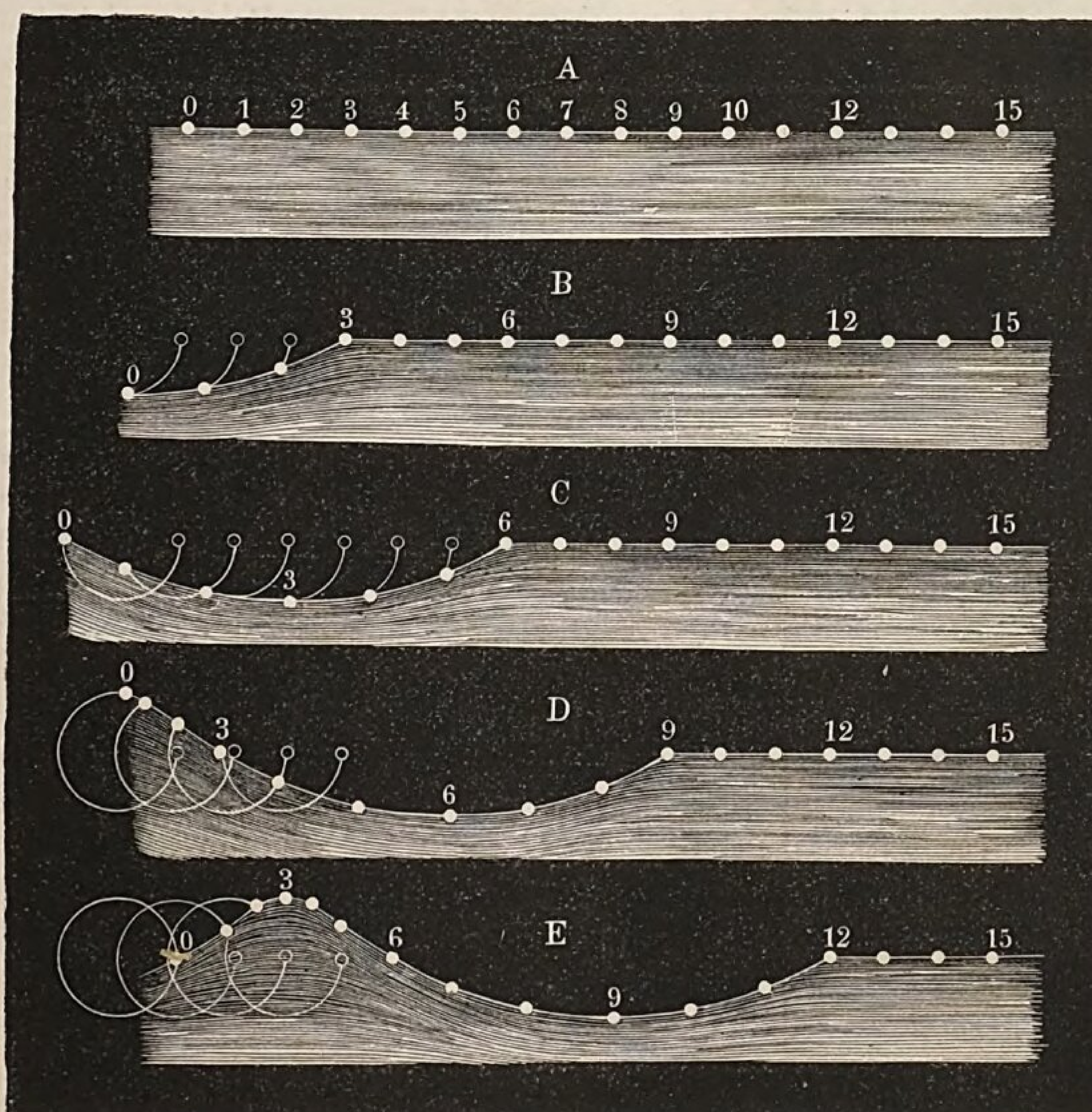
Denken wir uns nun den Umfang des Kreises, welchen das Theilchen 0 beschreibt, und ebenso den Raum zwischen 0 und 12 in 12 gleiche Theile getheilt, so wird die Wellenbewegung in der Richtung von 0 nach 12 immer um eine Abtheilung weiter schreiten, während das Theilchen 0 gerade $\frac{1}{12}$ seiner kreisförmigen Bahn zurücklegt.

*) Wellenlehre auf Experimente gegründet von den Brüdern F. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825.

Während das Theilchen 0 das erste Zwölftel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sich also die Wellenbewegung bis 1, während 0 das erste Viertel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sie sich bis 3 fort.

Fig. 627 B stellt den Moment dar, in welchem das Theilchen 0 den vierten Theil oder $^3/_{12}$ des Kreises zurückgelegt hat, den es durchlaufen soll; das Theilchen 1 hat in diesem Augenblicke $^2/_{12}$, das Theilchen 2 hat $^1/_{12}$ seiner Kreisbahn zurückgelegt, das Theilchen 3 ist noch nicht aus seiner Gleichgewichtslage verrückt.

Fig. 627.



Die Fig. 627 C bezieht sich auf den Augenblick, in welchem das Theilchen 0 die Hälfte seiner Bahn zurückgelegt hat; das Theilchen 1 hat $^5/_{12}$, das Theilchen 2 hat $^4/_{12}$, das Theilchen 3 hat $^3/_{12}$ seiner Bahn zurückgelegt, die Theilchen 4 und 5 befinden sich in derselben Lage wie die Theilchen 1 und 2 der vorigen Figur. Das Theilchen 6 ist noch nicht aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, beginnt aber eben seine Bewegung.

Hier hat das Theilchen 3 seine tiefste Stellung erreicht; es befindet sich in der Mitte eines Wellenthals.

Wenn nun abermals $^1/_{12}$ der Zeit vergangen ist, welche ein Theilchen braucht, um seinen Kreislauf ganz zu vollenden, so wird das Theilchen 3 in eine solche Lage gegen seine ursprüngliche Stellung gekommen sein, wie es jetzt für das Theilchen 2 der Fall ist; das Theilchen 4 hat seine tiefste Stellung erreicht, es ist um $^1/_4$ Kreis von seiner Gleichgewichtslage entfernt; das Wellenthal ist also in diesem Zeittheilchen von 3 bis 4 fortgerückt.

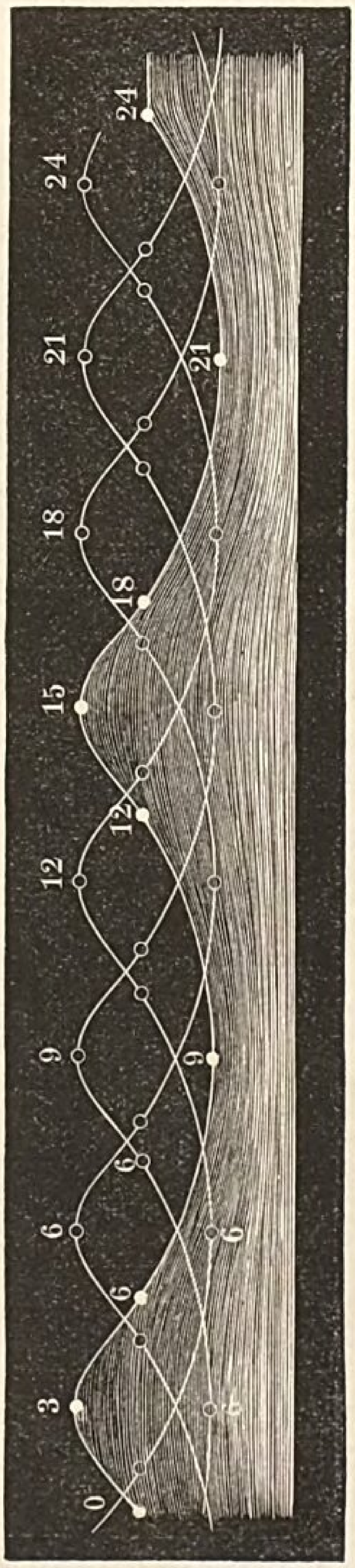

Fig. 628.

Fig. 627 D stellt den Moment dar, wo das Theilchen 0 $^3/_4$ seines Weges zurückgelegt, wo es den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht hat; hier ist also der Gipfel eines Wellenberges. Das Theilchen 1 hat bereits $^8/_{12}$, 2 hat $^7/_{12}$, 3 hat $^6/_{12}$ seiner Bahn zurückgelegt; die Theilchen 4, 5, 6, 7, 8 befinden sich in derselben Lage, wie 1, 2, 3, 4 und 5 der vorigen Figur. Von dem Momente an, auf welchen sich Fig. 627 C bezieht, bis zu dem Momente, welchen Fig. 627 D darstellt, ist das Wellenthal von 3 bis 6 fortgerückt.

Während das Theilchen 0 das letzte Viertel seiner Bahn zurücklegt, schreitet der Wellenberg von 0 bis 3, das Wellenthal von 6 bis 9 fort, und in demselben Moment, wo 0 seine Bahn zum ersten Male zurückgelegt hat, um sie zum zweiten Male zu beginnen, wird das Theilchen 12 zum ersten Male seine Bewegung anfangen.

Dieser Moment ist in Fig. 627 E dargestellt, welche wohl keiner Erläuterung mehr bedarf.

Der schraffirte Theil der Fig. 628 stellt den Wellenzug für den Augenblick dar, in welchem das Theilchen 0 zum zweiten Male seine Oscillation vollendet hat; in diesem Moment wird das Theilchen 12 zum ersten Male eine Oscillation vollendet und die Bewegung überhaupt sich bis 24 fortgepflanzt haben; ein Wellenberg ist in 3, ein zweiter in 15, ein Wellenthal in 9, ein zweites in 21.

Wenn nun die Wellenbewegung ungestört fortdauert, so werden dadurch, dass die einzelnen Wassertheilchen fortfahren, ihre Kreisbahnen zu durchlaufen, die Wellenberge sowohl als die Wellenthäler gleichmässig in der Richtung von der Linken zur Rechten fortschreiten, indem ein Theilchen nach dem anderen den höchsten oder tiefsten Punkt seiner Bahn erreicht.

Von dem eben besprochenen Moment an gerechnet werden die Theilchen 6 und 18 nach $^1/_4$, die Theilchen 9 und 21 nach $^1/_2$, die Theilchen 12 und 24 nach $^3/_4$ der ganzen Oscillationsdauer auf dem Gipfel des Wellenberges angekommen sein. Die Welle wird also der Reihe nach die in Fig. 628 durch ausgezogene Curven angedeuteten Lagen einnehmen.

So schreitet denn Wellenberg und Wellenthal dadurch voran, dass allen Wassertheilchen dieselbe Kreisbewegung mitgetheilt wird, dass aber jedes folgende Theilchen dieselbe später beginnt als das vorangehende.

Die Entfernung von einem Theilchen bis zum nächsten, welches sich in *gleichen* Schwingungszuständen befindet, also die Entfernung von 0 bis 12, von 12 bis 24, heisst eine *Wellenlänge*; denn jene Theilchen beginnen gleichzeitig ihre Oscillation, sie erreichen gleichzeitig ihren tiefsten und ihren höchsten Stand. Demnach ist auch die Entfernung von dem Gipfel eines Wellenberges bis zum nächsten, also in unserer Figur von 3 bis 15, von der Mitte eines Wellenthales bis zur Mitte des nächsten Wellenthales, also hier von 9 bis 21, eine Wellenlänge.

Solche Theilchen, welche um $^1/_2$ Wellenlänge von einander entfernt sind, wie 0 und 6, 3 und 9, 9 und 15, befinden sich stets in *entgegengesetzten* Schwingungszuständen. Das Theilchen 9 z. B. bildet eben den tiefsten Punkt eines Wellenthales, 3 und 15 dagegen den Gipfel eines Wellenberges. Die Theilchen 0 und 6 befinden sich zwar beide in der Höhe ihrer Gleichgewichtslage, allein die Bewegung von 0 ist nach unten, die von 6 ist nach oben gerichtet.

Während ein Theilchen eine ganze Oscillation vollendet, schreitet die Welle um eine Wellenlänge voran.

Die nähere Betrachtung des Verhältnisses zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, der Grösse und Dauer der Oscillationen und der Gestalt der Wellen, der Oscillationsbewegung der Theilchen im Inneren der Flüssigkeit, der Abnahme der Höhe der Wellenberge und Thäler mit der Entfernung von dem Ursprunge der Welle, die Bildung der Wellen auf grossen Gewässern unter dem Einflusse des Windes würde uns hier zu weit führen; wir müssen in dieser Beziehung auf das schon oben genannte classische Werk der Gebrüder *Weber* verweisen. Ebenso lassen wir hier die Erscheinungen der Reflexion und Interferenz der Wasserwellen unberücksichtigt, da wir die entsprechenden Erscheinungen bei den Schall- und Lichtwellen doch näher untersuchen müssen.

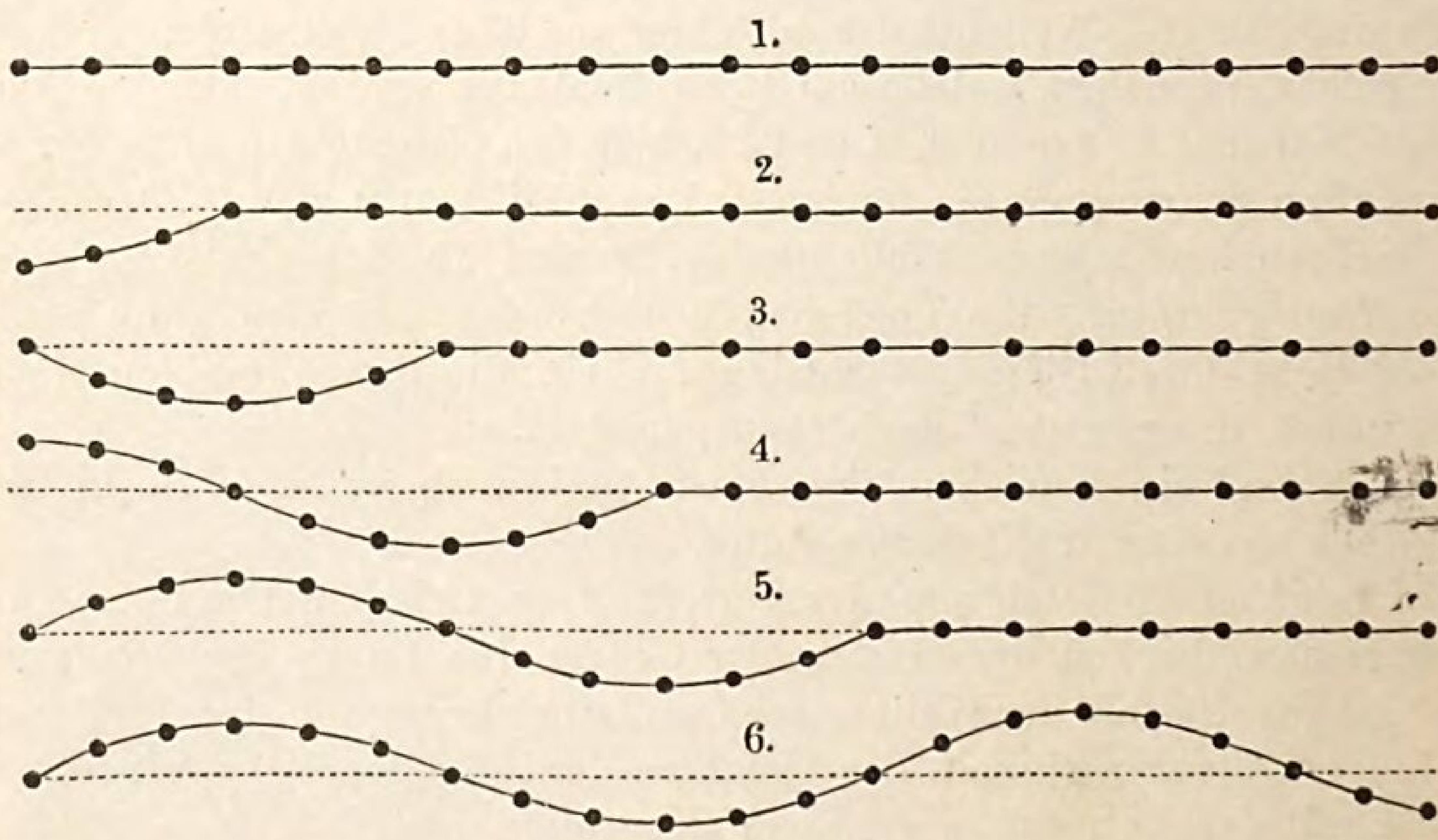
Seilwellen. Es ist schon bemerkt worden, dass die Bahnen der 177
Wassertheilchen nicht immer, wie wir in unseren Zeichnungen annahmen, genau kreisförmig, ja nicht einmal immer in sich selbst zurückkehrende Curven sind. Häufig geht die kreisförmige Bahn in eine elliptische über, indem bald der horizontale, bald der verticale Durchmesser der grössere ist. Wäre der horizontale Durchmesser gleich Null, so würden die einzelnen Theilchen nur rechtwinkelig zu der Richtung, nach

welcher sich die Wellen fortpflanzen, auf und nieder oscilliren. Eine Bewegung der Art ist es, welche die Wellen am gespannten Seile fortpflanzt. Später werden wir auch eine solche Wellenbewegung bei der Lehre vom Lichte kennen lernen.

Die Curven 1 bis 6, Fig. 629, sollen dazu dienen, die Fortpflanzung solcher Wellen, also etwa der Seilwellen, anschaulich zu machen. Diese Curven entsprechen ganz den Figuren 627 und 628; sie lassen sich aus diesen ableiten, wenn man den horizontalen Theil der Bewegung gleich Null setzt, sie werden deshalb auch ohne weitere Erklärung verständlich sein.

Wenn eine Seilwelle, gegen den einen Befestigungspunkt fortschreitend, an demselben angekommen ist, so wird sie reflectirt, sie kehrt wieder nach dem anderen Ende zurück und läuft so mehrmals hin und her. Wenn aber nun fortwährend neue Wellen erzeugt werden, so wird es

Fig. 629.

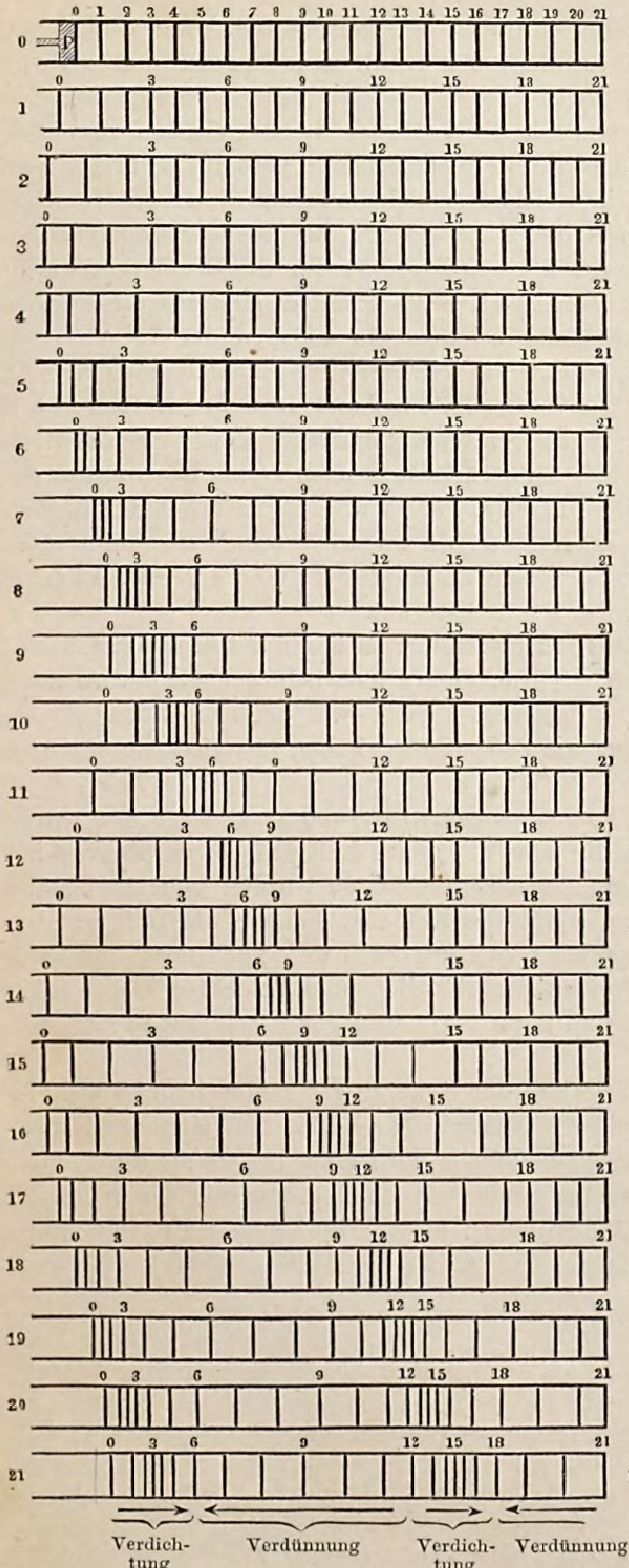


kommen, dass die reflectirten Wellen den neu ankommenden begegnen; durch das Zusammenwirken der beiden Wellensysteme aber bilden sich stehende Wellen. Wir kommen auf diesen Gegenstand später ausführlich zurück.

178 **Luftwellen.** Um die Art und Weise, wie sich die Schallschwingungen in der Luft fortpflanzen, anschaulich zu machen, wollen wir uns denken, dass die Luft in einer an einem Ende offenen Röhre durch die Oscillationen eines am anderen Ende angebrachten Kolbens in Schwingungen versetzt werde.

In Fig. 630 ist eine solche Röhre dargestellt; die anfangs gleich weit von einander stehenden Striche stellen einzelne Schichten der überall gleich dichten Luft dar; p ist der Kolben. Dieser Kolben soll um die

Fig. 630.



Ruhelage der Luftschichten.

Die erste Schichte schwingt nach links.

Die zweite Schichte folgt nach links.

Die erste Schichte erreicht die äusserste Lage links.

Die erste Schichte beginnt die Bewegung nach rechts.

Die zweite Schichte beginnt die Bewegung nach rechts.

Die erste Schichte passirt die Ruhelage nach rechts.

Die zweite Schichte passirt die Ruhelage nach rechts.

Die Wellenbewegung ist bis Punkt 8 fortgeschritten.

Die erste Luftschichte erreicht die äusserste Lage rechts.

Die erste Luftschichte geht wieder nach links.

Wellenbewegung bis Punkt 11 fortgeschritten.

Die erste ganze Welle bis Punkt 12 fertig.

Beginn der zweiten Oscillation.

u. s. f.

"

"

"

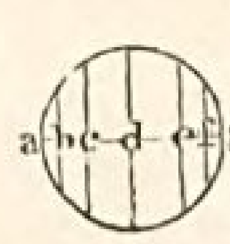
$1^1/_2$ Wellen fertig bis 18.

$1^3/_4$ Wellen fertig bis 21.

Länge *ag*, Fig. 631, rasch hin und her gehen; und zwar wollen wir annehmen, dass er diese Oscillationen nach den Gesetzen der Pendelschwingungen ausführe.

Denken wir uns demnach die Zeit, welche der Kolben zu einem Hin- und Hergange braucht, in 12 gleiche Theile getheilt, so findet man die Punkte, in welchen er sich in jedem dieser 12 Momente befindet, durch die auf Seite 184 besprochene Construction. Diese Construction ist in Fig. 631 für die Oscillationsamplitude *ag* des Kolbens ausgeführt und es sind auf diese Weise auf *ag* die Stellen bezeichnet, in welchen der Kolben nach $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$ etc. seiner Oscillationsdauer ankommen wird *).

Fig. 631.



Im ersten Zwölftel seiner Oscillationsdauer lege der Kolben von *d* ausgehend den Weg *dc* zurück; in den folgenden gleich grossen Zeittheilchen die Wege *cb*, *ba*, dann rückwärts nach rechts *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, dann wieder nach links *gf*, *fe*, *ed* u. s. f. In *d* hat der Kolben seine grösste Geschwindigkeit; von da an wird seine Bewegung nach beiden Seiten langsamer, bis er die Enden seiner Bahn erreicht, wo seine Bewegung in die entgegengesetzte übergeht.

Diese Bewegung des Kolbens pflanzt sich nun nach und nach auf alle die einzelnen Luftschichten der Röhre fort, jede derselben wird nach einiger Zeit dieselben Oscillationen machen wie der Kolben selbst, sie wird aber diese Bewegung um so später beginnen, je weiter sie von dem Kolben entfernt ist.

Wenn die Luft vollkommen unelastisch und starr wäre, so würde durch die Bewegung des Kolbens die ganze Luftsäule in der Röhre fortgeschoben werden, alle einzelnen Luftschichten würden gleichzeitig dieselbe Bewegung, und zwar die des Kolbens, haben; die Luft ist aber elastisch, die Bewegung pflanzt sich nur nach und nach fort, und zwar dadurch, dass die dem Kolben zunächst liegenden Schichten erst in ihrer Dichte geändert werden und dann vermöge ihrer Elasticität auf die folgenden wirken.

Ueber den weiteren Verlauf der Bewegung der einzelnen Luftschichten und die Vertheilung der letzteren während der auf einander folgenden Phasen der fortschreitenden Welle wird man, besser als durch viele Worte, durch die Betrachtung oder eigene Reproduction der Fig. 630 belehrt. Die einzelnen Abtheilungen dieser Figur geben die momentane

*) Die Längen *dc*, *db*, *da* verhalten sich zu einander wie

$$\sin 30 : \cos 30 : 1$$

oder wie 0,5 : 0,866035 : 1

oder wie 4 : 6,92828 : 8,

wofür man bei praktischen Zeichnungen von Sinuscurven

4 : 7 : 8

setzen kann. Theilt man die Wellenlänge in 12 gleiche Theile, so sind die auf einander folgenden Excursionen sehr nahe gleich

0, 4, 7, 8, 7, 4, 0, — 4, — 7, — 8, — 7, — 4, 0.

Lage der Luftschichten in den um $^1/_{12}$ der Oscillationsdauer auf einander folgenden Zeitmomenten. Das Weitere ist durch den der Figur beigeschriebenen Text hinlänglich erklärt.

Eine noch fasslichere Darstellung ist mittelst der später zu beschreibenden Wellenmaschinen ermöglicht.

Wir machen noch auf den Umstand aufmerksam, dass in Fig. 630 die Excursionsweite im Verhältnisse zur Wellenlänge übertrieben gross angenommen wurde, in Folge dessen auch die Verdünnungsstellen viel länger ausfielen, als die Verdichtungsstellen. Bei unendlich kleinen Excursionen werden beide gleich lang.

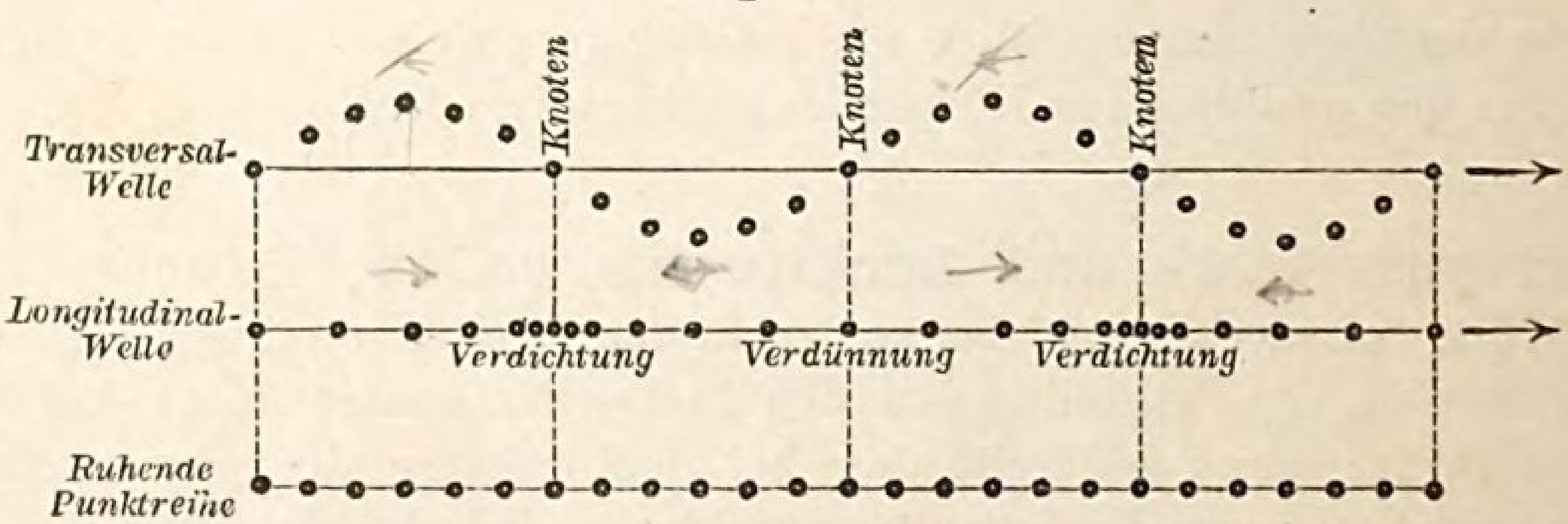
Wir haben bisher der Einfachheit wegen die Fortpflanzung der Luftwellen in einer Röhre betrachtet; ganz in derselben Weise pflanzen sich aber auch die Wellen in freier Luft von den oscillirenden Körpern nach allen Seiten hin fort. So wie sich um die Stelle des Wassers, in welche der Stein hineingefallen ist, kreisförmige Wellen bilden, so bilden sich um den oscillirenden Körper kugelförmige Luftwellen.

Transversal- und Longitudinalwellen, Bäuche und Knoten. Unter den bisher betrachteten Wellenbewegungen unterscheiden sich die Seilwellen von den Luftwellen ausser durch das Medium insbesondere dadurch, dass bei den ersteren die Schwingungen senkrecht auf die Fortpflanzungsrichtung, bei den letzteren in der Fortpflanzungsrichtung stattfinden. Man pflegt Wellen der ersteren Art Transversalwellen, Wellen der letzteren Art Longitudinalwellen zu nennen. Als eine Zusammensetzung beider können die zuerst betrachteten Wasserwellen angesehen werden. Bei den Transversalwellen sind wiederum mehrere Fälle möglich, je nach der Form der Schwingungsbahn in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene. So z. B. kann man leicht Seilwellen erzeugen, bei welchen sich die einzelnen Punkte des Seiles in Kreisen bewegen. Der einfachste Fall ist jener, wobei die Transversalschwingungen aller Punkte in einer Ebene z. B. alle senkrecht auf und ab erfolgen. Wählt man diese Schwingungsebene zur Zeichnungsebene, so erscheint die einfache Transversalwelle als Schwingungscurve (Sinuscurve), deren Construction auf Seite 184 gezeigt wurde. In einer solchen Transversalwelle folgen auf einander Strecken entgegengesetzter Excursionen, welche man Wellenberge und Wellenthäler oder Bäuche zu nennen pflegt und welche je die Länge einer halben Welle besitzen. Die Grenzpunkte zwischen denselben, wo die Excursion momentan gleich Null ist, heissen Knotenpunkte. In je zwei auf einander folgenden Knotenpunkten sind die momentanen Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung und am grössten. An den Stellen grösster Excursion sind die Geschwindigkeiten momentan gleich Null. Diese Stellen liegen von den Knotenpunkten um ein Viertel der Wellenlänge entfernt.

179

Bei den Longitudinalwellen folgen auf einander abwechselnd Strecken mit Verdichtung und Verdünnung. Es wäre aber nicht richtig, wenn man, wie wohl vorkommt, die Berge und Thäler der Transversalwelle mit den Verdichtungen und Verdünnungen der Longitudinalwelle in Analogie setzen wollte; denn die Stellen grösster Verdichtung und Verdünnung fallen vielmehr mit den Knotenpunkten der Transversalwelle zusammen, sind also um eine Viertelwellenlänge gegenüber den Stellen grösster Excursion verschoben. Um dies deutlich zu übersehen, ist in Fig. 632 an unterster Stelle eine ruhende Punktreihe gezeichnet, aus welcher die darüber stehende Longitudinalwelle und die zu oberst stehende Transversalwelle abgeleitet sind. Jede Excursion, welche in der letzteren nach aufwärts (abwärts) stattfindet, ist in der ersteren nach rechts (links) aufgetragen. Beide Wellenzüge enthalten hier je

Fig. 632.



zwei Wellenlängen, also vier halbe Wellen. Man übersieht sofort, dass senkrecht über einander liegen:

In der Transversalwelle:		In der Longitudinalwelle:
Knoten mit momentaner Geschwindigkeit nach aufwärts	und	Stellen grösster Verdichtung
Knoten mit der momentanen Geschwindigkeit nach abwärts	und	Stellen grösster Verdünnung
Wellenberg oder Bauch nach aufwärts	und	Strecke mit Excursionen nach rechts
Wellenthal oder Bauch nach abwärts	und	Strecke mit Excursionen nach links.

Man pflegt deshalb auch bei der Longitudinalwelle die Stellen grösster Verdichtung und Verdünnung als Knoten zu bezeichnen *).

*) In vielen Lehrbüchern wird die Bezeichnung Knoten nur für die unbewegt bleibenden Stellen stehender Wellen gebraucht. Es liegt jedoch gar kein Grund vor, warum man den Ausdruck nicht auch für die fortschreitenden Wellen gebrauchen sollte, sowie man den Ausdruck Bauch in beiden Fällen anwendet. Unter allen Umständen bezeichnet dann Knoten eine Stelle am

Die Darstellung einer Transversalwelle ist stets übersichtlicher als die der analogen Longitudinalwelle, da man bei ersterer die Ruhelage in der Längsrichtung der Welle vor sich hat, während die Ruhelage der schwingenden Punkte innerhalb der Longitudinalwelle nicht ersichtlich ist. Da man nun aber leicht die eine Wellenbewegung in die andere zu übersetzen vermag, so empfiehlt es sich oft, die Vorgänge in der Longitudinalwelle so darzustellen, als wäre sie eine Transversalwelle. Man hat dann am Schlusse der Betrachtung nur einfach das Auf und Ab in ein Rechts und Links zurückzuübertragen. Aus diesem Gebrauche stammt die Anwendung des Ausdrucks Bauch auch für die Excursionsstrecken der Longitudinalwelle.

Wellenmaschinen. Um die manchmal etwas verwickelten Er- 180
scheinungen der Wellenbewegung beim Unterrichte leichter verständlich zu machen, bedient man sich sogenannter Wellenmaschinen. Obwohl wir nun die stehenden Wellen erst später besprechen können, so wollen wir doch hier schon bei der Beschreibung der Versuche zur Darstellung der fortschreitenden Wellen die vollständige Anleitung zum Gebrauch der Wellenmaschinen einschalten, um auf diesen Gegenstand nicht zu oft später zurückgreifen zu müssen.

Die Wellenmaschinen zerfallen in zwei Classen; bei der einen Classe dieser Apparate werden wirkliche Wellenbewegungen hervorgerufen, bei der anderen werden die Wellenbewegungen nur künstlich entweder auf mechanischem oder nur auf optischem Wege nachgeahmt.

Ein Apparat der ersteren Classe ist die Longitudinalwellenmaschine von A. F. Weinhold*), Fig. 633 (a. f. S.).

Eine Spirale von 72 ungefähr 7 cm weiten Windungen eines 2 mm starken Kupferdrahtes ist in der aus der Figur ersichtlichen Weise mit Hülfe von an jeder Windung festgeknüpften Doppelfäden von ungefähr 60 cm Länge an einem Gestelle aufgehängt; die Fadenenden sind durch Löcher gezogen und an Wirbeln befestigt, so dass man sie bequem auf gleiche Länge bringen kann.

Um in der Spirale eine Longitudinalwelle hervorzurufen, fasst man die äusserste Windung zwischen Daumen und Zeigefinger und bewegt dieselbe rasch in der Richtung der Spiralenachse um ungefähr 2 cm vorwärts oder zurück. Man sieht dann die Verdichtung oder Verdünnung der ganzen Spirale entlang laufen. Sobald die Welle am Ende der Spirale angelangt ist, wird sie reflectirt und zwar in diesem Falle, wo

schwingenden Körper oder Medium, welche sich momentan oder dauernd in der Ruhelage befindet; momentan bei fortschreitender Welle, dauernd bei stehender Wellenbewegung. In der fortschreitenden Welle schreiten Knoten und Bäuche fort, in der stehenden Welle bleiben beide an ihrer Stelle.

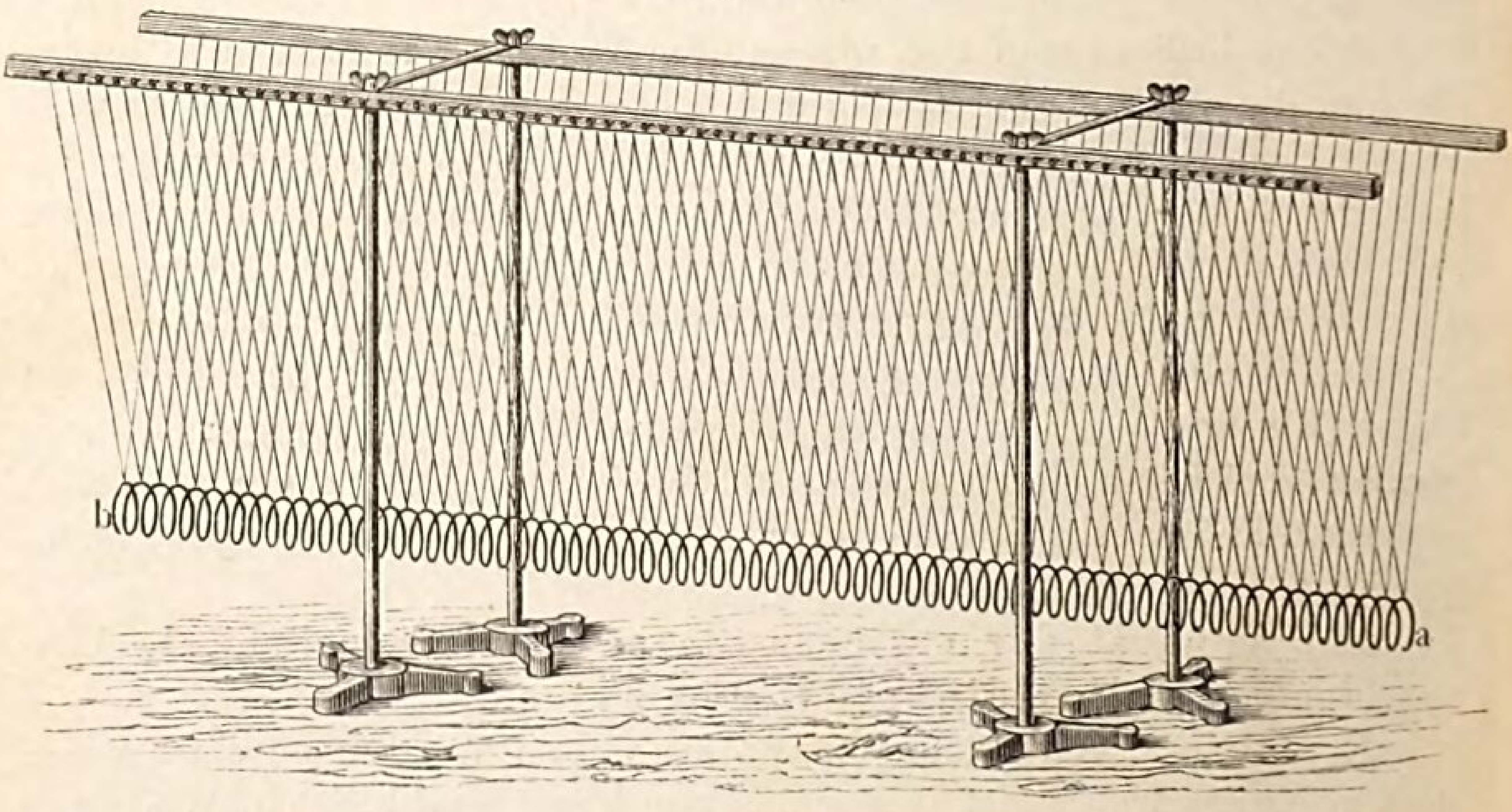
*) Physikalische Demonstrationen S. 197 bis 199.

das reflectirende Ende frei beweglich ist, in der Weise, dass die Verdichtung als Verdünnung zurückkehrt und umgekehrt.

Um die Reflexion am festen Ende zu zeigen, klemmt man das eine Ende der Spirale an einem beschwerten eisernen Halter fest. Die Verdichtung wird dann als Verdichtung reflectirt, die Verdünnung als Verdünnung.

Man beobachtet dies am besten, indem man die Bewegung der äussersten Windungen, von wo die Welle ursprünglich ausgegangen, in dem Momente ins Auge fasst, wo die Welle dahin zurückkehrt. War das reflectirende Ende frei, so erfolgt die Bewegung dieser Windungen in der mit dem ursprünglichen Anstoss gleichen Richtung; war das reflectirende Ende dagegen fest, so erfolgt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung.

Fig. 633.



Um stehende Wellen hervorzurufen, hat man*) verschieden vorzugehen, je nachdem die Enden der Spirale beide frei, oder beide fest, oder nur eines derselben fest ist.

1. Beide Enden frei. Man fasst mit beiden flachen Händen um etwa drei Windungen von der Mitte nach rechts und links zwischen die Windungen der Spirale und bringt durch rythmische Annäherung und Entfernung der Hände die Schwingungen hervor, worauf man die Hände zurückzieht. Die Spirale macht dann stehende Schwingungen von einer halben Wellenlänge, wobei in der Mitte ein Knoten mit Verdünnung und Verdichtung, an den Enden grösste Excursionen ohne Dichteänderung eintreten.

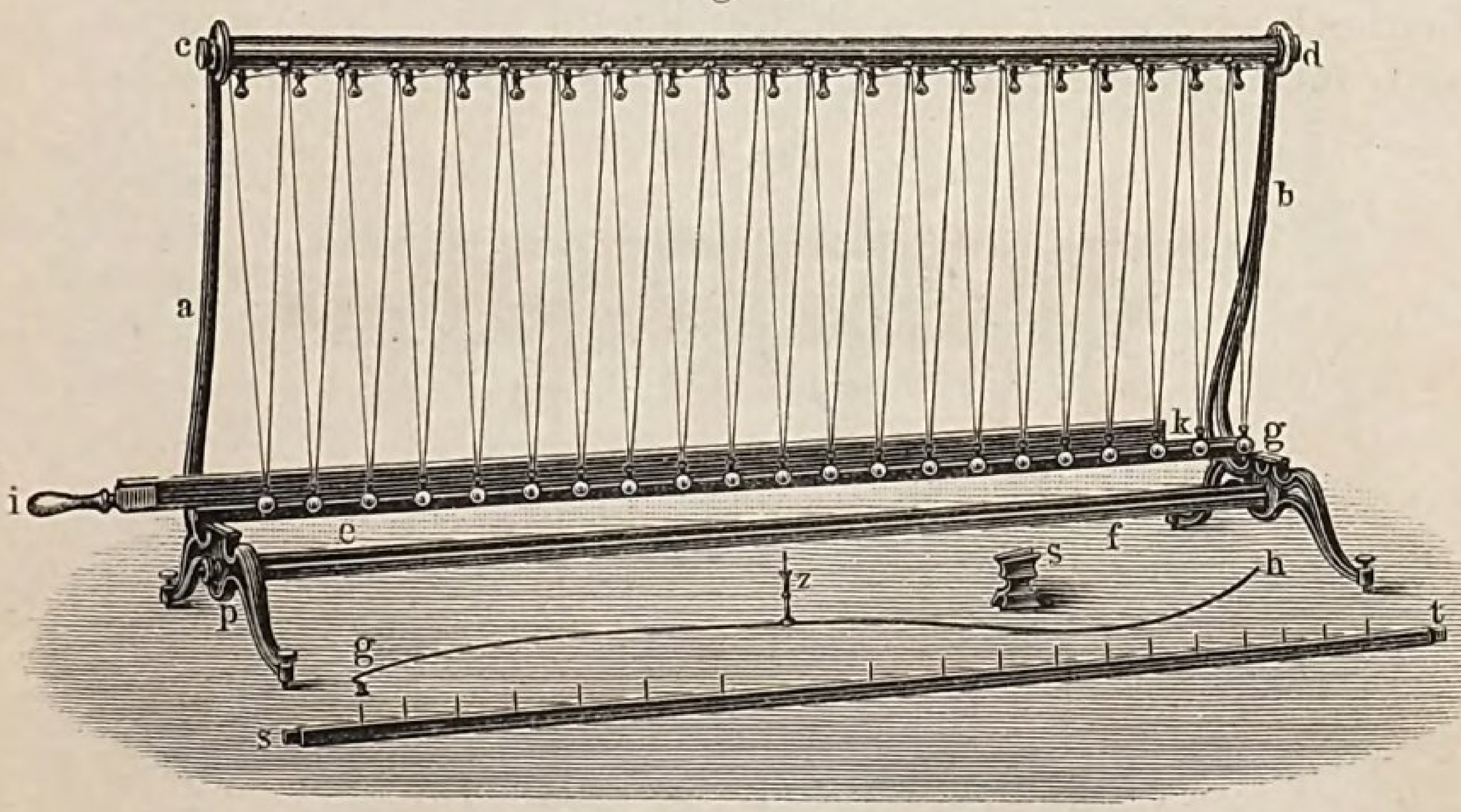
In ähnlicher Weise kann man durch doppelt so rasche Schwingungen der Hände, welche rechts und links um etwa drei Windungen von

*) Weinhold l. c.

dem ersten und dritten Viertelpunkte der Spirale eingreifen, dieselbe mit zwei halben Wellenlängen schwingen lassen. Sie hat dann an den zwei erwähnten Stellen je einen Knoten, in der Mitte und an den Enden ihre grössten Excursionen.

2. Beide Enden fest. Beide Enden werden in beschwerte Halter eingespannt, dann fasst man die Mitte der Spirale, zieht sie ungefähr 2 dm nach der einen Seite und lässt sie los. Es erfolgen stehende Schwingungen von einer halben Wellenlänge mit Knoten und Dichteänderungen an den Enden, grösster Excursion ohne Dichteänderung in der Mitte. Legt man die Hände wie bei 1. an, bewegt sie aber doppelt so rasch, so erhält man stehende Schwingungen mit zwei halben Wellen, Knoten an den Enden und in der Mitte, grössten Excursionen im 1. und 3. Viertelpunkte.

Fig. 634.



3. Ein Ende fest. Man fasst die Spirale am freien Ende, dehnt sie um 2 bis 3 dm aus und lässt sie los. Man erhält stehende Schwingungen von einer Viertelswellenlänge mit einem Knoten am festen, einem Excursionsmaximum am freien Ende.

Durch Anlegen der Hände drei Windungen rechts und links von jenem Punkte, welcher um ein Drittel der ganzen Länge vom freien Ende entfernt ist, erhält man stehende Schwingungen von $^3/_4$ Wellenlänge.

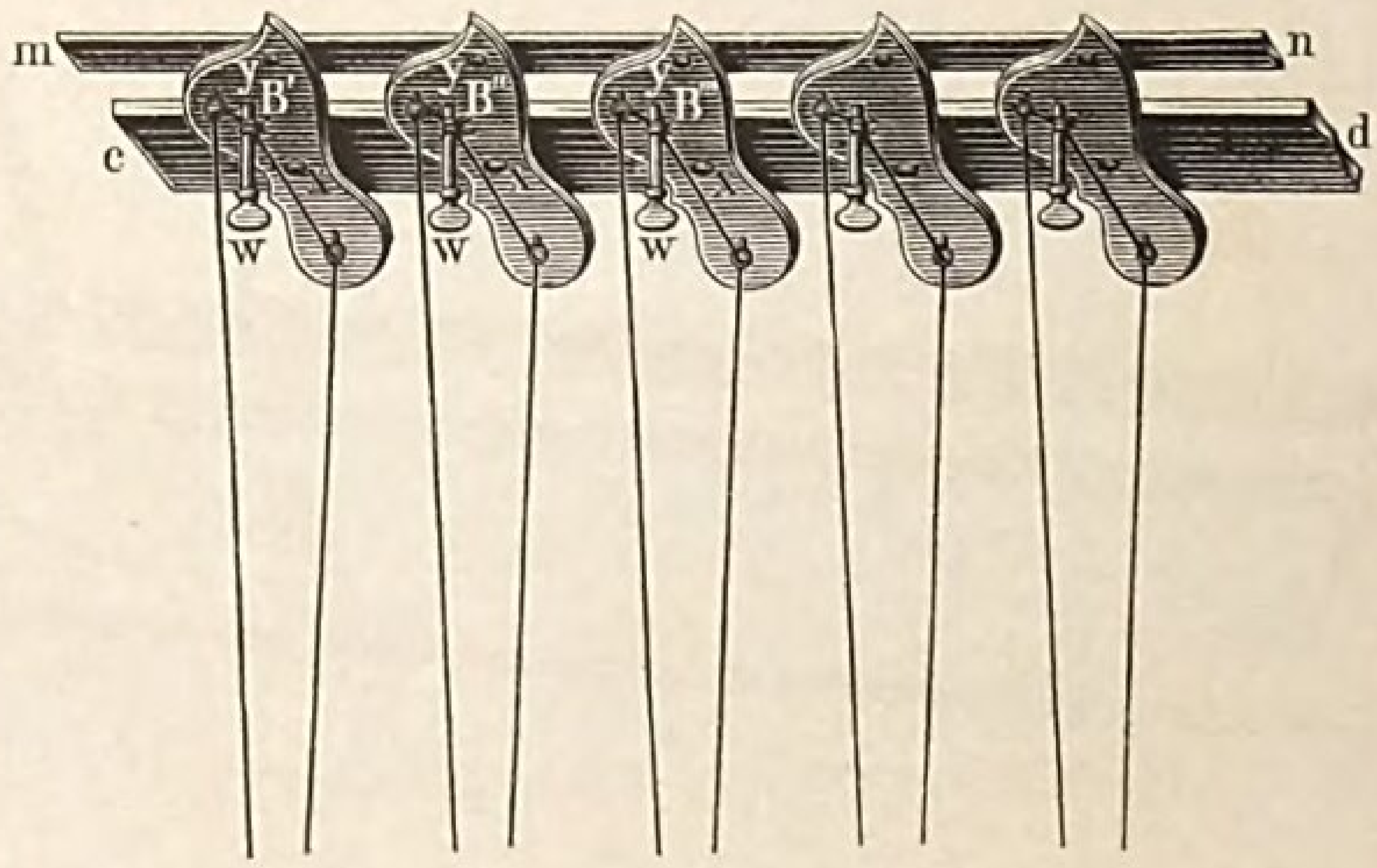
Zu den Wellenmaschinen der zweiten Classe, welche die Wellenbewegungen nur nachzuahmen gestatten, gehört unter anderen die Wellenmaschine von E. Mach, wovon die Figuren 634 und 635 Abbildungen geben.

An einem eisernen Gestelle ab ist eine horizontale Leiste cd befestigt, an deren Unterseite eine Anzahl um verticale Achsen x, x, x drehbarer Brettchen B, B' B'' angeschraubt sind (Fig. 635 a. f. S.). Diese sämmtlichen Brettchen sind durch eine der Leiste parallele Eisenschiene mn

bei *y*, *y*, *y* zusammengekuppelt, so dass sie alle zugleich um ihre Achsen eine Viertelsdrehung beschreiben, sobald man die Eisenschiene verschiebt. Die Form der Brettchen begrenzt diese Drehung in der Weise, dass die angehängten Fäden, welche eine Anzahl weiss gefärbter Bleikugeln tragen, mit ihren Ebenen parallel zu *cd* oder senkrecht dazu gestellt werden können. Die Schwingungsebenen der Pendel sind daher ebenfalls entweder parallel oder senkrecht zur Kugelreihe gerichtet; es ist möglich, diese Richtungen während der Schwingungen zu wechseln. Die Länge der Fäden wird durch die Wirbel *w*, *w*, *w* regulirt. Mit diesem Apparate können folgende Demonstrationen gemacht werden:

1. Fortschreitende Transversalwelle. Zu diesem Zwecke wird ein langes Lineal mit Handgriff hinter den Kugeln mittelst einer Nuth aufgestellt, dann die Kugeln hinter dieselbe gesetzt und hierauf das Lineal mit constanter Geschwindigkeit seitwärts herausgezogen. Hierdurch wird eine Kugel nach der anderen frei gelassen und jede folgende führt ihre Schwingungen etwas später aus als die vorherige.

Fig. 635.



2. Fortschreitende Longitudinalwelle. Die Schwingungsebenen werden parallel zu *cd* gestellt, dann unter den ruhenden Kugeln ein Schieber *S* mittelst Nuth auf der Leiste *ef* vorbeigeschoben. Dieser Schieber hat an der oberen Seite eine schräge Rinne eingeschnitten, welche jede einzelne Kugel aufnimmt und vor dem Loslassen eine Strecke weit mitschleift. Natürlich müssen hierzu die Kugeln gleich hoch gehängt werden.

3. Stehende Transversalwelle. Nach Senkrechtstellung der Schwingungsebenen setzt man den in Wellenform gebogenen Draht *gh* mit dem Stifte *z* senkrecht nach abwärts in ein Loch in der Mitte der Oberseite der Leiste *ef*, legt die Kugeln an die Aussenseite des Drahtes und dreht den letzteren rasch zur Seite, so dass die Kugeln zum Schwingen kommen.

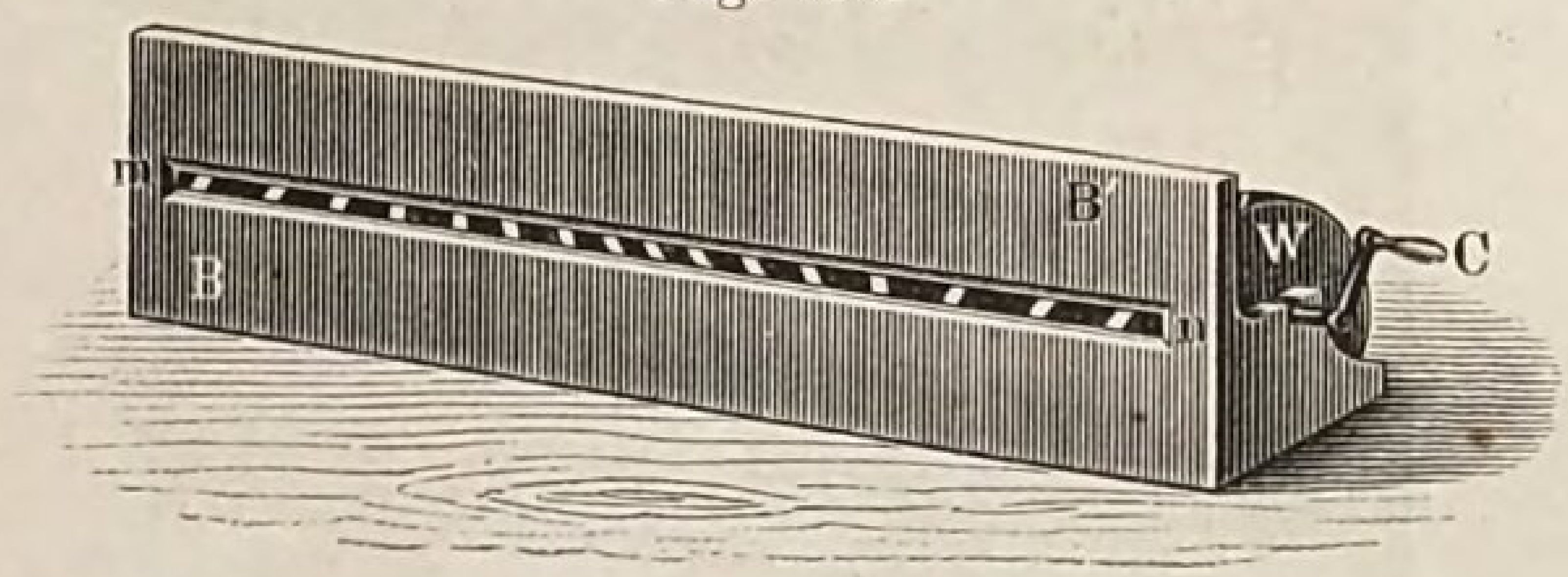
4. Stehende Longitudinalwelle. Die Schwingungsebenen werden parallel *cd* gestellt, eine Leiste *st* auf die Vorsprünge *p* und *q* ge-

legt, so dass die eingeschlagenen Drahtstifte nach vorn gerichtet sind, die Kugeln nach rechts und links an die Aussenseite dieser Stifte gehängt und dann die Leiste rasch nach rückwärts gezogen, so dass sämmtliche Kugeln zugleich in ihren grössten Excursionen frei gelassen werden.

5. Jede der besprochenen Wellen kann aus der transversalen Schwingungsweise in die longitudinale oder umgekehrt umgelegt werden.

Die Wheatstone'sche Wellenmaschine, Fig. 636, besteht aus einem verticalen Brette BB' mit einem horizontalen ungefähr 1 cm breiten Schlitze mn, hinter welchem sich eine Walze W durch eine Kurbel C

Fig. 636.



drehen lässt. Auf der Mantelfläche der Walze ist auf dunklem Grunde ein weisses Curvensystem aufgetragen, welches im abgewickelten Zustande in Fig. 637 abgebildet ist. Die Vorderseite des Brettes ist ebenfalls geschwärzt. Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Weise durch den Durchschnitt der Curven mit dem Schlitze jede Art periodischer Longitudinalbewegung darstellen kann. Die Figur zeigt das Curvensystem für eine fortschreitende Welle; für eine stehende Welle muss eine andere Walze eingelegt oder der Ueberzug ihrer Mantelfläche vertauscht werden.

Fig. 637.



Dasselbe Princip kommt bei einer transparenten Wellenmaschine zur Anwendung, welche ich, ohne den Wheatstone'schen Apparat zu kennen, im Jahre 1857 construirt habe und welche vor dem eben beschriebenen den Vortheil voraus hat, dass man nicht allein die fertig gebildeten Longitudinal- und Transversalwellen, sondern auch solche, welche vor den Augen der Zuschauer erst entstehen, darstellen kann. Auch eignet sich die Transparentform besser für ein grösseres Auditorium. Fig. 638 (a. f. S.) zeigt eine Abbildung dieses Apparates von der Rückseite, Fig. 639 (a. f. S.) von der Vorderseite. Im oberen Theile der undurchsichtigen, aus Pappe auf Holzrahmen bestehenden Wand ist eine horizontale Reihe verticaler Schlitze von ungefähr $^1/_2$ cm Breite

eingeschnitten, über welche ein Streifen Pauseleinwand von etwas grösserer Breite als die Schlitze hoch sind, in horizontaler Richtung vorübergezogen werden kann. Dieser Streifen wickelt sich von einer verticalen

Fig. 638.

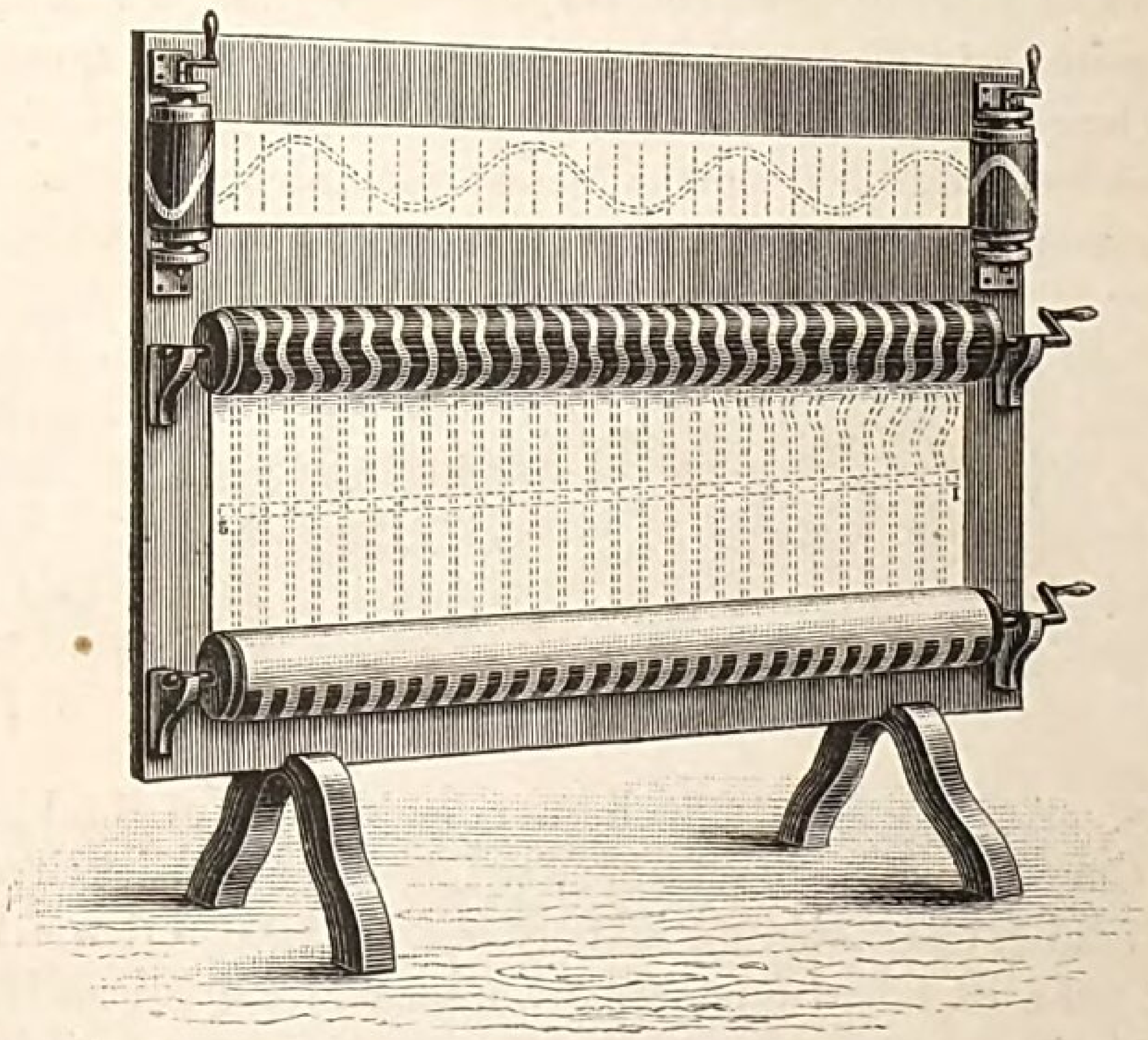
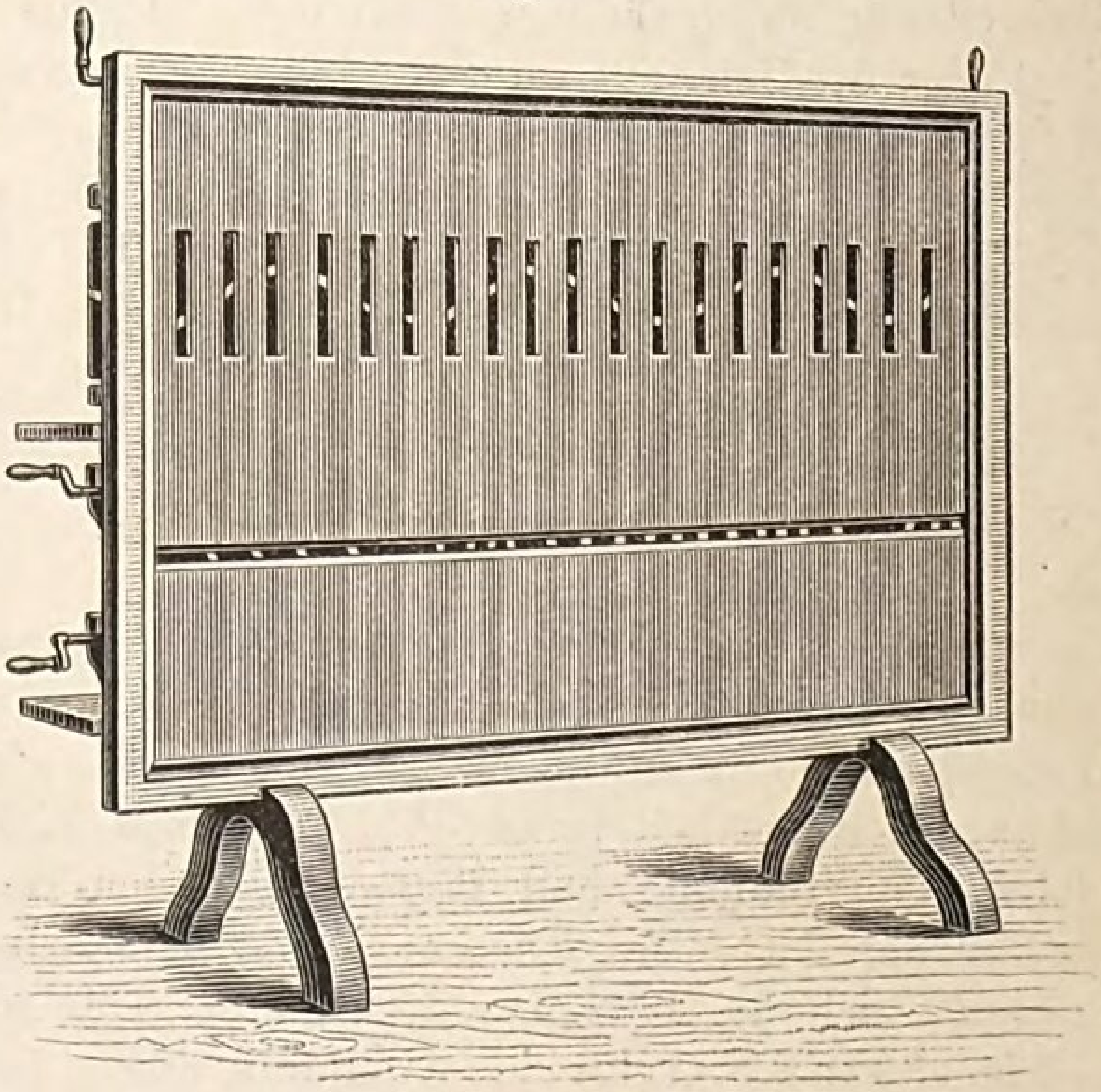


Fig. 639.

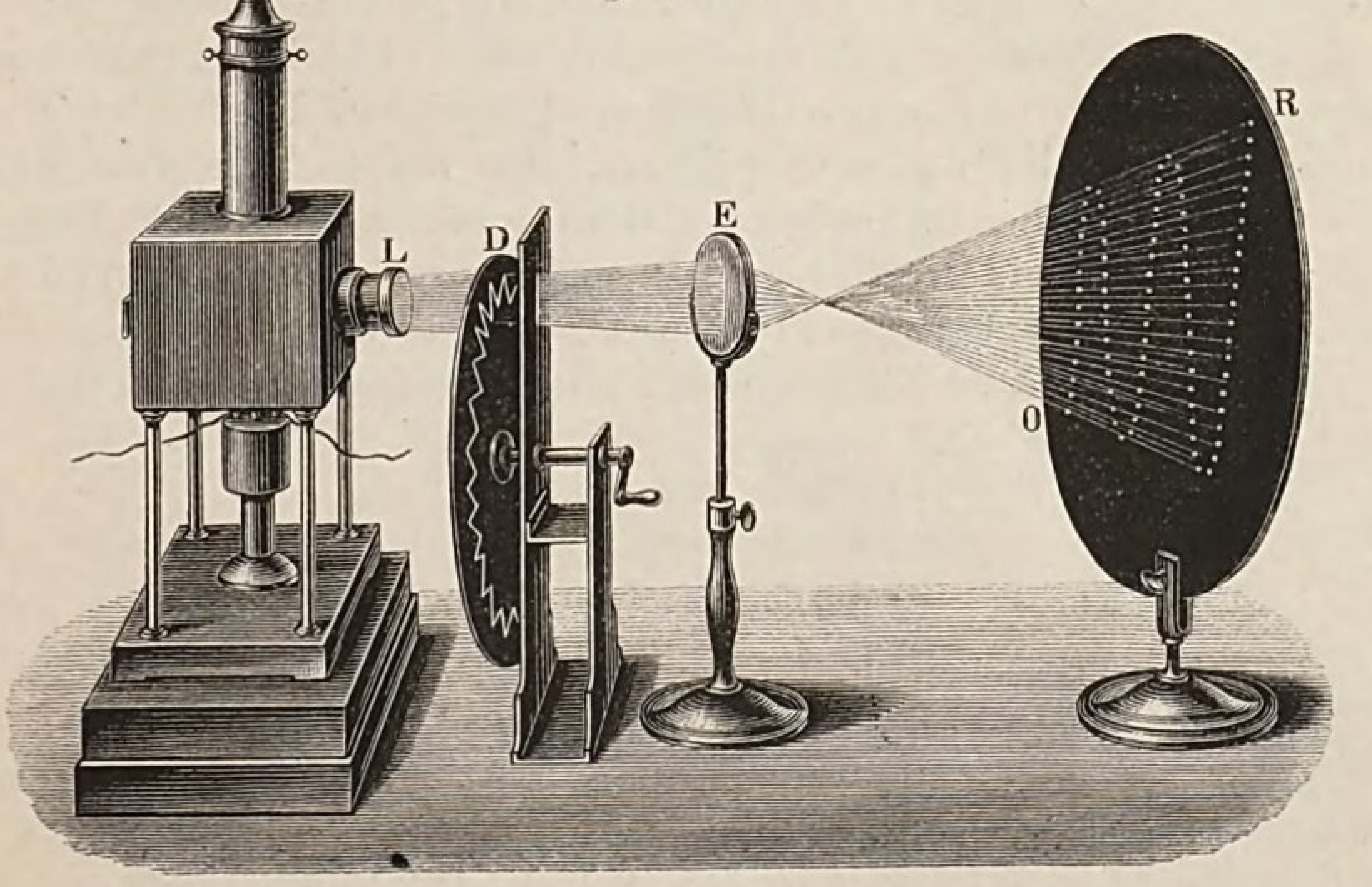


Walze auf einer Seite ab und auf einer eben solchen auf der anderen Seite auf. Auf demselben ist eine Transversalwelle transparent aufgezeichnet,

der übrige Raum des Streifens ist geschwärzt; den Beginn der Welle macht eine gerade horizontale Linie. Im Transparente erscheint daher zuerst eine helle Punktreihe, welche dann von einem Ende her in transversale fortschreitende Schwingungen geräth.

Der untere Theil ist der Darstellung der Longitudinalwellen gewidmet. Ueber den horizontalen Schlitz wird nach Art einer Gardine mittelst zweier Walzen ein grosses Stück Pauseleinwand in verticaler Richtung gezogen, auf welcher in ähnlicher Weise, wie in Fig. 637, ein durchsichtiges Curvensystem mit schwarzem Zwischengrunde aufgetragen ist. Auch hier ist die Zeichnung so ausgeführt, dass zuerst eine ruhige Punktreihe erscheint, welche allmälig in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Der Apparat trägt noch ein paar Leisten, welche die

Fig. 640.



Pauseleinwand nahe an den Schlitz andrücken, sowie Vorrichtungen zur Beleuchtung, welche in der Zeichnung weggelassen sind. Endlich hat Crova dasselbe Princip in der Weise zur Ausführung gebracht, dass er das Curvensystem, welches die Schlitze oder den Schlitz zu durchkreuzen hat, auf eine rotirende Scheibe auftrug. Der Apparat ist dann in solchen Dimensionen ausgeführt, dass das darzustellende Object in die Bildebene eines Projectionsapparates (Laterne magica oder Scioptikon) eingesetzt und die Wellen vergrössert auf einen weissen Schirm projicirt werden können (s. Fig. 640). Dem Crova'schen Apparate sind ausser einer Scheibe für die fortschreitende Transversalwelle noch mehrere Scheiben für fortschreitende und stehende Longitudinalwellen beigegeben.

Der Projectionsapparat kann übrigens auch für Wellenapparate nach dem Princip von Fig. 638 verwendet werden. Der ganze Apparat reducirt sich dadurch auf zwei geschwärzte Glasplatten, von denen die

eine den Schlitz oder die Schlitze, die andere das Curvensystem eingeritzt enthält. Nach meinen Erfahrungen übt jedoch der Anblick dieser Projectionen eine sehr ermüdende Wirkung auf das Auge aus, was bei dem Apparate Fig. 638 und 639 nicht der Fall ist.

Ausser den hier beschriebenen Apparaten sind noch die auf mechanischer Nachahmung beruhenden Wellenmaschinen von Eisenlohr*) (Wasserwellen), Plücker und Fessel**), Schulze***) und Gerling†) zu erwähnen. Die letzteren sind insbesondere zur Darstellung der Lichtwellen geeignet. Endlich hat J. Müller die stroboskopische Scheibe von Stampfer sowie Quincke die stroboskopische Trommel zur Darstellung von Wellenbewegungen benutzt.

181 **Verschiedenheit der Schallempfindungen.** Im §. 174 haben wir bereits erwähnt, dass wir unter dem Namen Schall Gehörseindrücke verschiedener Art zusammenfassen. Zunächst unterscheiden wir zwischen Geräuschen (Zischen, Plätschern, Rasseln etc.) und musikalischen Klängen oder Tönen. Die Empfindung eines Klanges wird durch regelmässige Oscillationen des tönenden Körpers, also durch periodische Bewegungen hervorgebracht, während Geräusche von nicht periodischen Bewegungen herrühren††).

Die verschiedenen Klänge oder Töne unterscheiden sich aber unter einander

1) durch ihre Tonhöhe,
2) durch ihre Stärke,
3) durch ihre Klangfarbe.

Die alten Griechen hatten zwar die Unterschiede der Tonhöhe musikalisch richtig erfasst, sie waren aber nicht im Stande, dieselben physikalisch zu definiren. Allerdings hatte Pythagoras die musikalischen Intervalle durch Zahlen ausgedrückt, die er auf empirische Weise gefunden hatte. Er hatte nämlich die Erfahrung gemacht, dass man die Octav, die Quint, die grosse Terz eines Tones erhält, wenn man die Saite, welche diesen Grundton giebt, bei unveränderter Spannung auf $^1/_2$, auf $^2/_3$, auf $^4/_5$ ihrer ursprünglichen Länge verkürzt, und er schloss daraus, dass das Intervall der Octav durch das Zahlenverhältniss 1 : 2, das Intervall der Quint durch das Verhältniss 2 : 3 etc. charakterisirt sei. Die Beziehung dieser Zahlen zu den Tönen wurde aber im Alterthume sowohl wie auch vorzugsweise im Mittelalter nur mystisch aufgefasst und führte, indem man auch in anderen Dingen, z. B. unter den Gestirnen, ähnlichen Zahlenverhältnissen nachspürte, zu den wun-

*) Lehrb. d. Physik, 11. Aufl. von P. Zech, S. 137.
**) Pogg. Ann. Bd. LXXVIII.
***) Pogg. Ann. Bd. C, S. 583.
†) Pogg. Ann. Bd. CV, S. 175.
††) Näheres hierüber: E. Brücke, „Ueber die Wahrnehmung der Geräusche.“ Wiener Akad. Ber. XC, III. Abth., S. 199 (1885).

derlichsten Träumereien, wie u. a. zu denen über die Harmonie der Sphären, von denen sich selbst Männer von wissenschaftlichem Geiste, wie Kepler, nicht ganz frei zu machen im Stande waren.

Erst im 17. Jahrhundert wurde es richtig erkannt, wodurch die Verschiedenheit der Tonhöhe bedingt und welches die physikalische Bedeutung der Pythagoräischen Zahlen sei. Diesen wichtigen Fortschritt verdankt die Wissenschaft dem Minoritenpater Mersenne, welcher sich schon durch die Uebersetzung der Schriften Galiläi's ins Französische ein grosses Verdienst um die exacte Mechanik erworben hatte. Ganz im Geiste der Galiläi'schen Forschung unternahm Mersenne die Untersuchung der Schwingungsgesetze gespannter Saiten, deren Resultate er im Jahre 1636 in einem Werke veröffentlichte, welches den Titel: *Harmonicorum libri* XII. führt.

Mersenne stellte zuerst den Satz auf, dass die Tonhöhe nur von der Schwingungsdauer des tönenden Körpers oder, was dasselbe ist, von seiner Schwingungszahl, d. h. von der Anzahl der Oscillationen abhänge, welche er in einer gegebenen Zeit, etwa in einer Secunde, ausführt.

Die Töne sind um so höher, je grösser ihre Schwingungszahl oder je kleiner ihre Schwingungsdauer ist.

Welches die Schwingungszahl der verschiedenen Töne ist und wie man dieselbe ermitteln kann, wird weiter unten besprochen werden.

Die Stärke oder Intensität des Tones hängt von der Amplitude der Schwingungen ab, welche der tönende Körper macht; je grösser diese Schwingungen sind, desto stärker ist der Ton.

Unter Klangfarbe oder Klangcharakter versteht man die Eigenthümlichkeiten, durch welche man bei gleicher Tonhöhe und gleicher Stärke den Ton verschiedener Instrumente unterscheiden kann. So hat z. B. derselbe Ton einen ganz anderen Charakter, je nachdem er von einer Violine, oder von einer Clarinette, oder von einer Trompete herrührt.

Das Wesen der Klangfarbe ist vorzugsweise durch die Untersuchungen von Helmholtz ermittelt worden; wir werden darauf später zurückkommen.

Geschwindigkeit des Schalles in Luft. Alle Töne, wel- 182
ches auch ihre Höhe, ihre Intensität und ihre Klangfarbe sein mag, verbreiten sich in der Luft nahezu mit gleicher Geschwindigkeit; denn wenn an einer bestimmten Stelle ein Concert aufgeführt und von verschiedenen Beobachtern in verschiedenen Entfernungen angehört wird, so hören sie denselben Tact, dieselbe Harmonie. Wenn etwa die tiefen Töne den hohen merklich voraneilten oder umgekehrt, so würde bald aller Tact aufhören, und was in einer Entfernung von 10 Schritten eine Harmonie ist, würde in einer Entfernung von 100 Schritten die unerträglichste Kakophonie sein.

Mersenne bestimmte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft zu 1378, die Florentiner Akademiker bestimmten sie im Jahre 1660 zu 1111 Pariser Fuss. Seitdem sind zu gleichem Zwecke viele Versuche angestellt worden, deren Resultate man im fünften Bande von Poggendorff's Annalen S. 476 zusammengestellt findet. Hier wollen wir die Versuche besprechen, welche im Jahre 1822 in der Nähe von Paris zwischen den Orten Villejuif und Montlhery von Prony, Arago, Mathieu, Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard angestellt wurden. An beiden Orten waren Zwölfpfünder aufgestellt, welche während der Nacht abwechselnd in Zwischenzeiten von fünf Minuten abgefeuert wurden. Auf diese Weise konnte der Einfluss der Windrichtung eliminirt werden, da man annehmen durfte, dass derselbe die Schallbewegung nach der einen Richtung ebenso viel begünstigte als die nach der entgegengesetzten hemmte.

Die Beobachter zu Villejuif hörten vollkommen gut alle Schüsse von Montlhery, jeder von ihnen beobachtete auf seinem Chronometer die Zeit, welche von dem Moment der Lichterscheinung an bis zur Ankunft des Schalles verging. Die grösste Differenz zwischen den Resultaten der drei Beobachter bei einem und demselben Versuche überstieg nicht $^3/_{10}$ bis $^4/_{10}$ Secunden. Die längste beobachteteZeit war 55, die kürzeste 54,7, das Mittel 54,84 Secunden.

Zu Montlhery konnte man nur 7 von den 12 Schüssen von Villejuif hören, und von diesen 7 wurde auch nicht ein einziger von den drei Beobachtern zugleich gehört; doch stimmen die Resultate ziemlich gut überein. Die längste Zeit war 54,9, die kürzeste 53,9, das Mittel 54,43 Secunden.

Man kann demnach als Mittel für die Zeit, welche der Schall brauchte, um sich von einer Station bis zur anderen fortzupflanzen, 54,6 Secunden annehmen.

Aus diesen Daten und der von Arago durch Triangulation ausgemittelten Distanz von 9549,6 Toisen lässt sich eine Geschwindigkeit von 174,9 Toisen = 340,88 m per Secunde ableiten. Dieses Resultat, welches bei der Temperatur 16^0 und einer Luftfeuchtigkeit von 78^0 Saussure erhalten worden, giebt für 0^0 und trockener Luft eine Geschwindigkeit von 331,05 m.

Wir geben hier noch eine Uebersicht der späteren directen*) Messungen der Schallgeschwindigkeit.

Moll und Van Beck**) erhielten 1823 bei Amsterdam nach einem dem obigen ähnlichen Verfahren den Werth	332,26 m
Nach späterer Berechnung von Schröder. van der Kolk	332,77 m

*) Die indirecten Bestimmungen aus Schwingungszahl und Wellenlänge können wir erst an anderer Stelle bringen.

**) Pogg. Ann. 5., S. 351, 469.

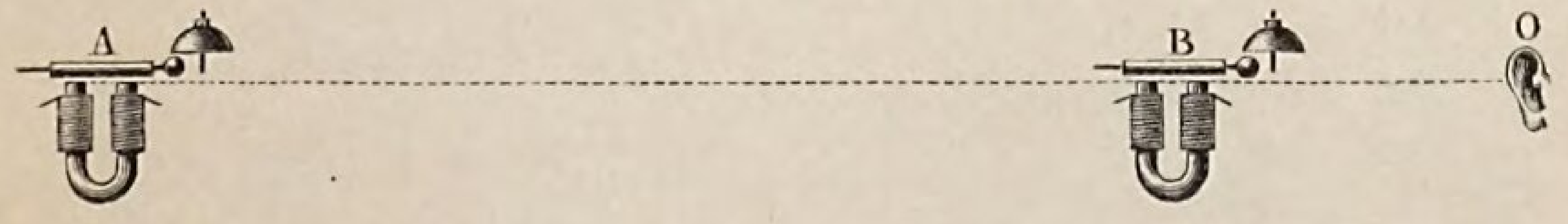
Régnault*) 1862 und 1863 aus Versuchen mit Pistolenschüssen in langen verschieden weiten Wasserleitungsröhren der Stadt Paris Werthe zwischen	334,16 und 326,66 m
Derselbe in einer Röhre von 1,1 m Durchmesser auf eine Wegstrecke von beinahe 20000 m den Mittelwerth	330,6 m
Auf eine Wegstrecke von beinahe 20 000 m den Minimalwerth	330,3 m
Derselbe aus Versuchen mit Kanonenschüssen in freier Luft	330,7 m
LeRoux**) in Röhren nach ähnlicher Methode	330,66 m

Bei Régnault's Versuchen wurden sowohl Abgang als Ankunft des Schalles automatisch durch elektrische Ströme registrirt und die Zeiten mittelst Stimmgabelchronographen gemessen. Seine Versuche ergaben, dass die Schallgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Schallquelle anfangs rascher, später immer langsamer abnimmt. Sie betrug z. B. auf 1281 und 2445 m Distanz von der Kanone 331,37 und 330,7 m.

Die Schallgeschwindigkeit ist in der Nähe der Schallquelle von der Intensität der Schallimpulse abhängig. In Röhren nimmt sie noch rascher mit der Distanz ab als im Freien und zwar desto rascher, je enger die Röhren sind. Es ist dies eine Folge der Reibung und in Uebereinstimmung mit einer theoretischen Berechnung von Kirchhoff***).

J. Bosscha †) hat 1853 zuerst eine Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit auf kürzere Distanzen vorgeschlagen, welche dann von König††) in Paris verwirklicht wurde. Es ist die Methode der Schallcoïncidenzen.

Fig. 641.



Man denke sich in A und B, Fig. 641, zwei Schlagwerke, welche genau gleichzeitig jede Secunde einen Schlag geben. Bei O in der geraden Verlängerung der Linie AB befinde sich ein Ohr. Offenbar wird dasselbe den nten Schlag des Werkes A zugleich mit dem $n + 1$ten Schlage des Werkes B zugleich hören, wenn der Abstand von A bis B gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Man hat also die beiden Schlag-

*) Compt. rend. LXVII, S. 209.
**) Ann. de chimie et de phys. IV Ser., T. XII.
***) Pogg. Ann. 134, S. 177.
†) Pogg. Ann. XCII.
††) Pogg. Ann. CXVIII.

werke nur so lange zu entfernen oder zu nähern, bis in *O* die Secundenschläge genau zusammenfallend gehört werden. Die Entfernung der Schlagwerke ist dann gleich der Schallgeschwindigkeit. Würden die Schlagwerke ihre Schläge in Zeitintervallen von $^1/_{10}$ Secunde geben, so wäre die zugehörige Entfernung gleich dem zehnten Theile der Schallgeschwindigkeit.

König verwendete Schlagwerke der letzteren Art, die auf elektromagnetischem Wege gleichzeitig durch eine stromunterbrechende Stimmgabel in Bewegung gesetzt wurden. Eine verwandte, etwas complicirtere Methode wurde von Bosscha ausgeführt*).

Kahl**) hat noch die weitere Vereinfachung vorgeschlagen, sich mit Einem Schlagwerke so lange einer Wand zu nähern, bis das Echo jedes Schlages mit dem nächsten direct gehörten Schlage zusammentrifft. Offenbar ist dann der Abstand des Schlagwerkes von der Wand gleich dem halben Wege, den der Schall im Zeitintervall zwischen zwei Schlägen zurücklegt.

Auf anderem Wege ist es durch Verfeinerung der Messungsmethoden gelungen, die Geschwindigkeit des Schalles innerhalb noch viel kürzerer Strecken zu bestimmen. So z. B. hat Tumlirz***) solche Bestimmungen an einer Blechröhre von 21 m Länge und 2,4 cm Weite vorgenommen. Die allerkürzesten Distanzen sind aber bei den Messungen von E. Mach†) über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionswellen, insbesondere der durch einen elektrischen Funken hervorgerufenen Wellen zur Anwendung gekommen. Wir können die dabei angewendeten Messungsmethoden hier noch nicht beschreiben, wollen aber schon jetzt mittheilen, dass sich dabei das überraschende Resultat ergeben hat, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit heftiger Schallimpulse in nächster Nähe des Entstehungsortes bedeutend höhere Werthe erreichen kann. So z. B. ergab sich

für einen Abstand von der Schallquelle gleich	eine Geschwindigkeit von
80 mm	756 m pro Secunde
137 „	540 „ „ „
254 „	453 „ „ „
400 „	416 „ „ „
977 „	373 „ „ „

Wenn wir unter normaler Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles jene verstehen wollen, bei welcher die Schwingungsamplituden verschwindend klein sind, so können wir für trockene Luft bei 0° Régnault's

*) Man vergleiche auch Röber, Berl. Ber. für 1862, XVIII, S. 129 und D. Kahl in Schlömilch's Zeitschrift 1864, S. 65.

**) l. c.

***) Tumlirz, Wien. Akad. Ber. LXXX, 439 (1879).

†) Mach und Sommer, Wiener Akad. Ber. LXXV (1877); E. Mach, O. Tumlirz und C. Kögler, Wien. Akad. Ber. LXXVII (1877), Seite 7.

Werth 330,7 m annehmen. Für Luft mittlerer Temperatur und Feuchtigkeit kann rund 340 m gelten.

Beziehungen zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Schwingungszahl. Ein schwingender Körper mache pro Secunde n Schwingungen und die dadurch hervorgerufene Wellenbewegung pflanze sich per Secunde auf eine Strecke von C Metern fort. Da jeder Hin- und Hergang des schwingenden Körpers je eine Welle hervorruft, so müssen längs der Strecke C eine Anzahl $= n$ Wellenlängen vorhanden sein. Daraus folgt, dass die Wellenlänge λ ausgedrückt wird durch: 183

$$\lambda = \frac{C}{n}$$

und dass

$$C = n\lambda \qquad \qquad 1)$$

sowie

$$n = \frac{C}{\lambda}$$

sein müsse.

Die Wellenlänge eines Tones verhält sich also (in demselben Medium) umgekehrt wie die Schwingungszahl.

Bei gleicher Schwingungszahl (gleicher Tonhöhe) verhält sich in verschiedenen Medien die Wellenlänge wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Da die Schwingungsdauer $t = \frac{1}{n}$ ist, so gelten auch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= t\,C \\ C &= \frac{\lambda}{t} \\ t &= \frac{\lambda}{C} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Wir werden für diesen Zusammenhang später experimentelle Beweise und Beispiele bringen.

Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Dichte und der Elasticität des Mediums. Diese Abhängigkeit ist zuerst von Newton im zweiten Buche seiner „Philosophiae naturalis principia mathematica" 1687 theoretisch entwickelt worden. Newton erhielt daselbst für die Schallgeschwindigkeit C in einem Medium von der Dichte D und der Elasticität E die Formel: 184

$$C = \sqrt{\frac{E}{D}} \qquad \qquad 1^{*})$$

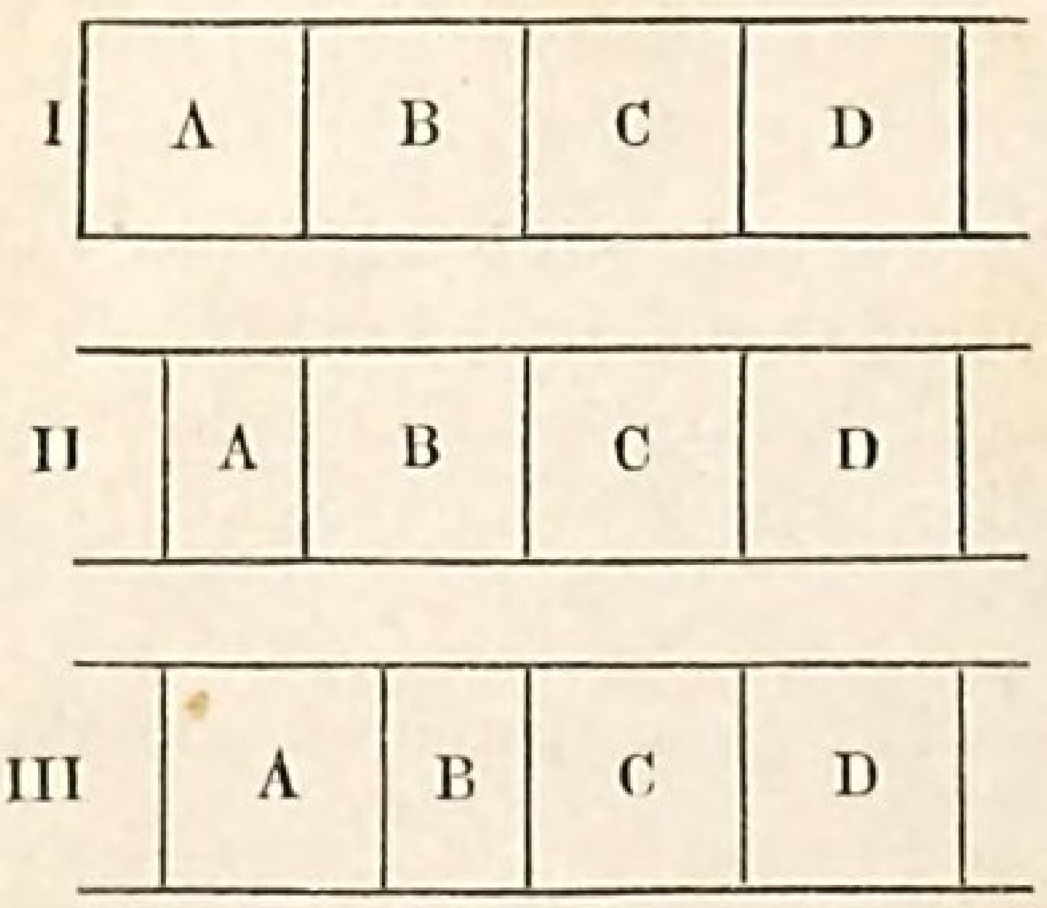
*) Wird die Elasticität im praktischen Maasse gemessen, so ist zu E noch der Factor g hinzuzufügen.

Wir können diesen Ausdruck, welcher gewöhnlich mit den Mitteln der höheren Analysis abgeleitet wird, auf elementarem Wege folgendermaassen gewinnen. Wir denken uns in einer Röhre mit dem constanten Querschnitt vom Flächeninhalt = Eins eine Reihe von gleich dicken Schichten A, B, C etc. des elastischen Mediums, z. B. Luft, abgegrenzt (Fig. 642) I.

Die Dicke jeder dieser Schichten sei durch S, die Elasticität oder die Druckkraft, welche sie auf den Querschnitt = Eins ausübt, durch E ausgedrückt.

Wird nun die erste Schicht A plötzlich so comprimirt, dass, wie Fig. 642 II zeigt, ihre linksseitige Begrenzung um die Strecke s nach rechts vorrückt, also die Dicke der Schichte auf $S - s$ reducirt wird, so muss die Dichtigkeit, also auch die Spannkraft des Mediums innerhalb dieser Schichte um einen Betrag e wachsen. Nehmen wir mit Newton an, dass dies nach dem Boyle'schen (Mariotte'schen) Gesetze erfolge, so ergiebt sich aus

Fig. 642.



$$S - s : S = E : E + e$$
$$eS - es = Es.$$

Da in den meisten Fällen sowohl s als auch e gegenüber S und E sehr klein sind, so verschwindet das Glied es und ergiebt sich mit genügender Annäherung:

$$e = E\frac{s}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Die Schichte B hat also jetzt von links her den Druck $E + e$, von rechts den Druck E auszuhalten; es bleibt daher als beschleunigende Kraft die Differenz e wirksam.

Nach einer gewissen Zeit $= t$ wird die erste Schichte wieder ihre ursprüngliche Dichte und Dicke angenommen haben und die Verdichtung ganz auf die Schichte B übergegangen sein (Fig. 642 III).

Die Wellenbewegung ist dann um die Strecke gleich der Dicke S fortgerückt. Die Geschwindigkeit derselben ist also

$$C = \frac{S}{t}, \text{ mithin } t = \frac{S}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Während die Verdichtung von A auf B übergeht, nimmt die bewegende Kraft von e bis 0 ab, denn in dem Momente, der durch Fig. 642 III vorgestellt ist, ist die Dichtigkeit zu beiden Seiten der Schichte B gleich gross. Der mittlere Werth der beschleunigenden Kraft, welche die Verdichtung von B bewirkt hat, kann also $= \frac{e}{2}$ gesetzt werden. Da durch

diese Kraft die Schichte B um den Weg s vorgedrängt wurde, so ist die dabei geleistete Arbeit gegeben durch den Ausdruck $\frac{es}{2}$.

Diese Arbeit muss der Grösse nach gleich sein der lebendigen Kraft die daraus hervorging.

Ist die Dichte des Mediums im nicht comprimirten Zustande $= D$, so ist die in der Schichte B von der Dicke S und dem Querschnitt Eins enthaltene Masse gleich $D \,.\, S$. Der Schwerpunkt dieser Masse wurde offenbar um die Strecke $\frac{s}{2}$ verschoben und zwar innerhalb der Zeit t. Betrachten wir die dabei wirksame Kraft als eine constante, so ergiebt sich (nach §. 23. 6) für die Endgeschwindigkeit der Werth $\frac{s}{t}$, für die lebendige Kraft der Werth

$$\frac{D \,.\, S \,.\, s^2}{2\, t^2}$$

Setzen wir diesen Werth gleich jenem der aufgewendeten Arbeit, so bekommen wir die Gleichung

$$\frac{es}{2} = \frac{D\, S s^2}{2 t^2}$$

und nach Substitution der oben unter 2) und 3) gefundenen Werthe für e und t folgt hieraus:

$$C = \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Wir wollen nun nach dieser theoretischen Formel die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0^0 berechnen.

Der Druck der Luft auf 1 qcm ist gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 1 qcm Basis und 76 cm Höhe. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers $= 13{,}5953$, so ist also der Druck der Luft auf 1 qcm gleich dem einer Masse von $13{,}5953 \times 76 = 1033{,}243$ g. Diese im praktischen Maasssysteme ausgedrückte Druckkraft (Spannkraft) erhalten wir nach absolutem Maasse, indem wir mit $g = 980{,}6$ multipliciren, gleich $1033{,}243 \times 980{,}6 = 1013198$ Dynen. Dies ist die Grösse E. Die Dichte der Luft D, d. h. die Masse von einem Cubikcentimeter derselben in Grammen, beträgt 0,001293.

Setzt man diese Werthe in die Formel für C, so erhält man

$$C = 27993 \text{ cm} = 279{,}93 \text{ m}.$$

Dieses Resultat ist nun aber mit der Erfahrung nicht in Uebereinstimmung, sondern viel zu klein, da die wirkliche Schallgeschwindigkeit nach §. 102 nahezu 331 m beträgt. Die Ursache dieser Nichtübereinstimmung wurde von La Place aufgedeckt; sie liegt in der Unrichtigkeit der Annahme, dass die Spannkraft der Luft bei der Verdichtung nach dem Boyle'schen (Mariotte'schen) Gesetze wachse. Da nämlich

durch die Verdichtung die Luft erwärmt wird, so wächst ihre Spannkraft in einem rascheren Verhältnisse. In der Wärmelehre wird gezeigt werden, dass man die wirkliche Spannkraft erhält, indem man dem oben berechneten Werthe von e noch als Factor den Quotienten der beiden Wärmecapacitäten für constanten Druck und constantes Volum hinzufügt. Dieser Quotient $\frac{c_p}{c_v}$ hat für Luft nach Röntgen*) den Werth 1,4053, setzt man diesen in die von La Place ergänzte Formel:

$$C = \sqrt{\frac{E}{D}\,\frac{c_p}{c_v}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

so erhält man $C = 331{,}16$ m, was mit dem beobachteten Werthe sehr nahe übereinstimmt.

Von der Grösse des Luftdruckes ist die Schallgeschwindigkeit unabhängig, weil durch eine Aenderung des ersteren sowohl E als D im gleichen Verhältnisse geändert werden. Der Quotient $\frac{E}{D}$ bleibt also bei allen Barometerständen derselbe und folglich auch die Schallgeschwindigkeit, dagegen ändert sich diese sehr beträchtlich mit der Temperatur und auch ein wenig mit dem Feuchtigkeitsgehalte derselben.

Ist die Dichte der Luft bei $0^0 = D_0$, so ist sie bei t^0 gleich $\frac{D_0}{1 + \alpha t}$, wobei α der Ausdehnungscoefficient der Luft $= 0{,}00367$ ist. Enthält die Luft Wasserdampf von der Spannkraft f bei einem Barometerstande b und einer Temperatur t, so ist ihre Dichte gleich

$$D_0\ \frac{b - 0{,}377\,gf}{760\,(1 + 0{,}00367\,t)}.$$

Dabei sind f und b in Millimetern auszudrücken. Dieser Werth der Dichte ist in die Formel für C einzusetzen.

Drückt man die Grösse E, wie es gebräuchlicher ist, statt in absolutem Maasse durch die Höhe h einer Quecksilbersäule aus, so ist $E = g\,h\,\sigma$ zu setzen, wobei σ das specifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet.

Die vollständige Formel für die Schallgeschwindigkeit in irgend einem Gase, dessen Dichte im Normalzustande (verglichen mit Wasser) $= D$, dessen Temperatur $= t^0$, welches beim Barometerstande b mit Wasserdampf von der Spannkraft f gemischt ist und für welches das Verhältniss der Wärmecapacitäten $\frac{c_p}{c_v}$ gleich k ist, lautet demnach:

*) Poggend. Ann. Bd. 148, S. 580 bis 624. Da das Verhältniss $\frac{c_p}{c_v}$ schwieriger zu bestimmen ist als die Schallgeschwindigkeit, so hat man oft umgekehrt jenes aus dieser berechnet.

$$C = \sqrt{\frac{g h \sigma}{D} \cdot \frac{760\,(1 + 0{,}00367\,t)}{b - 0{,}3779 f} k} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Dabei sind b und f in Millimetern, g und h in Metern auszudrücken, um C ebenfalls in Metern zu erhalten.

Wie die Formel zeigt, vermehren gesteigerte Temperatur und Wassergehalt die Schallgeschwindigkeit. Für Luft von mittlerer Zimmertemperatur und mittlerer Feuchtigkeit kann sie rund zu 340 m angenommen werden. Für andere Gase erhält man sie, indem man den Werth für Luft durch die Quadratwurzel aus der Dichte des Gases dividirt. So findet man beispielsweise für Wasserstoff $c = 1257$ m, für Kohlensäure $c = 267$ m.

Schallgeschwindigkeit in tropfbar flüssigen und in festen Körpern. Die Formel 1) des vorausgehenden Paragraphen 185

$$C = \sqrt{\frac{E}{D}}$$

ist auch auf tropfbar flüssige und feste Körper anwendbar, wobei man nur für E den entsprechenden Werth einzusetzen hat.

Die Bedeutung von E ist aus Gleichung 2) §. 184 ersichtlich. Es folgt aus ihr

$$E = S \frac{e}{s}.$$

E ist also das Verhältniss zwischen einer Drucksteigerung e und der zugehörigen Verkürzung s einer Schichte des Mediums von der Länge S und dem Querschnitt Eins. Setzen wir die Länge $S = 1$ voraus, so ist die Masse der Schichte gleich ihrer Dichte D, ihr Druck auf die Unterlage $= gD$. Bezeichnen wir die diesem Drucke entsprechende Verkürzung wieder mit s, so ist

$$E = \frac{g D}{s},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{g D}{s D}} = \sqrt{\frac{g}{s}} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Diese Formel kann sowohl für tropfbar flüssige als auch für feste Körper zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit benutzt werden. Die Grösse s bedeutet dabei jedesmal die Verkürzung (oder Verlängerung), welche eine Schichte von der Länge Eins erfährt, wenn auf sie der Druck (oder der Zug) einer ihrer eigenen Masse gleichen Belastung ausgeübt wird.

Für tropfbare Flüssigkeiten wird s aus ihrer Zusammendrückbarkeit durch den Druck einer Atmosphäre berechnet. Das Wasser wird z. B. durch den Druck einer Atmosphäre um 47,85 Milliontel seines Volumens zusammengedrückt; durch den Druck einer Atmosphäre wird

also eine 1 m lange Wassersäule in einer unelastischen Röhre um 47,85 Milliontel Meter verkürzt. Der Druck einer Atmosphäre entspricht aber einem Quecksilberdrucke von 0,76 m oder bei einer Temperatur von 10° C. dem Drucke einer Wassersäule von 10,2934 m; eine Wassersäule von 1 m Höhe würde also eine Verkürzung von $\frac{0,00004785}{10,2934}$ oder 0,0000046486 m hervorbringen, und dies ist der Werth von s für Wasser; substituirt man diesen Werth von s in der Formel, so findet man, dass die Geschwindigkeit des Schalles in Wasser von 10° C. 1453 m in der Secunde beträgt.

Die vorstehende Formel kann leicht auf folgende Weise umgeformt werden:

$$v = \sqrt{\frac{9,806 \,.\, 0,76 \,.\, 13,544 \,.\, 1000000}{\sigma \,.\, c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

wo σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, im Vergleich zum Wasser, und c ihre Zusammendrückbarkeit für eine Atmosphäre bezeichnet.

Nach dieser Formel ist die Geschwindigkeit des Schalles in folgenden Flüssigkeiten bei 10° C. berechnet:

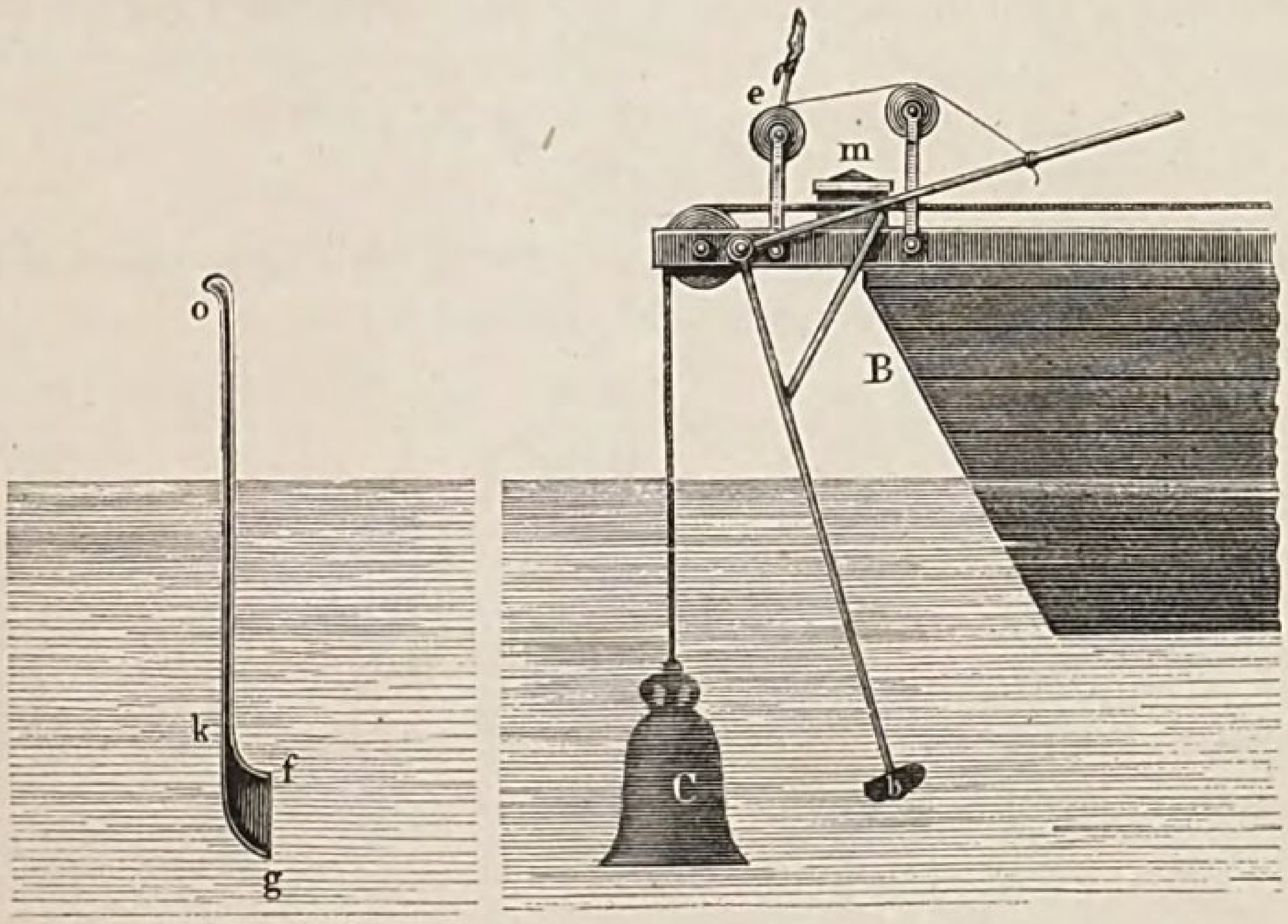
Namen der Flüssigkeiten	Specifisches Gewicht	Zusammendrückbarkeit	Geschwindigkeit des Schalles
Aether	0,712	131,35	1039 m
Alkohol	0,795	94,95	1157
Terpentinöl	0,870	71,35	1276
Wasser	1	47,85	1453
Quecksilber	13,59	3,38	1484
Wasser mit Ammoniak gesättigt.	0,9	33,05	1842

Die Zahlen der letzten Columne sind alle mit einer Ungewissheit behaftet, welche besonders von der Ungewissheit des Werthes für die Zusammendrückbarkeit abhängt. Nimmt man z. B. für Alkohol den von Oersted angegebenen Werth der Zusammendrückbarkeit, so würde sich für die Geschwindigkeit des Schalles 2423 m in der Secunde ergeben, während man sie nur gleich 1157 m findet, wenn für die Zusammendrückbarkeit des Alkohols der von Colladon und Sturm gefundene Werth in Anwendung gebracht wird.

Das Wasser ist die einzige unter diesen Flüssigkeiten, welche einem directen Versuche unterworfen worden ist. Fig. 643 erläutert das Verfahren, welches Colladon und Sturm im Jahre 1827 zu diesem

Zwecke im Genfer See zur Anwendung brachten. Eine ganz in das Wasser untergetauchte Glocke war an einem Nachen angehängt; sie wurde durch einen Hammer angeschlagen, dessen Stiel aus dem Wasser hervorragte. Durch Niederdrücken eines Hebels wird der Hammer *b* gegen die Glocke geschlagen und gleichzeitig die Lunte *e* mit dem Pulverhäufchen *m* in Berührung gebracht. Am gegenüberliegenden Ufer des Sees notirte man den Moment, in welchem man den Lichtblitz des entzündeten Pulvers, und denjenigen, in welchem man den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrnahm, welcher mit Hülfe des Hörrohrs *gfko*

Fig. 643.



beobachtet wurde. — Diese Versuche ergaben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Wasser 1435 m, was von der berechneten Zahl 1453 nur wenig abweicht*).

Während bei den Gasen zwischen der Schallgeschwindigkeit im Freien und jener in Röhren kein grosser Unterschied besteht, scheint dies bei Flüssigkeiten nach indirecten Messungen von Werthheim in bedeutendem Grade der Fall zu sein. Er fand beispielsweise für Wasser in Röhren die sehr abweichende Geschwindigkeit $C' = 1173{,}4$ m. Nach Werthheim wäre überhaupt die „allseitige Schallgeschwindigkeit“ C zu der „einseitigen“ C' in der Beziehung stehend:

$$C = C' \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247\, C'.$$

Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit fester Körper muss die Grösse s der Gleichung 1) aus ihrem specifischen Gewicht σ und ihrem

*) Pogg. Ann. Bd. XII, S. 183.

Elasticitätscoefficienten n abgeleitet werden. Die Bedeutung des letzteren wurde auf S. 336 erörtert. Der Elasticitätscoefficient n bedeutet die vorübergehende Verlängerung (Verkürzung), welche ein elastischer Körper von der Länge Eins und dem Querschnitt Eins erfährt, wenn er dem Zuge (Drucke) durch das Gewicht der Masseneinheit ausgesetzt wird. Der reciproke Werth $\frac{1}{n}$ heisst Elasticitätsmodulus.

Länge und Verlängerung werden nach Metern, der Querschnitt nach Quadratmillimetern, die Belastung nach Kilogrammen gemessen. Da das Volum eines Stabes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt = 1 ccm ist, so beträgt seine Masse $\sigma\,g = \frac{\sigma}{1000}$ kg. Aus der Proportion:

$$1 : n = \frac{\sigma}{1000} : s$$

findet man die Verlängerung s, welche durch den Zug einer der Stabmasse gleichen Masse hervorgebracht würde:

$$s = \frac{n\,\sigma}{1000},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{1000\,g}{n\,\sigma}} = \sqrt{\frac{9806}{n\,\sigma}} \quad \cdots\cdots\cdot \quad 3)$$

für Stahldraht ist nach Werthheim $\sigma = 7{,}622$, $n = 0{,}00005788$, woraus sich nach obiger Formel berechnet

$$C = 4714\,\mathrm{m}.$$

Demnach wäre die Schallgeschwindigkeit im Stahldraht 14,2 mal so gross als in Luft, was mit einem indirect von Werthheim erhaltenen Werthe über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Längswellen nämlich 14,96 mal jener in Luft ziemlich übereinstimmt.

Dass die Schallgeschwindigkeit im Eisen bedeutend grösser als in Luft ist, hat schon Biot dadurch gezeigt, dass ein auf das Ende einer langen Röhrenleitung aus Gusseisen ausgeführter Schlag am anderen Ende zweimal gehört wird, zuerst in Folge Fortpflanzung im Eisen, dann noch einmal in Folge Fortpflanzung in der Luft. Man kann ähnliche Versuche auch an Eisenbahnschienen anstellen, obwohl die mangelhafte Verbindung derselben keine genaueren Messungen zulässt.

Ausser den Longitudinalwellen pflanzen sich in festen, homogenen und amorphen Körpern aber auch noch Transversalwellen fort und zwar beide mit abweichenden Geschwindigkeiten, deren Grösse und Verhältniss von zwei „Constitutionsconstanten“ abhängt*). Die obige Formel ist also nur als Annäherungsformel zu betrachten.

*) G. Lamé, Leçon de l'Elasticité, Paris 1852.

Von der Reflexion des Schalles und dem Echo. Wenn die Schallwellen aus einem Mittel in ein anderes übergehen, so erleiden sie immer eine partielle Reflexion; wenn sie aber auf ein festes Hinderniss stossen, so werden sie fast vollständig reflectirt. 186

Mag nun die Reflexion partiell oder vollständig sein, so ist doch der Reflexionswinkel stets dem Einfallswinkel gleich. Es ist ss', Fig. 644, die Trennungsfläche der beiden Mittel, etwa Luft und Wasser, und eine Schallwelle bewege sich in der Richtung fn gegen die Wasserfläche, so wird ein Theil der Bewegung in das Wasser übergehen, ein anderer Theil aber wird sich in der Richtung nd fortpflanzen, welche mit dem Perpendikel np einen ebenso grossen Winkel macht wie fn, d. h. der Reflexionswinkel dnp ist dem Einfallswinkel fnp gleich. Dieselbe Erscheinung würde nach demselben Gesetze stattfinden, wenn ss' die Trennungsfläche zweier Gase oder auch nur zweier Gasschichten von verschiedener Dichtigkeit wäre, oder wenn ss' die Grenzfläche eines festen Körpers wäre, nur würde in dem letzten Falle der reflectirte Ton weit intensiver sein. Ein Beobachter also, welcher sich in irgend einem Punkte der Linie nd befindet, würde den Ton so hören, als ob er von n oder einem Punkte der Verlängerung der Linie dn ausginge.

Fig. 644.

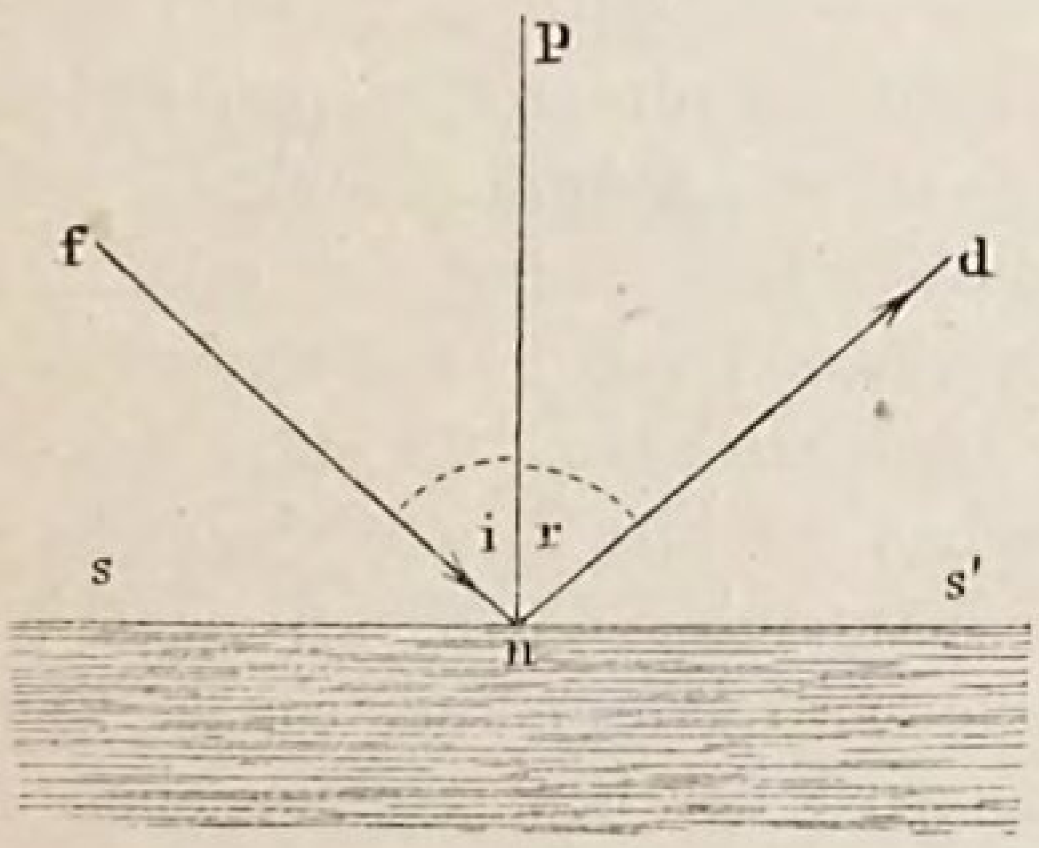
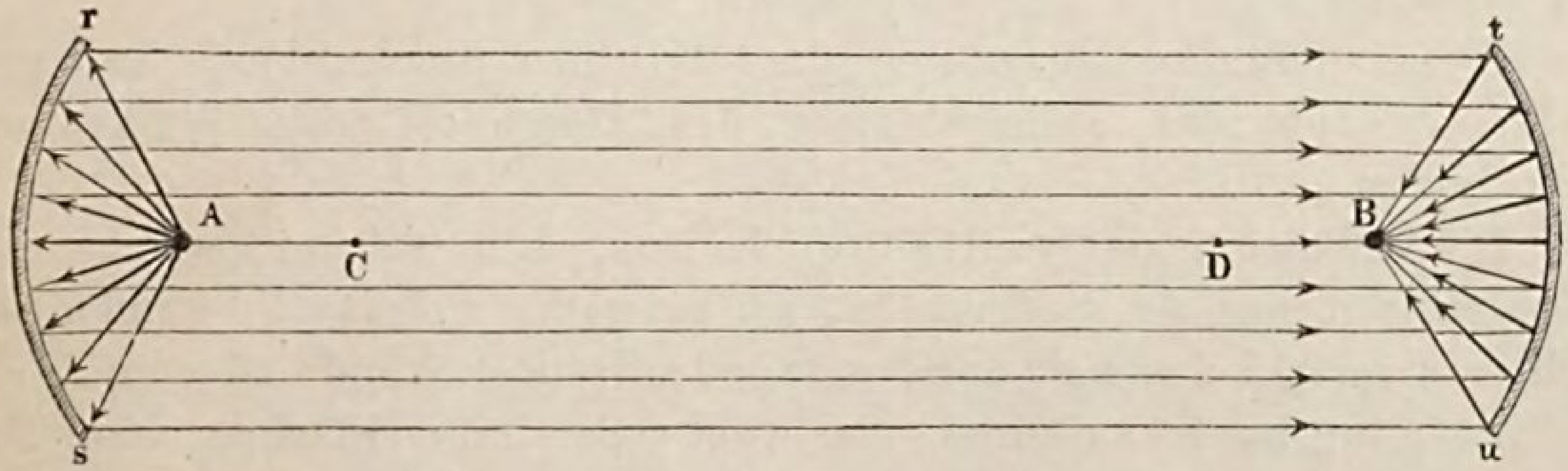


Fig. 645.



Dass die Schallstrahlen wirklich denselben Reflexionsgesetzen folgen wie die Lichtstrahlen, ergiebt sich auch durch Versuche mit parabolischen oder sphärischen Hohlspiegeln. In Fig. 645 seien rs und tu zwei sphärische Hohlspiegel, welche in einer Entfernung von 3 bis 7 m von einander so aufgestellt sind, dass die Achsen derselben in eine gerade Linie zusammenfallen. Bringt man nun in den Brennpunkt A des einen Hohlspiegels eine Taschenuhr, so hört ein im Brennpunkte B des anderen befindliches Ohr deutlich das Ticken derselben, denn alle von A ausgehenden Schallstrahlen, welche den Hohlspiegel rs treffen, werden parallel mit der Achse reflectirt, wie es in unserer Figur angedeutet ist;

auf den zweiten Spiegel *tu* treffend, werden sie aber gegen den Brennpunkt *B* desselben zurückgeworfen und also in *B* wieder vereinigt.

Entfernt man das Ohr aus dem Brennpunkte *B*, so verschwindet der Schall, selbst wenn man sich dem Punkte *A* bedeutend nähert.

Damit der eben angedeutete Versuch gelinge, müssen die beiden Brennspiegel ziemlich gross sein, damit der Kopf, dessen Ohr sich an der Stelle des Brennpunktes *B* befindet, nicht den grössten Theil der vom Brennspiegel *rs* kommenden Strahlen auffange und hindere, nach *tu* zu gelangen. Wenn man mit kleineren Brennspiegeln experimentirt, muss man bei *B* die Mündung eines Hörrohres anbringen, welches die Schallwellen von *B* nach dem seitlich befindlichen Ohre hinleitet.

Nach E. Mach bringt die Explosion von Knallsilber im Brennpunkt des einen Spiegels die Explosion von Jodstickstoff im anderen hervor.

Aus der Reflexion des Schalles erklärt sich auch die Erscheinung des Echos.

Wenn die Schallwellen rechtwinkelig auf die reflectirende Fläche treffen, so sendet das Echo den Ton zu seinem Ausgangspunkte zurück. In diesem Falle kann ein Echo je nach der Entfernung der reflectirenden Wand eine grössere oder geringere Anzahl von Silben unter Bedingungen wiederholen, welche leicht zu ermitteln sind. In einer Secunde kann man bequem drei Silben aussprechen, so dass also $^1/_3$ Secunde auf eine Silbe kommt. In $^1/_3$ Secunde durchläuft aber der Schall einen Weg von ungefähr 112 m, wenn also die reflectirende Wand 1 mal, 2 mal, 3 mal *n* mal 56 m entfernt ist, so wird der Klang einer eben gesprochenen Silbe nach $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_3$ $n/_3$ Secunden zum Sprecher zurückkehren, er wird also 1, 2, 3 *n* Silben aussprechen können, ehe das Echo der ersten wieder an sein Ohr schlägt.

Es ist nicht durchaus nöthig, dass die reflectirende Fläche hart und glatt sei, denn man beobachtet auf dem Meere oft, dass Wolken ein Echo bilden.

Die Erklärung der vielfachen Echos, d. h. solcher, welche dieselbe Silbe mehrmals wiederholen, ist entweder auf das Vorhandensein mehrerer verschieden weit entfernter reflectirender Wände oder auch auf die Erwägung zurückzuführen, dass zwei reflectirende Flächen einen Ton gegenseitig auf einander zurückwerfen können, wie zwei gegenüberstehende Spiegel sich das Licht zusenden. So kann ein vielfaches Echo zwischen zwei entfernten parallelen Mauern entstehen. Früher gab es nahe bei Verdun ein solches Echo, welches dasselbe Wort 12- bis 13 mal wiederholte; es war durch zwei benachbarte Thürme gebildet. Auch durch mehrere in verschiedenem Abstande befindliche Flächen kann ein vielfaches Echo entstehen.

Schallwellen können auch bei wolkenloser Atmosphäre reflectirt und dadurch in ihrer Ausbreitung gestört werden, wenn die Luft aus Schichten verschiedener Temperatur, also ungleicher Dichte, besteht. Dies ist sicherlich, wie Humboldt bemerkt, die Ursache, warum sich der Schall

des Nachts weiter verbreitet als bei Tage, selbst mitten in den Wäldern von Amerika, wo die bei Tage schweigenden Thiere des Nachts die Atmosphäre mit tausend verworrenen Tönen erfüllen.

Professor Tyndall hat einen Apparat construirt, mittelst welchem man die Reflexion an wärmeren Luftschichten oder an Dämpfen experimentell nachweisen kann.

Durch die Reflexion des Schalles erklären sich auch die Wirkungen des Sprachrohrs und des Hörrohrs.

Auch die Erscheinungen der Brechung und Beugung der Lichtstrahlen hat man an Schallstrahlen nachzuahmen versucht. Es zeigte sich aber, dass die im Verhältnisse zu den Dimensionen der angewandten Körper sehr viel grössere Wellenlänge der Schallstrahlen einen wesentlichen Unterschied bedingt, welcher die Analogie mit den Lichtstrahlen bei diesen Versuchen stört oder aufhebt. Dies ist auch bei manchen Reflexionsversuchen der Fall.

Einfluss der Dichte des reflectirenden Mediums; Reflexion am festen und am freien Ende. 187 Auf Seite 351 wurden unter 3) und 4) für die Geschwindigkeiten V und V_1, mit welchen sich zwei elastische Kugeln von den Massen M und M_1 bewegen, nachdem sie mit den ursprünglichen Geschwindigkeiten c und c_1 zusammengestossen sind, die Ausdrücke abgeleitet:

$$V = \frac{(M - M_1)\, c + 2\, M_1\, c_1}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{(M_1 - M)\, c_1 + 2\, M c}{M + M_1}$$

für den Fall, dass die gestossene Kugel in Ruhe war, ist $c_1 = o$, also

$$V = \frac{(M - M_1)\, c}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{2\, M c}{M + M_1}.$$

Sind ausserdem die Massen der Kugeln gleich gross, also $M = M_1$, so kommt

$$V = o$$

$$V_1 = c.$$

Das heisst, die stossende Kugel kommt zur Ruhe, während die gestossene mit derselben Geschwindigkeit weiter geht, welche die stossende hatte.

Ist die Masse der gestossenen Kugel kleiner, also $M > M_1$, so wird sowohl V als V_1 positiv, beide Kugeln bewegen sich nach dem Stosse in der Richtung desselben.

Ist dagegen die Masse der gestossenen Kugel die grössere, also $M < M_1$, so wird V negativ und nur V_1 bleibt positiv. Es bewegt sich dann die stossende Kugel nach dem Stosse rückwärts.

Man kann dieses Rechnungsresultat leicht experimentell erproben, wenn man zwei Elfenbeinkugeln, einmal von gleicher, dann von ungleicher Grösse an Schnüren neben einander aufhängt und dann die eine Kugel auf die andere im Bogen niederfallen lässt. Die niederfallende Kugel bleibt nach dem Stosse stehen, oder geht weiter, oder wird zurückgeworfen, je nachdem sie gleich gross, grösser oder kleiner ist als die gestossene.

Um die Schwingungsphasen nach dem Zusammenstosse noch auffallender zu demonstriren, kann man, nach E. Brücke, eine der beiden Kugeln mit ihren Schnüren an einem Schlitten aufhängen, welcher sich am Gestelle längs einer horizontalen, auf die Schwingungsebene senkrechten Richtung unmittelbar nach dem ersten Anstosse der Kugeln verschieben lässt. Hierdurch wird das wiederholte Anstossen verhindert und man sieht deutlich, wie die Kugeln nach dem Stosse in gleicher oder in entgegengesetzter Schwingung begriffen sind, je nachdem die stossende oder die gestossene Kugel von grösserer Masse ist.

Hängt man eine grössere Anzahl gleich grosser Kugeln in einer Reihe auf (Fig. 646) und lässt die erste fallen, so kommt sie zur Ruhe und giebt ihre Geschwindigkeit an die zweite ab. Diese stösst aber sofort an die dritte, kommt daher ebenfalls zur Ruhe und so fort, so dass also die Geschwindigkeit durch alle Kugeln hindurch in fortwährender Vertauschung bis zur letzten freien Kugel gelangt, welche dann mit derselben Geschwindigkeit fortfliegt, mit welcher die erste gestossen hat.

Fig. 646.

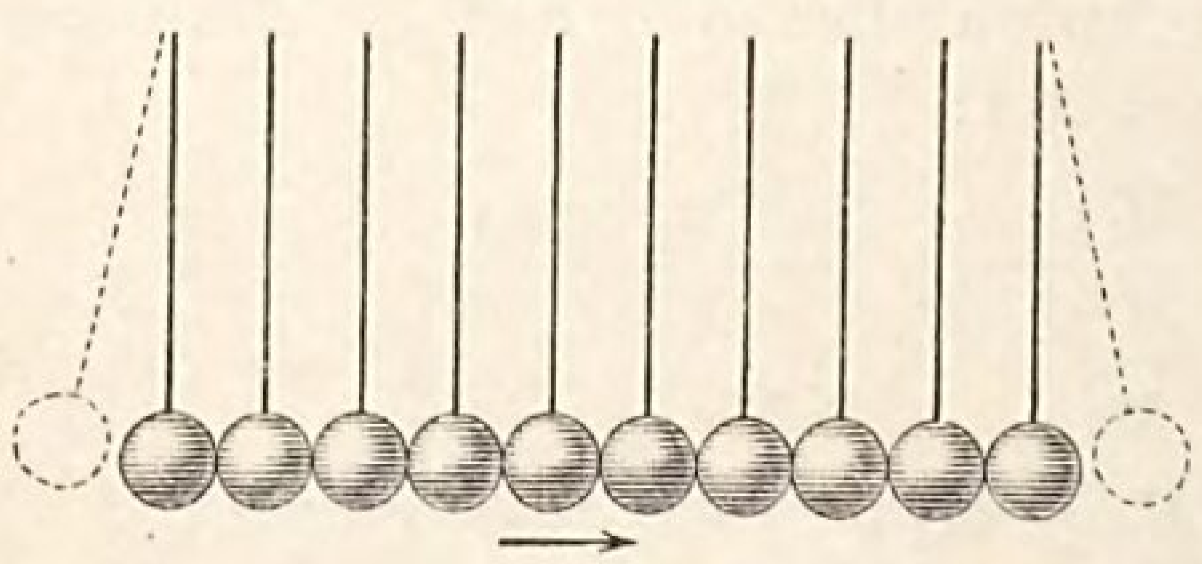
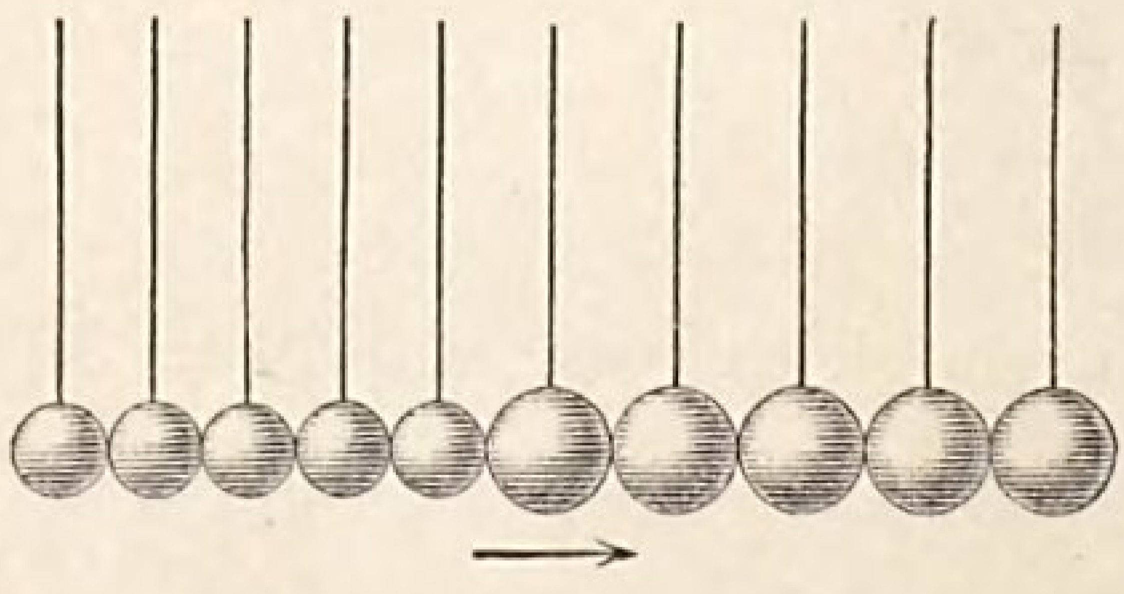


Fig. 647.



Anders verläuft aber der Vorgang, wenn wir, wie in Fig. 647 angedeutet ist, an einer Reihe unter sich gleich grosser Kugeln kleinerer Masse eine Reihe unter sich gleicher aber grösserer Masse anfügen. Lassen wir die äusserste kleine Kugel niederfallen, so pflanzt sich ihr Stoss bis zur letzten kleinen fort, ohne dass die einzelnen Kugeln nach dem Stosse eine Geschwindigkeit behalten; beim Uebergange des Stosses auf die erste grosse Kugel wird jedoch die letzte kleine nach rückwärts reflectirt, sie giebt diese negative Geschwindigkeit nach rückwärts an ihre Nachbarkugel ab und so setzt sich von dem Punkte, wo die kleinen Kugeln an die grossen grenzen, nach rückwärts eine Stossbewegung fort, welche zuletzt die äusserste kleine Kugel hinausfliegen macht, allerdings

nur mit einem Bruchtheile der Geschwindigkeit, mit welcher sie niederfiel. Nach der anderen Seite setzt sich längs der grossen Kugeln ebenfalls die Wirkung des Stosses fort und macht auch die äusserste grosse Kugel hinausfliegen.

Denken wir uns nun den ganzen Apparat umgekehrt und wiederholen wir das Experiment in der Weise, dass wir einmal zuerst die äusserste grosse Kugel fallen lassen, so pflanzt sich zunächst ihr Stoss bis zur letzten grossen Kugel fort, ohne dass eine der Kugeln in Bewegung verbliebe. Die letzte grosse Kugel jedoch kommt durch den Stoss auf die erste kleine nicht zur Ruhe, sondern behält nach dem Stosse noch einen Theil Geschwindigkeit in derselben Richtung bei. Wären die Kugeln unter einander in einer derartigen elastischen Verbindung, dass sie nicht bloss einander drücken, sondern auch ziehen könnten, so würde diesmal die letzte grosse Kugel einen Zug auf ihre Vorgängerin in der Richtung der vorangegangenen Stossbewegung ausüben, welcher Zug sich dann ebenfalls nach rückwärts bis zur äussersten grossen Kugel fortpflanzen würde. Es könnte dies dadurch verwirklicht werden, dass man die Kugeln unter einander durch elastische Spiralfedern in Verbindung setzte.

Man kann dann, die beiden Fälle zusammenfassend, sagen, dass von der Uebergangsstelle der kleinen zu den grossen Kugeln zwei Impulse ausgehen, von denen sich der eine nach vorwärts, der andere nach rückwärts fortpflanzt. Die Art des nach rückwärts gehenden Impulses hängt ab von der relativen Masse der Kugeln. Beim Uebergange der ursprünglichen Stossbewegung von Kugeln kleinerer Masse auf grössere wirkt der nach rückwärts gehende Impuls wie ein nach rückwärts ausgeübter Stoss. Beim Uebergange von Kugeln grösserer Masse auf kleinere dagegen wie ein Zug nach vorwärts, ausgeübt auf die an der Grenze befindliche grössere Kugel.

Der in dem ersten Falle nach rückwärts ausgeübte Stoss ist desto stärker, je grösser die Masse der grösseren Kugeln ist, er ist dagegen gleich Null, wenn die Kugeln sämmtlich gleich sind. Denkt man sich die grösseren Kugeln unendlich gross, so hat man denselben Fall wie beim Stosse auf eine feste elastische Wand oder den Fall, dass die letzte Kugelreihe festgehalten wird. Der ganze Impuls wird durch Reflexion am festen Ende nach rückwärts gerichtet. Denkt man sich dagegen die zweite Kugelreihe von unendlich kleiner Masse, d. h. ganz fehlend, so hat man eine einfache Kugelreihe mit freiem Ende, der nach rückwärts gehende Impuls wird negativ, d. h. ein Zug in der ursprünglichen Richtung.

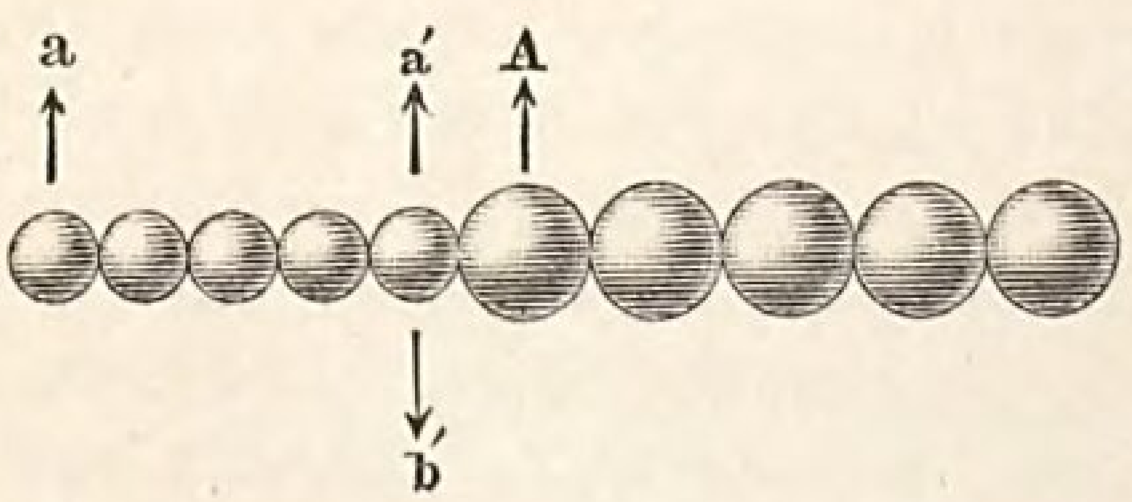
Stoss und Zug können als Verdichtung und Verdünnung aufgefasst werden. Man könnte daher sagen, dass bei der Reflexion am festen Ende die vorausgehende Verdichtung einer Welle als solche reflectirt werde, während am freien Ende die ankommende Verdichtung als Verdünnung zurückkehre. Es ist aber zweckmässiger, weil weniger

leicht irreführend, statt Verdichtung und Verdünnung die Richtung (das Zeichen) der Excursionen beziehungsweise die Schwingungsphase ins Auge zu fassen. Es ergiebt sich dann, dass bei der Reflexion am freien Ende die Excursionsrichtung (die Phase) unverändert bleibt, während bei der Reflexion am festen Ende die Excursionsrichtung das Zeichen wechselt, beziehungsweise die Phase in die entgegengesetzte verwandelt wird. Man sagt daher im letzteren Falle auch, es gehe bei der Reflexion eine halbe Welle verloren.

Zur experimentellen Bestätigung dieses wichtigen Satzes eignet sich ganz gut die im §. 180 beschriebene Wellenmaschine von Weinhold.

Es ist nun nicht schwierig, diese ganze Betrachtungsweise aus der longitudinalen Richtung in die transversale zu übertragen. Denken wir uns wiederum eine Reihe elastisch verbundener Kugeln, Fig. 648, von denen die zweite Gruppe grössere Masse besitzt, und stellen wir uns vor, dass die äusserste kleine Kugel einen Impuls in der Richtung des Pfeiles *a* erleide, der sich dann von Kugel zu Kugel fortpflanzt, bis endlich die letzte kleine Kugel die erste grosse in Bewegung setzen soll. Während bis dahin jede Kugel zur Ruhe kommt, da sie ihre ganze lebendige Kraft an die gleich grosse Nachbarkugel überträgt, ist dies bei der letzten nicht mehr der Fall, sie wird vielmehr in der Richtung nach *b'* zurückgestossen und dadurch zum Ausgangspunkte eines die kleinen Kugeln nach rückwärts durchlaufenden nach unten gerichteten Impulses. Gleichzeitig wird sich längs der grossen Kugeln ein Impuls nach oben, *A*, fortpflanzen.

Fig. 648.



Geht jedoch umgekehrt die Bewegung von den grossen Kugeln zu den kleinen über, so wird die letzte grosse Kugel von der kleinen nicht zurückprallen, auch nicht zur Ruhe kommen, sondern ihr nachfolgen und dadurch den Ausgangspunkt eines Impulses von derselben Richtung abgeben, der sich rückwärts durch die Kugelreihe fortpflanzt.

Auch hier kann man von der Annahme der Kugeln grösserer Masse oder kleinerer Masse zu den Extremen übergehen, indem man sich einmal die letzte Kugel ganz festgehalten, das andere Mal ganz frei beweglich denkt.

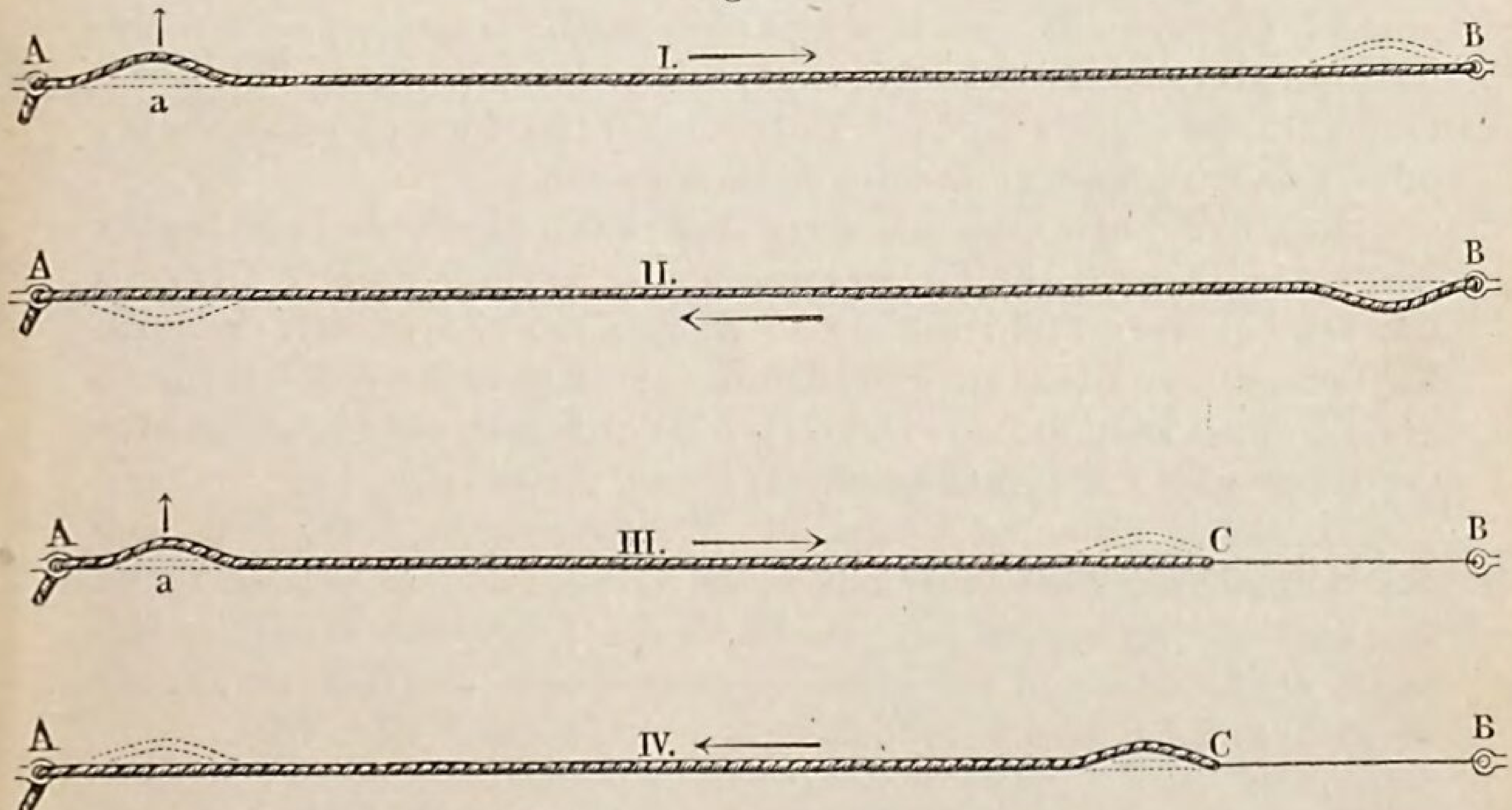
Die experimentelle Bestätigung dieses Falles gelingt ganz gut mit einer Reihe gleich weit abstehender Kugeln aus Holz oder Metall, welche man durch einen Kautschukstrang verbunden hat. Doch lässt sich dies auch schon mit einem gewöhnlichen starken Seile von etwa 6 m Länge zeigen.

Zu diesem Zwecke befestigen wir das eine Ende des Seiles an einem festen Haken *B*, Fig. 649, ziehen das andere Ende durch einen festen Ring und geben ihm durch Anziehen mit der linken Hand eine geeignete Spannung. Hierauf führen wir mittelst eines kantigen Schlä-

gels auf den Punkt *a* des Seiles einen starken raschen Schlag in horizontaler Richtung, wodurch eine Ausbiegung nach links (in der Zeichnung Fig. 649 I. nach oben gerichtet) entsteht, die nun rasch als Wellenberg nach *B* fortschreitet. Diese Bewegung erfolgt um so rascher, je stärker wir das Seil anspannen. Verfolgen wir nun mit Aufmerksamkeit die weiteren Bewegungen des Seiles, so bemerken wir, dass der Wellenberg von *B* aus auf die rechte Seite (in der Zeichnung nach unten) überspringt und von dort zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Daselbst springt er wieder auf die linke (obere) Seite zurück und wiederholt von da seinen vorigen Weg noch mehrere Male, bis endlich der Verlauf der Bewegungen undeutlich wird und das Seil zur Ruhe kommt.

Fig. 649 I. zeigt also den Zustand des Seiles am Anfange und Ende des Verlaufs der directen Welle, Fig. 649 II. dasselbe am Anfange und Ende der reflectirten Bewegung. Statt zu sagen, der Wellenberg springe auf die andere Seite über, drücken wir uns besser so aus, der Wellen-

Fig. 649.



berg komme als Wellenthal zurück, oder die Welle kehre mit entgegengesetztem Zeichen zurück. Man sieht ein, dass von *A* nach *B* stets nur ein Wellen**berg**, von *B* nach *A* stets nur ein Wellen**thal** fortschreitet; man hat also das Schema: Berg hin, Thal zurück, Berg hin, Thal zurück etc.

Um diese Reflexion am freien Ende zu zeigen, müssen wir ein frei bewegliches Seilende herstellen, was wir annähernd dadurch erreichen, dass wir dasselbe von *C* (Fig. 649 III.) an als ganz dünne Schnur sich fortsetzen lassen. Verfahren wir dann wie früher, so schreitet der Wellenberg zunächst bis *C* fort und geht dann auf **derselben** Seite, also ebenfalls als Wellen**berg** wieder nach *A* zurück (Fig. 649 IV.). Am dortigen festen Ende aber wird er als Thal reflectirt, geht als solches bis *C*, von dort wieder als Thal zurück, um bei *A* wieder als Berg reflectirt zu

werden. Diesmal verläuft also die Bewegung nach dem Schema: Berg hin, Berg zurück, Thal hin, Thal zurück, Berg hin, Berg zurück etc.

Wir haben es hier ursprünglich nur mit einem Wellenberge, also nur mit der Hälfte einer vollständigen Welle zu thun gehabt. Es ist leicht einzusehen, dass für eine vollständige Welle im Wesentlichen dasselbe gilt, da einfach das nachfolgende Wellenthal alle Bewegungen mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung wiederholt.

Statt eines horizontal ausgespannten gewöhnlichen Seiles bedient sich Tyndall eines vertical hängenden mit Sand gefüllten Gummischlauches, dessen oberes Ende an der Decke eines 6 bis 10 m hohen Zimmers befestigt ist. Die Füllung mit Sand hat den Zweck, bei gleicher Elasticität die Masse des Schlauches, also auch seine Schwingungsdauer, zu vergrössern.

Fassen wir das Vorgetragene zusammen, so können wir bezüglich der Reflexion der Longitudinal- wie der Transversalwellen folgende Sätze aussprechen.

So oft eine Wellenbewegung an die Grenze zweier Medien ungleicher Dichte gelangt, wird dieselbe zum Theil reflectirt, eine vollständige Reflexion tritt an der ganz festen oder ganz freien Grenze des Mediums ein.

Bei der Reflexion an dem dünneren Medium (am freien Ende) beginnen die Excursionen der reflectirten Welle mit unveränderter Richtung (mit demselben Zeichen); bei der Reflexion am dichteren Medium (am festen Ende) beginnen die Excursionen der reflectirten Welle mit entgegengesetzter Richtung (mit entgegengesetztem Zeichen).

Im ersten Falle kehrt also die Wellenbewegung um, ohne eine Verschiebung der Phase oder scheinbare Verzögerung zu erleiden. Im zweiten Falle verwandelt sich die Phase der reflectirten Welle im Momente der Reflexion in die entgegengesetzte oder die Wellenbewegung erleidet scheinbar eine Verschiebung um eine halbe Wellenlänge.

188 **Interferenz der Wellen; Princip der Coëxistenz der kleinen Bewegungen.** Wenn in einem elastischen Medium nicht bloss von Einem Punkte, sondern von zweien oder mehreren Punkten Wellenbewegungen ausgehen, so werden dieselben dort, wo sie zusammentreffen, eine resultirende Bewegung hervorrufen. Diesen Vorgang bezeichnet man im Allgemeinen mit dem Ausdrucke Interferenz der Wellen. Wollen wir auch hier an die Wasserwellen anknüpfen, so können wir uns vorstellen, dass in einen Teich mit ruhigem Wasserspiegel an zwei entfernten Stellen Steine hineingeworfen werden. Die um die Einfallstellen herum sich bildenden Kreise erweitern sich immer weiter, begegnen sich endlich, durchdringen sich und bringen so Interferenz der Wasserwellen hervor. Die Bewegungen innerhalb der Flächen, in denen sich die Kreise überdecken, erfolgen nach den allgemeinen mechanischen

Principien. Die Bewegung jedes Punktes ist die resultirende jener Einzelbewegungen, die der Punkt im betrachteten Augenblicke als Theil der einzelnen Wellen besitzen würde. Dadurch werden jedoch die Einzelbewegungen nicht vernichtet, noch wird dadurch die Fortpflanzung oder Ausbreitung der Wellen gestört, vielmehr setzen dieselben nach der Durchkreuzung ihre Wege fort, als ob Nichts vorgefallen wäre. Eine Ausnahme hiervon tritt nur im Falle sehr starker Excursionen ein, wie sie beispielsweise bei den von E. Mach studirten Explosionswellen vorkommen. Das angeführte Princip wird gewöhnlich das Princip der Coëxistenz der kleinen Bewegungen genannt.

Um an der Wasseroberfläche Interferenz zweier Wellenbewegungen hervorzurufen, ist jedoch nicht nöthig, zwei Steine hineinzuwerfen; da nämlich die an den Uferrand anstossenden Wellen daselbst reflectirt werden, so begegnen sie alsbald anderen directen oder ebenfalls reflectirten Wellen, mit denen sie dann interferiren. Die dabei auftretenden Erscheinungen können sehr complicirt sein. Um die Interferenzvorgänge zu studiren, müssen wir daher zunächst die einfachsten Fälle in Betrachtung ziehen. Wir beschränken uns daher zunächst auf isochrone Wellen, also Wellen gleicher Wellenlänge, welche längs eines und desselben linearen Mediums zu Stande kommen. Da ferner, wie eben bemerkt wurde, die Transversalwellen leichter zu übersehen sind als die longitudinalen, so wollen wir die Interferenzvorgänge zuerst an den ersteren studiren und dann die Ergebnisse auch auf die letzteren übertragen.

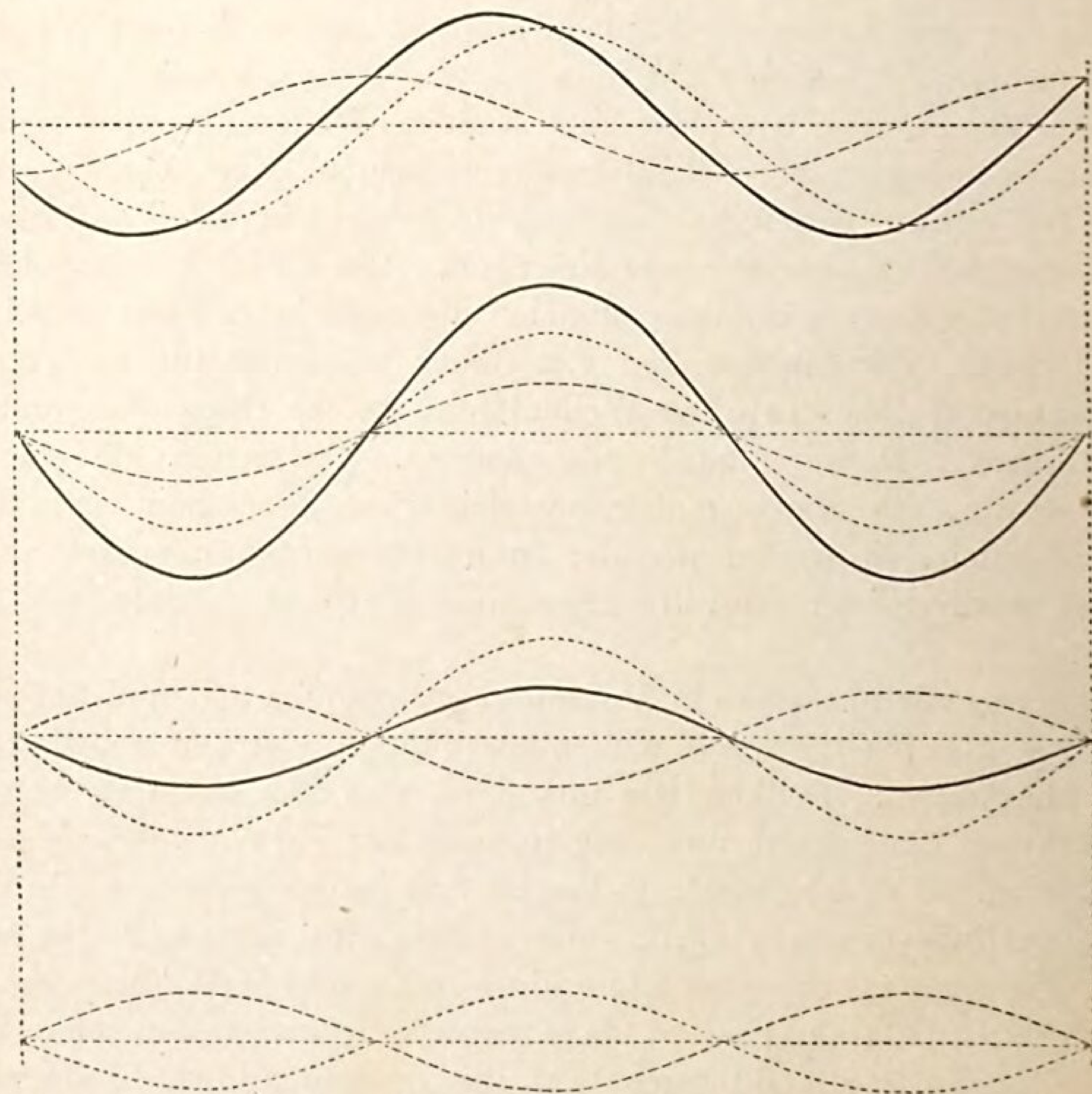
Denken wir uns also ein horizontal gespanntes Seil und auf dieses irgendwie gleichzeitig zwei Wellenbewegungen gleicher Schwingungsdauer übertragen. Denken wir uns dann das Seil plötzlich in seiner momentanen Lage fixirt und fragen nach der Form, welche dasselbe zeigen wird. *AB*, Fig. 650 I., stelle das Seil in der Ruhelage, die punktirte Sinuslinie die eine Welle, die gestrichelte Sinuslinie die zweite Welle, die ganz ausgezogene Linie die resultirende Wellenlinie vor. Die letztere wird dadurch erhalten, dass man die Ordinaten der componirenden Wellengänge mit Rücksicht auf ihr Zeichen addirt. Excursionen nach oben geben also wieder eine solche nach oben von einer Höhe gleich der Summe der einzelnen. Ebenso Excursionen nach unten. Entgegengesetzte Excursionen geben eine solche nach der Richtung der grösseren Componente und zwar von einer Höhe gleich der Differenz der Componenten. In diesem Beispiele haben die Wellen einen Gangunterschied von $^1/_{12}$ Wellenlänge.

Die Fig. 650 II. zeigt das Resultat für den Fall, dass die Wellen ohne Gangunterschied zusammentreffen, Fig. 650 III. den Fall, wo der Gangunterschied genau gleich der halben Wellenlänge ist. Sind ausserdem die Amplituden der beiden Wellen gleich gross, so hat dies, wie in Fig. 650 IV. dargestellt, den Erfolg, dass momentan alle Punkte des Seiles sich in der Ruhelage befinden.

Um sich die Ableitung der resultirenden Wellenform in diesen so wie in anderen später zu erörternden Wellencombinationen zu erleichtern, kann man sich eines einfachen Apparates bedienen, den ich vor längerer Zeit für Vorlesungszwecke construirt habe*).

Fig. 651 zeigt diesen Apparat im Aufriss sowie in einem Verticaldurchschnitte nach *ab*. An einem vertical gestellten geschwärzten Brette *BB*, welches als Rückwand dient, sind 72 schwarz polirte Stäbchen $s_1 s$ von quadratischem Querschnitte parallel zu einander vertical

Fig. 650.

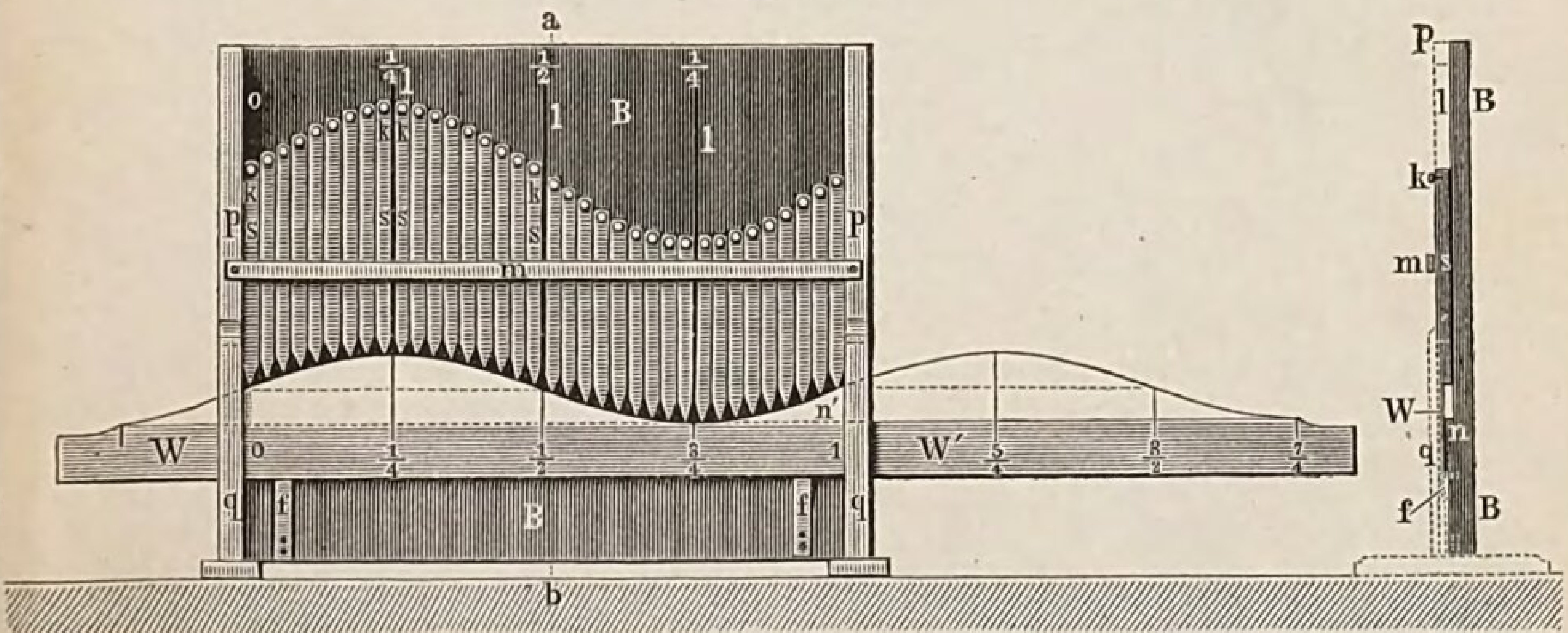


aufgestellt. Die unteren Enden der Stäbchen sind keilförmig zugeschnitten, so dass die abgerundete Schneide des Keiles von rückwärts nach vorn gerichtet ist. Mit der rückwärtigen Hälfte dieser Schneide ruhen die Stäbchen auf einem Vorsprunge $n n'$ der Hinterwand auf. Die Länge dieser Stäbchen ist ungleich und so bemessen, dass die an den oberen Enden derselben befestigten weissen Knöpfe k, k eine Sinuscurve von der Länge einer Welle darstellen und zwar von derselben Amplitude, wie die Welle, welche durch den oberen Rand des Brettchens $W W'$ gebildet

*) Apparate ähnlicher Art sind schon früher von E. Brücke und noch früher von Dove benutzt worden.

wird. Dieses Brettchen kann von seitwärts durch die geschlitzten Leisten $q'q$ durchgeschoben werden, wobei die Stäbchen von ihrer geradlinigen Unterlage abgehoben werden und mit der vorderen Hälfte ihrer Schneiden auf den wellenförmigen Rand des Brettchens WW' zu stehen kommen. f, f sind zwei Stahlfedern, welche sich in die Hinterwand zurückdrücken lassen und dann das Brettchen WW' herabzulassen gestatten, wodurch sämmtliche Stäbchen wieder auf ihre geradlinige Unterlage abgesetzt werden, so dass sich ihre ursprüngliche Welle herstellt. Hebt man dann das Brettchen WW' in dieser oder in irgend einer anderen horizontal verschobenen Lage wieder empor, so schnappen die Federn f, f vor und tragen das Brettchen in der entsprechenden Höhe, wobei die Knöpfe die dem jeweiligen Gangunterschiede entsprechend combinirte Welle darstellen. Bei Anwendung von Wellen mit geringer Neigung kann man das Brettchen auch verschieben, während es die Stäbchen trägt und so den Einfluss allmäliger Phasenänderung

Fig. 651.



demonstriren. Damit hierbei die Stäbchen nicht zu stark seitlich gedrückt und dadurch unbeweglich werden, sind in Zwischenräumen dünne Blechstreifen als verticale Führungen l, l an der Hinterwand befestigt, welche nur so weit hinunterreichen, dass die freie Verschiebung der Welle möglich ist. Die Holzleiste m verhindert das Vorfallen der Stäbchen.

Die Figur zeigt den Apparat in der Lage, wo zwei Wellen ohne Gangunterschied zusammengesetzt eine Welle mit doppelt so grosser Amplitude geben.

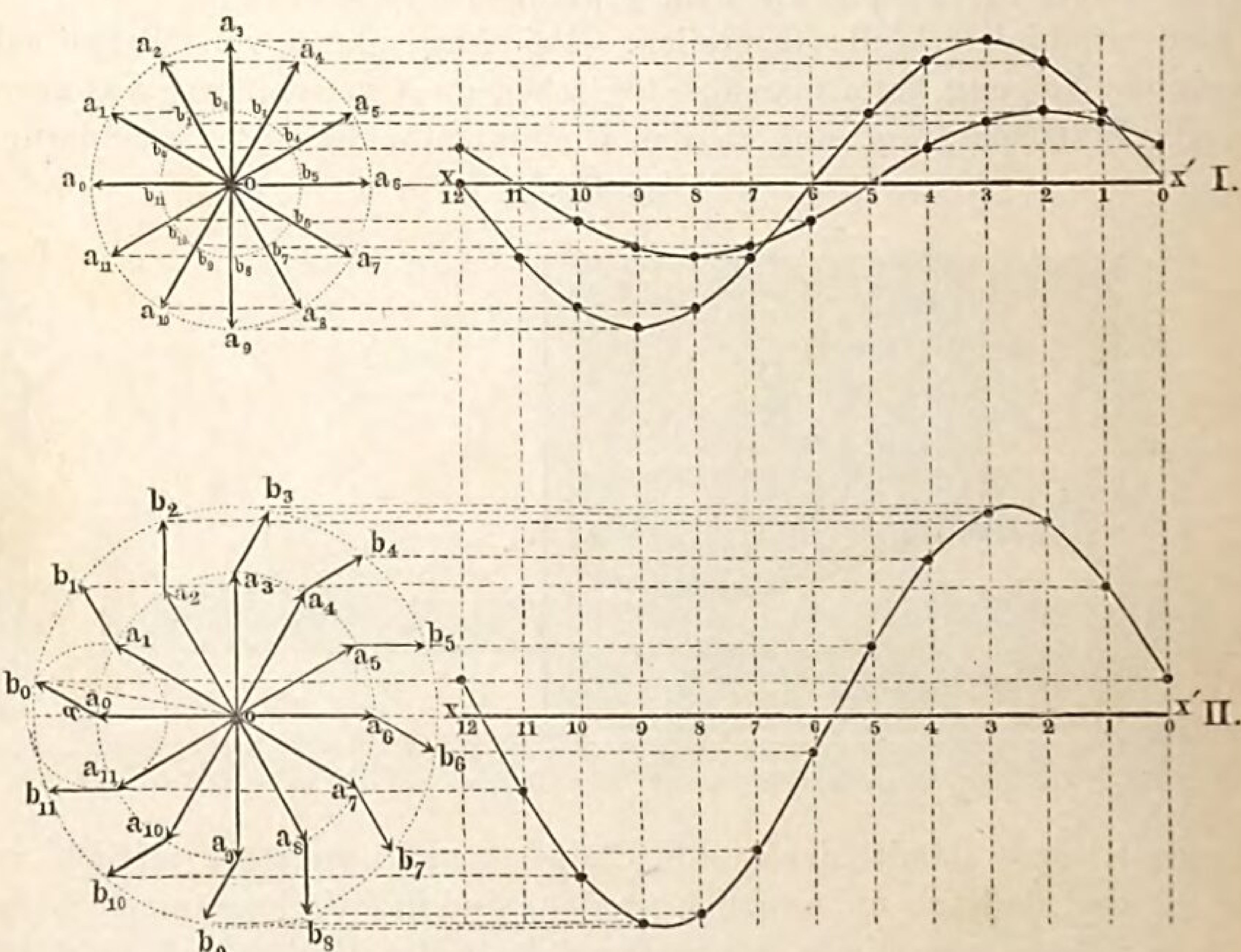
Der Apparat gestattet mancherlei Abänderung; so z. B. kann man dieselben Stäbchen leicht zu zwei Wellen von halb so grosser Wellenlänge zusammenstellen, indem man zur ersten Welle alle ungeraden, zur zweiten alle geraden Nummern derselben nimmt. Ausserdem hat man verschiedene Brettchen WW' mit anderen Wellenzügen zur Verfügung.

Dass durch die Zusammensetzung zweier Sinuscurven gleicher Wellenlänge von beliebiger Amplitude und beliebigem Gangunterschiede

immer wieder eine Sinuscurve von derselben Wellenlänge hervorgehen müsse, lässt sich *) auf folgende einfache Weise durch Construction zeigen.

Wie seinerzeit erklärt wurde (§. 43, S. 184), erhält man die Sinuscurve aus der Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung. Ein Punkt, welcher zwischen a_3 und a_9, Fig. 652 I., hin- und herschwingt, hat in jedem Momente von der Geraden a_0 a_6 denselben Abstand, wie die Spitze eines Zeigers von der Länge der Amplitude, welcher mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um O als Achse im Kreise herumgeführt wird. Dabei muss natürlich die Umlaufszeit des Zeigers gleich

Fig. 652.



der Dauer einer Doppelschwingung sein und die Bewegung der Zeigerspitze in a_0 beginnen, wenn die Schwingung von O an beginnt. Trägt man die Verticalabstände, welche die Zeigerspitze nach gleichen Bruchtheilen der Umlaufszeit, also nach gleichen Winkelfortschritten erreicht, als Ordinaten auf gleich weit abstehenden Punkten der Abscisse $x\,x'$ auf, so erhält man die eine Sinuscurve der Figur I.

Auf ganz gleiche Weise erhielte man die zweite Sinuscurve der Fig. 652 I., welche sich nur durch kleinere Amplitude und einen Gangunterschied von $^1/_{12}$ Wellenlänge von der früheren unterscheidet. Diese beiden Sinuscurven zusammensetzen, heisst, jene Curve aufsuchen,

*) Nach E. Mach.

welche durch einen schwingenden Punkt entsteht, welcher, während er die Schwingungen nach der grösseren Curve durchmacht, auch noch zu Schwingungen nach der kleineren verhalten wird. Um dies herzustellen, können wir uns denken, dass sich ein kleinerer Zeiger von der Länge der Amplitude Ob_0 um die Spitze des grösseren Zeigers a_0 als Achse im Kreise herumbewege (Fig. 652 II). Für isochrone Schwingungen müssen wir dabei annehmen, dass beide Zeiger gleichzeitig einen ganzen Umlauf vollenden, wobei ihre Winkellagen relativ zur Abscisse zu nehmen sind. Die relative Lage beider Zeiger zu einander bleibt dann offenbar stets dieselbe, wie wenn sie starr verbunden wären. Dem Gangunterschiede der Wellen, beziehungsweise der Phasendifferenz der Schwingungen, entspricht der constante Winkel φ, welchen die Verlängerung des Zeigers $O\,a_0$ mit dem Zeiger $a_0\,b_0$ bildet. In Fig. 652 ist dieser Winkel $\varphi = 30^0$, also die Phasendifferenz $= {}^1/_{12}$ angenommen. Da bei der Constanz des Winkels φ die Spitze des Zeigers b_0 ebenso einen Kreis beschreiben muss, wie das Ende einer geraden Verbindungslinie $O\,b_0$, so erhellt sofort, dass wiederum eine Sinuscurve entstehen muss, und zwar von gleicher Wellenlänge, da ja auch die Umlaufszeit (die Schwingungsdauer) der combinirten Bewegung dieselbe ist. Die Figur lässt auch sofort erkennen, wie sich die Amplitude der zusammengesetzten Welle und ihr Gangunterschied gegenüber den componirenden Wellen durch einfache Construction des Dreiecks $O\,a_0\,b_0$ auffinden lässt. Man hat nur mit den Amplituden $O\,a_2$ und $a_0\,b_0$ der Componenten das Dreieck mit dem Aussenwinkel φ entsprechend der Phasendifferenz zu construiren. Die dritte Seite $O\,b_0$ dieses Dreiecks ist dann die resultirende Amplitude, der Winkel $a_0\,O\,b_0$ entspricht dem Gangunterschiede der resultirenden Welle mit der ersten Componente. Man übersieht sofort, dass die resultirende Amplitude von dem Gangunterschiede wesentlich abhängt, dass sie am grössten für $\varphi = 0$, am kleinsten für $\varphi = 180$ wird; dass sie im Maximum gleich der Summe, im Minimum gleich der Differenz der Amplituden der Componenten wird.

Mathematische Darstellung der Wellenbewegung. Um 189
die längs eines linearen Mediums, z. B. längs eines Seiles, entstehenden Wellenbewegungen mathematisch darzustellen, hat man Gleichungen zu entwickeln, welche gestatten, die momentanen Excursionen jedes Punktes, sowie seine momentane Geschwindigkeit für jeden beliebigen Zeitpunkt zu berechnen. Diese Gleichungen gründen sich auf jene der schwingenden Bewegung eines Punktes, auf welchen eine Kraft einwirkt, welche in jedem Momente proportional dem Abstande des Punktes von seiner Ruhelage ist. Diese Bewegungsart, welche harmonische Bewegung oder auch Pendelbewegung genannt wird, haben wir im §. 43 untersucht und sind dabei zur Aufstellung der Gleichungen gelangt, die wir, nach einigen Aenderungen in der Bezeichnung, nachfolgend wieder aufführen.

Es stelle in Fig. 653 Ox den elastischen Körper (das Seil) in seiner Ruhelage vor. Das Ende O werde zu Schwingungen längs AB angeregt, welche sich längs Ox fortpflanzen und daselbst die Transversalwelle erzeugen. Es bedeute:

$a = OA = OB$ die Amplitude,
y den momentanen Abstand oy des schwingenden Punktes (nach aufwärts positiv, nach abwärts negativ gerechnet),
v_0 die Geschwindigkeit im Punkte O,
v „ „ „ Abstande y,
T die Dauer einer Doppelschwingung,
t die Zeit seit Beginn der Bewegung von O nach aufwärts.

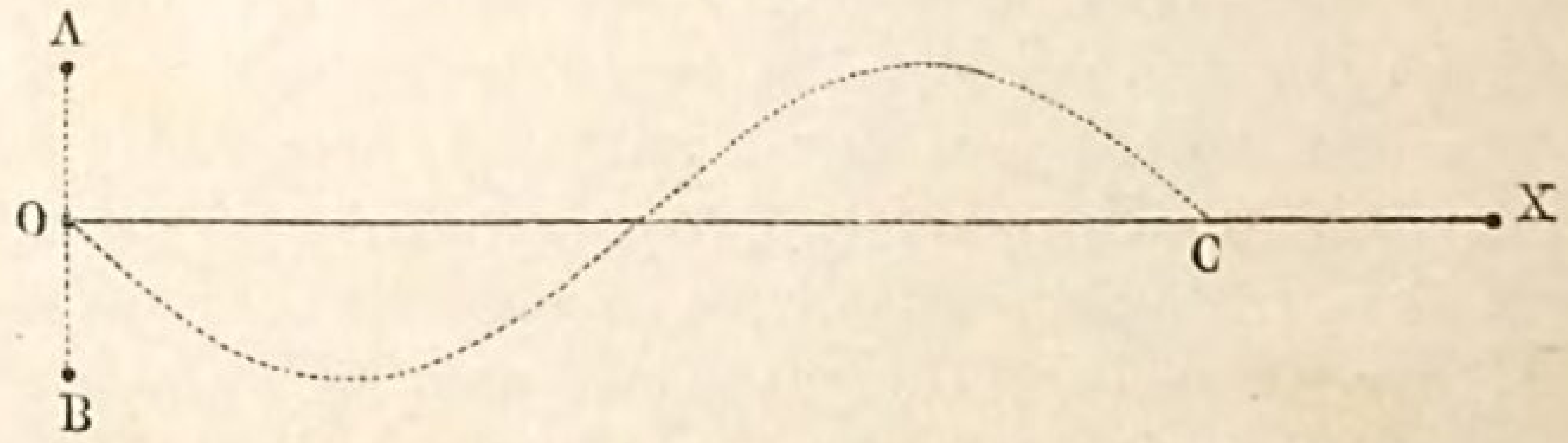
Es gilt dann für die Excursionen die Gleichung:

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

für die Geschwindigkeiten:

$$v = v_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Fig. 653.



Bedeuten ferner:

C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,
λ die Wellenlänge,

so besteht nach §. 183 der Zusammenhang:

$$\lambda = CT.$$

In einem Abstande x vom Punkte O an nach rechts kommt die Welle an in der Zeit $t = \frac{x}{C}$, zu dieser Zeit beträgt der Werth von y für den Punkt O:

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin 2\pi \frac{x}{CT} = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Um diesen Betrag von y, nämlich um $a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$, ist daher in Bezug auf die Excursion ein Punkt der Welle einem anderen voraus, welcher um die Strecke x weiter vom Ausgangspunkte entfernt liegt. Um denselben Betrag ist also der letztere im Rückstande.

Nehmen wir daher allgemein als Nullpunkt der Abscisse einen Punkt, welcher in der Zeit t erreicht wird, so ist daselbst der Werth von $y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, für den um die Strecke x weiter entfernten Punkt aber ist

also
$$\left.\begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ v &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Eine weitere Aufgabe, welche durch Rechnung zu lösen ist, ist folgende. Es seien zwei Wellen gleicher Wellenlänge λ zusammenzusetzen, deren Amplituden a und a' sind, welche gegen einander einen Gangunterschied $= d$ besitzen. Es soll die resultirende Amplitude A und der Gangunterschied der resultirenden Welle D gegenüber einer der beiden componirenden Wellen bestimmt werden.

Diese Aufgabe könnte folgendermaassen angefasst werden. Nach 1) ergeben sich für die Excursionen y und y' die Werthe:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right)$$

für die Excursionen Y der combinirten Welle ist nun die Summe dieser Ausdrücke zu bilden. Diese führt nach einer Reihe von Umformungen auf einen Ausdruck von der Form:

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{D}{\lambda}\right),$$

worin für A zu setzen ist:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2\,a\,a' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Zur Ermittelung von D gilt:

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Statt diesen Weg auszuführen, wollen wir übersichtlicher und einfacher mittelst der im §. 188 mitgetheilten Construction (Fig. 652 II) zum Ziele gelangen. Dieselbe lässt unmittelbar erkennen, erstens, dass die resultirende Welle wiederum eine Sinuscurve ist, zweitens, dass die Dreiecksseite $O\,b_0$ gleich der resultirenden Amplitude A ist, endlich, dass der Winkel $a_0\,O\,b_0$ der Phasendifferenz zwischen der resultirenden Welle und der Welle von der Amplitude $O\,a_0$ entspricht.

Bezeichnen wir also $O b_0$ mit A, $O a_0$ mit a, $a_0 b_0$ mit a', den Winkel $a_0 O b_0$ mit ψ, so folgt aus dem Dreiecke nach dem Carnot'schen Satze unmittelbar:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2 a a' \cos \varphi}.$$

Aus der Proportion

$$\varphi : 2\pi = d : \lambda$$

folgt aber $\varphi = \frac{2 \pi d}{\lambda}$, mithin:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2 a a' \cos \frac{2 \pi d}{\lambda}},$$

wie oben unter 2).

Aus demselben Dreiecke folgt:

$$A : a' = \sin \varphi : \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{a' \sin \varphi}{A} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2 \pi d}{\lambda}.$$

Aus der Proportion

$$\psi : 2\pi = D : \lambda$$

folgt

$$\psi = \frac{2 \pi D}{\lambda},$$

also, indem wir dies oben einsetzen:

$$\sin \frac{2 \pi D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2 \pi d}{\lambda}$$

wie oben unter 3).

D ist der Gangunterschied zwischen der resultirenden Welle und jener Welle mit der Amplitude a, der Gangunterschied zwischen der resultirenden und der anderen componirenden Welle muss daher $d - D$ sein.

Die Formel 2) lässt erkennen, was die Fig. 652 II sofort übersehen lässt, dass für $\varphi = 0$, d. h. wenn $d = 0$ oder $= n \lambda$ (wo n eine ganze Zahl ist) $A = a + a'$ wird, welches der Maximalwerth ist.

Ebenso ergiebt sich für $\varphi = 180$:

$$A = a - a';$$

hierbei ist der Gangunterschied d gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$. Sind überdies die beiden Amplituden a und a' gleich gross, so folgt:

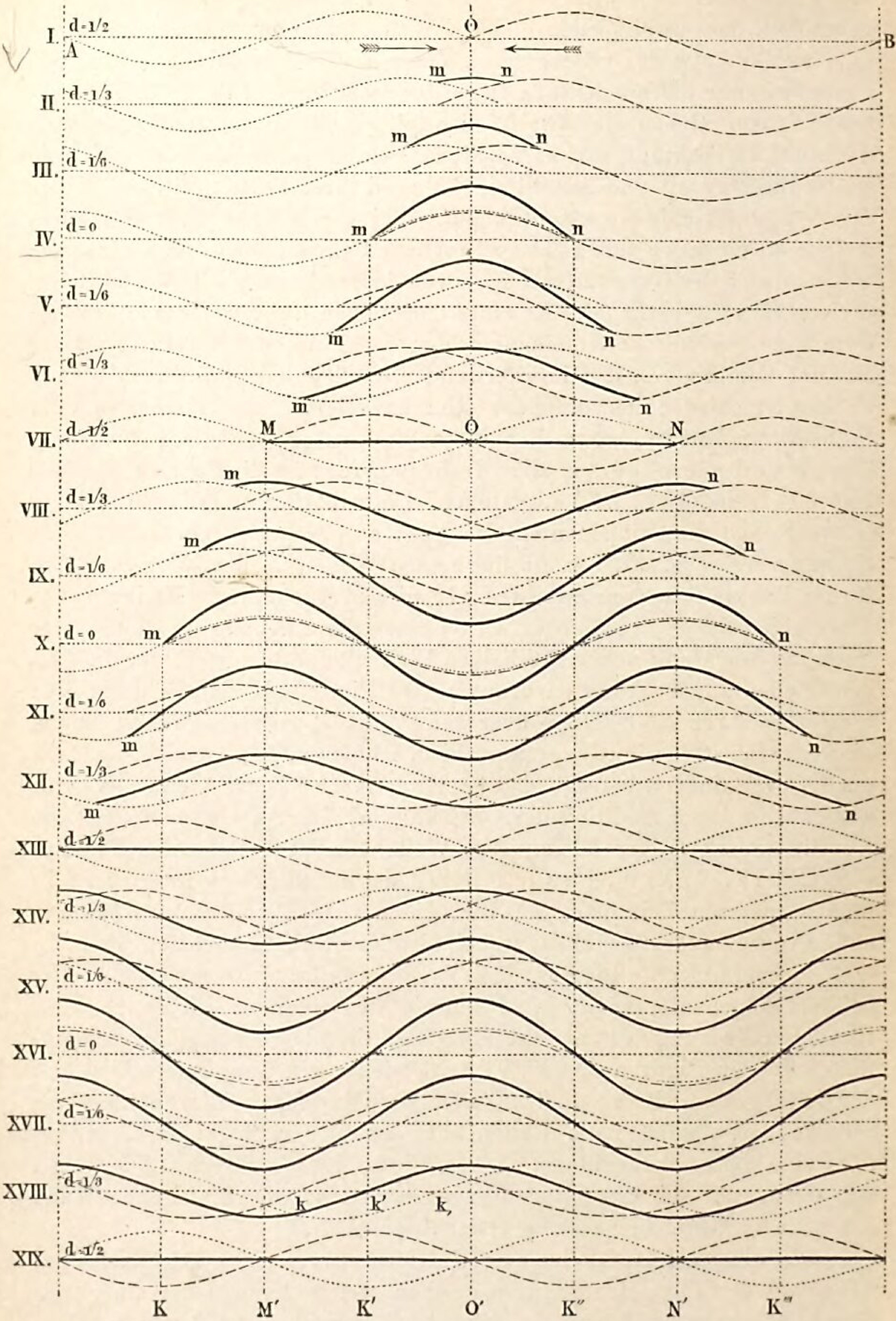
$$A = a - a' = 0.$$

Beträgt bei gleichen Amplituden der Gangunterschied $^1/_4$ Wellenlänge, so ist $\varphi = 90^0$, daher $\psi = 45^0 = {}^1/_8 \,.\, 360$; mithin ist die resultirende Welle gegen beide componirenden um einen Gangunterschied von $^1/_8\, \lambda$ verschoben.

Interferenz sich begegnender Wellen, Bildung stehender Wellen. In den vorangehenden Paragraphen wurde der Fall behandelt, dass zwei Wellen gleicher Wellenlänge zur Interferenz gelangen, welche entweder relativ zu einander nicht fortschreiten, oder von denen wir nur die momentane Lage der resultirenden Welle in Betrachtung ziehen. Gehen also zwei Wellen mit gleicher Geschwindigkeit nach derselben Richtung vor, so behält nothwendiger Weise die resultirende Welle ihre Gestalt und Amplitude während ihres Fortschreitens bei, da der Gangunterschied constant bleibt. Bei der Interferenz von Wellen, welche zu einander eine relative Geschwindigkeit haben, also sich begegnen, ist der Gangunterschied ein in jedem Augenblicke wechselnder, periodisch veränderlicher. Es muss daher auch die resultirende Wellenform eine periodische Aufeinanderfolge der Formen darstellen, welche aus der Combination der interferirenden Wellen bei den verschiedenen Gangunterschieden hervorgehen. Um zu zeigen, was hierbei in dem Falle herauskommt, wo sich endlose Wellenzüge gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude begegnen, ist die Construction der Fig. 654 I bis XIX (a. f. S.) ausgeführt. Die punktirte und die gestrichelte Curve stellen die Componenten, die ganz ausgezogene Curve die Resultirende vor. Fig. 654 I zeigt die beiden Wellen in dem Momente, wo sie im Punkte O zusammentreffen. In diesem Augenblicke ist ihr Gangunterschied $d = \frac{1}{2}\lambda$; denn es würde einer Verschiebung im Sinne ihrer Bewegungsrichtung von einer halben Wellenlänge bedürfen, um die beiden Wellen zur Deckung zu bringen. In Fig. 654 II sind beide Wellen um je $\frac{1}{12}$ ihrer Wellenlänge über den Punkt O, wo sie sich begegneten, hinweggeschritten; ihr Gangunterschied, früher $= \frac{6}{12}$, hat sich demnach um $\frac{2}{12}$ vermindert, beträgt also jetzt nur mehr $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ einer Wellenlänge. Die durch Addition der Ordinaten erhaltene Curve mn stellt die resultirende Form der combinirten Welle vor. Die folgenden Figuren 654 III, IV, V, VI und so fort stellen das Resultat der Interferenz in immer späteren Zeitmomenten vor, die um je $\frac{1}{12}$ der Schwingungsdauer von einander abstehen, wobei also der Gangunterschied sich um je $\frac{2}{12}\lambda$ verändert. In Fig. 654 IV ist derselbe $= 0$ geworden. Die beiden Componenten kommen, so weit sie über einander greifen, zur vollständigen Deckung, es entsteht eine Resultirende von doppelter Amplitude. In den Figuren 654 V, VI tritt wieder ein Gangunterschied auf, der in Fig. 654 VII eine halbe Wellenlänge erreicht. Hier beträgt die Strecke, längs welcher die Wellen über einander zu liegen kommen, bereits eine ganze Wellenlänge. Längs dieser ganzen Strecke MN heben sich momentan alle Excursionen gegenseitig auf, die resultirende Welle hat momentan die Form der geraden Linie MN. 190

Die weitere Entwickelung des Interferenzvorganges lässt sich nun sofort aus den folgenden Figuren ersehen, welche kaum mehr einer weiteren Erklärung bedürfen. In Fig. 654 X kommt es wieder zur vollen Unterstützung, in Fig. 654 XIII dagegen zur gegenseitigen Aufhebung der

Fig. 654.


I. d = 1/2
A
O
B
II. d = 1/3
III. d = 1/6
IV. d = 0
V. d = 1/6
VI. d = 1/3
VII. d = 1/2
M
O
N
VIII. d = 1/3
IX. d = 1/6
X. d = 0
XI. d = 1/6
XII. d = 1/3
XIII. d = 1/2
XIV. d = 1/3
XV. d = 1/6
XVI. d = 0
XVII. d = 1/6
XVIII. d = 1/3
XIX. d = 1/2
m
n
k
k'
k,
K
M'
K'
O'
K''
N'
K'''

Excursionen. Die Interferenz erstreckt sich nunmehr auf zwei Wellenlängen. Setzen wir die Zeichnung innerhalb dieses Rahmens fort, so ergiebt sich bei Fig. 654 XVI neuerdings Verdoppelung, bei Fig. 654 XIX Aufhebung der Excursionen.

Bezüglich der resultirenden Welle lässt sich nun Folgendes entnehmen. Erstens muss dieselbe, wie im §. 188 nachgewiesen wurde, immer wieder die Form einer Sinuscurve haben und zwar von gleicher Wellenlänge. Zweitens ergiebt die Construction, dass die resultirende Welle nicht fortschreitet, sondern an der Stelle bleibt. Die Maxima der Ordinaten sind nämlich offenbar stets symmetrisch in der Mitte der Maxima der Componirenden gelegen. Da die letzteren aber von beiden Seiten gleich schnell zusammenrücken, so kann das Maximum der Resultirenden nicht von der Stelle rücken. Sämmtliche Bäuche der Resultirenden bleiben also unter den Verticallinien MM', $O\,O'$, NN', ändern daselbst ihre Höhe, aber nicht ihren Platz.

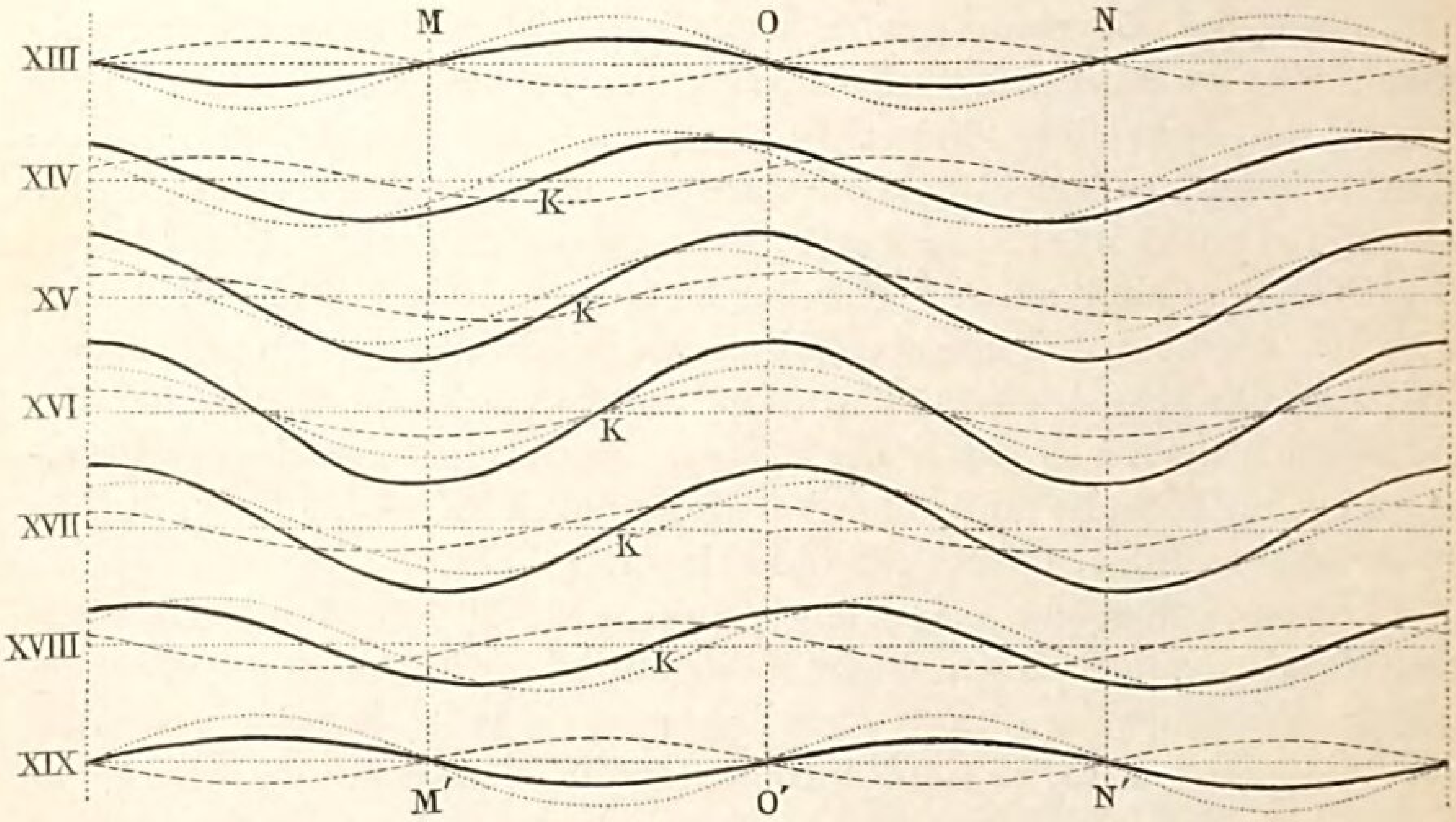
Ebenso übersieht man sofort, dass die Nullexcursionen (Knotenpunkte) der resultirenden Welle in der Mitte zwischen den Nullexcursionen der componirenden Wellen liegen und dort an der Stelle verbleiben müssen. Also z. B. der Knotenpunkt k' zwischen k und k_1 in Fig. 654 XVIII. Es bleiben also sämmtliche Knotenpunkte der resultirenden Curve an den über K, K', K'', K''' errichteten Verticallinien stehen.

Das Resultat der Interferenz zweier gegen einander fortschreitender Wellen gleicher Wellenlänge und Amplitude ist also eine stehende Welle gleicher Wellenlänge und doppelter Amplitude. Eine solche stehende Welle hat das Charakteristische, dass ihre Berge und Thäler nicht fortschreiten, sondern auf derselben Stelle mit einander wechseln. Dabei gehen alle Punkte des schwingenden Körpers gleichzeitig durch die Ruhelage und erreichen auch gleichzeitig die äussersten Excursionen. Lässt man also auf irgend eine Weise längs eines gespannten Seiles von beiden Seiten einander endlose Wellenzüge entgegengehen, so theilt sich das Seil in Partien von je einer halben Wellenlänge ab, welche, wie die Figuren 654 XIII bis XIX zeigen, gleichzeitig und zwar zweimal während der ganzen Dauer einer Einzelschwingung geradlinig werden und dazwischen in abwechselnd entgegengesetzter Richtung Ausbauchungen annehmen.

Wären die Amplituden der beiden Wellenzüge nicht gleich gross, so könnte man sich die Welle mit der grösseren Amplitude in zwei Wellen zerlegt denken, von denen die erste eine gleiche Amplitude hätte mit der entgegenbewegten. Diese beiden würden dann für sich eine stehende Welle abgeben. Der Ueberschuss der Amplitude der zweiten Welle entspricht dann einer fortschreitenden Welle. Unter diesen Umständen gehen dann nicht mehr alle Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage, wie bei der reinen stehenden Welle; sowohl die Bäuche als die Knoten haben eine fortschreitende Bewegung. Die Fig. 655 (a. f. S.) stellt

hierfür ein Beispiel vor. Die römischen Ziffern deuten die analogen Fälle der Fig. 654 an. Die Amplitude der gestrichelten Componente ist

Fig. 655.



halb so gross als die der punktirten; im Uebrigen bedarf die Figur wohl keiner Erklärung.

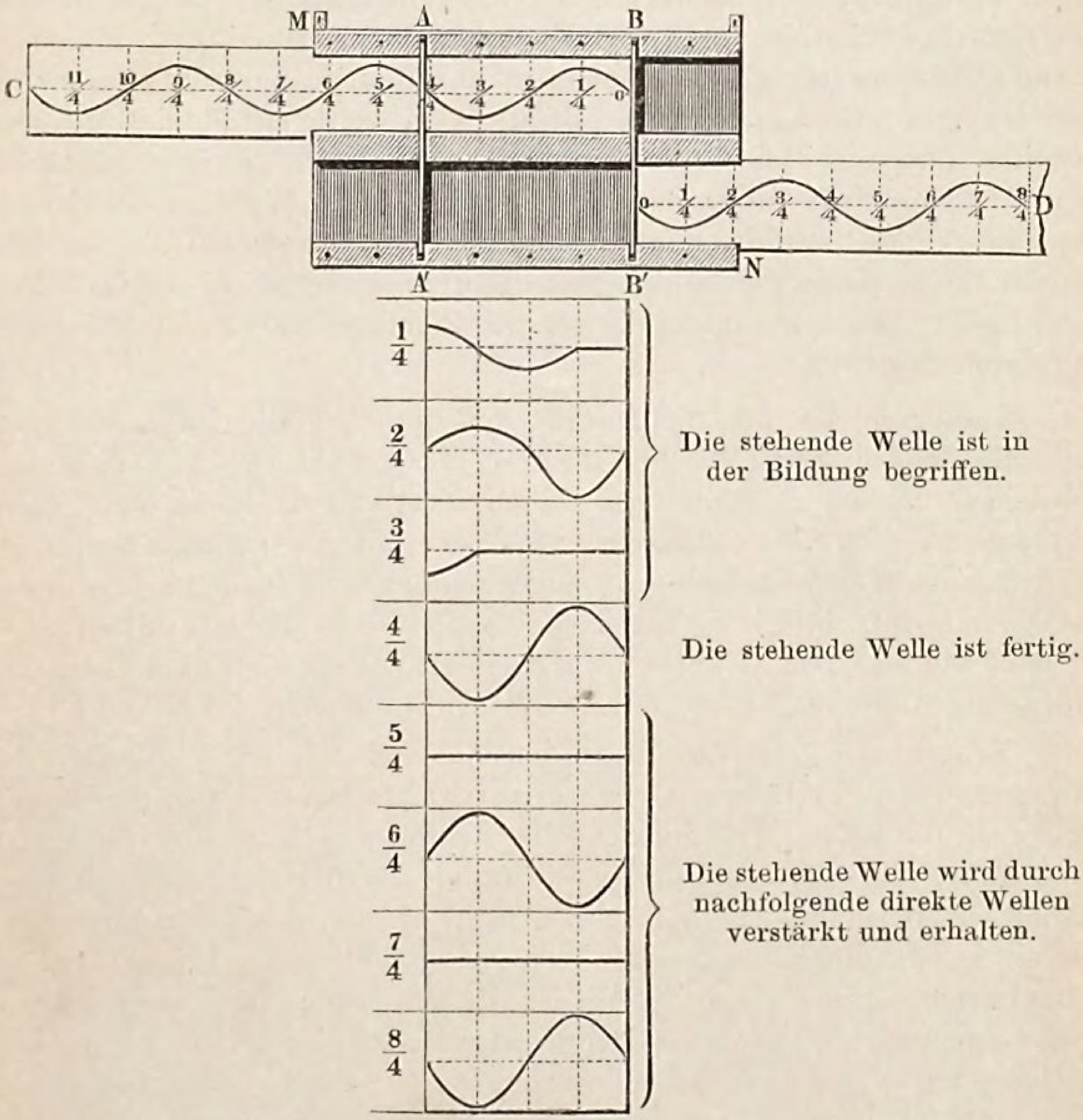
191 Stehende Wellen in Folge Interferenz directer fortschreitender mit reflectirten Wellen; Melde's Versuche.

Die in dem vorausgegangenen Paragraphen gewonnenen Resultate verbunden mit jenen des §. 187 über die Reflexion am festen oder freien Ende des elastischen Körpers führen nun zusammen zur Erklärung der sehr häufigen und wichtigen Thatsache, dass durch das Zusammenwirken directer fortschreitender Wellen mit solchen, welche nach ihrer Reflexion zurückkehren, stehende Schwingungen sich bilden. Damit das jedoch eintreten könne, muss zwischen den Dimensionen des elastischen Körpers und der Wellenlänge ein gewisses Verhältniss obwalten. Da aber die Wellenlänge wiederum von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl abhängt, so ergeben sich daraus die Bedingungen, unter welchen ein elastischer Körper durch auf ihn einwirkende Schwingungen gegebener Tonhöhe ins Mitschwingen oder in „Resonanz" versetzt werden kann.

Zunächst soll gezeigt werden, wie an einem an beiden Enden befestigten gespannten Seile stehende Wellen durch Interferenz der directen mit den reflectirten entstehen können. Hierbei leistet eine einfache Vorrichtung wesentliche Dienste, welche in Fig. 656 in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse abgebildet ist. Auf dem Brettchen *MN* sind zwischen parallelen Leisten Streifen von Pappe (*CD*) verschiebbar, auf welchen

Wellencurven nebst ihren Abtheilungen in Viertelwellen gezeichnet sind. Zwei andere Leisten AA' und BB' können in Abständen gleich Vielfachen von $^1/_4$ Wellenlänge vertical und parallel befestigt werden. In der Fig. 656 stehen sie z. B. eine Wellenlänge von einander entfernt. Diese beiden Leisten stellen die Befestigungsstellen des gespannten Seiles vor. Die ganze Vorrichtung wird auf der Wandschreibtafel aufgehängt,

Fig. 656.



so dass unmittelbar darunter die resultirenden Curven gezeichnet werden können. Der Leser wird es vortheilhaft finden, sich die Wellensysteme (in grösserem Maassstabe) auf Papierstreifen zu zeichnen, und auf dem Tische unter zwei Linealen, welche die Verticalleisten vertreten, an einander zu verschieben.

Beginnen wir mit dem Falle, dass die Länge des Seiles gleich der Wellenlänge, so erhalten die Leisten AA' und BB' die in Fig. 656 gezeichnete Lage. Nehmen wir ferner an, beide Enden seien befestigt; der Wellenberg wird also stets als Wellenthal, Wellenthal

als Wellenberg reflectirt. Die Figur zeigt den Moment, wo die directe Welle an BB' anstösst. Von hier beginnt die Interferenz; wir finden ihr Resultat in den auf einander folgenden Zeitpunkten nach $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ etc. Schwingungsdauer, indem wir beide Streifen gegen BB' verschieben, die Bezifferungen $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ etc. an die Innenkante von BB' stellen und dann die algebraische Summe der Excursionen construiren. Dies ist in der Fig. 656 durchgeführt. Zum besseren Verständniss ist es zweckmässig, noch mehrere Unterabtheilungen zu machen, z. B. den Zustand des Seiles für je $^1/_{12}$ Schwingungsdauer auszumitteln. Man erkennt leicht, dass nach einer ganzen Schwingungsdauer die zum zweiten Male reflectirte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden zweiten directen Welle zusammenfällt, also durch dieselbe verstärkt wird. Man ersieht ferner, dass die fertige, stehende Welle an den Enden und in der Mitte ruhig stehende Punkte, d. h. Knotenpunkte, besitzt, durch welche sie in zwei schwingende Hälften zerlegt wird, welche beide gleichzeitig, aber in entgegengesetzter Richtung durch die Ruhelage hindurchschwingen.

Verkürzen wir nun die Distanz AB um $^1/_4$ Wellenlänge, so dass also die beiden Verticalleisten noch $^3/_4$ Wellenlänge von einander abstehen. Die Durchführung der obigen Construction ergiebt dann, dass die zum zweiten Male reflectirte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden Wellenbewegung in entgegengesetzter Schwingungsrichtung zusammentrifft, mithin die directen Wellen durch die reflectirten vernichtet werden. Da dies mit jeder folgenden Welle sich wiederholt, so entstehen in diesem Falle gar keine stehenden Wellen.

Nehmen wir jetzt die durch den Abstand AB der Verticalleisten vorgestellte Seillänge gleich einer halben Wellenlänge (indem wir z. B. die Leiste AA' auf die Mitte zwischen AA' und BB' stellen) und führen dieselbe Construction wie früher durch, so erhalten wir eine Reihe von Zeichnungen, welche wir nicht eigens abzubilden brauchen, da sie vollständig mit denen der rechtsseitigen Hälfte in Fig. 656 übereinstimmen. Die stehende Welle ist diesmal schon nach einer halben Schwingungsdauer fertig; sie bleibt jedoch stets eine halbe Welle, bei welcher nur eine Ausbauchung vorhanden ist, welche abwechselnd als Berg und Thal auftritt und inzwischen momentan die geradlinige Ruhelage annimmt.

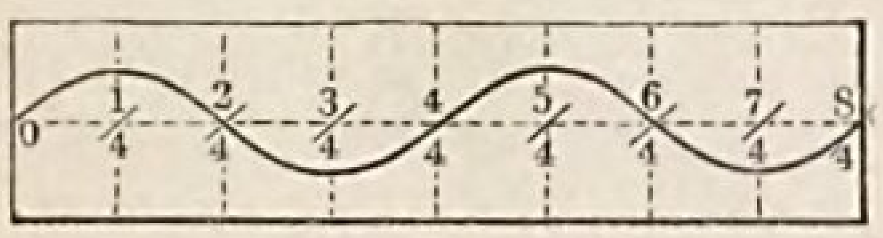
Versuchen wir endlich, die Seillänge gleich $^1/_4$ Wellenlänge zu nehmen, so überzeugen wir uns sofort, dass der bei $^3/_4$ Wellenlänge eingetretene Fall eintritt, nämlich die zweimal reflectirten und directen Wellen sich gegenseitig aufheben.

Dehnt man diese Betrachtungen auch auf grössere Längen als eine Wellenlänge aus, so gelangt man zu dem allgemeinen Resultate, dass ein an beiden Enden befestigtes Seil (sowie auch eine gespannte Saite) nur dann in stehende Schwingungen versetzt werden kann, wenn die

Länge ein gerades Vielfaches einer Viertelwellenlänge, also gleich $1/2$, 1, $1\,1/2$, 2 etc. Wellenlänge ist.

Will man die Schwingungsgesetze für ein Seil (einen Stab) ermitteln, von welchem nur ein Ende unverrückbar befestigt, das andere Ende, wie Fig. 649 III und IV darstellt, beweglich ist, so ersetzt man den Streifen *D* der Fig. 656 durch einen solchen nach Fig. 657, bei welchem die Schwingungsrichtungen entgegengesetzt sind. Man findet dann leicht, dass in diesem Falle stehende Schwingungen nur möglich sind, wenn die Länge des Seiles (Stabes) gleich einem ungeraden Multiplum einer Viertelswellenlänge, also gleich $1/4$, $3/4$, $5/4$ etc. der Wellenlänge ist.

Fig. 657.



Endlich kann man auch noch den Fall eines an beiden Enden freien elastischen Körpers (z. B. eines in der Mitte eingeklemmten elastischen Stabes) untersuchen, indem man darauf Rücksicht nimmt, dass in diesem Falle an beiden Enden der Wellenberg als solcher und ebenso das Wellenthal als solches reflectirt werden.

Die experimentelle Bestätigung dieser theoretischen Ergebnisse ist in mannigfacher Weise möglich.

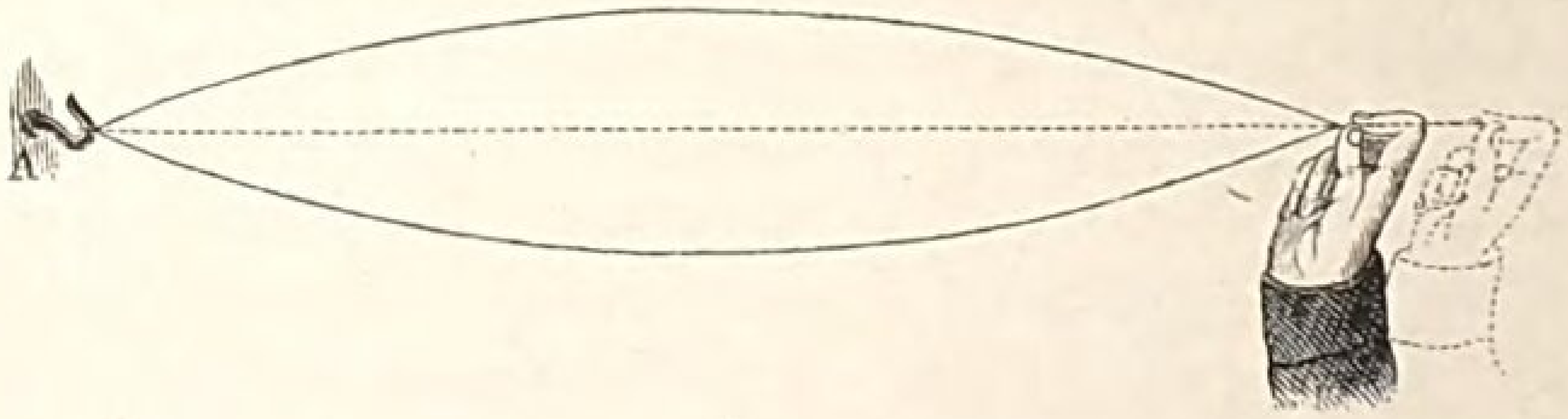
Die Schwingungen des Seiles kann man, wenn beide Enden befestigt sind, dadurch hervorbringen, dass man in einiger Entfernung von der Befestigungsstelle rhythmische Excursionen erzeugt, und die Schwingungszahl so lange ändert, bis sich die stehenden Wellen bilden. So lange die Spannung des Seiles dieselbe bleibt, ist auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe. Da nun der während einer ganzen Schwingung zurückgelegte Weg der Welle gleich der Wellenlänge ist, so ist diese proportional der Schwingungsdauer, also verkehrt proportional der Schwingungszahl. Durch Erhöhung der Schwingungszahl kann man also die Wellenlänge verkürzen. Man hat es demnach in der Gewalt, die Wellenlänge nach der Seillänge zu richten, doch könnte man auch umgekehrt die Seillänge nach der Wellenlänge richten. Endlich kann man die Wellenlänge auch dadurch modificiren und der Seillänge anpassen, dass man die Spannung des Seiles ändert. Stärkere Spannung ruft grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also längere Wellen hervor. Nach allen diesen Methoden ist es möglich, das Seil so in stehende Schwingungen zu versetzen, dass es mit einem Bauche, oder mit zwei, drei, vier etc. Bäuchen (halben Wellen) schwingt.

Viel leichter gelingt, wenn das Seil horizontal gespannt ist, dieses Experiment, wenn man den geradlinigen Transversalschwingungen kreisförmige substituirt. Befestigt man das Ende einer langen, weissen, mehrere Millimeter dicken Schnur am Umfange einer rotirenden Scheibe, so dass es Kreise mit etwa 1 dm Radius beschreibt, so kann man leicht stehende Wellen mit zehn und mehr Knotenpunkten erhalten und auch zeigen, wie bei unveränderter Geschwindigkeit durch Vermehrung der

Spannung die Anzahl derselben sich vermindert, weil die Wellenlänge sich vergrössert.

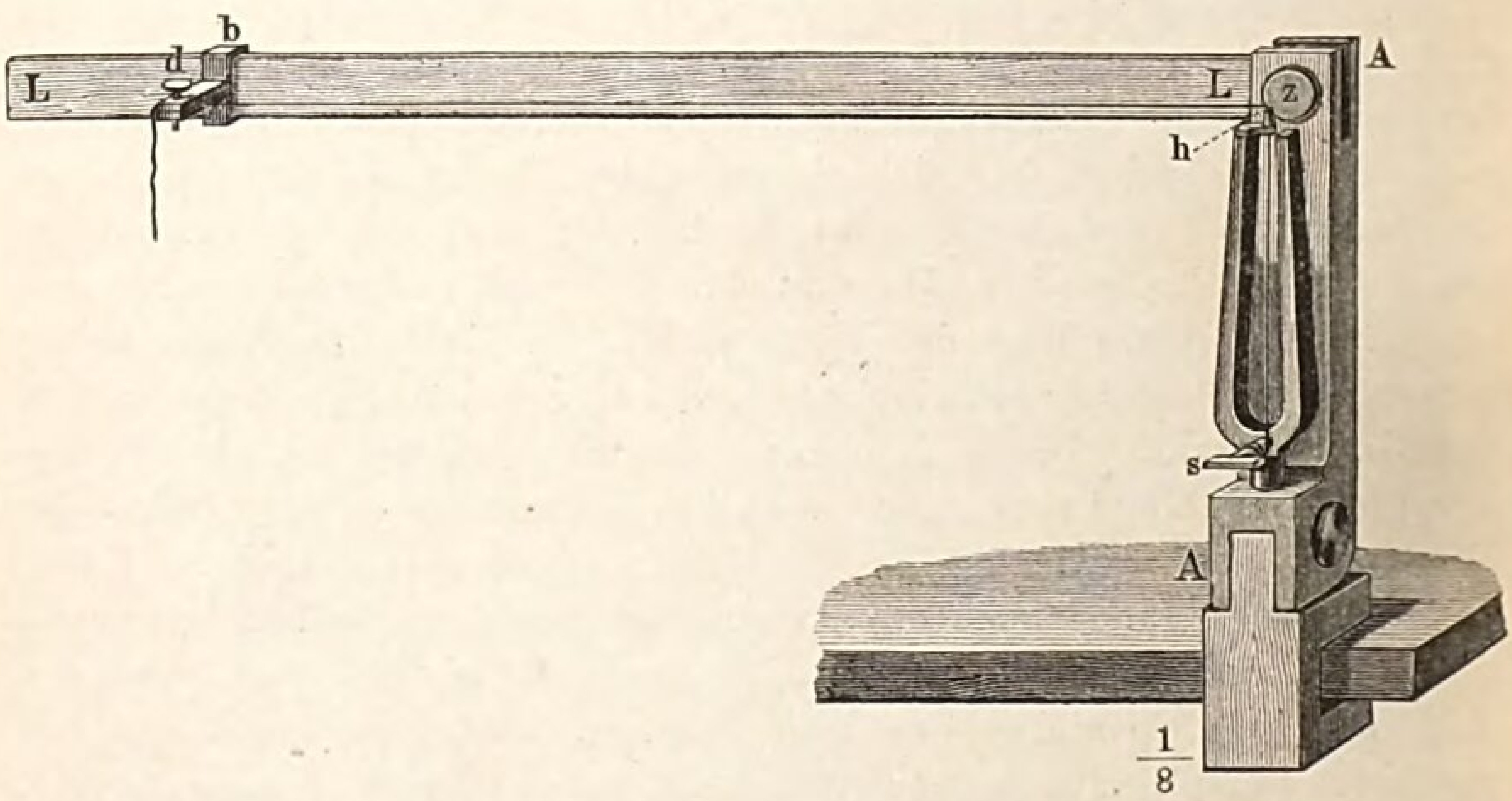
Eine andere Art, ein Seil in Transversalschwingungen zu versetzen, ist durch die Figur 658 genügend angedeutet. Hierbei macht die erregende Hand selbst keine transversale, sondern longitudinale Schwin-

Fig. 658.



gungen, welche aber transversale Schwingungen des Seiles erzeugen. Dabei ist jedoch der wichtige Umstand zu beachten, dass jeder ganzen Schwingung der Hand nur eine halbe Schwingung des Seiles entspricht. Die Schwingungszahl des erregenden Körpers muss daher bei dieser Anordnung noch einmal so gross sein, als bei der transversalen Anordnung. Die beste und schönste Methode zur Erregung von stehenden Transver-

Fig. 659.



salwellen ist die von F. Melde erfundene*), welche darauf beruht, gespannte Fäden durch die Schwingungen einer Stimmgabel (oder auch einer Glasglocke, einer Saite etc.) anzuregen.

Fig. 659 zeigt einen der nach Melde's Angaben von Schubart in Marburg ausgeführten Apparate zur Anstellung dieser schönen Versuche.

*) F. Melde, Pogg. Ann. 109, S. 192 bis 215, 1859 und 111, S. 513 bis 540, 1860; eine neuere Zusammenstellung dieser und neuerer Experimente findet sich noch Wied. Ann. 21, S. 452, 1884 und 24, S. 497, 1885, sowie in Melde, Akustik, Leipzig 1883.

Auf einem Holzstück A, welches an ein Tischblatt festgeschraubt werden kann, ist eine Stimmgabel angebracht, deren linker Schenkel oben ein Messingplättchen mit einer kleinen Hülse h trägt, deren Achse mit der Mittellinie der ganzen Gabel zusammenfällt. Auf dem anderen Schenkel ist ein zweites Messingplättchen aufgeschraubt, welches lediglich dazu dient, das auf dem linken Schenkel aufgeschraubte zu äquilibriren. In Fig. 660 ist das obere Ende der beiden Schenkel in natürlicher Grösse dargestellt.

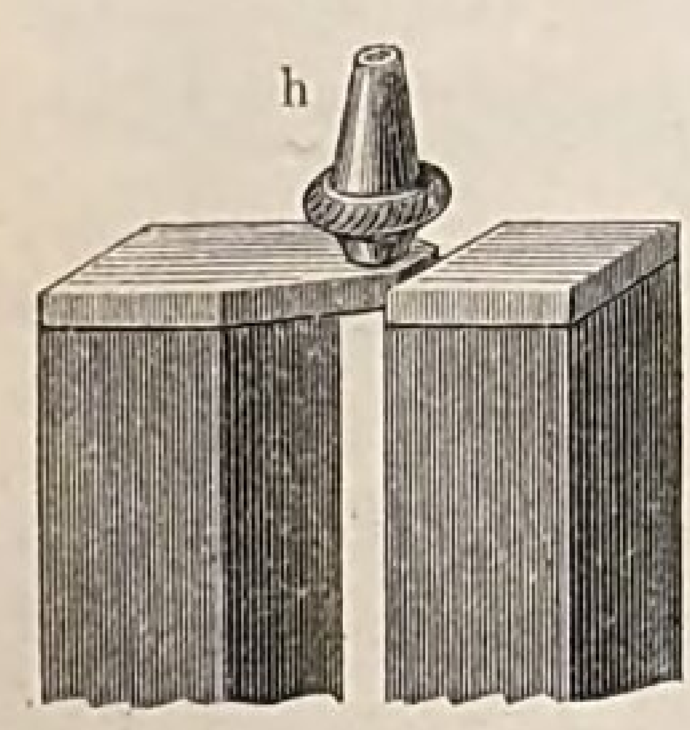
Durch diese Hülse h ist ein Seidenfaden c (oder auch eine Violin-e-Saite) gezogen, welcher einerseits in dem Zapfen s am unteren Ende der Stimmgabel befestigt, andererseits aber durch einen Spalt des Messingschiebers b gezogen ist und hier mittelst der kleinen Schraube d festgeklemmt werden kann. Durch Umdrehung des Zapfens s kann man die Spannung des Fadens nach Belieben vermehren oder vermindern.

Will man die Spannung durch Gewichte reguliren, so lässt sich statt der Klemme d eine Rolle mit horizontaler Achse anbringen, über welche der Faden gelegt wird.

Der Messingschieber b ist an einer 1 m langen Latte L verschiebbar, so dass man den Faden nach Belieben verlängern oder verkürzen kann.

Die Latte L selbst ist um den Zapfen z drehbar, so dass man den Faden, welcher in unserer Figur eine horizontale Richtung hat, um jeden beliebigen Winkel von der horizontalen entfernen und auch ganz vertical stellen kann, wenn man die Latte L aus der horizontalen Lage um 90^0 dreht.

Fig. 660.



Auch die Stimmgabel ist um den Zapfen drehbar, mittelst dessen sie in das Holzstück A eingeschraubt ist.

Betrachten wir nun zunächst die Erscheinungen, welche man an dem Apparate beobachten kann, wenn Alles in der Fig. 659 dargestellten Lage ist.

Wird die Stimmgabel zum Tönen gebracht, was am einfachsten durch Anstreichen mit einem Bassgeigen-Fiedelbogen geschieht, so werden durch die Vibrationen der Hülse h Wellen in dem Faden erzeugt, welche in der Richtung von h gegen d hin fortschreiten und bei d reflectirt wieder gegen h hin zurücklaufen. Durch die Interferenz der directen und der reflectirten Wellen wird nun der Faden in stehende Schwingungen versetzt, wenn die Länge des Fadens genau ein Vielfaches von der halben Länge der Wellen ist, welche die vibrirende Stimmgabel in dem Faden erzeugt.

Je stärker der Faden gespannt ist, desto schneller pflanzen sich die von der Stimmgabel ausgehenden Vibrationen in demselben fort, desto grösser wird also die Länge der Wellen, welche der Faden fortpflanzt.

Durch Veränderung der Fadenspannung hat man es also in der Gewalt, zu bewirken, dass die Länge des Faden 1 mal, 2 mal, 3 mal etc. so gross ist als die halbe Wellenlänge.

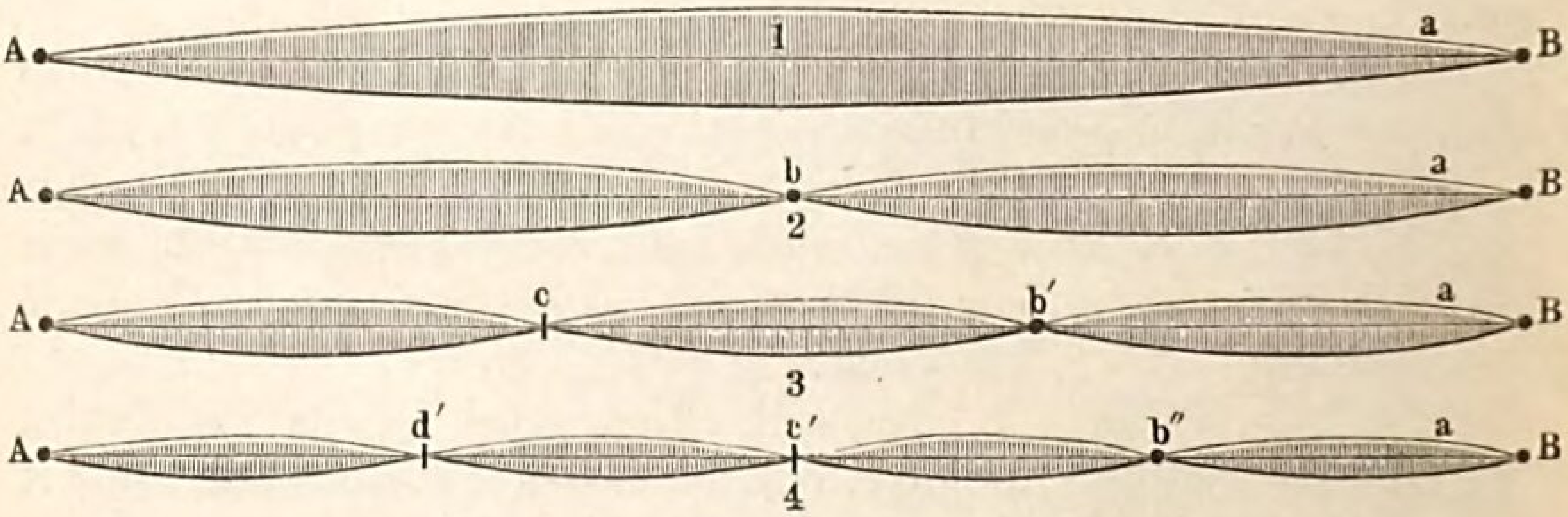
Ist der Faden so gespannt, dass seine Länge gleich $^1/_2$ Wellenlänge ist, so schwingt er seiner ganzen Länge nach entsprechend der Fig. 661 1.

Ist der Faden so gespannt, dass seine Länge gleich $^2/_2$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 661 2 dargestellten Weise, d. h. es bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte des Fadens.

Ist der Faden so gespannt, dass seine Länge gleich ist $^3/_2$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 661 3 dargestellten Weise, d. h. es bilden sich zwei Schwingungsknoten und drei Bäuche.

Hat man bei der gegenseitigen Stellung der Stimmgabel und des Fadens, wie sie in Fig. 659 dargestellt ist, die Spannung des Fadens so regulirt, dass er seiner ganzen Länge nach schwingt (entsprechend der Fig. 661 1), wenn man die Stimmgabel anstreicht, so ist der Ton des Fadens (welcher namentlich ganz gut hörbar ist, wenn er durch eine Violin-*e*-Saite gebildet wird) die nächst tiefere Octav vom Ton der

Fig. 661.



Stimmgabel. Ist also der Gabelton c_1, so ist der Fadenton unter den angegebenen Umständen c_0; die entsprechende Spannung des Fadens wollen wir mit S_1 bezeichnen.

Vermindert man nun die Spannung des Fadens mehr und mehr, so gelangt man endlich zu einer Spannung S_2, bei welcher sich, wenn man die Stimmgabel anstreicht, ein Knoten in der Mitte des Fadens bildet (Fig. 661 2). Auch unter diesen Umständen ist der Ton des Fadens die nächst niedere Octav von dem der Stimmgabel; bei der Spannung S_2 würde also der Ton des Fadens, wenn er ohne Schwingungsknoten seiner ganzen Länge nach oscillirte, um zwei Octaven tiefer sein als der Stimmgabelton.

Zwischen der Spannung S_1 und der Spannung S_2 giebt es eine andere, die wir mit S_a bezeichnen wollen, für welche sich der Faden in der der Fig. 661 3 entsprechenden Weise abtheilt, also drei Bäuche bildet. In diesem Falle aber ist die Schwingungsweite des Fadens bei Weitem geringer, als man sie bei den Spannungen S_1 und S_2 beobachtet.

Die Bahn, welche der Punkt *h* beschreibt, während die Stimmgabel vibrirt, ist nun nicht geradlinig, sondern elliptisch. Die grosse Achse dieser Ellipse fällt mit der Richtung des Fadens zusammen, sie ist longitudinal; die allerdings bei Weitem kleinere kleine Achse dieser Ellipse steht rechtwinkelig zur Richtung des Fadens, sie ist transversal.

Die bei der Spannung S_1 und S_2 beobachteten Oscillationen des Fadens rühren von dem longitudinalen Antheil der Gabelvibrationen her. Die durch die longitudinale Bewegung von *h* erzeugten Wellen sind aber nicht allein weit intensiver, als die durch die Transversalbewegung von *h* erzeugten, sondern sie pflanzen sich auch im Faden mit doppelt so grosser Geschwindigkeit fort.

Bei den Spannungen S_1 und S_2 sind die Oscillationen des Fadens, welche durch die Longitudinalvibrationen des Punktes *h* erzeugt werden, so überwiegend, dass gegen sie die Oscillationen verschwinden, welche von den Transversalvibrationen von *h* herrühren.

Bei der Spannung S_a dagegen können die Longitudinalvibrationen von *h* keine stehenden Wellen des Fadens erzeugen, weil die Fadenlänge unter diesen Umständen $^3/_4$ von der Länge der Wellen ist, welche durch die Longitudinalvibrationen von *h* im Faden erzeugt werden; deshalb aber werden bei der Spannung S_a die stehenden Wellen sichtbar, welche in dem Faden durch die Transversalvibrationen von *h* erzeugt werden.

Dreht man die Leiste *LL* aus der in Fig. 659 dargestellten Lage um 90^0, so dass der Faden vertical steht, so sind die Vibrationen von *h* durchaus transversal zum Faden. Dieser zeigt alsdann

bei der Spannung S_1 2 Bäuche und 1 Knoten
" " " S_a 3 " " 2 "
" " " S_2 4 " " 3 "

Einige sehr schöne, mit grösseren Mitteln ausführbare Modificationen dieses Versuches sind von J. Tyndall angegeben worden*).

Stehende Luftwellen; Resonanzröhren. Wie wir im §. 179 gezeigt haben, unterscheiden sich die Longitudinalwellen von den Transversalwellen wesentlich dadurch, dass an Stelle der auf die Fortpflanzungsrichtung senkrechten Excursionen der letzteren solche Excursionen treten, welche in die Richtung der Fortpflanzung selbst fallen. Wir können daher auch Alles das, was wir in den §§. 188 bis 191 in Bezug auf die Zusammensetzung und Interferenz zweier Transversalwellen vorgetragen haben, auf die Longitudinalwellen übertragen, indem wir bezüglich der Excursionen aus der Querrichtung in die Längsrichtung übergehen. Wir erhalten so die Form der resultirenden Lon- 192

*) J. Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869.

gitudinalwellenbewegung aus der entsprechenden Transversalwelle, ohne dass wir nöthig hätten, die Addition der Excursionen nochmals durchzuführen.

Als longitudinal schwingenden Körper können wir uns eine Weinhold'sche Spirale (§. 180) oder eine Luftsäule, welche in eine Röhre eingeschlossen ist, vorstellen. Ein geschlossenes Ende dieser Röhre würde dem festgehaltenen Ende der Spirale beziehungsweise dem befestigten Ende eines Seiles entsprechen. Ebenso wäre ein offenes Ende der Röhre analog dem freien Ende der Spirale, beziehungsweise des Seiles oder eines eingespannten elastischen Stabes. Am geschlossenen Ende einer Röhre werden daher Longitudinalwellen so reflectirt, dass sie mit einem Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge zurückkehren, während sie vom offenen Ende ohne Gangunterschied zurückkehren (§. 179).

Die Fig. 662 ist nun dazu bestimmt, die correspondirenden Bewegungen stehender Transversal- und Longitudinalwellen darzustellen.

Zu diesem Zwecke sind in das Innere der Röhre RR' sowohl die longitudinal schwingenden Luftschichten in Form von Verticallinien, als auch die correspondirende Transversalwelle eingezeichnet. Die Länge der an beiden Enden offenen Röhre ist gleich zwei Wellenlängen. Fig. I. zeigt den Schwingungszustand im Momente einer grössten Excursion. Die momentane Geschwindigkeit aller Theile ist gleich Null. Die Luftschichten zeigen an den Knoten K und K^{II} eine Verdünnung, an den Knoten K^{I} und K^{III} eine Verdichtung. Wie es zu diesen kommt, ist leicht einzusehen, wenn man sich die Entstehung der Zeichnung vergegenwärtigt. Fig. IV. zeigt die Röhre im Ruhezustande, die Grenzlinien der Luftschichten haben daselbst überall gleichen Abstand. Verschiebt man nun jede dieser Grenzlinien um ebensoviel nach rechts oder nach links, als die Ordinaten der Curve in I. nach oben oder nach unten reichen, so resultirt die Vertheilung der Luftschichten, wie sie in I. dargestellt ist. Am linksseitigen Ende rücken die Luftschichten über das Röhrenende hinaus, am rechtsseitigen ziehen sie sich vom Ende zurück. Es wird nützlich sein zu bemerken, dass die Grösse dieser Excursionen sehr übertrieben angenommen und in Wirklichkeit viel geringer ist.

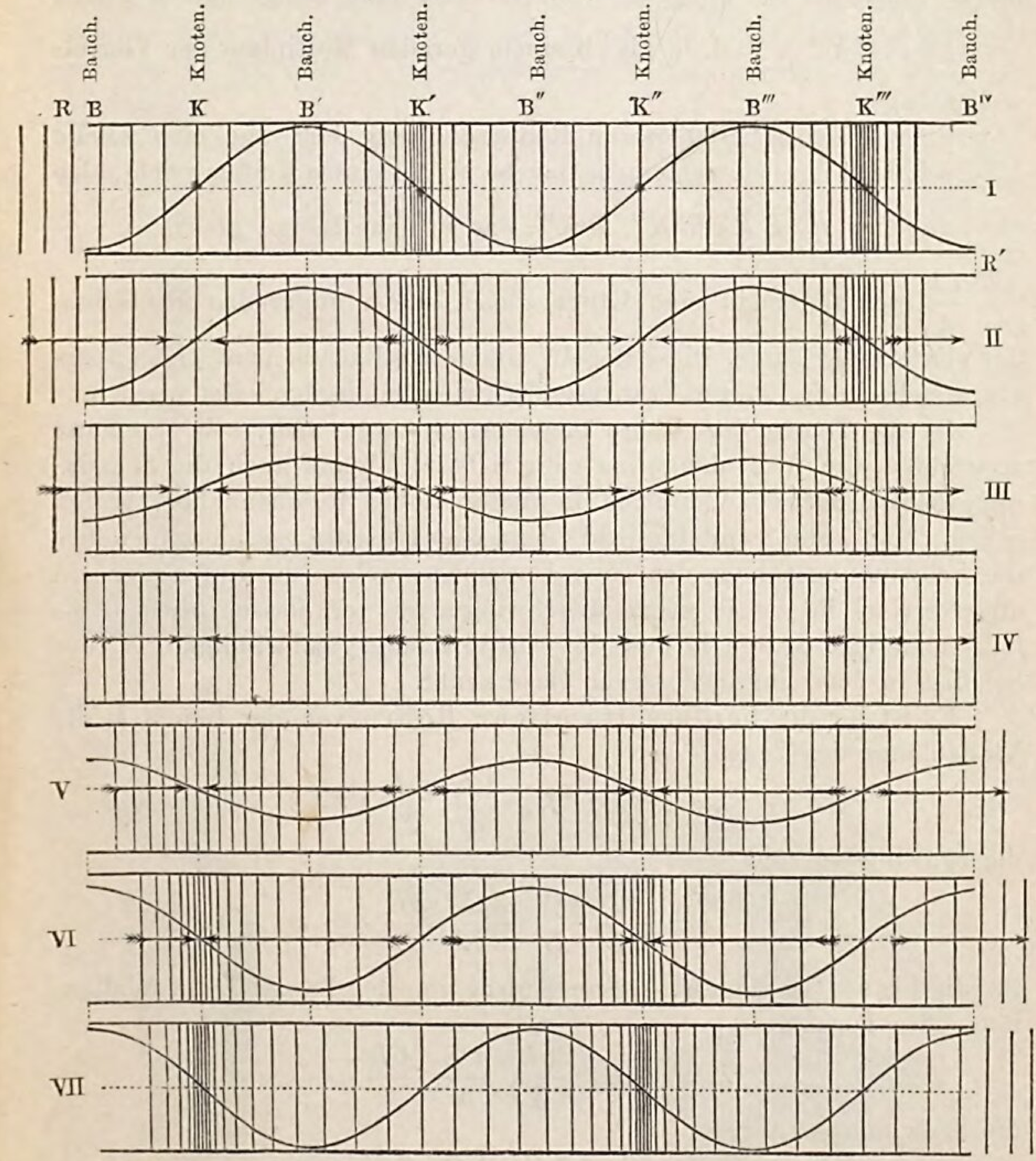
Die Figuren II., III. bis VII. zeigen nun den Verlauf der stehenden Schwingungen bis zum Ende einer halben Schwingungsdauer. In II. beginnen die Luftmassen von den Knoten, wo die grösste Verdichtung herrschte, sich auszubreiten und gegen die anderen Knoten, wo die grösste Verdünnung war, sich hinzubewegen.

Auf diesem Wege passiren alle Luftschichten im gleichen Momente ihre Ruhelage (Fig. IV.); die Pfeile deuten die Bewegungsrichtung an. In Fig. V. ist die Ruhelage überschritten, es beginnt die Verdichtung an den Knoten K und K^{II}, die Verdünnung an den Knoten K^{I} und K^{III}, welche in Fig. VII. ihren höchsten Grad erreichen. Von dort wieder-

holt sich in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer die Reihe der Figuren von unten nach oben mit verkehrter Pfeilrichtung.

Wir machen nochmals darauf aufmerksam, dass Knoten und Bäuche stehen bleiben und dass Verdünnung und Verdichtung durchaus nicht mit Wellenthal und Wellenberg (den Bäuchen) correspondiren, sondern

Fig. 662.



mit aufsteigendem und absteigendem Knoten. Dagegen fallen die Stellen grösster Geschwindigkeit der Luft mit den Bäuchen zusammen.

An der Fig. 662 ist nun auch leicht zu übersehen, welche Länge eine offene und eine einseitig geschlossene Röhre bei gegebener Wellenlänge eines Tones haben muss, wenn ihre Luft in stehende Schwingungen

gerathen, d. h. Resonanz geben soll. Offenbar kann am geschlossenen Ende keine Stelle grösster Excursion, d. h. kein Bauch sein, weil ja die Luft dort sich nicht bewegen kann. Andererseits kann am offenen Ende keine Verdichtung oder Verdünnung eintreten, weil daselbst die Luft mit der Atmosphäre im Gleichgewichte des Druckes stehen muss. Eine beiderseits offene Röhre darf also nur von B bis B^{I} oder bis B^{II} oder bis B^{III} oder bis B^{IV} reichen, d. h. sie muss eine Länge haben gleich $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3\lambda}{2}$, 2λ, d. h. gleich einem geraden Multiplum der Viertelwellenlänge.

Eine einseitig geschlossene Röhre dagegen darf nur eine solche Länge haben, dass sie von einem Bauche bis zu einem Knoten reicht, also die Längen BK, BK^{I}, BK^{II}, BK^{III}, das ist eine Länge gleich $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{5\lambda}{4}$, $\frac{7\lambda}{4}$ etc., allgemein eine Länge gleich einem ungeraden Multiplum der Viertelwellenlänge. Diese Regeln stimmen vollkommen mit jenen überein, welche in §. 191 für Transversalschwingungen abgeleitet wurden.

Ist die Länge der Röhre gegeben, so muss sich, soll Resonanz stattfinden, die Wellenlänge nach ihr richten, folglich auch die Schwingungszahlen der Töne, welche in dieser Röhre Resonanz hervorrufen sollen. Man kann somit für jede offene oder einseitig geschlossene Röhre die Schwingungszahlen der Töne berechnen, welche die Luft (oder ein anderes Gas) in derselben zu Mitschwingungen veranlassen können, sobald man ihre Länge L und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C des Schalles in dem eingeschlossenen Gase kennt.

Es ist für die beiderseits offene Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 2L, \quad L, \quad \frac{2L}{3}, \quad \frac{L}{2} \cdots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{2L}, \frac{C}{L}, \frac{3C}{2L}, \frac{2C}{L} \cdots$$

für die einseitig geschlossene Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 4L, \quad \frac{4L}{3}, \frac{4L}{5}, \frac{4L}{7} \cdots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{4L}, \frac{3C}{4L}, \frac{5C}{4L}, \frac{7C}{4L} \cdots$$

Um das Vorgetragene mit Experimenten zu belegen, giebt es verschiedene Methoden.

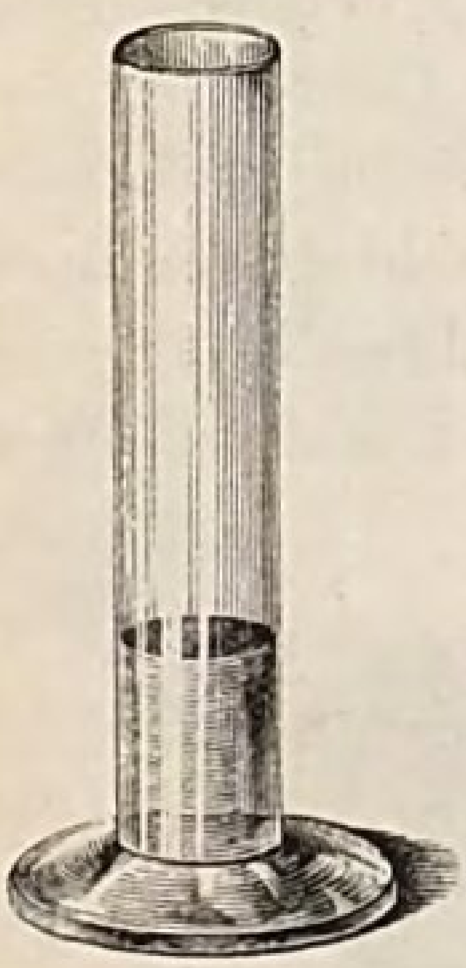
Wenn man eine eben angeschlagene gewöhnliche Stimmgabel, welche etwa den Ton ā (a^1) giebt, über eine ungefähr 5 cm weite und 19 cm

hohe unten geschlossene Röhre hält, so hört man eine ziemlich bedeutende Verstärkung des an und für sich sehr schwachen Tones der Stimmgabel. Die Wellenlänge des Tones a^1 beträgt, wie wir später zeigen werden, $\frac{340}{440} = 0{,}77$ m, also nahe 4 mal 19 cm.

Am besten wählt man zu diesem Versuche einen Glascylinder, Fig. 663, von der angegebenen Weite, der etwas zu hoch ist, und in welchen man nach und nach so viel Wasser eingiesst, bis das Mitklingen der in der Röhre eingeschlossenen Luftsäule möglichst stark geworden ist.

Um das Mittönen einer Luftsäule noch weit auffallender zu erhalten, kann man statt der Stimmgabel eine sogenannte Käseglocke und statt der Glasröhre weite Röhren von Pappdeckel anwenden, wie dies Fig. 664 dargestellt ist. Die Pappröhren haben einen Durchmesser von 12 bis 15 cm; die untere A ist am Boden geschlossen; die zweite B lässt sich mit einiger Reibung auf- und niederschieben, so dass man die Gesammtlänge der Röhre nach Bedürfniss abändern kann. Die Käseglocke kann einen Durchmesser von 15 bis 20 cm haben.

Fig. 663.



Um die Glocke zum Tönen zu bringen, hält man sie mit der linken Hand am Knopfe fest und streicht dann den Rand mit einem passenden Fiedelbogen. Dieselbe Glocke wird nun, auf diese Weise behandelt, bald höhere, bald tiefere Töne geben; man muss es

Fig. 664.

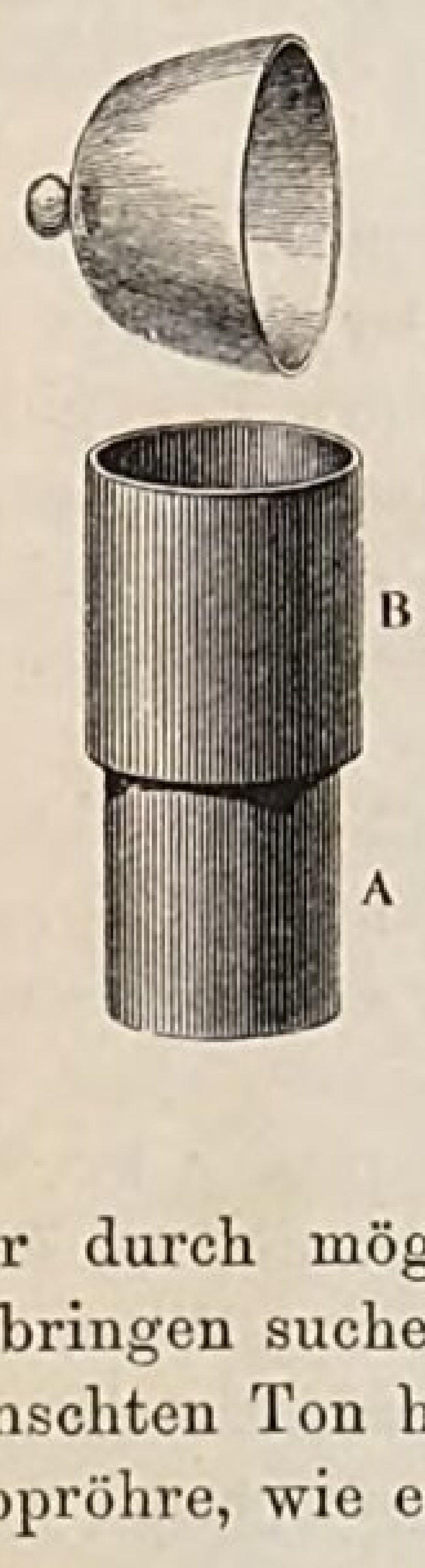


Fig. 665.



aber durch möglichst gleichförmiges und langsames Streichen dahin zu bringen suchen, dass sie ihren tiefsten Ton giebt. Hat man den gewünschten Ton hervorgebracht, so hält man die tönende Glocke über die Pappröhre, wie es die Fig. 664 andeutet, und wird dann, falls die Röhre

die richtige Länge hat, ein überraschend kräftiges Anschwellen des Tones wahrnehmen.

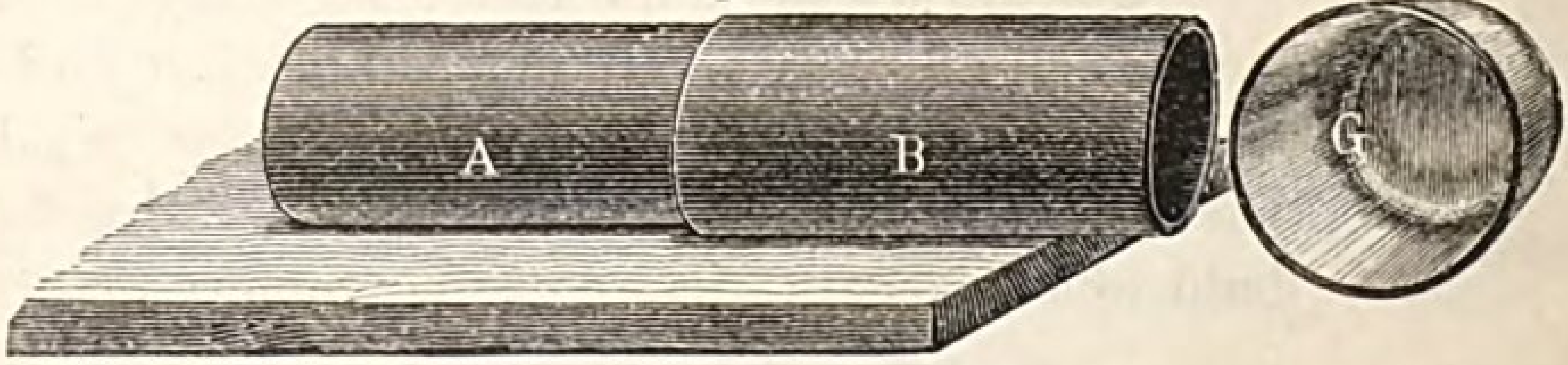
Savart hat für diesen Versuch einen besonderen in Fig. 665 (a. v. S.) abgebildeten Apparat construirt, welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Wenn der tiefste Ton der Glocke etwa derjenige ist, welchen man in der Musik mit $\bar{c}$ (c^1) bezeichnet, so muss die Gesammtlänge der Röhre ungefähr 31 cm betragen; für höhere Töne muss sie kürzer, für tiefere muss sie länger werden.

Hat die Röhre die dem tiefsten Tone der Glocke entsprechende Länge, so wird jede Verlängerung und Verkürzung der Röhre das Mittönen der Luftsäule schwächen, und es wird endlich ganz verschwinden, wenn diese Verlängerung oder Verkürzung gewisse Grenzen überschreitet.

Es sei l die Länge einer Röhre, deren Luftsäule für einen bestimmten Ton selbsttönend wird, so wird man auch bei einer Röhre von der Länge $3l$ für denselben Ton ebenfalls eine solche Verstärkung wahrnehmen. Für den Ton c^1 z. B. wird die in der Röhre eingeschlossene Luftsäule zum Selbsttönen kommen, wenn die Länge der Röhre 31 cm oder wenn sie 93 cm beträgt; im letzteren Falle ist aber der Effect bei Weitem nicht so kräftig als im ersteren Falle.

Fig. 666.



Das Mittönen erfolgt, wenn die Länge der Röhre $^1/_4$ oder wenn sie $^3/_4$, $^5/_4$ etc. von der Wellenlänge des einfallenden Tones ist.

Die Fig. 666 deutet an, wie das Experiment mit einer beiderseits offenen Röhre anzustellen ist, wozu übrigens auch der Savart'sche Apparat, Fig. 665, verwendet werden kann, wenn man den beweglichen Boden entfernt und dafür eine offene Röhre zur Verlängerung ansetzt. In diesem Falle erfolgt dann das Mittönen, wenn die Länge der Röhre $^1/_2$, 1, $1^1/_2$, 2 etc. Wellenlängen des erregenden Tones beträgt.

Um die Luft in einer Röhre, sei es eine offene oder gedeckte, in stehende Schwingungen zu versetzen und sie also zum Selbsttönen zu bringen, ist nicht gerade nöthig, einen tönenden Körper vor die Oeffnung zu halten, wie dies ja die Orgelpfeifen zeigen. Hier ist es ein am offenen Ende der Röhre vorbeiströmender, an ihren Rändern sich brechender Luftstrom, welcher durch seine Stösse Wellen erzeugt, die, am anderen Ende reflectirt, mit den neu einfallenden interferiren. Wenn auch diese Stösse anfangs nicht ganz regelmässig sind, so werden sie doch alsbald, wenigstens wenn die Röhre, wie man sagt, gut anspricht, durch

den Einfluss der rückkehrenden Wellen regulirt, so dass sich regelmässig stehende Schwingungen bilden, durch welche die Luft in der Röhre selbsttönend wird.

Die einfachste Art, die Luft in einer kleineren gedeckten Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, dass man sie in verticaler Richtung vor den Mund hält (das geschlossene Ende nach unten gekehrt, während das offene Ende an die untere Lippe gehalten wird), Fig. 667, und dann schräg gegen den Rand der Röhre bläst.

Fig. 667.



Singende Flammen, analysirender Spiegel, stroboscopische Untersuchungsmethode. 193
Eine andere Methode, um die Luft in einer offenen Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, dass man Wasserstoffgas in einem Gefässe erzeugt und es durch eine feine Spitze ausströmen lässt, das Gas anzündet und dann die Glasröhre darüber hält, Fig. 668. Eine solche Vorrichtung führt den Namen „chemische Harmonika."

Es versteht sich von selbst, dass man statt des Wasserstoffgases zu diesem Versuche auch Leuchtgas anwenden kann, welches seiner helleren Flamme wegen zu den weiter unten beschriebenen Versuchen sogar vortheilhafter ist. Fig. 669 zeigt

Fig. 669.

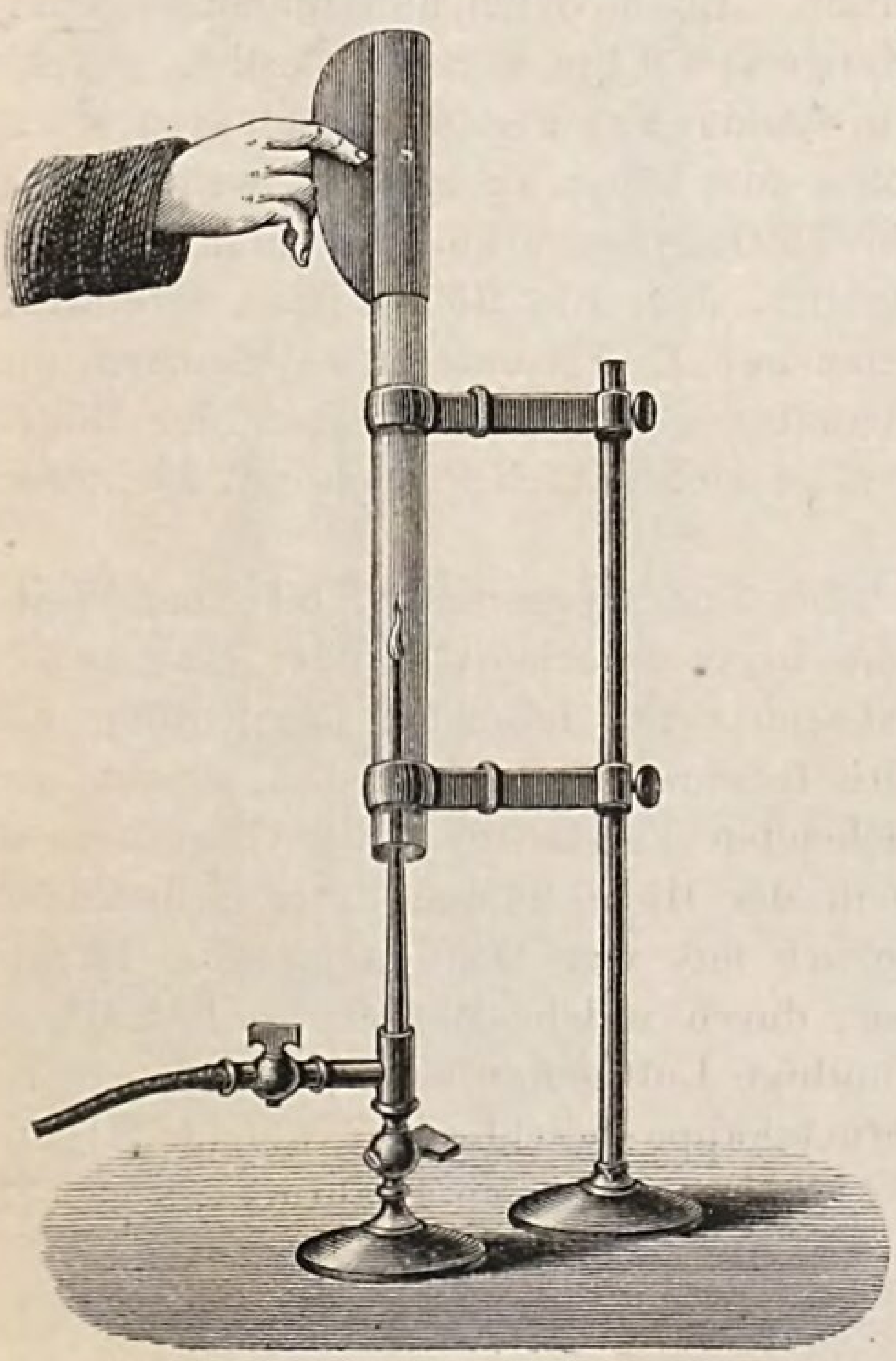
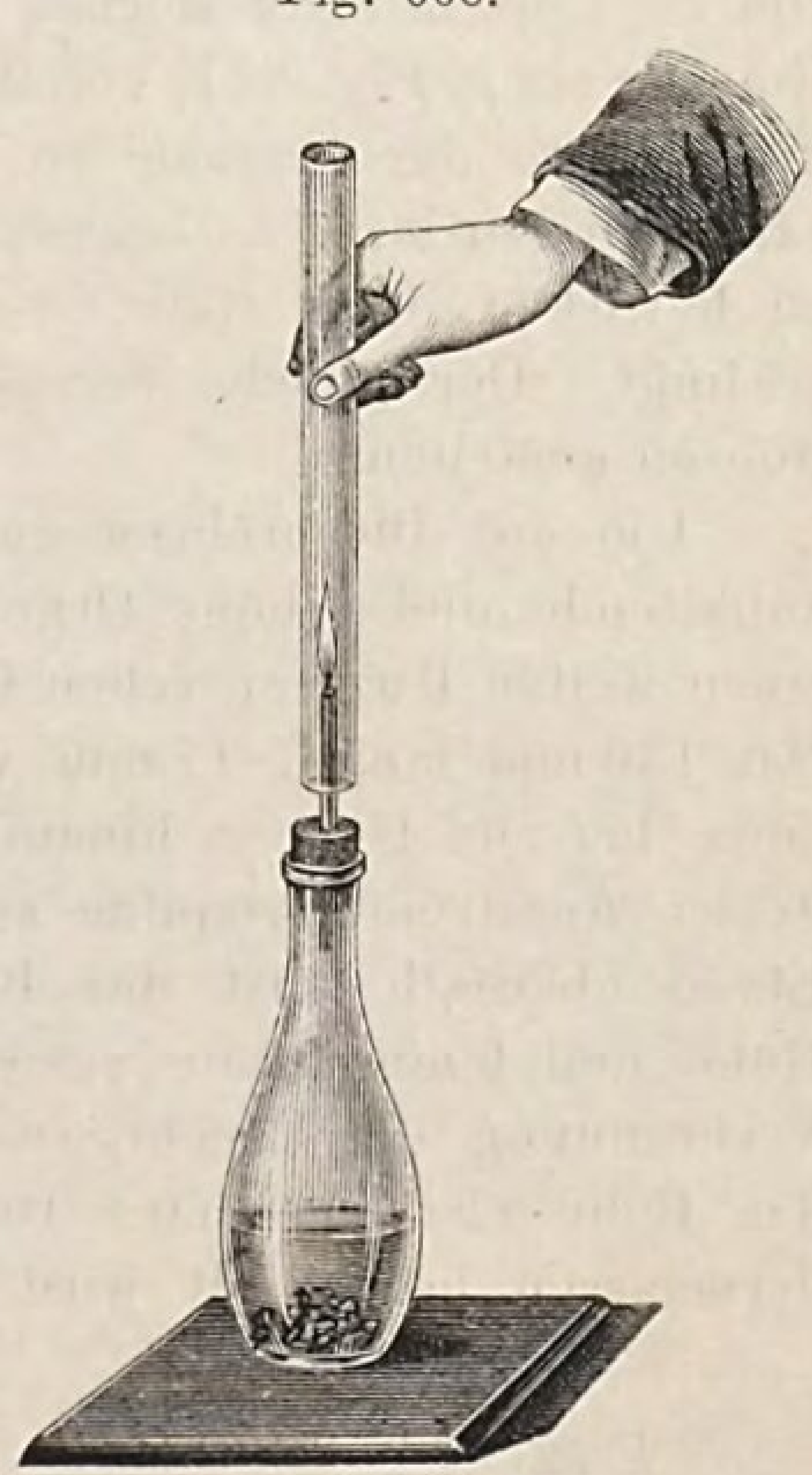


Fig. 668.



einen zu diesem Zwecke dienenden Gasbrenner. Das Leuchtgas strömt durch einen Gummischlauch ein und entweicht durch eine verhältnissmässig enge Oeffnung am oberen Ende eines ungefähr 20 cm langen Metallrohres, wo das Gas angezündet wird. Ueber die Flamme wird dann die von einem passenden Stativ getragene Glasröhre herabgeschoben. Bringt man am oberen Ende der Glasröhre einen aus dünnem Blech verfertigten Cylinder *s* an, so wird der Ton tiefer, wenn man *s* in die Höhe schiebt und dadurch die tönende Luftsäule verlängert.

Statt des in Fig. 669 abgebildeten Brenners genügt auch ein 20 bis 30 cm langes, oben mit einer engen Ausströmungsöffnung endendes Glasrohr, dessen unteres Ende in dem das Leuchtgas zuführenden Schlauche steckt. Dieses Glasrohr wird durch ein entsprechendes Stativ in verticaler Stellung gehalten. Das tönende Rohr nimmt man gewöhnlich 15 bis 30 mm weit und 20 bis 100 cm lang, während die Mündung des Brenners 0,5 bis 1 mm im Durchmesser hat. Die durch einen Hahn regulirbare Grösse der Flamme, sowie deren Höhenstellung in der Röhre ist durch Probiren zu ermitteln. Mit Wasserstoff gelingt der Versuch sicherer bei Anwendung sehr kleiner Flammen und Röhren geringerer Dimensionen; Leuchtgas erfordert grössere Röhren, die Flamme desselben kommt aber ebenfalls leichter zum Tönen, wenn sie ziemlich klein ist.

Je länger und weiter das Rohr, desto tiefer ist der Ton, desto grösser muss aber auch die Flamme werden. Einen tiefen und ungemein kräftigen Ton z. B. giebt eine 4,5 m lange und 0,1 m weite Blechröhre, welche von einem entsprechenden festen Ständer *ss*, Fig. 670, getragen wird. Um die Luft in einer solchen Röhre zum Tönen zu bringen, wendet man Rundbrenner, Fig. 671, von 20 bis 25 Oeffnungen an. Hat man Stellung und Grösse der Flamme so regulirt, dass die Röhre ihren Grundton kräftig hören lässt, so braucht man nur die Flamme zu verkleinern, um zu bewirken, dass statt des Grundtones der erste Oberton der Röhre erklingt. Der gleiche Versuch lässt sich natürlich auch mit kleineren Röhren anstellen.

Um aus Blechröhren von 2 bis 3 m Länge und 7 bis 8 cm Weite anhaltende und schöne Orgeltöne hervorzulocken, wendet Rausch*) einen weiten Bunsen'schen Gasbrenner von folgender Einrichtung an. Das 130 mm lange, 17 mm weite Blechrohr *ab*, Fig. 672, steckt auf einer bis zur Höhe *c* hinaufreichenden Verstärkung des Glasrohres *d*, dessen Ausströmungsspitze sich in der Höhe, 90 mm unter *a*, befindet. Etwas oberhalb *c* ist das Rohr *ab* mit vier Oeffnungen von 12 mm Höhe und 6 mm Breite versehen, durch welche die zur vollständigen Verbrennung des Leuchtgases nöthige Luftmenge einströmt. Oben ist das Rohr *ab* durch eine Drahtnetzkappe geschlossen, welche folgendermaassen hergestellt wird. Aus einem eisernen Drahtnetz, von 170

*) Pogg. Ann. CXXVII.

bis 200 Maschen auf den Quadratcentimeter, wird eine Scheibe von 4cm Durchmesser ausgeschnitten, dieselbe ausgeglüht und nun mit Hülfe eines cylindrischen, halbkugelig endigenden Holzstückes von unten her in das Rohr *a b* eingetrieben, an dessen oberem Ende es dann durch Reibung festhält. Anfangs lässt man das Gas reichlich ausströmen, zündet es an, lässt den Brenner gehörig heiss werden und regulirt dann den Gaszufluss durch den Brennerhahn, bis die Flamme nur noch 2 cm hoch ist. Führt man jetzt den Brenner von unten her in das durch ein Stativ vertical gehaltene Blechrohr ein, bis die Flamme 5 bis 7 cm hoch über dessen unterer Oeffnung steht, so erfolgt ein kräftiges Tönen der Luftsäule im Rohre.

Fig. 670.

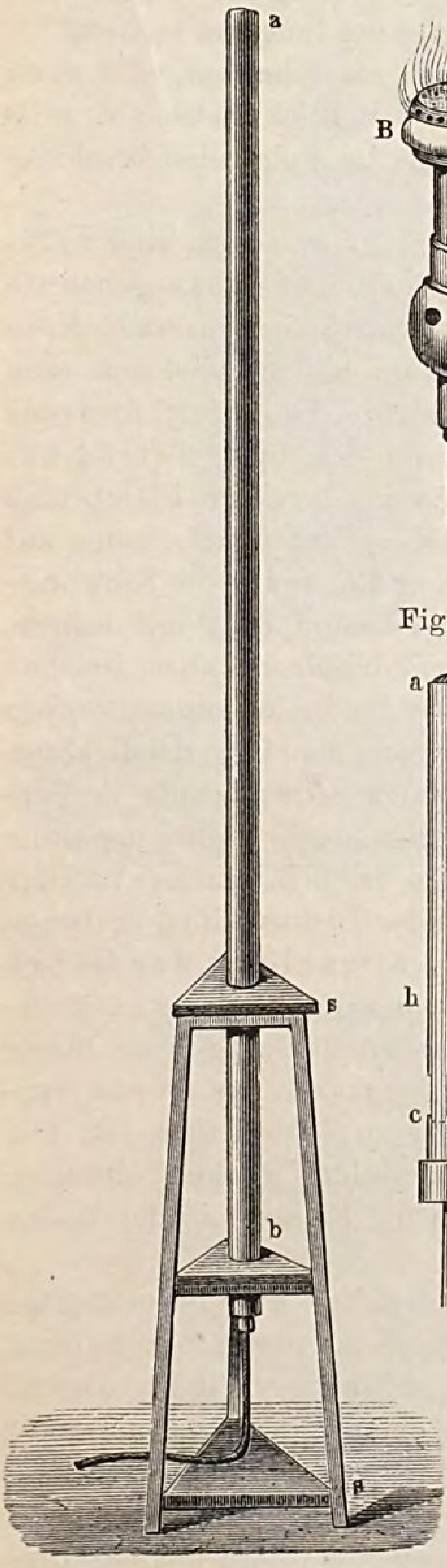


Fig. 671.

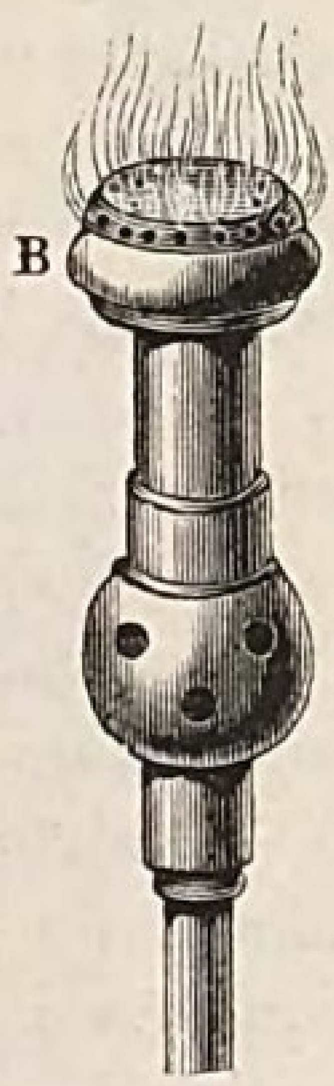
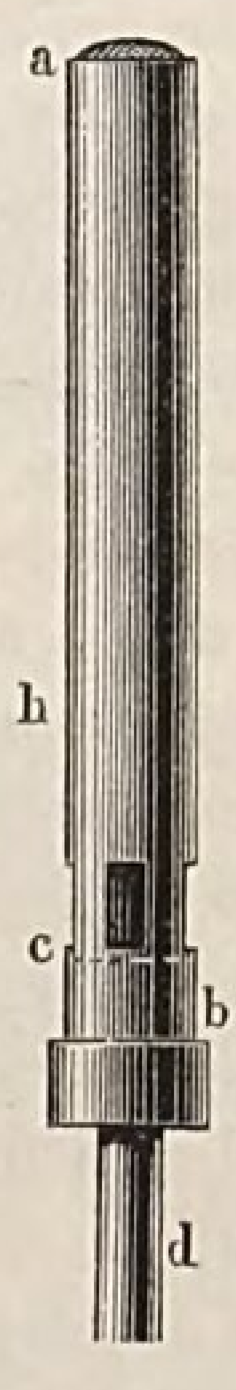


Fig. 672.



Um die Flamme sehen und durch den rotirenden Spiegel untersuchen zu können, hat Rausch das untere Ende des Blechrohrs mit einem gläsernen cylindrischen Ansatz von 11 cm Länge versehen.

Hält man eine etwa 30 cm lange Röhre so über eine Flamme von entsprechender Grösse, dass dieselbe 7 cm vom unteren Röhrenrande absteht, so erfolgt ein lebhaftes Singen; zieht man die Glasröhre so weit in die Höhe, dass das Singen eben aufhört, so beginnt es alsbald wieder, wenn der Ton der Röhre in der Nähe gesungen oder auf andere Weise, etwa durch eine Orgelpfeife, hervorgebracht wird. Das Singen dauert nun auch fort, wenn der erregende Ton aufgehört hat. Tyndall und Schaffgotsch haben diese Erscheinung unabhängig von einander beobachtet und näher untersucht.

Mit blossem Auge betrachtet, scheint eine singende Flamme stetig zu brennen, höchstens bemerkt man an derselben ein unruhiges Zittern;

dass dieselbe aber successiv aufleuchtet und wieder fast verschwindet, hat bereits Rogers durch eine mit schwarzen und weissen Sectoren bemalte Scheibe bewiesen. Bei rascher Rotation verschwinden die Sectoren im Tageslicht; bei Beleuchtung durch die chemische Harmonika erscheinen jedoch die Sectoren je nach der Geschwindigkeit der Scheibe ruhend oder nach der einen oder anderen Richtung langsam rotirend.

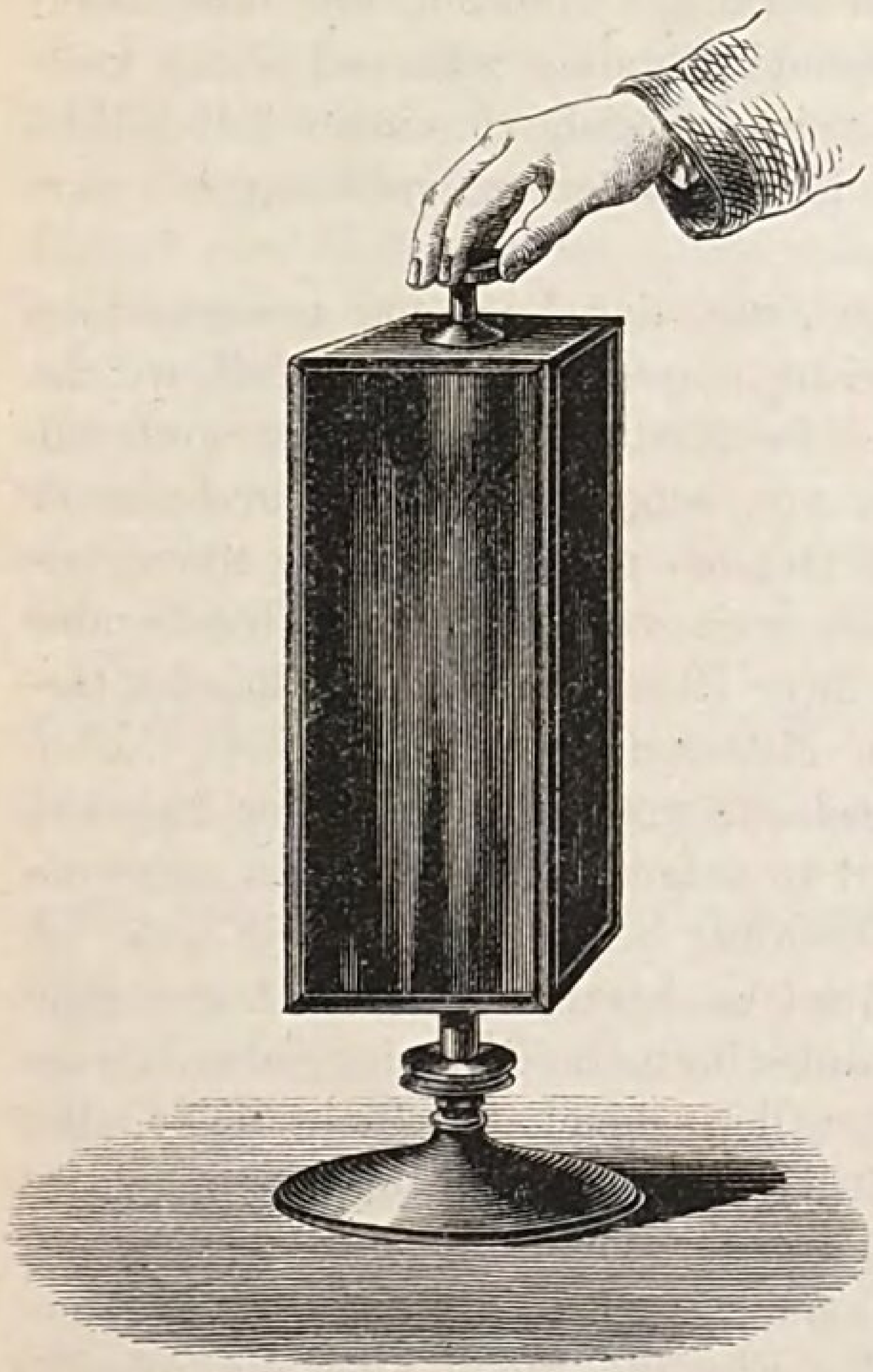
Wenn man die Flamme anblickend den Kopf rasch bewegt, oder auch nur die Augenachse rasch dreht, indem man den Blick rasch auf seitwärts gelegene Punkte richtet, so entstehen die im Folgenden beschriebenen Flammenbilder auf der Netzhaut.

Um den Zustand der singenden Flammen zu untersuchen, sind rotirende Spiegel sehr geeignet. Vier gewöhnliche, oder besser sogenannte Platinspiegel, welche die vier verticalen Seitenwände eines parallelepipedischen Kästchens von 12 bis 15 cm Seitenlänge bilden, sind um eine vertical stehende Achse leicht und rasch drehbar. Es bedarf übrigens keiner besonderen Drehvorrichtung, man kann den Spiegelwürfel auf jeder Schwungmaschine anbringen. Bequemer ist in vielen Fällen eine vom Verfasser angewandte Construction, insbesondere dann, wenn auf dem Experimentirtisch nicht mehr hinlänglicher Raum für die Schwungmaschine vorhanden ist, Fig. 673. Der Spiegelkasten ruht mit seinem oberen Theile auf der Spitze eines eisernen cylindrischen Stabes, welcher im schweren Fusse befestigt ist und durch die an den Boden angeschraubte Hülse hindurchgeht. Letztere trägt überdies für den Bedarfsfall einen Schnurlauf, der mit einem abgesondert stehenden Schwungrade in Verbindung gebracht werden kann. Steht eine Flamme in der Röhre ungefähr in gleicher Höhe mit der Mitte der Spiegel, so erscheint sie bei rascher Rotation der Spiegel als ein zusammenhängender Lichtstreifen, so lange die Flamme nicht singt, sobald aber die Luftsäule in der Röhre zum Tönen gebracht wird, erblickt man eine Reihe getrennter Flammenbilder, Fig. 674, welche nur unten durch einen blassblauen Lichtstreif verbunden sind. Wasserstoffgas ist zu diesem Versuche weniger geeignet, weil seine Flamme gar zu lichtschwach ist. Die im rotirenden Spiegel erscheinenden Flammenbilder rücken einander um so näher, je höher der Ton ist, welchen die Flamme in der Röhre erzeugt und je langsamer der Spiegel rotirt.

Reichert hat den Spiegelapparat in der Fig. 675 dargestellten Form construirt, bei welchem nur ein Spiegel in Anwendung kommt, welcher gegen die horizontale Rotationsachse schräg gestellt ist, wie die Fig. 675 zeigt. Die Ebene des Spiegels macht einen Winkel von ungefähr 15^0 mit der verticalen Scheibe *ab*. Der Durchmesser des Spiegels beträgt 15 bis 25 cm. Man kann diese Vorrichtung an jedem Rotationsapparate mit horizontaler Umdrehungsachse, z. B. an der Schwungmaschine Fig. 131, S. 159, anbringen. Die Flammenbilder erscheinen auf dem rotirenden Spiegel als auf einem Kreisbogen liegend, wie es unsere Figur andeutet.

Diese Erscheinung ist die Folge davon, dass die Flamme jedesmal wächst, wenn die Schichten der tönenden Luftsäule sich gegen die Mitte der Röhre hinbewegen, während die Flammengrösse auf ein Minimum herabsinkt, so oft sich die Luftschichten von der Mitte der Röhre wegziehen.

Fig. 673.



Ueber die Formveränderungen, welche eine singende Flamme während einer jeden Oscillation erfährt, kann der rotirende Spiegel keine Auskunft geben, weil derselbe in die

Fig. 675.

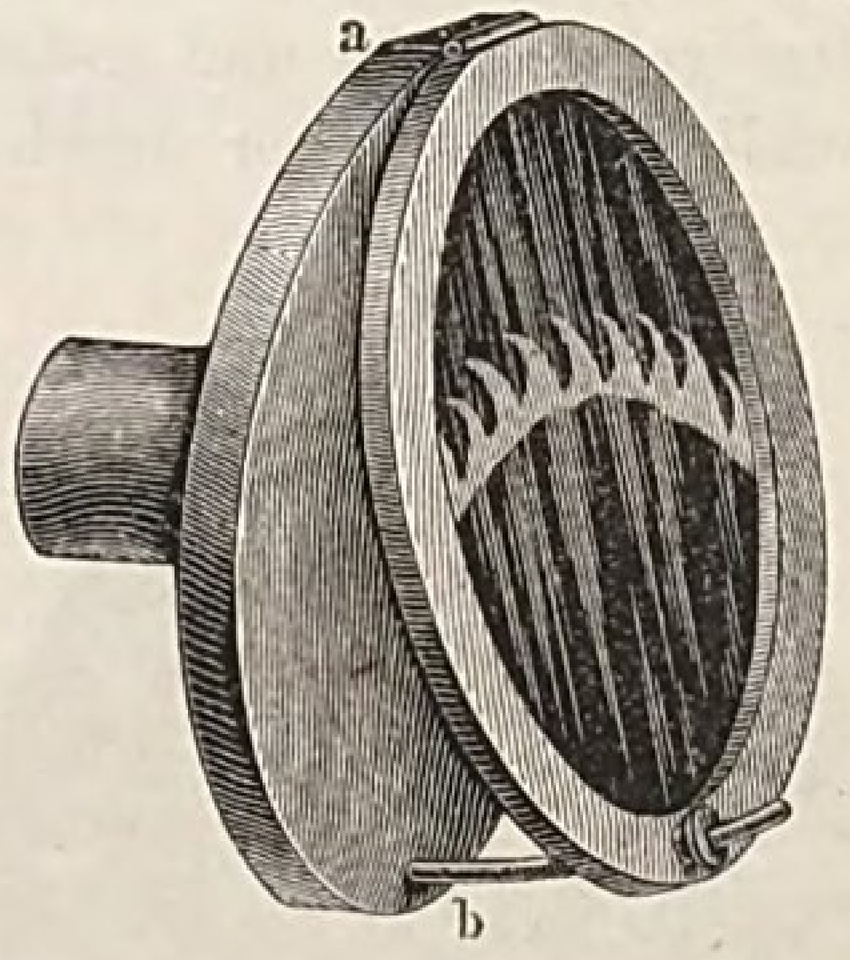
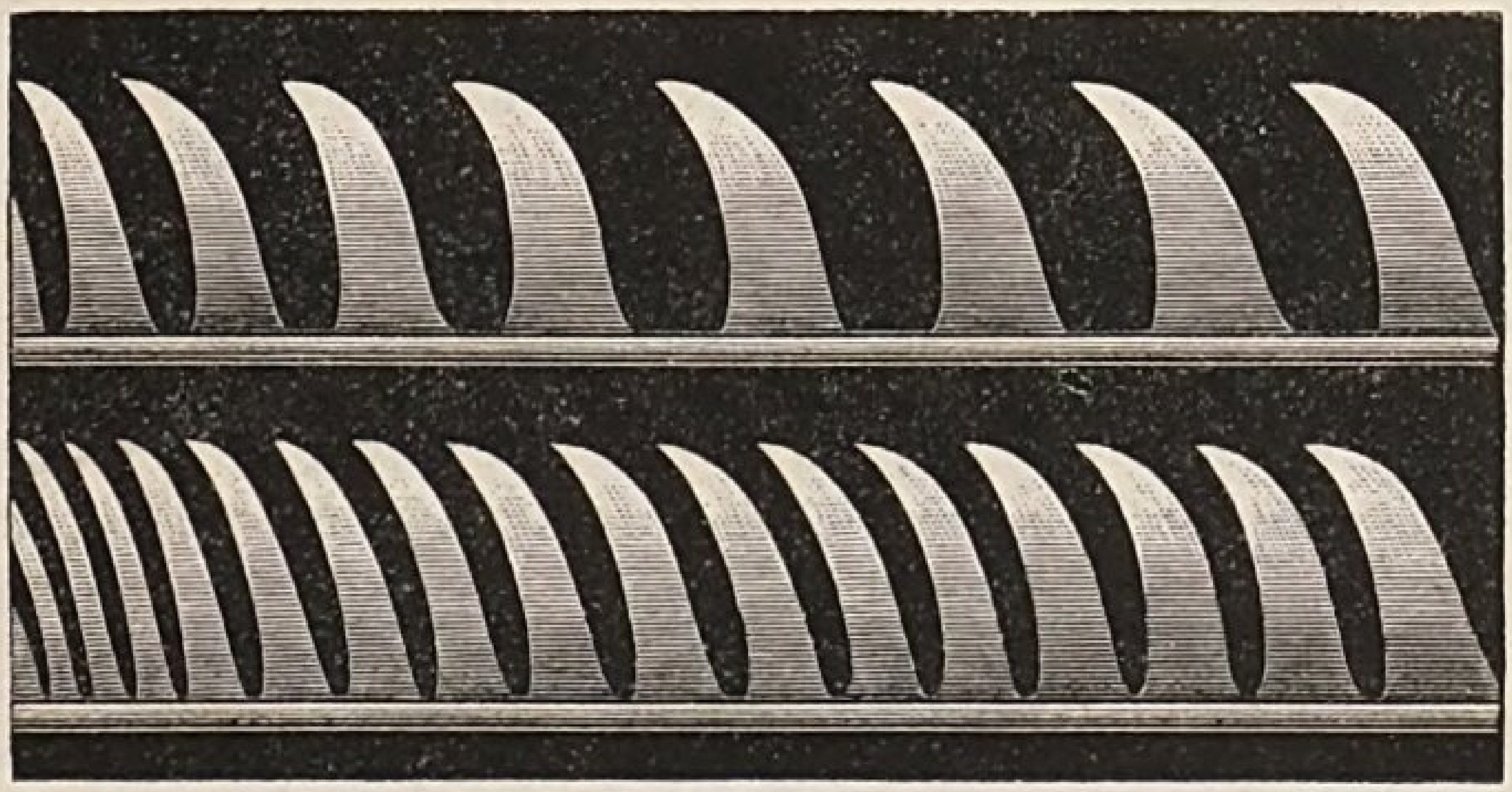


Fig. 674.



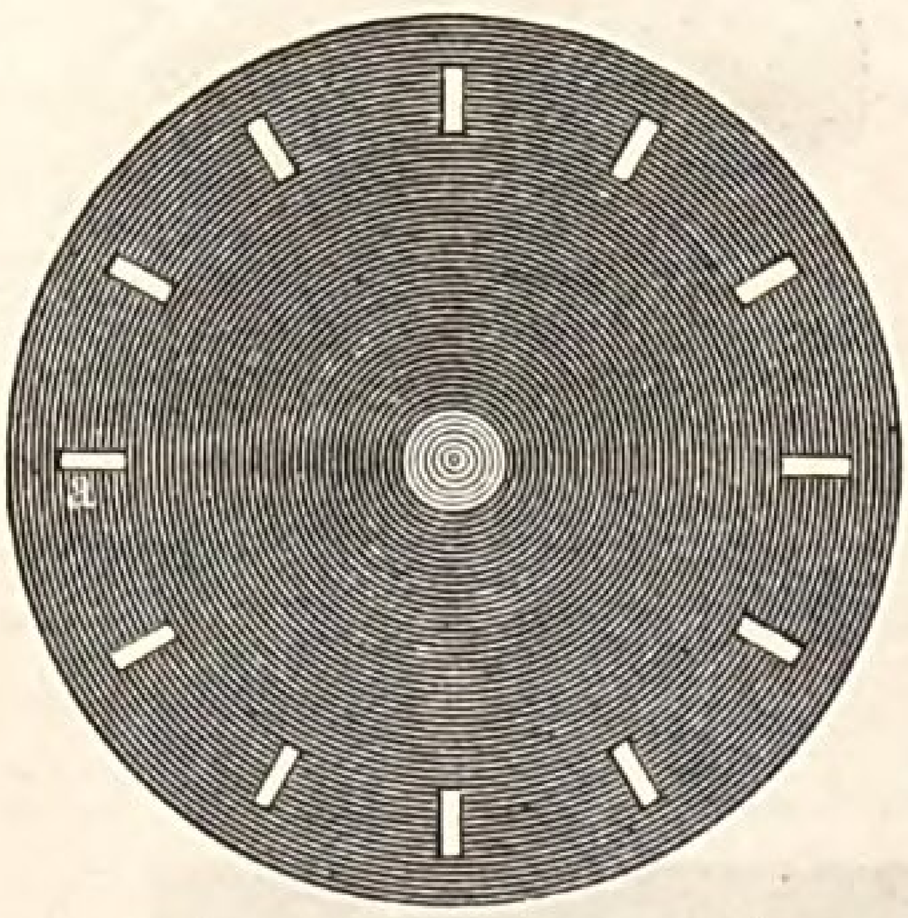
Breite gezogene und in einander fliessende Bilder liefert, während das Princip der stroboscopischen Scheiben, welche in der Lehre vom Licht näher betrachtet werden sollen, wie Plateau (1836) und Doppler (1845) unabhängig von einander gezeigt haben, ein vortheilhaftes Hülfsmittel bietet, die Oscillationen rasch vibrirender Körper zu analysiren

und von Töpler zuerst zur Untersuchung der singenden Flammen angewendet wurde *).

Die Oscillationen eines tönenden Körpers sind viel zu schnell, als dass wir dieselben mit blossem Auge verfolgen könnten, die verschiedenen Formen z. B., welche eine singende Flamme während einer vollständigen Oscillation durchläuft, vereinigen sich zu einem Totalbilde, in welchem die Form eines einzelnen Momentes vollkommen verschwindet.

Kann man es aber dahin bringen, dass das Auge nur momentan die oscillirende Flamme erblickt, so sieht man deutlich die Gestalt, welche dieselbe in diesem Augenblicke hat. Es lässt sich dies unter anderem mit Hülfe einer Scheibe, Fig. 676, von ungefähr 50 cm Durchmesser erreichen, welche in der Nähe ihres Randes mit einer Reihe concentrischer, einander gleicher und gleich weit von einander abstehender Schlitze versehen ist und welche in ihrer Ebene mit entsprechender Geschwindigkeit um eine durch ihren Mittelpunkt gehende feste Achse gedreht werden kann. Der Apparat ist so aufgestellt, dass, wenn sich eine Oeffnung bei *a* befindet, ein nahe an dieselbe herangebrachtes Auge eine hinter ihr befindliche singende Flamme deutlich sehen kann. Steht die Scheibe still, so sieht man durch den Schlitz bei *a* den Totaleindruck aller Phasen (momentanen Zustände) der singenden Flamme, wenn aber die Scheibe rasch rotirt, so sieht man die Flamme immer nur in solchen Momenten, in welchen eine Oeffnung vor dem Auge passirt, und zwar sieht man dann die Phase der Flamme, in welcher sie sich eben befindet. In der Regel wird für jede folgende Oeffnung, welche das Auge passirt, die Phase der Flamme eine etwas andere sein, und so kommt es denn, dass die Flamme sich zu bewegen scheint.

Fig. 676.



Nehmen wir zunächst an, die rotirende Scheibe sei mit der singenden Flamme unisono, d. h. die Scheibe drehe sich mit solcher Geschwindigkeit, dass sie, nach Art der Sirene angeblasen (§. 204), den gleichen Ton gebe wie die singende Flamme, so durchläuft die Flamme eine vollständige Vibration in der gleichen Zeit, welche zwischen dem Vorübergang zweier auf einander folgenden Oeffnungen vor dem Auge vergeht. Hat nun die Flamme gerade ihren niedersten Stand erreicht, wenn eine Oeffnung das Auge passirt, so wird das Gleiche stattfinden, wenn die folgenden Oeffnungen der Reihe nach vor dem Auge vorübergehen, man

*) Pogg. Ann. CXXVIII.

sieht die Flamme stets in ihrer tiefsten Stellung, sie scheint also ruhig in dieser Stellung zu verharren. Wäre die Flamme jedesmal in ihrer höchsten Phase, wenn eine Oeffnung das Auge passirt, so würde man dieselbe so sehen, als ob sie ungeändert in ihrer grössten Höhe verbliebe.

Die Sache ändert sich aber sogleich, wenn das Unisono zwischen Scheibe und Flamme gestört wird. Nehmen wir z. B. an, die Scheibe rotire etwas langsamer! Wenn die Flamme in dem Momente, in welchem irgend eine Oeffnung das Auge passirt, gerade in ihrem tiefsten Stande angekommen ist, so wird sie ihre nächste Oscillation vollendet haben, sie wird abermals ihren tiefsten Stand erreichen, ehe die nächste Oeffnung das Auge passirt, und wenn diese Oeffnung vor das Auge kommt, ist die Flamme bereits wieder etwas gewachsen; noch mehr ist sie gewachsen, wenn die zweite, die dritte etc. Oeffnung vor dem Auge vorübergeht.

Der Gangunterschied zwischen der tönenden Flamme und der rotirenden Scheibe betrage $\frac{1}{n}$ der Schwingungsdauer der Flamme, so wird jede folgende Oeffnung die Flamme so weit verändert zeigen, wie es einer Zeit von $\frac{1}{n}$ der ganzen Schwingungsdauer entspricht. Sehen wir in einem bestimmten Momente die Flamme in ihrer niedersten Stellung, so sehen wir sie wieder in derselben in dem Momente, wo das nte Loch das Auge passirt, da die Flamme inzwischen gerade $n + 1$ volle Bewegungen in Wirklichkeit ausgeführt hat. Scheinbar durchläuft sie inzwischen nur einmal die auf einander folgenden Formen, d. h. sie scheint n mal langsamer zu oscilliren, als sie wirklich oscillirt. Je geringer man also den Gangunterschied zwischen Flamme und Scheibe macht, desto langsamer sieht man die Flamme oscilliren, desto leichter ist es, die verschiedenen Formen zu verfolgen, welche sie in Wirklichkeit ungleich schneller durchläuft.

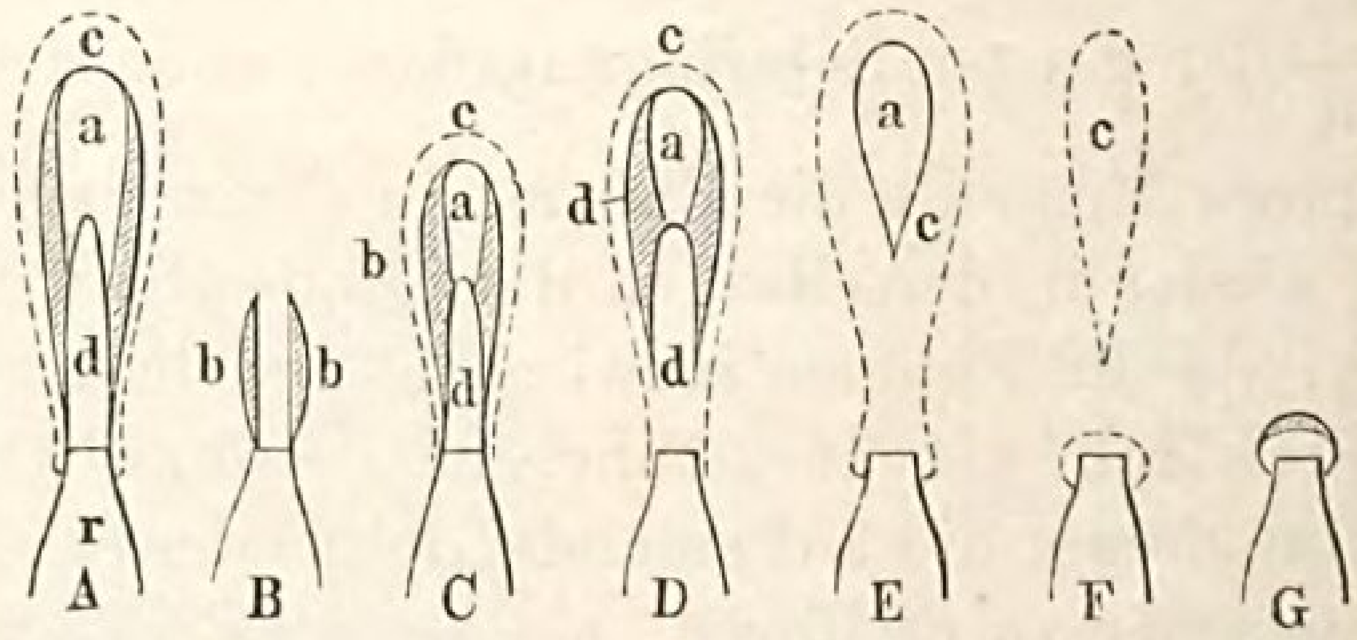
Die Scheibe, mit welcher Töpler experimentirte, hatte 20 Oeffnungen und wurde durch ein Uhrwerk gedreht, welches bis zu einem gewissen Grade die Geschwindigkeit der Rotation zu reguliren erlaubte.

Die Ausführung der eben angedeuteten Versuche bedarf aber, wenn sie brauchbare Resultate liefern soll, mancherlei Vorsichtsmaassregeln, namentlich optischer Natur, in Betreff deren wir auf die bereits citirte Originalabhandlung verweisen müssen.

In Fig. 677 (a. f. S.) zeigt A den $2^1/_2$ mal vergrösserten Durchschnitt einer Leuchtgasflamme, welche aus einer 0,9 mm weiten Brennerspitze hervorbricht und in einem 623 mm langen Rohre singt, wenn dieselbe mit blossem Auge beobachtet wird. a ist die leuchtende Spitze der inneren Flamme; dieselbe geht nach unten in die blaue Zone $b\,b$ über, welche in der Figur schraffirt angedeutet ist. Der innere Raum d ist wahrscheinlich ganz dunkel; endlich ist die ganze Flamme an ihrem äusseren Saume von einer Zone c umgeben, welche mit schwachem, röthlichgelbem Lichte schimmert. Die Bilder B, C, D, E, F und G zeigen

die Auflösung dieser singenden Flamme durch das Stroboskop. Zu Anfang jeder Schwingung bricht aus der glühenden Brennerspitze *r* nur ein blaues Flämmchen hervor, welches einen oben offenen Cylindermantel bildet. In der zweiten Phase *C* umschliesst die Spitze des blauen Theils bereits die Anfänge des leuchtenden Theiles *a* und man bemerkt Spuren der äusseren Zone *c*. Bei *D* ist der leuchtende Theil *d* schon deutlich entwickelt, der blaue Theil ist von der Brennermündung losgerissen. In der Phase *E* ist die blaue Zone ganz verschwunden, die helle Spitze *a* sowie die Hülle *c* haben das Maximum ihrer Grösse erreicht. Hierauf verschwindet *a* und es bleibt nur die Zone *c*, welche als mattes gelbrothes Wölkchen in einiger Entfernung über dem Brenner schwebt, während sich unmittelbar an der Brennerspitze noch ein Restchen von *c* zeigt. Die sechste Phase *G* zeigt, wie das ganze obere Flammenbild verschwunden ist und nur auf der Ausflussöffnung ein kaum sichtbares Licht lagert, aus welchem sich in der folgenden Schwingung dieselbe

Fig. 677.



Reihenfolge von Erscheinungen entwickelt. — In etwas anderer Weise verläuft die Erscheinung bei Anwendung von Wasserstoffgas.

Weiter unten werden wir noch weitere Anwendungen des Stroboskopischen Princips auf akustische Erscheinungen kennen lernen.

194 **Orgelpfeifen, manometrische Flammen, Kundt'sche Röhren.** Die zweckmässigste Methode, die Luft in Röhren in den Zustand stehender Schwingungen zu versetzen, ist diejenige, welche man bei den Orgelpfeifen, auch Labialpfeifen genannt, in Anwendung gebracht hat. Die Einrichtung derselben ist aus Fig. 678 und Fig. 679 zu ersehen. Man unterscheidet an ihnen den Fuss, den Mund und die Röhre.

In Fig. 679, welche eine Zinnpfeife darstellt, ist der Fuss mit *FF*, die Röhre mit *RR* bezeichnet. Die Röhre hat an ihrem unteren Ende vorn eine Oeffnung *ab*, welche der Mund genannt wird. Fuss und Röhre sind durch eine dünne Zinnplatte getrennt; zwischen der vorderen Kante dieser Platte, welche den Boden der Schallröhre bildet, und der vorderen Wand des Fusses bleibt eine schmale Spalte, durch welche die unten in den Fuss eingeblasene Luft austritt und, sich an der oberen

Fig. 678.

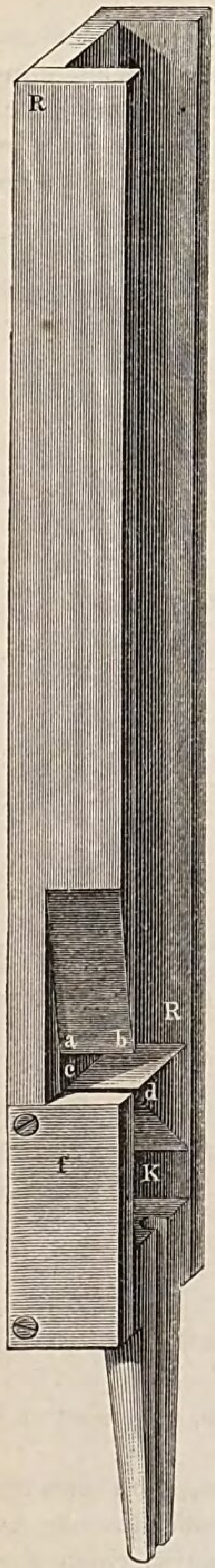
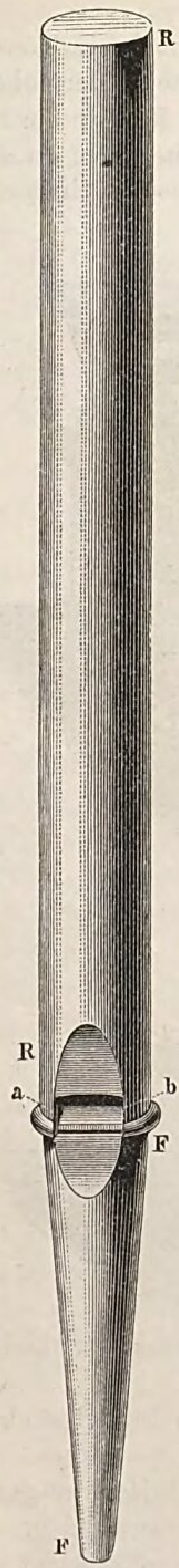


Fig. 679.



Kante des Mundes brechend, die Luftsäule in der Röhre *RR* in stehende Schwingungen versetzt.

Die Einrichtung der hölzernen Orgelpfeifen ist aus dem Durchschnitt Fig. 678 zu ersehen. Die in den Fuss eingeblasene Luft dringt aus dem Behälter *K* durch einen schmalen Spalt *cd* hervor und bricht sich an der oberen Kante *ab* des Mundes, von welchem unsere Figur nur die linke Hälfte *abcd* zeigt.

Statt einer förmlichen Orgel kann man sich zu Versuchen mit Orgelpfeifen, seien es nun gedeckte, wie Fig. 679, oder offene, wie Fig. 678, der in Fig. 680 (a. f. S.) abgebildeten Vorrichtung bedienen. Mit Hülfe des Blasebalges *p* wird die Luft in den Balg *ss* getrieben, aus welchem sie dann durch die anfangs vertical herab, dann horizontal nach vorn hin gehende Röhre *f* in die Windlade *cc* gelangt. Die obere Fläche dieses Kastens enthält eine Reihe von Löchern, auf welche die verticalen Löcher des Holzstückes *dd*, von welchem unsere Figur nur einen Theil zeigt, münden. In die Löcher des Holzstückes *dd* wird der Fuss der Pfeifen eingesetzt. Zwischen den Löchern des Brettes *dd* und entsprechenden Löchern der Windlade *cc* befinden sich aber Schieber, welche selbst mit Löchern versehen sind, so dass man nach Belieben den Wind in eine Pfeife kann eintreten lassen, wenn man den entsprechenden Schieber vorzieht, oder den Wind von dieser Pfeife absperrt, wenn man den Schieber zurückschiebt, wie dies durch Fig. 681 (a. f. S.) noch besser erläutert wird, welche die Einrichtung der Schieber in grösserem Maassstabe darstellt,

als die vorige Figur. Der Schieber 1 ist zurückgeschoben, der Schieber 2 ist vorgezogen.

Eine und dieselbe Pfeife kann mehrere Töne geben. Der tiefste, (der Grundton) einer gedeckten Pfeife ist derjenige, dessen Wellenlänge 4 mal so gross ist, als die Länge der Röhre; die höheren Töne, welche die Pfeife giebt, sind diejenigen, welche einer 3 mal, 5 mal etc. kürzeren Wellenlänge entsprechen, welche also durch stehende Schwingungen

Fig. 680.

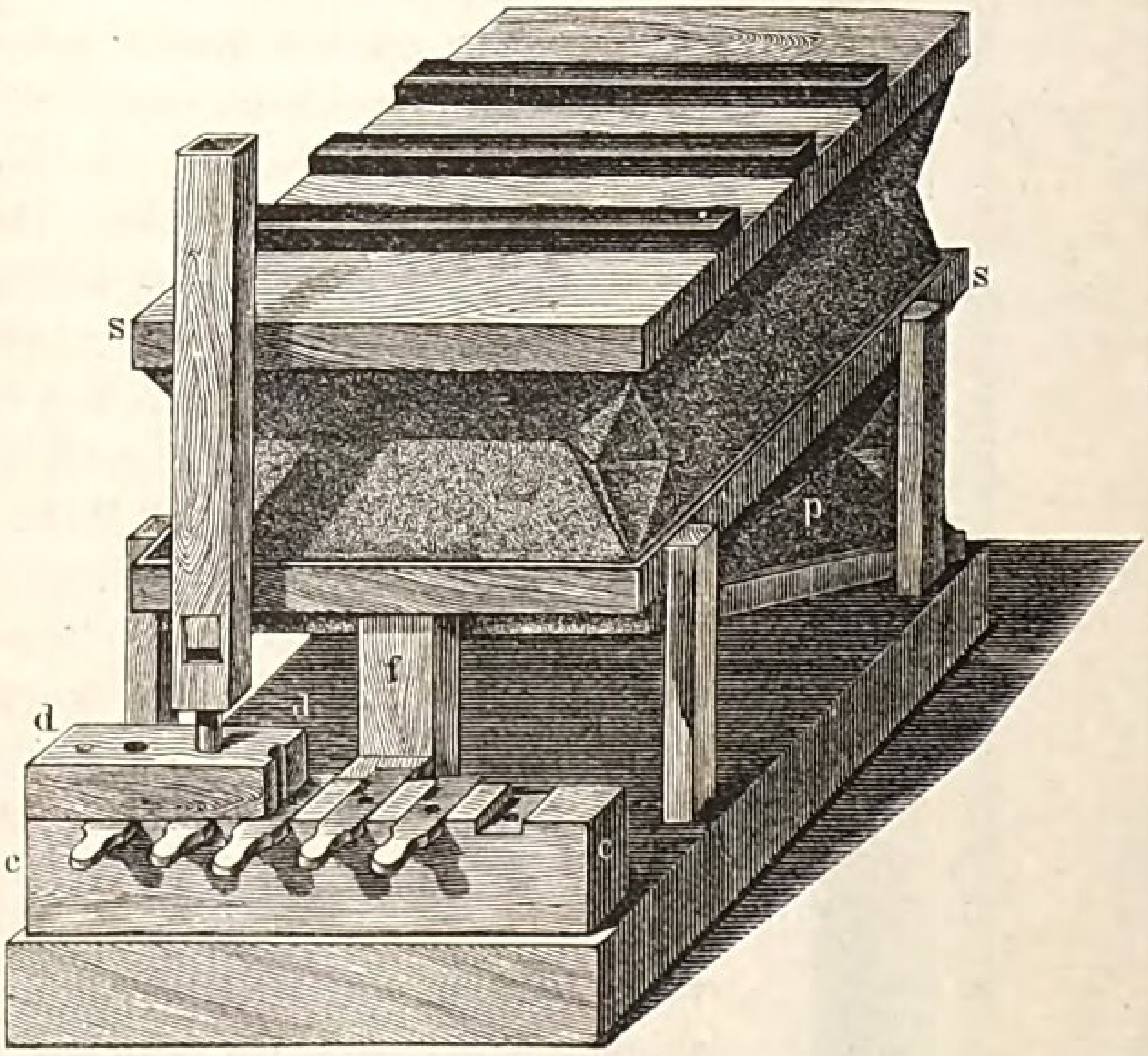


Fig. 681.

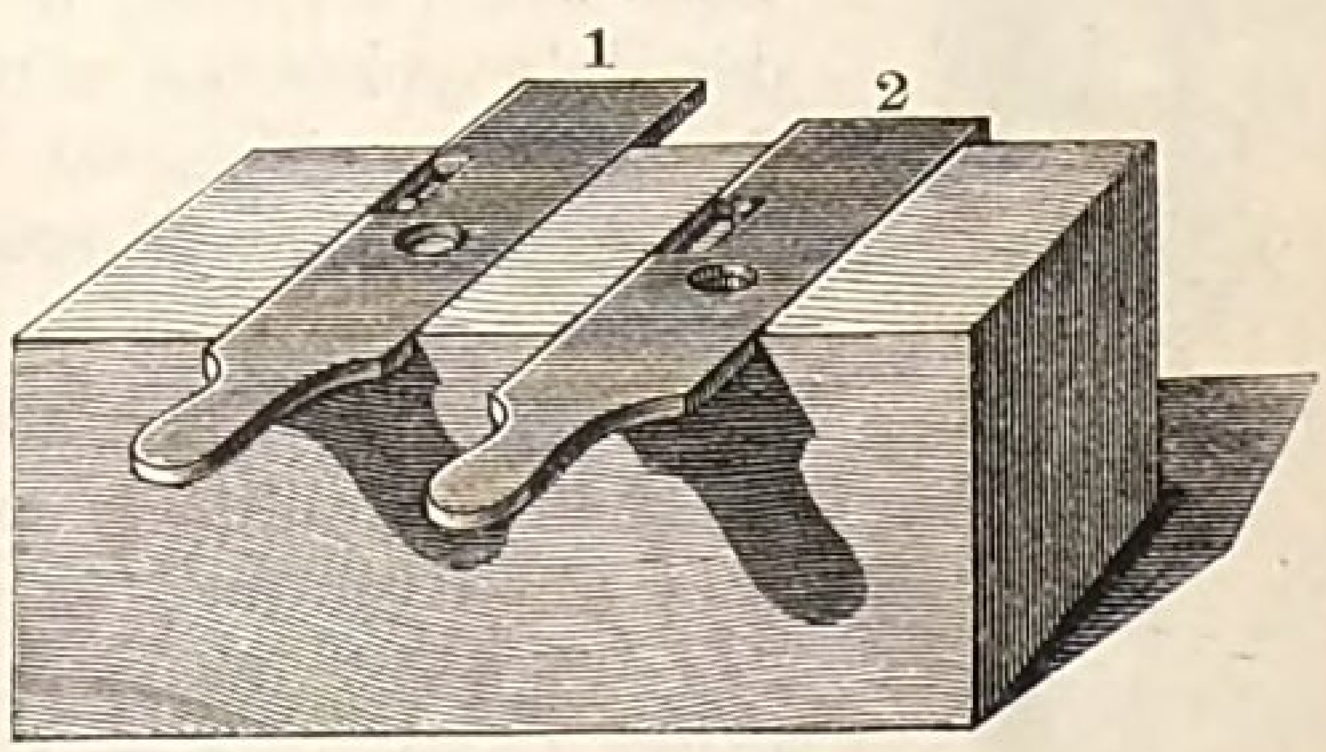
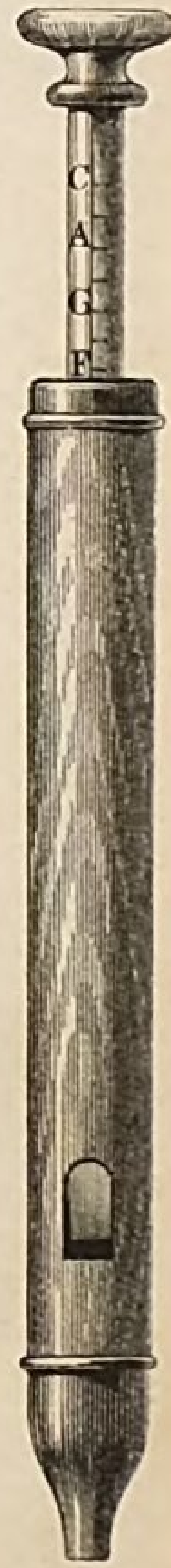


Fig. 682.



erzeugt werden, welche eine 3 mal, 5 mal etc. kleinere Oscillationsdauer haben als der tiefste Ton der Pfeife.

Den tiefsten Ton giebt die Pfeife bei schwächerem, die höheren bei stärkerem Anblasen.

Um Versuche mit gedeckten Pfeifen zu machen, kann man auch sogenannte Stimmpfeifen, Fig. 682, anwenden. Es sind dies ungefähr 30 cm lange, hölzerne, runde Pfeifen, in welchen ein durch einen Kork-

stopfen gebildeter, am unteren Ende eines hölzernen Stempels befestigter Kolben auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch sich die tönende Luftsäule nach Belieben verlängern oder verkürzen lässt.

Auch eine offene Pfeife giebt mehrere Töne, je nachdem sie durch schwächeren oder stärkeren Wind angeblasen wird. Die Wellenlänge des tiefsten Tones, den sie giebt, des Grundtones, ist doppelt so gross wie die Pfeifenlänge. Für diesen Grundton bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte der Röhre. Die Wellenlänge des zweiten Tones der offenen Pfeife ist gleich der Länge der Pfeife selbst und die beiden Schwingungsknoten, welche sich in diesem Falle bilden, sind je um ein Viertel der Röhrenlänge von den Enden entfernt.

Bezeichnen wir die Länge einer offenen Röhre mit L, so sind die Wellenlängen der Töne, welche sie geben kann,

$$2\,L,\ {}^{2}/_{2}\,L,\ {}^{2}/_{3}\,L \text{ etc.},$$

während

$$4\,L,\ {}^{4}/_{3}\,L,\ {}^{4}/_{5}\,L \text{ etc.}$$

die Wellenlängen der Töne sind, welche eine gedeckte Pfeife von der Länge L geben kann.

Der tiefste Ton, welchen eine Pfeife geben kann, wird ihr Grundton genannt, die anderen Töne, welche sie bei verstärktem Winde giebt, heissen die Obertöne.

Wenn man an verschiedenen Stellen einer Orgelpfeife Löcher macht, die man nach Belieben durch einen Schieber verschliessen oder öffnen kann, so kann man zeigen, dass der Ton durchaus nicht geändert wird, wenn man ein Loch öffnet, welches sich an der Stelle eines Bauches befindet, dass jedoch eine Aenderung eintritt, wenn ein Loch an einer anderen Stelle geöffnet wird.

Um die Schwingungsknoten der Luftsäule in einer Röhre zu zeigen, wendet Hopkins eine gläserne Röhre an, welche ungefähr 3 cm im Durchmesser hat und welche ungefähr 60 cm lang ist. Die Röhre wird über einer Metallplatte befestigt, welche in gleicher Weise festgeschraubt wird, wie die Platten, welche zur Erzeugung der Klangfiguren dienen. Letztere wird durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen zum Tönen gebracht. Der Ton der Platte muss der Länge der Röhre entsprechen. In der Röhre hängt an einem Faden ein Rähmchen herab, über welches eine zarte Membran gespannt ist, die mit Sand bestreut wird. Dieser Sand bleibt ruhig liegen, wenn das Rähmchen an die Stelle eines Knotens gebracht wird; an allen anderen Stellen dagegen wird er herabgeworfen, was natürlich an der Stelle der Bäuche am stärksten der Fall ist.

Weil man durch Anstreichen einer Metallplatte nicht immer mit Sicherheit den gewünschten Ton erhält, so ist es zweckmässig, den Versuch so abzuändern, dass man die Glasröhre in den Fuss einer Orgelpfeife, Fig. 683 (a. f. S.), steckt; man hat auf diese Weise eine oben

offene Orgelpfeife von Glas, welche mit Sicherheit ihren tiefsten Ton und bei verstärktem Winde oder verkleinerter Mundöffnung seine Octave giebt.

Für den tiefsten Ton der Röhre bleibt der Sand ruhig liegen, wenn sich das Rähmchen in der Mitte der tönenden Luftsäule befindet, wie Fig. 683 andeutet; an der gleichen Stelle kommt aber der Sand sogleich in lebhafte Bewegung, wenn durch stärkeren Wind die Octave des Grundtones erzeugt wird, während man in gleicher Weise für diesen höheren Ton die Schwingungsknoten bei *a* und *b* nachweisen kann.

Fig. 683.

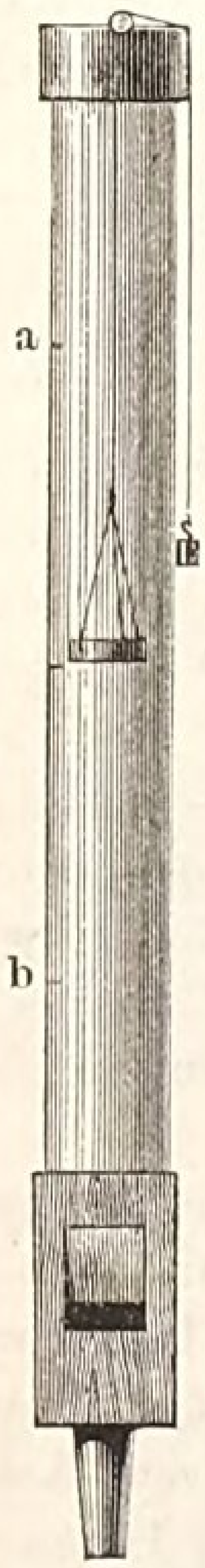


Fig. 684.

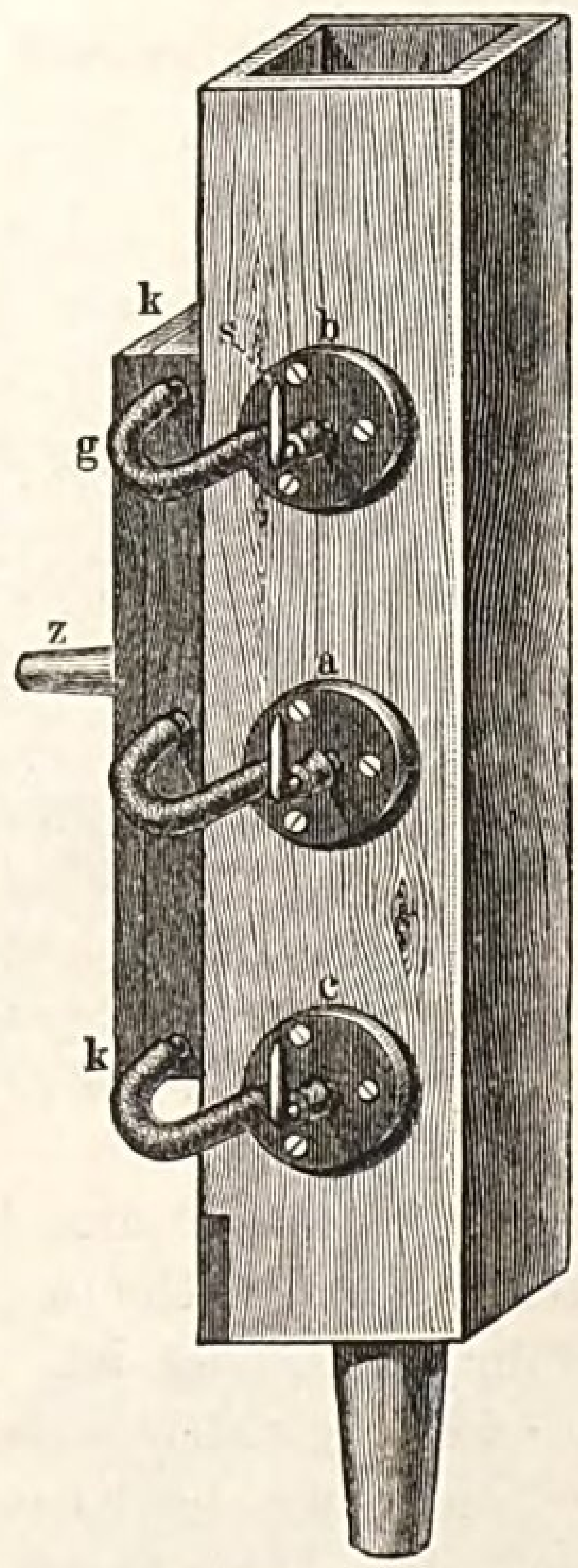
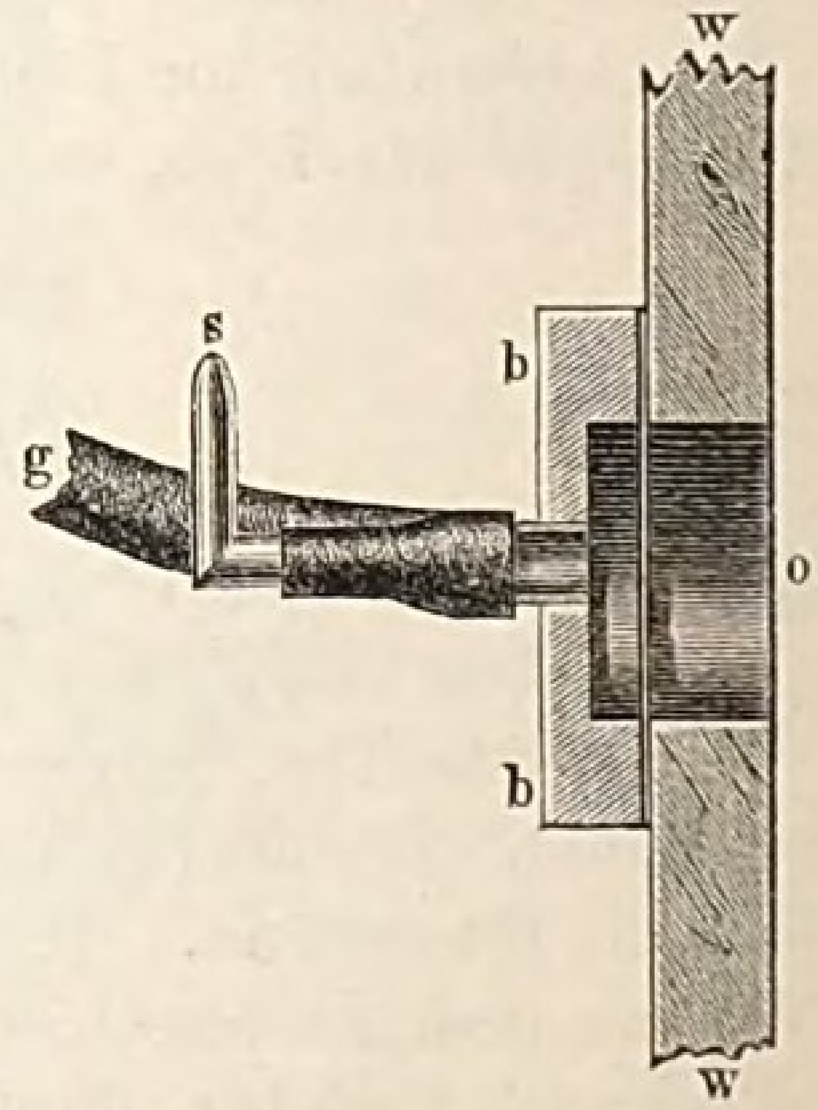


Fig. 685.



Sehr schön lassen sich die Schwingungsknoten mittelst der manometrischen Flammen von König nachweisen. An eine offene Orgelpfeife, welche in Fig. 684 so dargestellt ist, dass ihre horizontalen Dimensionen in $^1/_5$, die verticalen aber in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse aufgetragen sind, ist seitlich ein Kästchen *kk* aufgeschraubt, in welches durch einen an das Röhrchen *z* anzusteckenden Gummischlauch Leuchtgas einströmt. Aus dem Kästchen *kk* wird dann das Gas durch drei kurze Röhrchen in die kleinen Holzkästchen *a*, *b* und *c* geleitet, aus welchen es endlich durch drei kleine Brenner ausströmt. Die Mitte von *a* befindet sich an der Stelle, an welcher sich in der Pfeife ein Schwingungsknoten bildet, wenn sie ihren Grundton giebt. An der Stelle der Schwingungsknoten, welche der Octav des Grundtones entsprechen, sind die Kästchen *b* und *c* aufgeschraubt. An Stelle dieser Kästchen ist die Wand der Pfeife durchbohrt, die Höhlung des Kästchens aber ist von der Luft in der Röhre durch eine dünne Kautschukplatte

getrennt, wie man dies in Fig. 685 sieht, welche ein Gaskästchen sammt Brenner in $^1/_2$ der natürlichen Grösse darstellt. Wenn die Röhre nicht tönt, sind die Flammen der drei Brenner ganz gleich; giebt die Pfeife ihren Grundton, so gerathen alle drei Flammen in eine zitternde Bewegung; für die mittlere Flamme ist dies am bedeutendsten, weil sich das mittlere Kästchen an der Stelle eines Schwingungsknotens, also da befindet, wo Verdichtung und Verdünnung stärker auftreten, als an irgend einer anderen Stelle der Röhre. Hat man den Gaszufluss so geregelt, dass die drei Flämmchen klein genug sind, so löscht die mittlere beim Ertönen des Grundtons aus. Für die Octav des Grundtons brennt die mittlere Flamme ruhig, weil sie sich an der Stelle eines Bauches befindet, während die beiden anderen, welche jetzt an der Stelle von Knoten stehen, lebhaft erzittern oder selbst ausgelöscht werden.

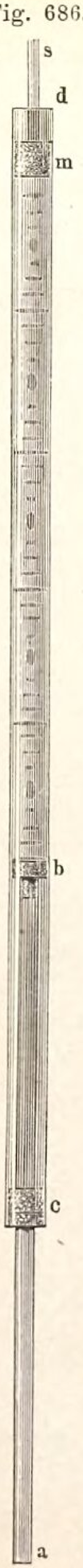
Der Mund der Pfeife ist auf derselben Seite angebracht, auf welcher das Kästchen *kk* angeschraubt ist. Die gegenüberstehende Wand (in unserer Figur die Wand rechts) ist durchbrochen und durch eine Glasplatte geschlossen, damit man mit diesem Apparate auch den durch Fig. 683 erläuterten Versuch anstellen kann.

Wenn man die manometrischen Flammen tönender Pfeifen durch rotirende Spiegel untersucht, so erhält man ähnliche Resultate, wie wir sie bereits bei den singenden Flammen kennen gelernt haben. Wenn man auf derselben Windlade zwei offene Pfeifen aufsetzt, von welchen die eine die Octav der anderen giebt und deren jede in ihrer Mitte (also im Schwingungsknoten ihres Grundtons) mit einem manometrischen Kästchen versehen ist, so sieht man im Spiegel die in Fig. 674, S. 681 dargestellte Erscheinung, dass die eine Flammenreihe doppelt so viel Zähne zeigt als die andere, wenn man mittelst eines Kautschukröhrchens dafür gesorgt hat, dass sich der Brenner der einen Pfeife nahe unter dem der anderen befindet.

Eine weitere Methode, die Schwingungsknoten in tönenden Luftsäulen sichtbar zu machen, hat Kundt angegeben*). Um die Luft in einer längeren Röhre in stehende Schwingungen zu versetzen, wird auf der einen Seite derselben die Hälfte einer engeren Glasröhre *ab*, Fig. 686 (a. f. S.), von ungefähr 1 cm äusserem Durchmesser und 1 m Länge mittelst eines wohl schliessenden Korkes bei *c*, welcher auf der Mitte der Röhre *ab* festsitzt, in die etwas weitere Röhre *cd* eingeführt. An das Ende *b* der engeren Röhre ist ein Kork angesetzt, dessen Gestalt aus der Figur zu ersehen ist und dessen breiterer Theil zwar in den Querschnitt der weiteren Röhre passt, sich aber doch ohne Reibung in derselben verschieben lässt. Das andere Ende des Rohres *cd* ist durch einen wohl schliessenden Kork *m* abgesperrt, den man mittelst des Stäbchens *s* etwas vor- oder zurückschieben kann. Wird der äussere Theil des Rohres *ab* mit einem befeuchteten wollenen Lappen gerieben, so geräth er in Lon-

*) Pogg. Ann. CXXXV.

Fig. 686.



gitudinalschwingungen und lässt in Folge dessen einen kräftigen Ton hören. Dabei vibrirt der Kork *b* in der Längsrichtung der Röhre und seine Stösse werden in dem weiteren Röhrenstücke Schallwellen erzeugen, welche bei *m* reflectirt werden, so dass sich zwischen *b* und *m* stehende Schwingungen bilden. Befindet sich nun die Röhre in horizontaler Lage und ist auf der ganzen Länge zwischen *b* und *m* ein feiner Staub (*Semen Lycopodii*, Kieselerde, am besten Korkstaub) verbreitet, so sammelt er sich in Querlinien, welche vorzugsweise in den Bäuchen ausgebildet erscheinen, während in den Knotenpunkten der Staub einfach angehäuft wird oder auch Ringe bildet. Der Abstand zweier auf einander folgender Knoten oder zweier auf einanderfolgender Bäuche ist gleich einer halben Wellenlänge des Tones in der Luft.

Am regelmässigsten bilden sich die Staubwellen in *bm*, wenn die Länge dieses Röhrenstückes möglichst genau ein Vielfaches der zugehörigen Luftwelle ist.

Kundt hat die Röhre *cd* mit zwei Seitenröhrchen versehen, mittelst deren man sie evacuiren und mit einem anderen Gase füllen kann. Je nachdem *cd* mit anderen Gasen gefüllt ist, ergeben sich verschiedene Werthe für die Wellenlänge desselben Tones, also auch verschiedene Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in diesen Gasen. Für Kohlensäure rücken die Maxima der Staubanhäufung näher zusammen, für Leuchtgas und Wasserstoffgas rücken sie weiter aus einander.

Bezeichnen wir die Länge einer Staubwelle für Luft mit 1, so ist dieselbe in dem gleichen Apparate für Kohlensäure 0,8, für Leuchtgas 1,6, für Wasserstoffgas 3,56. Danach ergiebt sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Kohlensäure $331 \,.\, 0{,}8 = 265$ m, in Leuchtgas $333 \,.\, 1{,}6 = 530$ m und in Wasserstoffgas $331 \,.\, 3{,}56 = 1178$ m*).

195 **Dichtigkeitsänderungen in den Knotenpunkten.** Die im vorigen Paragraphen besprochenen Versuche beweisen unzweifelhaft, dass in den Knotenpunkten tönender Luftsäulen abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft stattfinden; sie geben aber keine Auskunft über die Grösse dieser Dichtigkeitsänderungen, welche Kundt durch Anwendung von Wassermanometern ermittelt hat **).

*) Man vergleiche auch die Beobachtungen von Dvořák, Wien. Akad. Ber. LXXII, II, S. 227 (1875).

**) Pogg. Ann. CXXXIV.

Setzt man ein Wassermanometer einfach an der Stelle eines Knotenpunktes in die Wand einer tönenden Luftsäule ein, so kann es freilich seinen Stand nicht dauernd ändern, ja es wird nicht einmal in sichtbare Schwankungen gerathen, weil Verdichtung und Verdünnung viel zu rasch abwechseln, als dass die Wassersäule denselben folgen könnte. Verbindet man aber nach Kundt das Manometer mit einem Ventil, welches durch einen stärkeren Luftdruck von Seiten der Pfeife her gegen das Manometer gehoben wird, sich also nur in solchen Momenten öffnet, für welche in dem entsprechenden Knotenpunkte eine Verdichtung eintritt, so muss das Manometer steigen, bis seine Höhe dem Dichtigkeitsmaximum der Luft in dem Knotenpunkte entspricht. — Hat man dagegen dem Ventil die entgegengesetzte Lage gegeben, so wird es sich in den Momenten öffnen, in welchen im Knotenpunkte eine Luftverdünnung eintritt, in diesem Falle zeigt es also das Dichtigkeitsminimum der Luft in den Knotenpunkten an.

Als Kundt solche Ventilmanometer am oberen Ende einer gedeckten 30 cm langen gläsernen Orgelpfeife anbrachte, ergab sich bei kräftigem Ertönen ihres Grundtones in einem Falle ein Steigen, im anderen Falle ein Sinken des Wassermanometers um 20 bis 25 cm. Die Druckdifferenz zwischen dem Maximum der Verdichtung und der Verdünnung am Boden einer etwa 30 cm langen gedeckten Orgelpfeife kann also bei starkem Tönen gegen 60 cm Wasserdruck, also ungefähr $^1/_{13}$ Atmosphäre, betragen. Dieses Resultat zeigt, dass in unseren musikalischen Instrumenten, bei welchen die Luft den tönenden Körper bildet, die Dichtigkeitsänderungen derselben grösser sind, als man bisher anzunehmen geneigt war.

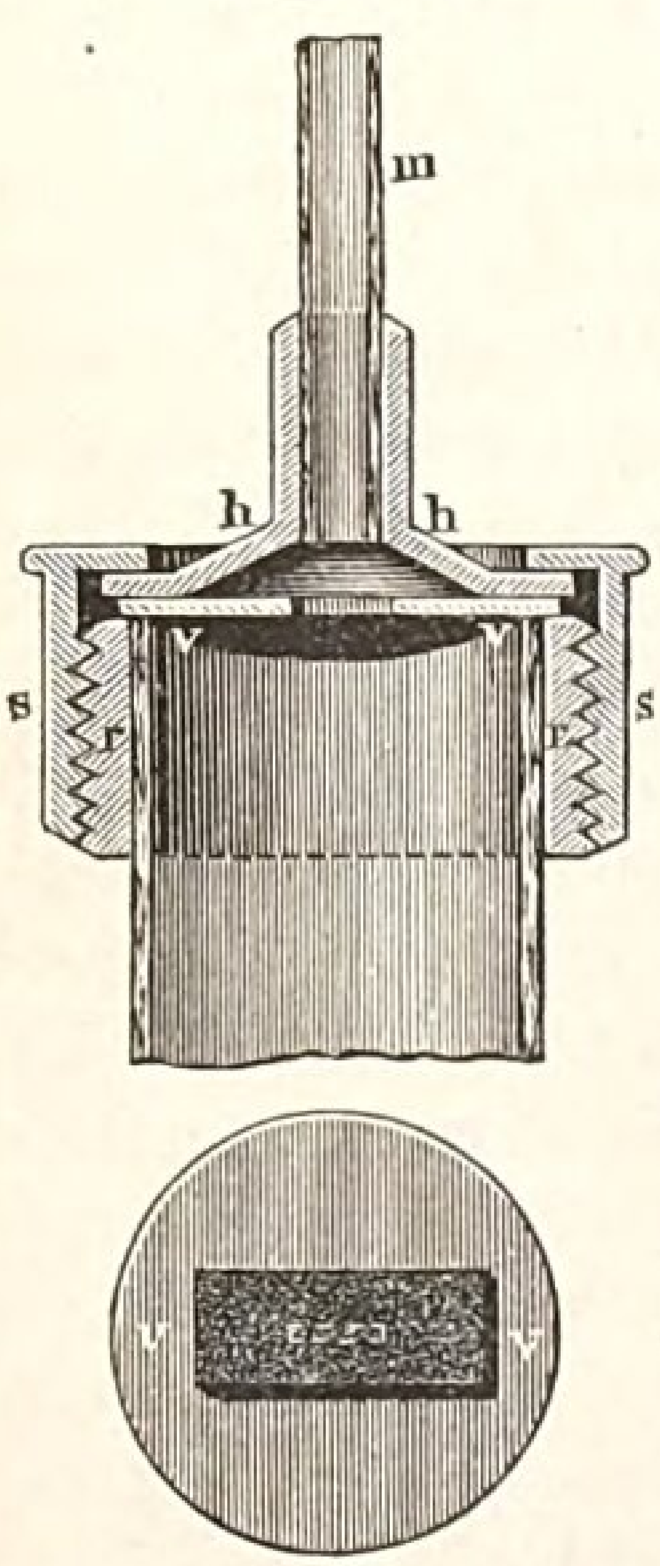
Die Ventilmanometer können auch statt an dem Ende einer gedeckten Pfeife in dem Knoten einer offenen Pfeife angebracht werden; in diesem Falle ergeben sich aber die Druckdifferenzen ungefähr nur halb so gross wie in dem oben betrachteten Falle.

Die Construction der Ventilmanometer, wie sie Kundt am oberen Ende einer gedeckten Pfeife anbrachte, wird durch Fig. 687 (a. f. S.) erläutert. Auf das Ende der gläsernen Röhre von einer etwas über 30 cm langen Orgelpfeife ist ein Ring *r* von Messing gekittet, dessen obere Endflächen eben abgeschliffen und in dessen Umfang ein Schraubengewinde eingeschnitten ist. Auf den Rand dieses Ringes wird zunächst die Ventilplatte *v* und auf diese ein Messingstück gelegt, welches im Umfange eben und in dessen etwas erhabener Mitte das Manometerrohr *m* eingekittet ist. Das Messingstück *h* wird sammt der Ventilplatte *v* durch die Ueberfangschraube *s* auf den Rand des Glasrohres und des Ringes *r* aufgepresst. In die messingene Ventilplatte *v* ist ein Schlitz von 1 mm Breite und 5 bis 10 mm Länge eingeschnitten und über denselben eine leicht bewegliche Membran gespannt, die an beiden Enden auf die Platte aufgeklebt ist. Das Manometer zeigt das Maximum oder das Minimum des Druckes im Knotenpunkte an, je nachdem die Ventil-

platte so gelegt ist, dass sich die Membran auf ihrer oberen oder auf ihrer unteren Seite befindet.

Für die Membranen der Ventile wandte Kundt entweder sehr dünne Kautschukstreifen oder Guttaperchapapier an. Die Spannung der kleinen Membran muss so gewählt sein, dass das Ventil, mit dem Munde angeblasen, einen Ton hören lässt, der nicht allzu weit von dem der Orgelpfeife entfernt ist.

Fig. 687.



Nach V. Dvořák*), welcher die Versuche von Kundt wiederholt und mit Modificationen bereichert hat, sind die Angaben des Manometers nicht immer verlässlich, da insbesondere auch die vom Wasser freie Länge der Manometerröhre auf dieselben von Einfluss ist.

V. Dvořák ist es auch gelungen, mittelst passend construirten Ventils und Manometers die Druckänderungen in der freien Luft in der Nähe der Pfeife, welche beim Tönen derselben entstehen, nachzuweisen. Näheres hierüber an der citirten Stelle.

Töpler und Boltzmann wandten zur Bestimmung der Dichtigkeitsänderungen der Luft am Boden einer gedeckten Pfeife eine sehr sinnreiche optische Methode an**), welche aber zu complicirt ist und eine eingehendere Kenntniss der Interferenz der Lichtstrahlen voraussetzt, als dass sie hier besprochen werden könnte. Nach ihren Versuchen betrug die Dichtigkeitsänderung am Boden einer quadratischen 360 mm langen und 52 mm weiten Orgelpfeife $^1/_{26}$ bis $^1/_{23}$ Atmosphäre.

In seinen „Optisch-akustischen Versuchen, Prag 1873“ beschreibt Mach eine Modification der Töpler-Boltzmann'schen Methode, durch welche dieselbe auch für offene Orgelpfeifen anwendbar wird.

196 **Einfluss der Form der Pfeifen auf die Tonhöhe.** Die aus den vorhergehenden Paragraphen sich ergebende Folgerung, dass die Tonhöhe einer Pfeife nur durch deren Länge bedingt sei, ist in der That nicht unbedingt für alle Gestalten der Pfeife richtig, indem die Tiefe der Pfeife, die Breite des Mundloches etc. von wesentlichem Einfluss auf die Tonhöhe sind.

Savart hat gezeigt, dass zwei Pfeifen a und b, Fig. 688, welche gleiche Länge und gleiche Tiefe haben, welche aber ungleich

*) V. Dvořák, Beobachtungen am Kundt'schen Manometer. Wien. Akad. Bericht LXVIII, II, S. 7 bis 9.

**) Pogg. Ann. CXLI.

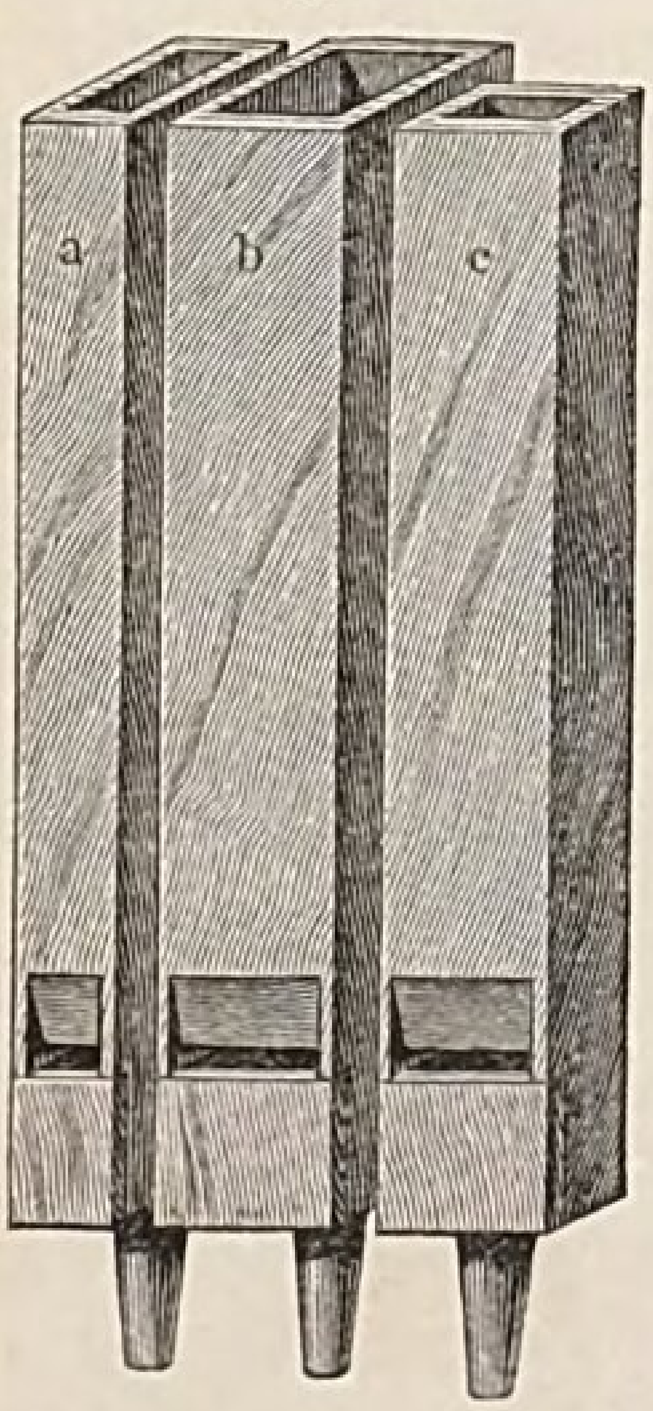
breit sind, denselben Ton geben (vorausgesetzt, dass in beiden der Mund die volle Breite der Röhre einnimmt), nur ist der Ton der schmalen Pfeife schwächer.

Wenn aber bei gleicher Höhe und Breite die Tiefe zweier Pfeifen verschieden ist, wie z. B. bei den Pfeifen *b* und *c*, Fig. 688, so ist ihr Ton nicht mehr gleich, er ist höher für die Röhre von geringerer Tiefe, also in unserem Beispiel höher für die Pfeife *c* als für die Pfeife *b*.

Nach Bertsch ist die Tonhöhe zweier Pfeifen gleich, wenn für beide die Summe der Höhe und der doppelten Tiefe dieselbe ist. Demnach müsste eine Pfeife von 20 cm Länge und 2 cm Tiefe denselben Ton geben wie eine andere von 16 cm Länge und 4 cm Tiefe.

Wenn zwei Orgelpfeifen einander ähnlich sind, d. h. wenn die entsprechenden Dimensionen in gleichem Verhältniss stehen, und wenn der Mund bei verhältnissmässiger Grösse in beiden die gleiche Stellung hat, so verhalten sich die Schwingungszahlen ihrer Töne umgekehrt wie die entsprechenden Dimensionen. Eine Pfeife *A* giebt z. B. einen Ton, welcher die nächst niedere Octave des von einer Pfeife *B* gegebenen Tons ist, wenn *A* doppelt so lang, doppelt so breit und doppelt so tief ist als *B*.

Fig. 688.



Die Grösse und Stellung des Mundloches hat einen sehr bedeutenden Einfluss auf die Tonhöhe der Pfeife. Es ist schon bemerkt worden, dass, wenn man die Weite des Mundloches, d. h. die Entfernung der Lippen, vergrössert, die Röhre leichter ihren Grundton giebt; dass sie aber leichter die Obertöne giebt, wenn man das Mundloch enger macht. Einen anderen Einfluss übt die Breite des Mundloches aus. Wenn z. B. in einer quadratischen Röhre das Mundloch die ganze Breite einer Seite hat, so erhält man einen höheren Ton, als wenn man das Mundloch schmäler macht; man kann auf diese Weise den Ton selbst bis zur Septime herunterstimmen, besonders wenn die Röhre fast cubisch ist. Deshalb bringen auch die Orgelbauer zu beiden Seiten des Mundloches kleine Bleiplatten an, welche Ohren genannt werden und die man durch Biegen etwas nähert oder von einander entfernt, um die Tonhöhe zu reguliren.

Man weiss schon lange durch oft wiederholte Versuche, dass der Ton eines Hornes und einer Trompete von dem Stoff des Instrumentes und dem Grade der Härtung abhängt; ein Horn z. B., welches im Feuer gehärtet ist, ohne dass man seine Gestalt geändert hat, würde nur gedämpfte Töne geben. Die Orgelbauer kennen auch den Einfluss des Stoffes der Röhren auf die Natur des Tons, und sie versichern, dass man die Natur

des Zinns an den Metallröhren oder die des Holzes an den Holzröhren nur etwas zu verändern brauche, um das Instrument schlecht zu machen. Diese Beobachtungen sind durch die zahlreichen Versuche bestätigt worden, welche Savart mit Röhren von mehr oder weniger gespanntem Pergament und mehr oder weniger feuchtem Papier angestellt hat; er fand: 1) dass der Ton in quadratischen Röhren, deren Seite 2 cm und deren Höhe 30 cm beträgt, sich um mehr als eine Octave herunterstimmen lässt, wenn man das Papier, welches die Wände bildet, mehr und mehr anfeuchtet; dieses Papier war auf die festen Kanten des Prismas wie auf einen Rahmen aufgeklebt; 2) dass sich der Ton durch diese Mittel um so leichter herabstimmen lässt, je kürzer die Röhren sind; in cubischen Röhren kann man ihn um mehr als zwei Octaven herabstimmen; 3) dass man nur einen Theil der Wand aus Papier oder Pergament zu machen braucht, um den Ton herabzustimmen.

Zweites Capitel.

Von den Tönen.

Die musikalischen Intervalle. Die Lehre von den Tönen in 197
Bezug auf ihre musikalische Verwendung, sei es in ihrer Aufeinanderfolge (Melodie), sei es in ihrem Zusammenklange (Harmonie), überschreitet das Gebiet der Physik und gehört grossentheils den Gebieten der Physiologie und der theoretischen Musik an. Der Umstand, dass es gelungen ist, manche ästhetische Gesetze auf physikalische Grundlagen zurückzuführen, veranlasst uns, die Elemente der Lehre von den musikalischen Tönen hier aus einander zu setzen; für ein eingehenderes Studium dieses hoch interessanten Gegenstandes müssen wir auf Specialwerke verweisen*).

Durch die Ergebnisse der §§. 191 und 192 sind wir in den Stand gesetzt, Töne verschiedener Höhe, deren relative Schwingungszahlen uns bekannt sind, hervorzurufen. Die Orgelpfeifen würden sich hierzu insofern am besten eignen, als sie, insbesondere die gedeckten Pfeifen, fast ganz reine Töne liefern. Die gespannten Saiten geben, mit den Fingern gezupft oder mit dem Bogen gestrichen, keine isolirte Töne, sondern Klänge, welche ausser dem Hauptton noch höhere (Obertöne) enthalten. Da dies jedoch für die nächsten Zwecke nicht stört, dagegen die Verkürzung der Saiten leichter durchführbar ist, als der Uebergang von längeren Pfeifen zu kürzeren, so wollen wir die Experimente zur Ableitung der musikalischen Tonstufen (Intervalle) und der Zusammenklänge (Accorde) an einem Instrumente angestellt denken, welches unter dem Namen Monochord bekannt ist, obwohl es gewöhnlich mit mehr als nur einer Saite bespannt ist. Fig. 689 (a. f. S.) stellt ein Monochord mit zwei Saiten dar.

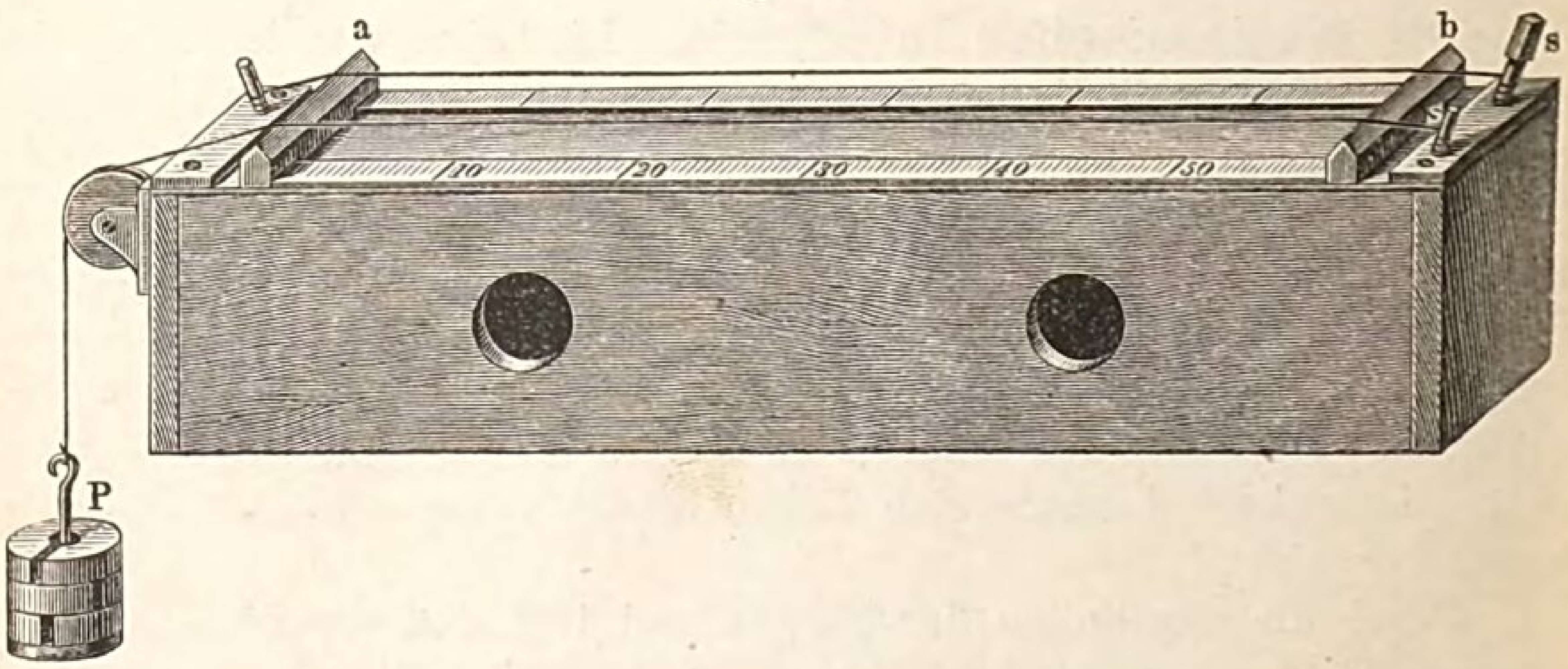
*) z. B. in H. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. E. Mach, Einleitung in die Helmholtz'sche Musiktheorie. A. v. Oettingen, Harmoniesystem in dualer Entwickelung.

Die beiden Saiten sind über einem Kasten ausgespannt, der aus vier starken Seitenbrettern besteht, auf welche ein Resonanzboden, d. h. ein ganz dünnes Brett von Tannenholz, geleimt ist, dessen Bedeutung später erläutert werden soll. Die beiden Stege *a* und *b* begrenzen den frei schwingenden Theil der Saiten, die eine derselben wird durch die Gewichte *P* gespannt, die andere durch den Stimmstock *s*.

Um eine der beiden Saiten zu verkürzen, ohne gleichzeitig ihre Spannung zu ändern, bedient man sich des beweglichen Steges (Fig. 690), indem man die Saite zwischen dem Fussstück *ns* und dem Deckel *pr* einklemmt. Die klemmenden Flächen sind mit weichem Leder belegt. Hierdurch wird verhindert, dass sich die Schwingungen auf den nicht benutzten Theil der Saite übertragen.

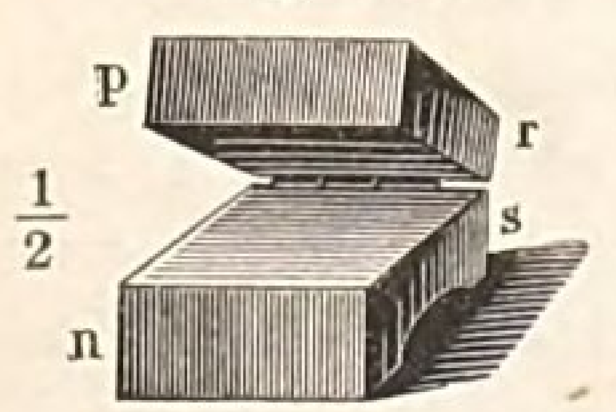
Wir beginnen damit, dass wir die beiden Saiten bei gleicher Länge auf die gleiche Tonhöhe bringen, indem wir die Spannung der einen

Fig. 689.



oder der anderen so lange ändern, bis wir keinen Unterschied der Töne mehr wahrnehmen. Dabei wird freilich vorausgesetzt, dass wir entweder selbst ein hinreichend entwickeltes musikalisches Gehör haben, oder uns durch ein solches unterstützen lassen. Die absolute Höhe des Tones ist dabei ganz gleichgültig. Das Verhältniss der beiden gleichen Töne wird Unisono genannt und durch den Bruch $^1/_1$ ausgedrückt.

Fig. 690.



Verkürzen wir nun die eine Saite auf die Hälfte, so muss nach §. 191 die Wellenlänge auch auf die Hälfte, mithin die Schwingungszahl auf das Doppelte gebracht werden. Der Ton, den nun die Saite giebt, hat trotz seiner bedeutend grösseren Höhe einen auffallend ähnlichen Charakter wie der tiefere der anderen Saite; er ist gewissermaassen eine Wiederholung des letzteren in höherer Tonlage. Auch hat er die Eigenschaft, dass er mit dem tieferen Tone, den wir von nun an Grundton (oder Tonica) nennen wollen, zusammen sich zu einem harmonisch klingenden Accord, zu

einem Tongemisch vereinigt, welches sich als angenehm empfundener Klang (Consonanz) darstellt. Dies wird am besten dadurch bemerkbar gemacht, dass man durch kleine Verschiebungen des Steges das Tonverhältniss ein wenig ändert. Sofort tritt ein äusserst unangenehmes Tongemisch (Dissonanz) auf, welches wieder in die Consonanz zurückverwandelt wird, sowie man das Saitenverhältniss 1 : 2 herstellt.

Das Verhältniss des Tons mit doppelter Schwingungszahl zum Grundtone wird Octave genannt und mit $^2/_1$ bezeichnet. Man sagt auch, der obere Ton sei die Octave des Grundtons. Der Name Octave wird später seine Erklärung finden.

Durch Verschieben des Steges von der Lage, welche der halb so langen Saite bis zu jener, die der ursprünglichen Länge entspricht und wiederholtes gleichzeitiges Anstimmen der beiden Saiten, findet man dann, dass zwischen Unisono und Octave noch mehrere Verhältnisse der Tonhöhen eine Consonanz liefern, während alle zwischen diesen liegenden Verhältnisse mehr oder weniger ausgesprochene Dissonanzen liefern. Die Consonanzen treten auf, wenn die Saite auf $^2/_3$, $^3/_4$, $^3/_5$, $^4/_5$ und $^5/_6$ ihrer Anfangslänge verkürzt ist. Dabei ist die Consonanz um so vollkommener, je kleiner die Zahlen dieser Brüche sind, so dass also unter obigen Verhältnissen $^2/_3$ die beste, $^5/_6$ die wenigst vollkommene Consonanz geben. Das Verhältniss $^6/_7$ giebt bereits eine starke Dissonanz. Die Schwingungszahl des Tones der Saitenlänge $^2/_3$ ist $^3/_2$ mal so gross, als jene des Grundtons, dessen Schwingungszahl wir zur Einheit wählen. Das Tonverhältniss $^3/_2$ wird Quinte genannt. Die Namen der übrigen consonirenden Tonverhältnisse sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Relative Saitenlänge und Schwingungszahl des Grundtons	Relative Saitenlänge des höheren Tons	Relative Schwingungszahl des höheren Tons	Name des Tonverhältnisses (Intervalls)
1	1	1	Unisono
1	$^1/_2$	2	Octave
1	$^2/_3$	$^3/_2$	Quinte
1	$^3/_4$	$^4/_3$	Quarte
1	$^3/_5$	$^5/_3$	Sexte
1	$^4/_5$	$^5/_4$	Grosse Terz
1	$^5/_6$	$^6/_5$	Kleine Terz

Verkürzt man die Saite noch weiter als bis zur Hälfte, so begegnet man noch weiteren consonirenden Tönen. Bei der Saitenlänge $^1/_3$ erhält man den Ton mit der relativen Schwingungszahl 3, welcher

Duodecime genannt wird und zugleich die Quinte der Octave des Grundtons ist. Bei der Saitenlänge $^1/_4$ erhält man die Octave der Octave, oder die zweite Octave (Doppeloctave) des Grundtons mit der relativen Schwingungszahl 4. Solcher Octaven giebt es also eine ganze Reihe, sie entsprechen einer Reihe von Tönen mit stets verdoppelter Schwingungszahl; d. h. ihre Schwingungszahlen stehen im Verhältniss der Zahlen:

$$1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32 \ \ldots\ldots$$

Aendert man bei obigen Experimenten Länge oder Spannung der Saite, deren Ton als Grundton gewählt wird, so dass also die absolute Höhe des letzteren verschiedene Werthe annimmt, so gelten dennoch für die relativen Schwingungszahlen der zugehörigen consonirenden Töne dieselben Zahlenverhältnisse.

Aus dieser Thatsache folgt demnach der wichtige Satz:

Der musikalische Werth einer Tonstufe (eines Intervalls) ist nicht von der Differenz, sondern von dem Quotienten der Schwingungszahlen der Töne abhängig.

Wir wollen diesen Fundamentalsatz der Tonlehre noch durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Angenommen, eine Saite mache 48 Schwingungen per Secunde. Wählen wir diesen Ton als Grundton, so entsprechen seiner Quinte $48 \times {}^3/_2 = 72$ Schwingungen.

Die Quinte hat also diesmal um 24 Schwingungen mehr als der Grundton. Wählen wir jetzt den Grundton um eine Octave höher, also zu 96 Schwingungen, so kommen wir keineswegs auf die Quinte dieses Tons, indem wir wiederum 24 addiren. Der Ton $96 + 24 = 120$ ist vielmehr identisch mit der grossen Terz von dem Tone 96. Um die Quinte des neuen Grundtons 96 zu erhalten, müssen wir diese Zahl mit der für die Quinte charakteristischen Verhältnisszahl $^3/_2$ multipliciren, wodurch wir 144 erhalten. Die neue Quinte hat dann nicht um 24, sondern um 48 Schwingungen mehr als der neue Grundton.

Man kann das auch so ausdrücken: Will man in musikalisch gleichwerthigen Tonstufen aufsteigen, so dass also die nach einander erreichten musikalischen Tonhöhen eine arithmetische Reihe (I. Ordnung) bilden, so müssen die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe (I. Ordnung) fortschreiten.

Ein Beispiel bildet die oben angeführte Reihe der Octaven.

Da die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Reihe unter sich eine arithmetische Reihe bilden, so kann man auch sagen: Die musikalischen Werthe der Tonhöhen verhalten sich wie die Logarithmen der Schwingungszahlen*).

*) Es ist dieser Satz nur ein specieller Fall des allgemeineren von Fechner aufgestellten „psychophysischen Gesetzes", nach welchem überhaupt die Empfindungen fortschreiten wie die Logarithmen der Sinnesreize.

Die Tonleitern. Unter einer Tonleiter (Scala) versteht man die vollständige Reihe der innerhalb einer Octave gelegenen, nach der Höhe geordneten Töne, welche in einem Musikwerke gebraucht werden. 198

Die heute unter den Culturvölkern gebrauchten Tonleitern sind das Product eines über 2000 Jahre dauernden Entwickelungsprocesses, dessen Erörterung in die Geschichte der Musik gehört. Hier mögen die folgenden Bemerkungen genügen.

Die Musik war ursprünglich bis in das 10. Jahrhundert im Wesentlichen homophon, das heisst einstimmig. Wirkten mehrere Stimmen mit, so hatten sie gleichzeitig dieselbe Tonhöhe, oder unterschieden sich doch nur durch das Intervall einer Octave. Ein gleichzeitiges Zusammenwirken verschieden hoher Töne, eine Harmonie, gab es nicht, sondern nur ein Fortschreiten nach Tönen verschiedener Höhe, eine Melodie. Dabei wurde anfangs besonderer Werth darauf gelegt, dass die unmittelbar auf einander folgenden Töne möglichst vollkommene Consonanz zu einander besassen. Da dies nach der Octave am meisten bei der Quinte, welcher das einfache Verhältniss $^3/_2$ entspricht, der Fall ist, so entstanden die ältesten Tonleitern aus Folgen von Quinten. Sucht man zu einem Tone seine Quinte und jenen tieferen Ton, von welchem jener selbst die Quinte ist, so erhält man die Reihe:

$$^2/_3 \quad 1 \quad ^3/_2.$$

Setzt man dazu noch die Octaven von $^2/_3$ und 1, so hat man die Reihe:

$$^2/_3 \quad 1 \quad ^4/_3 \quad ^3/_2 \quad 2.$$

Innerhalb der zwischen 1 und 2 gelegenen Octave besteht diese Tonleiter aus Grundton, Quart, Quint und Octav und dies sollen die vier Töne gewesen sein, mit denen die Lyra der Griechen ursprünglich bespannt war. Diese Tonleiter enthält die wichtigsten Intervalle der declamirenden Rede. Bei einer Frage steigt die Stimme um eine Quart, bei der stärkeren Betonung eines Wortes um eine Quint, am Schlusse der Rede fällt sie um eine Quint. Zur musikalischen Begleitung einer Declamation reichte also diese Tonleiter aus.

Die weitere Entwickelung erfolgte durch Aufnahme mehrerer Quintenfolgen. Geht man nämlich an den Enden der Reihe $^2/_3$, 1, $^3/_2$ je um eine Quinte hinauf und hinab, so erhält man die Reihe:

$$^4/_9, \quad ^2/_3, \quad 1, \quad ^3/_2, \quad ^9/_4.$$

Von diesen Tönen liegen die beiden ersten unterhalb, der letzte oberhalb der Octave 1 bis 2.

In Folge des Bestrebens, die in den benachbarten Octaven vorhandenen Töne auch in der mittleren zu repräsentiren, sei es, um die allzu weit von einander abstehenden Töne einander zu nähern, sei es, um sämmtliche Octaven mit denselben Tönen auszustatten, wurden für die Töne $^4/_9$ und $^2/_3$ die höheren Octaven, $^{16}/_9$ und $^4/_3$, ferner für $^9/_4$ die tiefere

Octave $^9/_8$ eingefügt, so dass also die auf die Octave 1 bis 2 transponirte Reihe lautete:

$$1,\ ^9/_8,\ ^4/_3,\ ^3/_2,\ ^{16}/_9,\ 2.$$

Dies ist die alte chinesische Tonleiter, welche merkwürdiger Weise auch zahlreichen schottischen und irischen Volksliedern zu Grunde liegt, und diesen einen eigenthümlichen Charakter verleiht.

Gehen wir vom Grundton um eine Quinte hinab und um 5 Quinten hinauf, so erhalten wir

$$^2/_3\ 1\ ^3/_2\ ^9/_4\ ^{27}/_8\ ^{81}/_{16}\ ^{243}/_{32}.$$

Ersetzen wir auch hier alle Töne, welche unter 1 und oberhalb 2 fallen, durch ihre zwischen 1 und 2 fallenden Octaven, so bekommen wir

$$^4/_3\ 1\ ^3/_2\ ^9/_8\ ^{27}/_{16}\ ^{81}/_{64}\ ^{243}/_{128}$$

und wenn wir nach der Höhe ordnen und den Ton 2 hinzufügen, die Scala:

$$1\ ^9/_8\ ^{81}/_{64}\ ^4/_3\ ^3/_2\ ^{27}/_{16}\ ^{243}/_{128}\ 2,$$

welche als Pytagoräische Tonleiter bekannt ist und den späteren Scalen bis ins 16. Jahrhundert zur Grundlage gedient hat*). Aus ihr gingen auch die Scalen des Ambrosianischen und Gregorianischen Kirchengesanges hervor, welche sich in der römischen Kirche erhalten haben.

Nach dem Aufkommen der polyphonen Musik im 10. und 11. Jahrhundert und noch mehr seit der Entwickelung der harmonischen Musik vom 16. Jahrhundert an, konnten die Pytagoräische und die von ihr abstammenden Tonleitern nicht mehr genügen, da ihre Intervalle nur zum Fortschreiten nach einer Melodie, nicht aber zur Construction harmonischer Accorde geeignet waren. Es musste also eine wesentliche Umbildung der Scala erfolgen, welche allmälig zur Construction unserer jetzt geltenden beiden Tonleitern, der diatonischen Dur-Scala und Moll-Scala, führte. Von diesen beiden hat sich zuerst die erstere, dann die letztere entwickelt. Ihre jetzige Gestalt ist kaum 200 Jahre alt und ausschliessliches Eigenthum der germanischen, romanischen, celtischen und slavischen Völker.

Die folgende Zusammenstellung giebt für jede dieser beiden Tonleitern die Namen, Buchstabenzeichen und relativen Schwingungszahlen der Töne, denen noch die Intervalle (Quotienten) der Nachbartöne beigefügt sind.

*) Eine griechische Tonleiter findet sich merkwürdiger Weise noch bei der in Tirol (Zillerthal) gebrauchten Holzharmonika (Helmholtz l. c., S. 443).

Dur-Scala.

Name	Prim	Secunde	Grosse Terz	Quart	Quint	Grosse Sext	Grosse Septime	Octave
Zeichen	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c*
Relative Schwingungszahl	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Intervalle		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Moll-Scala*).

Name	Prim	Secunde	Kleine Terz	Quart	Quint	Kleine Sext	Kleine Septime	Octave
Zeichen	*c*	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c*
Relative Schwingungszahl	1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2
Intervalle		9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9

Aus dieser Zusammenstellung ist einmal erstens zu ersehen, woher die Namen Octave, Quinte etc. stammen; es sind einfach die lateinischen Ordnungszahlen für die Glieder dieser Scalen. Ferner erkennt man, wenn man bei der Septime beginnt und statt des *h* der Durscala das *b* der Mollscala restituirt, die ursprüngliche alphabetische Ordnung der Buchstabenbezeichnung der Töne *a*, *b*, *c* **).

Beide Scalen haben mit der Pytagoräischen die Anzahl der Stufen sowie die Höhe von fünf Tönen gemein; in allen drei Scalen sind die Terz, Sept und Septime abweichend.

In der Pytagoräischen Scala kommen zwischen den Nachbartönen die Intervalle 9/8, 9/8, 256/243, 9/8, 9/8, 9/8, 256/243 vor, also zuerst zwei grössere Intervalle, dann ein kleineres, dann wieder drei der grösseren, dann noch einmal das kleinere. Aehnlich ist die Anordnung in der Durscala, jedoch sind dort zwei unter sich verschiedene grössere Inter-

*) Die hier verzeichnete Mollscala wird insbesondere in absteigender Richtung gebraucht; beim Aufsteigen wird häufig die obere Hälfte der Töne der Durscala entnommen.

**) Die Namen Dur und Moll stammen nicht, wie man meinen möchte, vom Charakter dieser Tonarten, sondern von den beiden Formen des *b*, wofür in der Durscala das eckige *b* (♮ *b* durum) in der Mollscala das runde *b* (♭, *b* molle) geschrieben wurde. Aus dem ersteren wurde das jetzige *h*.

valle $^9/_8$ und $^{10}/_9$, das kleinere ist $^{16}/_{15}$. In der Mollscala finden sich dieselben Intervalle, jedoch in anderer Vertheilung.

Unter den Tönen der Durscala sind alle mit Ausnahme der Secunde und Septime mit dem Grundton consonant, in der Mollscala ist es ebenso mit Ausnahme der Sext, welche dissonant ist.

Die Frage nach der Entstehung dieser Scalen ist verschieden beantwortet worden, sicherlich sind sie nicht auf einmal etwa auf theoretischem Wege construirt worden, sondern allmälig durch das Bedürfniss der harmonischen Musik entstanden *).

Nach Chladni kann man sie aus den dreistimmigen Accorden (Dreiklängen) ableiten. Bevor wir diese Ableitung wiedergeben, müssen wir zuvor Einiges über die Accorde selbst vortragen.

199 **Die Accorde, Ableitung der Dur- und Mollscala.** Unter einem Accord versteht man im Allgemeinen das Zusammenklingen zweier oder mehrerer unter sich consonanter Töne. Die wichtigsten darunter sind die dreistimmigen Accorde oder Dreiklänge, die Accorde im engeren Sinne. Von diesen ist hier die Rede.

Um zu einem vorhandenen Grundton zwei Töne zu finden, welche mit ihm einen Dreiklang bilden, haben wir unter den Tönen, welche zu dem Grundton in Consonanz stehen, zwei solche auszusuchen, welche auch unter sich in Consonanz stehen, also auch unter sich ein Verhältniss der Schwingungszahlen besitzen, das durch Brüche mit den ganzen Zahlen 1 bis 6 ausdrückbar ist.

Bilden wir also zunächst alle Combinationen zu drei aus den Tönen 1, $^3/_2$, $^4/_3$, $^5/_4$, $^5/_3$, $^6/_5$, welche an erster Stelle 1 haben. Es sind folgende zehn:

1,	$^3/_2$,	$^4/_3$	$^9/_8$	Dissonanz
1,	$^3/_2$,	$^5/_4$	$^6/_5$	Consonanz
1,	$^3/_2$,	$^5/_3$	$^9/_{10}$	Dissonanz
1,	$^3/_2$,	$^6/_5$	$^5/_4$	Consonanz
1,	$^4/_3$,	$^5/_4$	$^{16}/_{15}$	Dissonanz
1,	$^4/_3$,	$^5/_3$	$^4/_5$	Consonanz
1,	$^4/_3$,	$^6/_5$	$^{10}/_9$	Dissonanz
1,	$^5/_4$,	$^5/_3$	$^3/_4$	Consonanz
1,	$^5/_4$,	$^6/_5$	$^{25}/_{24}$	Dissonanz
1,	$^5/_3$,	$^6/_5$	$^{25}/_{18}$	Dissonanz

Die in der vierten Columne angeschriebenen Verhältnisse zwischen dem zweiten und dritten Tone der betreffenden Combination lassen erkennen, dass nur vier derselben zu einem wohlklingenden Accord geeignet sind. Schreiben wir diese vier Accorde heraus und ersetzen die weniger übersichtlichen Brüche durch ganze Zahlen, die in demselben Verhältnisse stehen, so erhalten wir:

*) Näheres hierüber in Werken über Geschichte der Musik, z. B. in jenem von A. W. Ambros.

I. $1 : {}^5/_4 : {}^3/_2 = 4 : 5 : 6 = 16 : 20 : 24$ Durgrundaccord (Durdreiklang).
II. $1 : {}^6/_5 : {}^3/_2 = 10 : 12 : 15$ Mollgrundaccord (Molldreiklang).
III. $1 : {}^5/_4 : {}^5/_3 = 12 : 15 : 20$ Mollterzsextaccord (Mollsextaccord).
IV. $1 : {}^4/_3 : {}^5/_3 = 3 : 4 : 5 = 12 : 16 : 20$ Durquartsextaccord.

Um diese vier Accorde und noch zwei andere, die aus ihnen durch „Umkehrung" hervorgehen, herzustellen, benöthigt man aber nur zwei Reihen von Tönen, wie das folgende Schema zeigt:

$$\text{Dur:}\quad \underbrace{10 \quad 12}_{\text{Terzsextaccord}}\!\!\!\overbrace{\quad 16 \quad 20}^{\text{Quartsextaccord}} \quad 24$$

Dur: 10 12 16 20 24
(Quartsextaccord: 12 16 20; Terzsextaccord: 10 12 16; Grundaccord: 16 20 24)

Moll: 10 12 15 20 24
(Terzsextaccord: 12 15 20; Grundaccord: 10 12 15; Quartsextaccord: 15 20 24)

Die beiden noch fehlenden Accorde sind also:

V. $1 : {}^6/_5 : {}^8/_5 = 10 : 12 : 16$ Durterzsextaccord (Dursextaccord).
VI. $1 : {}^4/_3 : {}^8/_5 = 15 : 20 : 24$ Mollquartsextaccord.

Unter der Umkehrung eines Accordes versteht man die Vertauschung des tiefsten Tones desselben mit seiner Octave. Die etwas unconsequente Bezeichnung ist aus Obigem zu entnehmen.

Die beiden Grundaccorde, welche als Dur- und Molldreiklang im engeren Sinne bezeichnet werden, bilden den Ausgangspunkt zur Entwickelung der beiden Tonleitern. Ihr charakteristischer Unterschied besteht in der Terz. Für Dur ist die grosse Terz ${}^5/_4$, für Moll die kleine Terz ${}^6/_5$ als zweiter Ton vorhanden.

Die Entwickelung der Durscala wäre nun nach Chladni so zu denken:

Man setzt an den Duraccord oben und unten je zwei Töne an von solcher Höhe, dass sie mit ihrem Nachbarton nach unten und oben wiederum je einen Duraccord bilden; nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & {}^5/_4 & {}^3/_2 & & \\ {}^2/_3 & {}^5/_6 & & & & {}^{15}/_8 & {}^9/_4 \\ \hline {}^2/_3 & {}^5/_6\,| & 1 & {}^5/_4 & {}^3/_2 & {}^{15}/_8\,| & {}^9/_4 \end{array}$$

(Der Ton 1 wird Tonica, ${}^3/_2$ die Oberquint oder Dominante, ${}^2/_3$ die Unterquint oder Subdominante genannt.) Aus dieser Kette dreier Durdreiklänge, von denen je zwei einen Ton gemeinsam haben, überträgt man alle

Töne, welche ausserhalb der Grenzen der Octav 1 bis 2 liegen, nach entsprechender Verdoppelung resp. Halbirung in die Octave hinein. So erhält man die Durscala:

$$1 \quad {}^{9}/_{8} \quad {}^{5}/_{4} \quad {}^{4}/_{3} \quad {}^{3}/_{2} \quad {}^{5}/_{3} \quad {}^{15}/_{8} \quad 2.$$

Aehnlich entsteht die Mollscala nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & {}^{6}/_{5} & {}^{3}/_{2} & & & \\ {}^{2}/_{3} & {}^{4}/_{5} & & & & {}^{9}/_{5} & {}^{9}/_{4} \\ \hline {}^{2}/_{3} & {}^{4}/_{5} & \big| \; 1 & {}^{6}/_{5} & {}^{3}/_{2} & {}^{9}/_{5} \; \big| & {}^{9}/_{4} \end{array}$$

$$1 \quad {}^{9}/_{8} \quad {}^{6}/_{5} \quad {}^{4}/_{3} \quad {}^{3}/_{2} \quad {}^{8}/_{5} \quad {}^{9}/_{5} \quad 2.$$

Ist auch diese Entstehung der beiden Scalen vielleicht nicht die historisch richtige, so ist sie doch sehr geeignet, begreiflich zu machen, dass dieselben den Anforderungen der harmonischen Musik sehr entsprechen, da sie aus Accorden aufgebaut sind.

Das für die Mollscala charakteristische Intervall ${}^{6}/_{5}$ ist an der Grenze der Consonanz und wurde in älterer Zeit nicht für zulässig gehalten. Gerade dieser Umstand ist für den musikalischen Charakter der Molltonarten von entscheidendem Einfluss. Nach Helmholtz*) ist der Charakter beider Systeme folgender: „Das Dursystem ist für alle fertigen in sich klaren Stimmungen gut geeignet, für kräftig entschlossene, wie sanfte oder süsse, selbst für trauernde, wenn die Trauer in den Zustand schwärmerischer weicher Sehnsucht übergegangen ist. Aber es passt durchaus nicht für unklare, trübe, unfertige Stimmungen, oder für den Ausdruck des Unheimlichen, des Wüsten, Räthselhaften oder Mystischen, des Rohen, der künstlerischen Schönheit Widerstrebenden, und gerade für solche brauchen wir das Mollsystem mit seinen verschleierten Wohlklängen, seiner veränderlichen Tonleiter, seinen leicht ausweichenden Modulationen und dem weniger deutlich ins Gehör fallenden Princip seines Baues.“ **)

200 **Erweiterung der Tonleiter.** Fassen wir nochmals die beiden auf Seite 701 angeführten Tonleitern ins Auge, so sehen wir, dass die Intervalle je zweier auf einander folgender Töne drei verschiedene Werthe haben, nämlich:

$${}^{9}/_{8}, \quad {}^{10}/_{9}, \quad {}^{16}/_{15}.$$

Nun ist $\quad {}^{10}/_{9} = {}^{9}/_{8} \cdot {}^{80}/_{81}$

und $\quad {}^{16}/_{15} = {}^{10}/_{9} \cdot {}^{24}/_{25} = {}^{9}/_{8} \; {}^{24}/_{25} \cdot {}^{80}/_{81}.$

*) Lehre von den Tonempfindungen, S. 489.

**) Eine eigenartige Auffassung des Charakters beider Tonarten, sowie ihres Verhältnisses zu einander ist von A. v. Oettingen in seinem Buche „Harmoniesystem in dualer Entwickelung“ entwickelt worden. Danach wäre das Mollsystem gewissermaassen als Spiegelbild des Dursystems aufzufassen.

Man pflegt das Intervall $^9/_8$ einen „grossen ganzen Ton“ zu nennen; demnach wäre also beispielsweise der Ton *d* um einen grossen ganzen Ton höher als *c*.

Das Intervall $^{10}/_9$ wird ein „kleiner ganzer Ton“ genannt. Dieses Intervall unterscheidet sich von dem vorigen um $^{80}/_{81}$ oder um ein „Komma“; das Intervall $^{16}/_{15}$ wird ein „grosser halber Ton“, das Intervall $^{25}/_{24}$ ein „kleiner halber Ton“ genannt.

Da $^{10}/_9 = ^{16}/_{15} \cdot ^{25}/_{24}$, so kann man sagen, das Intervall des kleinen ganzen Tones kann in zwei Intervalle zerlegt werden, wovon das eine der grosse halbe, das andere der kleine halbe Ton ist.

Diese Bezeichnungsweise ist zwar nicht glücklich gewählt, einmal weil sie zu der unrichtigen Vorstellung verleiten kann, dass die sogenannten halben Töne wirklich halb so grosse Tonstufen vorstellen als die ganzen Töne, sowie auch, weil sie zwei verschiedene Einheiten für den „ganzen Ton“ annimmt; da jedoch diese Bezeichnung oft gebraucht wird, mussten wir sie hier auch mittheilen. Es folgen also in den beiden gebräuchlichen Tonleitern die einzelnen Töne in wechselnden Intervallen von grossen ganzen, kleinen ganzen und grossen halben Tönen. Diese Ungleichheit der Tonstufen führt zu gewissen Consequenzen, die wir jetzt erläutern wollen.

Will man von irgend einem willkürlich gewählten Tone ausgehend eine beliebige Melodie hervorbringen, so hat dies keine Schwierigkeit falls man mit einem musikalischen Instrumente versehen ist, welches, wie die menschliche Stimme oder die Violine, innerhalb seines Tonumfanges Töne jeder beliebigen Schwingungszahl hervorzurufen gestattet. Nicht so bei den übrigen Instrumenten, welche nur eine beschränkte Anzahl von Tönen vorausbestimmter Tonhöhe zu entwickeln gestatten, wie z. B. die Orgel, das Clavier, die Guitarre, die Zither sind. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern. Die allbekannte Melodie zu dem Anfang des Liedes „Was ist des Deutschen Vaterland?“ besteht aus folgender Tonreihe (wobei von der Bezeichnung des Rythmus abgesehen wird):

Was	ist	des	Deut -	schen	Va -	ter -	land?	
c	*d*	*e*	*f*	*c*	*a*	*g*	*f*	
1	$^9/_8$	$^5/_4$	$^4/_3$	1	$^5/_3$	$^3/_2$	$^4/_3$	 1)

Diese Melodie kann also auf jedem Instrumente gespielt werden, welches die Durtonleiter enthält, wenn man nur mit dem für *c* bestimmten Tone beginnt. Es würden z. B. die weissen (Unter-) Tasten des Claviers, welche die Reihe der Durscale enthalten, dazu ausreichen, falls man mit der Taste für *c* beginnt.

Wollte man nun aber die ganze Melodie um eine Quinte höher spielen, also die Schwingungszahlen sämmtlicher Töne im Verhältniss von 2 auf 3 vergrössern, so wäre eine Reihe von Tönen erforderlich, die aus obiger durch Multiplication mit $^3/_2$ hervorgeht.

Diese wäre:

$^3/_2$	$^{27}/_{16}$	$^{15}/_8$	2	$^3/_2$	$^5/_2$	$^9/_4$	2	2)
g		*h*	*c'*	*g*	*e'*	*d'*	*c'*	

Wie man sieht, sind mit einer Ausnahme alle erforderlichen Töne in der Durtonleiter vorhanden, wenn man die nächst höhere Octave, deren Töne wir mit *c' d' e'* bezeichnen, zu Hülfe nimmt. Man könnte also alle erforderlichen Töne auf den weissen Tasten des Claviers finden, indem man mit der Taste für *g* beginnt, nur den zweiten nicht, dessen Höhe $^{27}/_{16}$ in der Durtonleiter nicht vorkommt. Nun ist aber $^{27}/_{16} = {}^5/_3 \cdot {}^{81}/_{80}$; der Ton $^{27}/_{16}$ unterscheidet sich also von dem Tone $^5/_3$, das ist von dem *a* der Durscala nur um das Intervall $^{81}/_{80}$, also um ein Komma, von dem man behauptet, dass es für das Gehör der meisten Menschen als unmerkbar klein nicht in Betracht komme. Lassen wir uns diese Vernachlässigung gefallen, so können wir obige Melodie um eine Quinte höher mittelst der Töne

g (*a*) *h* *c'* *g* *e'* *d'* *c'*

wiedergeben.

Wollten wir aber z. B. statt um eine Quinte nur um eine Terz in die Höhe gehen, also die Melodie von der Taste für *e* anfangend spielen, so würden wir selbst mit der Vernachlässigung eines Komma mit den Tönen der Durscala nicht ausreichen, also auf den weissen Tasten des Claviers die Melodie nicht unverändert spielen können. Denn multipliciren wir die Reihe 1) mit $^5/_4$, so erhalten wir die Tonhöhen:

$^5/_4$	$^{45}/_{32}$	$^{25}/_{16}$	$^5/_3$	$^5/_4$	$^{25}/_{12}$	$^{15}/_8$	$^5/_3$
e			*a*	*e*		*h*	*a*

Von diesen Tönen sind aber nur die mit den Buchstaben *e*, *a*, *e*, *h*, *a* bezeichneten vorhanden. Wir brauchen also drei neue Töne, zu deren Herstellung die schwarzen (Ober-) Tasten des Claviers bestimmt sind.

Wir wollen nun aber diese Aufgabe allgemein lösen, nämlich alle Töne berechnen, welche wir brauchen, um irgend eine beliebige im Dursystem componirte Melodie von jedem der sieben Töne der Scala aus spielen zu können. Wir erhalten die neuen Tonreihen, indem wir die Zahlen der ursprünglichen der Reihe nach mit $^9/_8$, $^5/_4$, $^4/_3$. . . bis $^{15}/_8$ multipliciren. Die nachfolgende Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnung; die neuen, rechteckig eingerahmten Tonreihen sind so unter einander gestellt, dass die gleich hohen Töne senkrecht unter einander liegen. Die über die ursprüngliche Octave hinaus erhöhten Töne sind nach Halbirung in die entsprechende Stelle dieser Octave eingesetzt. Die Buchstaben der ersten Columne geben den Ton an, von welchem jede neue Scala ausgeht.

Bevor wir die Resultate dieser Tabelle der Besprechung unterziehen, wollen wir noch berechnen, welche Töne wir benöthigen, um auch nach dem Mollsystem von den sieben ursprünglichen Tönen aus die Scala reproduciren zu können. Die Tabelle (a. S. 708) enthält die Resultate die-

ser Rechnung; sie ist ganz analog der obigen für das Dursystem abgeleiteten Tabelle ausgeführt.

Sämmtliche auf diese Weise zur Ergänzung der Dur- und Mollscala benöthigten Töne sind nun in der Tabelle (a. S. 709) der Tonhöhe nach geordnet zusammengestellt.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Durscala.

	c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c'*	*d'*	*e'*	*f'*	*g'*	*a'*
c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$						
d	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$					
e	$\frac{25}{24}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{75}{32}$				
f	1	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$			
g	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$		
a	$\frac{25}{24}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{8}$	
h	$\frac{135}{128}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{225}{64}$

Diese Tabelle enthält in der ersten Columne angegeben, ob der betreffende Ton durch die Erweiterung der Dur- oder der Mollscala oder beider benöthigt wird; dann folgt die Verticalreihe der in den vorigen beiden Tabellen erhaltenen relativen Schwingungszahlen in Bruchform. Die nächste Verticalreihe enthält dieselben Werthe zerlegt in Factoren, aus denen man die Verhältnisse erkennt, in welchen die neuen Töne zu den ursprünglichen stehen. Man sieht, dass unter diesen Factoren ausser den ursprünglichen Intervallen der Durtonleiter

$$1,\ {}^9/_8,\ {}^5/_4,\ {}^4/_3,\ {}^3/_2,\ {}^5/_3,\ {}^{15}/_8,\ 2$$

nur noch das Intervall des sogenannten kleinen halben Tons $^{25}/_{24}$ und des Komma $^{81}/_{80}$ neben deren Reciproken vorkommen. Die übrigen Bestandtheile der Tabelle sollen im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Mollscala.

	c	*d*	*es*	*f*	*g*	*as*	*b*	*c'*	*d'*	*es'*	*f'*	*g'*	*as'*
c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$						
d	$\frac{81}{80}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$					
es	$\frac{24}{25}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{54}{25}$				
f	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$			
g	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$		
as	$\frac{24}{25}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{64}{25}$	$\frac{72}{25}$	
b	$\frac{81}{80}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{81}{50}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{72}{25}$	$\frac{81}{25}$

201 **Reduction der Tonleiter, Temperatur, chromatische Scala.** Die Beibehaltung der sämmtlichen 30 Töne innerhalb der Octave, auf welche wir im vorigen Paragraphen geführt wurden, scheitert an der Schwierigkeit, welche die Herstellung und Handhabung solcher musikalischen Instrumente bereiten würde, auf welchen eine solche Anzahl vorausgebildeter Töne vorhanden wäre*). Die menschliche Stimme und die Violine würden also keine Reduction der Tonleiter erfordern, wohl aber z. B. die Orgel, das Clavier, die Harfe etc.

*) Vorschläge hierfür sind mehrfach (von Helmholtz, Appun u. A.) gemacht und im Einzelnen auch mit Erfolg ausgeführt worden.

Tonsystem	Relative Schwingungszahlen	und deren Zerlegung in Intervalle	Bezeichnung	Relative Schwingungszahlen in Decimalbrüchen: bei reiner Stimmung	Relative Schwingungszahlen in Decimalbrüchen: bei gleichschwebend temperirter Stimmung
Dur, Moll	1	$= 1 \cdots\cdots$	**c**	1,00000	1,00000
Moll	$\frac{81}{80}$	$= 1 \cdot \frac{81}{80} \cdots$			
Dur	$\frac{25}{24}$	$= 1 \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ c = cis	1,04166	
Dur	$\frac{135}{128}$	$= 1 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$			1,05946
Moll	$\frac{16}{15}$	$= \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$			
Moll	$\frac{27}{25}$	$= \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ d = des	1,08000	
Dur	$\frac{10}{9}$	$= \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdots$			
Dur, Moll	$\frac{9}{8}$	$= \frac{9}{8} \cdots\cdots$	**d**	1,12500	1,12246
Dur	$\frac{75}{64}$	$= \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ d = dis	1,17187	1,18921
Moll	$\frac{6}{5}$	$= \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ e = es	1,20000	
Dur	$\frac{5}{4}$	$= \frac{5}{4} \cdots\cdots$	**e**	1,25000	
Dur, Moll	$\frac{81}{64}$	$= \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80} \cdots$			1,25992
Moll	$\frac{32}{25}$	$= \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ f = fes	1,28000	
**	$\frac{125}{96}$	$= \frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ e = eis	1,30208	1,33484
Dur, Moll	$\frac{4}{3}$	$= \frac{4}{3} \cdots\cdots$	**f**	1,33333	
Moll	$\frac{27}{20}$	$= \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{80} \cdots$			
Dur	$\frac{25}{18}$	$= \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ f = fis	1,38889	
Dur	$\frac{45}{32}$	$= \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$			1,41421
Moll	$\frac{36}{25}$	$= \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ g = ges	1,44000	
Dur, Moll	$\frac{3}{2}$	$= \frac{3}{2} \cdots\cdots$	**g**	1,50000	1,49831
Dur	$\frac{25}{16}$	$= \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ g = gis	1,56250	1,58740
Moll	$\frac{8}{5}$	$= \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ a = as	1,60000	
Moll	$\frac{81}{50}$	$= \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{81}{80}$			
Dur	$\frac{5}{3}$	$= \frac{5}{3} \cdots\cdots$	**a**	1,66667	1,68179
Dur, Moll	$\frac{27}{16}$	$= \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80} \cdots$			
*	$\frac{125}{72}$	$= \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ a = ais	1,73611	
Dur	$\frac{225}{128}$	$= \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$			1,78180
Moll	$\frac{9}{5}$	$= \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdots$	**b**	1,80000	
Dur, Moll	$\frac{16}{9}$	$= \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$			
Dur	$\frac{15}{8}$	$= \frac{15}{8} \cdots\cdots$	**h**	1,87500	1,88775
Moll	$\frac{48}{25}$	$= 2 \cdot \frac{24}{25} \cdots$	♭ c = ces	1,92000	
**	$\frac{125}{64}$	$= \frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdots$	♯ h = his	1,95313	2,00000
Dur, Moll	2	$= 2 \cdots\cdots$	**c'**	2,00000	

Die praktische Musik erlaubt sich daher nachfolgende Vereinfachungen. Die erste besteht darin, dass man das Komma vernachlässigt. Man setzt also z. B. für den Ton $^{81}/_{80}$ den Ton 1, für $1 . ^{25}/_{24} . ^{81}/_{80}$ den Ton $1 . ^{25}/_{24}$ u. s. f. Die Töne, welche so an Stelle der mit Komma behafteten treten, sind mit einer Ausnahme sämmtlich zuvor vorhanden; nur der Ton $^{5}/_{3} . ^{25}/_{24}$ fehlt und wird daher der Consequenz wegen eingeschaltet. (In der Tabelle mit * bezeichnet.) Die Tabelle enthält dann noch folgende Kategorien von Tönen: Erstens die ursprünglichen Töne der Durscala, welche mit den Buchstaben *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, *c′* bezeichnet werden, dann Töne, welche aus diesen durch Erhöhung um das Intervall $^{25}/_{24}$ entstehen und mit den Bezeichnungen ♯ *c* = *cis*, ♯ *d* = *dis*, ♯ *f* = *fis* etc. versehen werden, endlich Töne, welche aus den ursprünglichen durch Vertiefung um das Intervall $^{24}/_{25}$ entstehen; diese werden durch die Bezeichungen ♭ *d* = *des*, ♭ *e* = *es*, ♭ *f* = *fes* etc. unterschieden. Die Töne $^{5}/_{4} . ^{25}/_{24}$ = ♯ *c* = *eis* und $^{15}/_{8} . ^{25}/_{24}$ ♯ *h* = *his* (in der Tabelle mit ** bezeichnet), werden durch obige Ableitung nicht erhalten, sind daher nachträglich eingefügt, um das System der um den Halbton erhöhten und vertieften Haupttöne consequent zu ergänzen.

Uebersichtlich zusammengestellt sind hiernach folgende Töne vorhanden:

Vertiefte Töne	Ursprüngliche Töne der Durscala	Erhöhte Töne
(♭ c = ces)	c	♯ c = cis
♭ d = des	d	♯ d = dis
♭ e = es	e	♯ e = eis
♭ f = fes	f	♯ f = fis
♭ g = ges	g	♯ g = gis
♭ a = as	a	♯ a = ais
♭ h = b	h	♯ h = his
♭ c′ = ces′	c′	(♯ c′ = cis′)

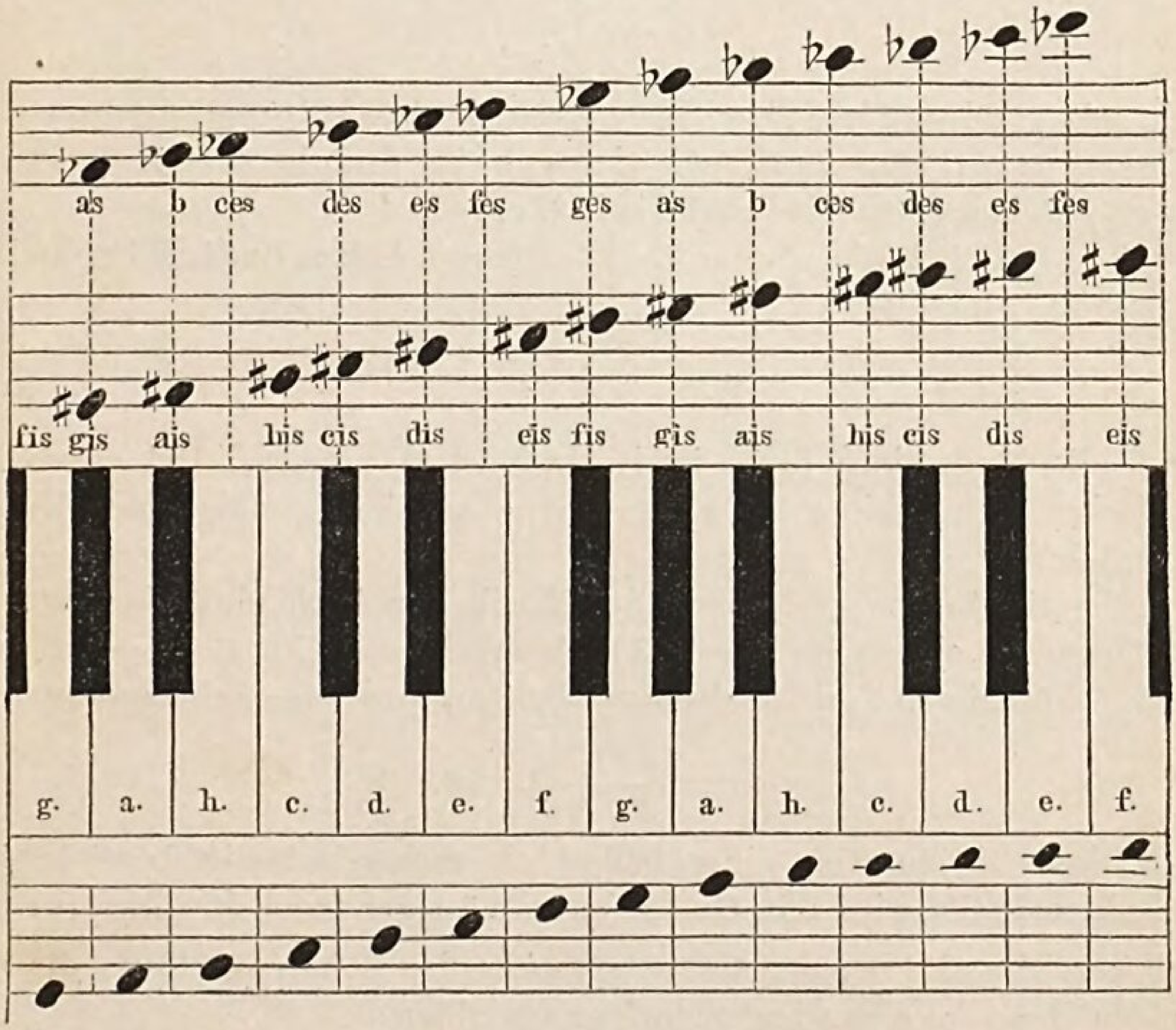
Von diesen Tönen fallen *ces* und *cis′* ausserhalb der Octave. Bezüglich der inconsequenten Bezeichnung *b* statt *hes* giebt die Anmerkung S. 701 Aufschluss. Die Töne *fes* und *eis*, sowie *ces′* und *his* greifen über einander, d. h. das um den kleinen Halbton erhöhte *e* (resp. *h*) ist höher als das ebenso viel vertiefte *f* (resp. *c′*).

Inclusive der Octave besteht demnach das so reducirte Tonsystem aus 22 Tönen per Octave, welche hinreichen würden, um, zwar nicht rein, aber doch mit keiner grösseren Ungenauigkeit, als die Vernachlässigung

eines Komma mit sich bringt, alle Melodien von jedem Tone der Dur- oder Mollscala anfangend spielen zu können.

Aber auch die Zahl von 22 Tönen erschien noch zu gross. Eine weitere ergiebige Reduction auf nur 13 Töne (incl. der Octave) wurde dadurch erzielt, dass man die mehrfachen zwischen den ursprünglichen ganzen Tönen eingeschalteten Zwischentöne durch je einen ersetzte. Demgemäss wird für *cis* und *des*, *dis* und *es*, *e* und *fes*, *eis* und *f*, *fis* und *ges*, *gis* und *as*, *ais* und *b*, *h* und *ces*, *his* und *c'* nur je ein Ton mittlerer Höhe substituirt. Die dadurch entstehenden Unreinheiten der Stimmung werden entweder zu Gunsten der Quinten auf die anderen Inter-

Fig. 691.



valle geschoben (ungleichschwebende Temperatur) oder es werden sämmtliche 12 Intervalle der Octave einander völlig gleich gemacht. (Gleichschwebende Temperatur.) Die Grösse eines solchen Intervalles ergiebt sich aus der Gleichung

$$i = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946.$$

Die hieraus berechneten relativen Schwingungszahlen bei letzterer Stimmung sind in der letzten Verticalreihe der Tabelle auf S. 709 aufgeführt und gestatten durch ihre Vergleichung mit den daneben stehenden Zahlen der reinen Stimmung ein Urtheil über die Grösse ihrer Abweichungen.

Die aus 12 Intervallen von je einem halben Tone zusammengesetzte Scala wird die chromatische Tonleiter genannt.

Indem wir hier unsere allerdings sehr lückenhaften Mittheilungen über die Tonleitern schliessen, fügen wir noch zur Bequemlichkeit derjenigen Leser, welche nicht Musiker von Fach sind, die Bezeichnung der Töne durch die Notenschrift und eine schematische Zeichnung der Claviatur bei, welche das Auffinden der Töne bei Versuchen an Clavier oder Orgel erleichtern soll *).

202 **Absolute Schwingungszahlen der Töne.** Nach Gleichung 1) S. 637 ist

$$n = \frac{C}{\lambda},$$

d. h. wir finden die Schwingungszahl eines Tones, indem wir seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch seine Wellenlänge (in demselben Medium) dividiren.

Für Luft ist, wie wir im §. 183 erfahren haben (nach Régnault), $C = 330{,}7$, folglich

$$n = \frac{330{,}7}{\lambda},$$

die Wellenlänge eines Tones in der Luft ist aber nach §. 194 gleich der vierfachen Länge einer gedeckten Pfeife, welche ihn (als ihren Grundton) giebt.

Der tiefste Ton, welcher in der Musik zur Anwendung kommt, ist der Grundton einer gedeckten 5,17 m (ungefähr 16 Fuss) langen Orgelpfeife. Für diesen Ton ist also $\lambda = 20{,}68$ m, also seine Schwingungszahl

$$n = \frac{330{,}7}{20{,}68} \doteq 16.$$

Dieser tiefste Ton einer früher als sechszehnfüssig bezeichneten gedeckten Pfeife wird mit $\underline{\underline{C}}$ oder zweckmässiger (nach Sondhaus) mit c^{-3} bezeichnet. Demgemäss entsprechen den höheren Octaven die folgenden Bezeichnungen und Schwingungszahlen:

Das	Subcontra C	c^{-3}	hat	16	Schwingungen	per	Secunde	
„	Contra C	c^{-2}	„	32	„	„	„	
„	grosse C	c^{-1}	„	64	„	„	„	
„	kleine C	c^{0}	„	128	„	„	„	
„	eingestrichene C	c^{1}	„	256	„	„	„	
„	zweigestrichene C	c^{2}	„	512	„	„	„	u. s. f.

Die hier angegebenen, nach den Potenzen von zwei fortschreitenden Tonhöhen sind von Sauveur vorgeschlagen und von Chladni adoptirt

*) Ausführlicheres in dem oben citirten Werke von Helmholtz und anderen musik-theoretischen Werken.

worden. Nach der hier angenommenen Sondhaus'schen Bezeichnung erhält man die absolute Schwingungszahl irgend eines Tones, indem man sich zu dem Exponenten die Basis 2 denkt und für den Namen des Tones seine Schwingungszahl aus der kleinen Octave setzt.

So z. B. ist $c^3 = c \,.\, 2^3 = 128 \,.\, 8 = 1024$, ebenso findet man $a^1 = a \,.\, 2^1 = {}^5/_3 \,.\, c \,.\, 2 = {}^5/_3 \,.\, 128 \,.\, 2 = 426^2/_3$.

Man nennt diese Stimmung auch wohl die physikalische. Sie bietet für die Berechnung manche Bequemlichkeit. Nach dieser Stimmung berechnet sich für das sogenannte Stimmgabel-a der eingestrichenen Octave, also a^1, wie eben gezeigt wurde, die Schwingungszahl

$$256 \cdot \frac{5}{3} = 426^2/_3.$$

Die von Scheibler vorgeschlagene und auf der deutschen Naturforscherversammlung zu Stuttgart 1834 angenommene deutsche Stimmung normirte für a^1 die Schwingungszahl 440, der ein $c^1 = 264$ entsprechen würde. Die französische Stimmung, durch ein Decret vom 16. Februar 1859 gesetzlich eingeführt, normirt für das temperirte a^1 die Schwingungszahl 435. Da für dieses die relative Schwingungszahl (S. 709) = 1,68179 beträgt, so ergiebt sich hieraus

$$\text{für } c^1 \quad \text{der Werth } \frac{435}{1{,}68179} = 258 \,.\, 652,$$

$$\text{für } c^{-2} \text{ der Werth } 32{,}331.$$

Diese französische Stimmung ist am 18. November 1885 von der in Wien tagenden internationalen Stimmtonconferenz einhellig angenommen worden.

Wir fügen hier noch zwei Tabellen bei, welche oft bequem zu gebrauchen sind (s. S. 714 und 115).

Die erste giebt die absoluten Schwingungszahlen sämmtlicher Töne der Durscala nach der physikalischen Stimmung, also für $c^1 = 256$, sowie der Wellenlängen dieser Töne in Luft von 15°C., deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit = 340 m angenommen wurde. Dabei sind die Schwingungszahlen, wie in Deutschland üblich, als Doppelschwingungen, die Wellenlängen ebenfalls als vollständig (Verdichtung und Verdünnung umfassend) angenommen.

Die zweite Tabelle enthält die absoluten Schwingungszahlen der temperirten chromatischen Tonleiter nach der internationalen Stimmung $a^1 = 435$ Doppelschwingungen. Dieses sind also die in der praktischen Musik geltenden Schwingungszahlen.

Tabelle

der absoluten Schwingungszahlen der reinen Durscala nach der physikalischen Stimmung (Sauveur-Chladni) gegründet auf $c^1 = 256 = 2^8$ Doppelschwingungen; sowie der Wellenlängen in Luft von 15° C. unter Annahme einer Schallgeschwindigkeit = 340 m.

Bezeichnung der französischen und italienischen Musiker	Bezeichnung der deutschen und englischen Musiker	nach Sondhaus	C Ut (Do)	D Ré	E Mi	F Fa	G Sol	A La	H Si
ut_{-2} — si_{-2}	$\underline{\underline{C}}$ — $\underline{\underline{H}}$	c^{-3} — h^{-3}	16 21,250	18 18,889	20 17,000	$21^1/_3$ 15,938	24 14,167	$26^2/_3$ 12,750	30 11,333
ut_{-1} — si_{-1}	$\underline{C}$ — $\underline{H}$	c^{-2} — h^{-2}	32 10,625	36 9,444	40 8,500	$42^2/_3$ 7,969	48 7,083	$53^1/_3$ 6,375	60 5,667
ut_1 — si_1	C — H	c^{-1} — h^{-1}	64 5,312	72 4,722	80 4,250	$85^1/_3$ 3,984	96 3,541	$106^2/_3$ 3,187	120 2,833
ut_2 — si_2	c — h	c^0 — h_0	128 2,656	144 2,361	160 2,125	$170^2/_3$ 1,992	192 1,770	$213^1/_3$ 1,593	240 1,416
ut_3 — si_3	$\bar{c}$ — $\bar{h}$	c^1 — h^1	256 1,328	288 1,180	320 1,062	$341^1/_3$ 0,996	384 0,885	$426^2/_3$ 0,796	480 0,708
ut_4 — si_4	$\bar{\bar{c}}$ — $\bar{\bar{h}}$	c^2 — h^2	512 0,664	576 0,590	640 0,531	$682^2/_3$ 0,498	768 0,442	$853^1/_3$ 0,398	960 0,354
ut_5 — si_5	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ — $\bar{\bar{\bar{h}}}$	c_3 — h^3	1024 0,332	1152 0,295	1280 0,265	$1365^1/_3$ 0,249	1536 0,221	$1706^2/_3$ 0,199	1920 0,177
ut_6 — si_6	$\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$ — $\bar{\bar{\bar{\bar{h}}}}$	c^4 — h^4	2048 0,166	2304 0,147	2560 0,132	$2730^2/_3$ 0,124	3072 0,110	$3413^1/_3$ 0,100	3840 0,088

Tabelle

der absoluten Schwingungszahlen nach der internationalen temperirten Stimmung, gegründet auf $a^1 = 435$ Doppelschwingungen (870 einfache Schwingungen).

Bezeichnung der Musiker: französischen und italienischen	Bezeichnung der Musiker: deutschen u. englischen	Bezeichnung nach Sondhaus	C *) Ut (Do)	Cis	D Ré	Dis	E Mi	F Fa	Fis	G Sol	Gis	A La	Ais	H Si
ut_{-2} — si_{-2}	$\underline{\underline{C}}$ — $\underline{\underline{H}}$	c^{-3} — h^{-3}	16,165	17,127	18,145	19,225	20,368	21,579	22,862	24,221	25,662	27,188	28,804	30,517
ut_{-1} — si_{-1}	$\underline{C}$ — $\underline{H}$	c^{-2} — h^{-2}	32,331	34,254	36,290	38,449	40,735	43,157	45,723	48,442	51,323	54,375	57,600	61,033
ut_1 — si_1	C — H	c^{-1} — h^{-1}	64,663	68,508	72,581	76,898	81,470	86,314	91,447	96,885	102,646	108,750	115,216	122,067
ut_2 — si_2	c — h	c^0 — h^0	129,326	137,016	145,163	153,796	162,940	172,629	182,895	193,770	205,292	217,500	230,433	244,135
ut_3 — si_3	$\overline{c}$ — $\overline{h}$	c^1 — h^1	258,652	274,033	290,327	307,592	325,881	345,259	365,730	387,541	410,585	**435**	460,866	488,271
ut_4 — si_4	$\overline{\overline{c}}$ — $\overline{\overline{h}}$	c^2 — h^2	517,305	548,066	580,655	615,183	651,763	690,519	731,580	775,082	821,171	870	921,733	976,542
ut_5 — si_5	$\overline{\overline{\overline{c}}}$ — $\overline{\overline{\overline{h}}}$	c^3 — h^3	1034,610	1096,132	1161,310	1230,366	1303,526	1381,038	1463,160	1550,164	1642,342	1740	1843,466	1953,084
ut_6 — si_6	$\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}$ — $\overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}$	c^4 — h^4	2069,220	2192,264	2322,620	2460,732	2607,052	2762,076	2926,320	3100,328	3284,684	3480	3686,932	3906,168

*) Französische und italienische Bezeichnung; beim Singen wird statt Ut, Do gesetzt.

203 **Die Stimmgabel.** Um einen Ton von bestimmter Höhe zu jeder Zeit reproduciren zu können, denselben also gewissermaassen aufzubewahren, um danach musikalische Instrumente zu stimmen oder die Tonhöhe für die menschliche Stimme anzugeben, bedient man sich der Stimmgabel und zwar insbesondere der auf a^1 gestimmten Normalstimmgabel von 435 Schwingungen (870 einfachen Schwingungen). Ausserdem dient die Stimmgabel zu zahlreichen akustischen Experimenten und ist daher ein wichtiges Hülfsmittel der Experimentalphysik geworden, weshalb wir die Eigenschaften und die Behandlung derselben näher kennen lernen müssen.

Die Stimmgabel wird durch einen gabelförmig gebogenen Metallstab (meist ist sie aus Stahl verfertigt) gebildet, an welchen an der Biegungsstelle ein zum Halten dienendes Metallstäbchen angesetzt ist. Fig. 692 erläutert die Art und Weise, wie die Stimmgabel schwingt, wenn sie ihren Grundton giebt.

Während die beiden Zinken gleichzeitig nach aussen schwingen, geht der tiefste Punkt ein wenig nach oben; während sich die Zinken nähern, geht der tiefste Punkt nach unten. Der Stiel der Stimmgabel wird demnach in Längsschwingungen versetzt, was man direct fühlt, wenn man ihn in der Hand hält. Noch deutlicher wird dies wahrgenommen, wenn man den Stiel der schwingenden Gabel ganz lose auf eine Tischplatte aufstützt, wobei durch den rythmischen Anstoss ein Ton entsteht. Stemmt man den Gabelstiel fest auf die Tischplatte, so wird der Gabelton sehr viel stärker gehört, da er durch die grosse Fläche der Tischplatte in die Luft übergeführt wird. An zwei Stellen bleibt die Gabel, wie aus Fig. 692 ersichtlich, in Ruhe, dort hat sie also Knotenpunkte.

Um die Stimmgabel ins Tönen zu bringen, fasst man gewöhnlich den Stiel zwischen zwei Finger und schlägt dann eine der Zinken gegen einen festen Körper an. Der Ton, welcher auf diese Weise hervorgebracht wird, ist ungemein schwach; um ihn zu verstärken, setzt man die Stimmgabel mit ihrem Fusse auf einen Resonanzboden auf oder man hält sie über eine Röhre von entsprechender Länge, wie dies bereits im §. 192 erwähnt wurde.

Um den Ton der Stimmgabel rein und kräftig zu erhalten, hat Marloye dieselbe auf ein Kästchen von Holz gesetzt, wie man Fig. 693 sieht. Die Länge dieses nur an einer Seite offenen Kästchens beträgt $^1/_4$ von der Wellenlänge des Tones, welchen die Stimmgabel giebt, so dass also die Vibrationen der in dem Kästchen eingeschlossenen Luftsäule denselben Ton erzeugen, wie die Stimmgabel selbst. Die Vibrationen der Stimmgabel theilen sich deshalb leicht der Luftsäule im Kästchen mit, wodurch dann ein ungemein kräftiger und reiner Ton entsteht.

Um die Stimmgabel dieses Apparates ins Tönen zu bringen, schlägt man sie entweder mit einem belederten hölzernen Hämmerchen an, oder man zieht zwischen den freien Enden der Gabel einen hölzernen Stab

durch, dessen Dicke etwas grösser ist als der Abstand der Zinken, oder endlich, man streicht die Stimmgabel mit dem Fiedelbogen an.

Soll das Kästchen möglichst gute Resonanz geben, so muss nicht allein die darin enthaltene Luftsäule, sondern auch das Holz auf den Gabelton abgestimmt sein. Um dies zu prüfen, füllt man das Kästchen mit Baumwolle aus, wodurch die Luft zu tönen verhindert wird und ruft durch Anklopfen den Holzton hervor. Derselbe kann durch Aenderungen der Holzdicke modificirt werden. Es ist ferner für die Resonanz günstig, wenn der Fuss der Gabel möglichst leicht ist.

Je vollkommener der Einklang zwischen dem Resonanzkasten und der Gabel ist, desto lauter tönt der Apparat, desto früher hört er aber auch zu tönen auf. Soll deshalb die Gabel lange fort tönen, so verstimmt man den Eigenton des Kästchens oder der Gabel.

Fig. 692.

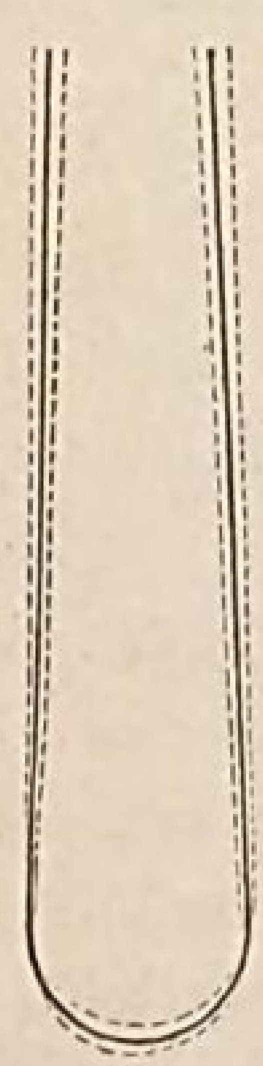
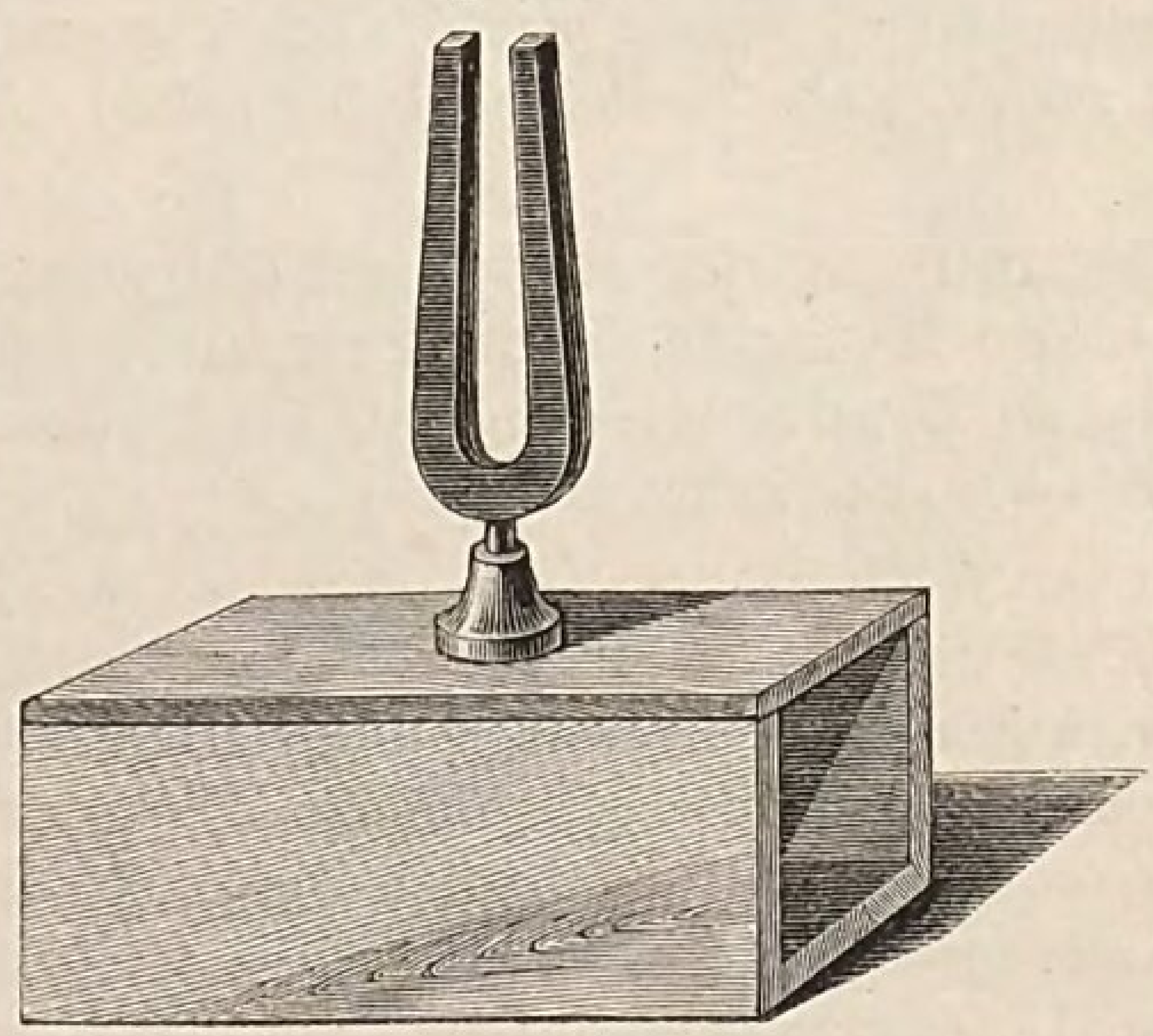


Fig. 693.



Der Eigenton des Kästchens wird dadurch vertieft, dass man die Mündung verengt, was am einfachsten durch Anbringung von zwei Leisten aus Kork geschieht, die man an die verticalen Innenränder des Kästchens anlegt.

Die Tonhöhe der Gabel hängt von ihren Dimensionen, insbesondere von der Dicke der Zinken und der Knotenstellen ab.

Der Ton wird höher, wenn man die Zinken verkürzt oder durch seitliches Abfeilen entlastet; er wird tiefer, wenn man die Zinken durch Ankleben von Wachs, Münzstücken oder durch Anschrauben von Metallschuhen (Laufgewichten) belastet oder wenn man die Gabel in der Nähe der Knotenstellen dünner feilt. Nähert man die Laufgewichte mehr den Zinkenenden, so vertieft dies den Ton, er wird umgekehrt höher, wenn man sie den Knotenstellen nähert. Die Belastungen der beiden Zinken sollen stets gleich gross sein; auch ist es vortheilhaft, die Zinken parallel und genau prismatisch zu fertigen, um die Laufgewichte überall befestigen zu können.

Endlich ist auch die Temperatur der Stimmgabel von Einfluss auf ihre Tonhöhe. Nach den hierüber angestellten, sehr genauen Versuchen von Dr. Rud. König in Paris wird die Schwingungszahl 435, welche einer Normal-a^1-Gabel bei 15° C. zukommt, für jeden Grad Temperaturzunahme um 0,0486 vertieft. Damit also eine solche Gabel ihre Schwingungszahl um eine Einheit vermindere oder erhöhe, müsste ihre Temperatur um 20,58° C. erhöht oder erniedrigt werden. Wie man daraus ersieht, muss bei genauen Tonhöhenmessungen die Temperatur der Gabel wohl berücksichtigt werden. Thut man dies und bewahrt man eine Stimmgabel vor Rost und mechanischer Beschädigung, so behält sie ihre Tonhöhe jahrelang unverändert.

Die am 18. November 1885 in Wien versammelte internationale Stimmtonconferenz hat festgesetzt, dass eine aus ungehärtetem Gussstahl mit parallelen prismatischen Zinken und glänzend polirter Oberfläche hergestellte Gabel, welche bei 15°C. 435 ganze (870 einfache) Schwingungen ausführt, als Normal-a^1-Gabel gelten soll.

204 **Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne, graphische Methode, Vibrographie.** Die Methoden zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne zerfallen in drei Gruppen: in graphische, akustische und optische.

Die von Wilh. Weber 1830 erfundene, von Duhamel, König u. A. ausgebildete graphische Methode beruht darauf, dass man an dem tonerregenden Körper eine Schreibspitze ansetzt, mit welcher derselbe seine Schwingungen auf einer verschiebbaren Schreibfläche aufzeichnet. Die in gemessener Zeit aufgezeichneten Hin- und Hergänge (Wellen) werden dann direct gezählt und können auch sonst in Bezug auf ihre Form zu wichtigen Untersuchungen dienen. Ein hierzu geeigneter Apparat heisst Tonschreiber, Phonautograph, Vibrograph, die erhaltene Zeichnung Tonschrift, Phonautogramm, Vibrogramm.

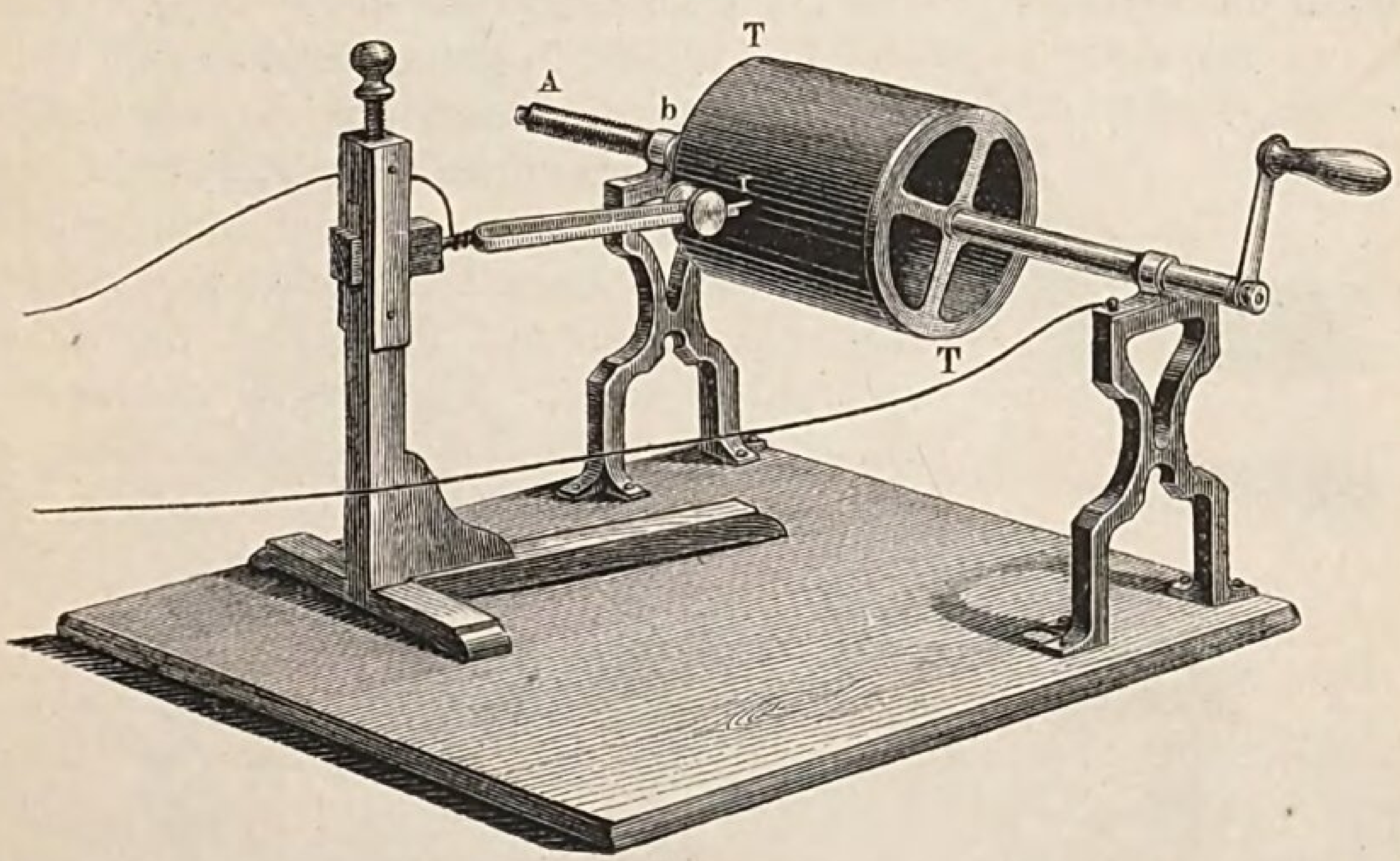
Als ein Beispiel eines solchen Apparates mag hier jener nach König dienen, welcher in Fig. 694 in ungefähr $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse dargestellt ist.

Ein eiserner Stab, welcher an seinem einen Ende bei *A* mit einem durch die Schraubenmutter *b* geführten Schraubengewinde versehen ist, auf der anderen Seite aber mittelst einer Kurbel umgedreht werden kann, trägt in seiner Mitte eine messingene Trommel *T*. Auf dieser Trommel wird in einer Weise, dass man ihn leicht wieder wegnehmen kann, ein Papiermantel befestigt, und über einer stark russenden Lampe geschwärzt. (Man erhält eine solche Flamme, indem man ein Gemisch von Baumöl mit Terpentinöl mittelst eines Dochtes brennen lässt.) An diese berusste Fläche wird nun zunächst die in einem passenden, durch ein Gewicht zu beschwerenden Stativ befestigte Stimmgabel herangedrückt, an deren einem Ende die Schreibspitze *r* befestigt ist.

Wird nun die Stimmgabel durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen in Vibrationen versetzt und dann der Cylinder sogleich mit entsprechender Geschwindigkeit umgedreht, so beschreibt die auf der Stimmgabel befestigte Spitze auf der berussten Fläche eine Sinuscurve in der Art, wie Fig. 695 zeigt.

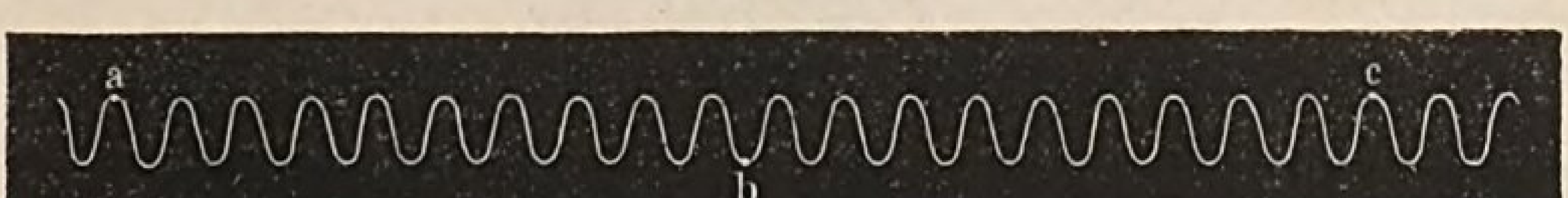
Um zählen zu können, wie viele der Schwingungen pro Secunde gezeichnet werden, müssen auf derselben Schreibfläche in Zeitabständen von je einer Secunde Zeichen aufgetragen werden. Man bedient sich

Fig. 694.



hierzu eines Elektromagnets mit beweglichem Anker, welcher alle Secunden einmal durch einen Stromschluss angezogen wird und dadurch eine zweite Schreibspitze neben der ersteren in Bewegung setzt. Die durch die letztere Schreibspitze eingetragenen Querstriche (Secundenmarken) begrenzen solche Strecken der daneben gezeichneten Wellenlinie, welche

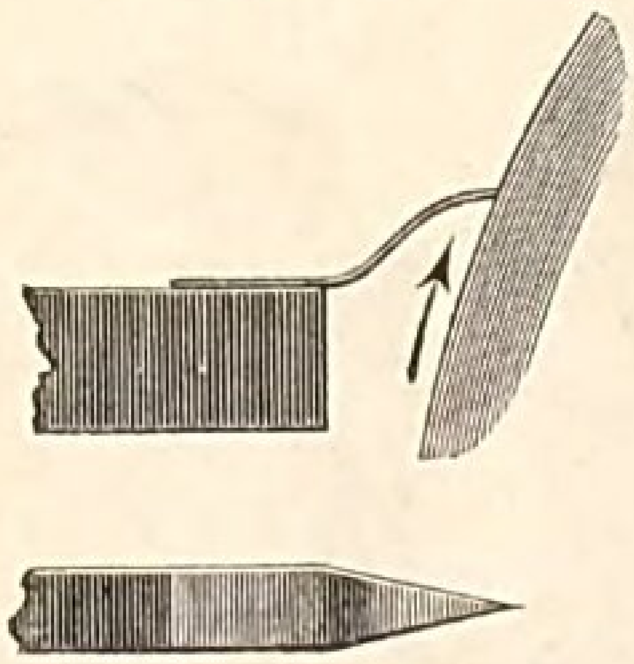
Fig. 695.



innerhalb einer Secunde angefertigt wurden. Man hat daher nur die Anzahl der Wellen zwischen zwei auf einander folgenden Secunden zu zählen. Noch einfacher ist folgende Methode: das Schreibspitzchen der Stimmgabel wird gebildet, indem man ein Stückchen von ganz dünnem Messingblech spitzig zuschneidet und dieses schwach gebogen mit Wachs auf das eine Stimmgabelende aufkittet, wie Fig. 696 im Grund- und Aufriss zeigt. Nachdem die Stimmgabel an ihre Stelle gerückt ist, wird sie durch einen Kupferdraht mit dem einen, der metallische Träger der

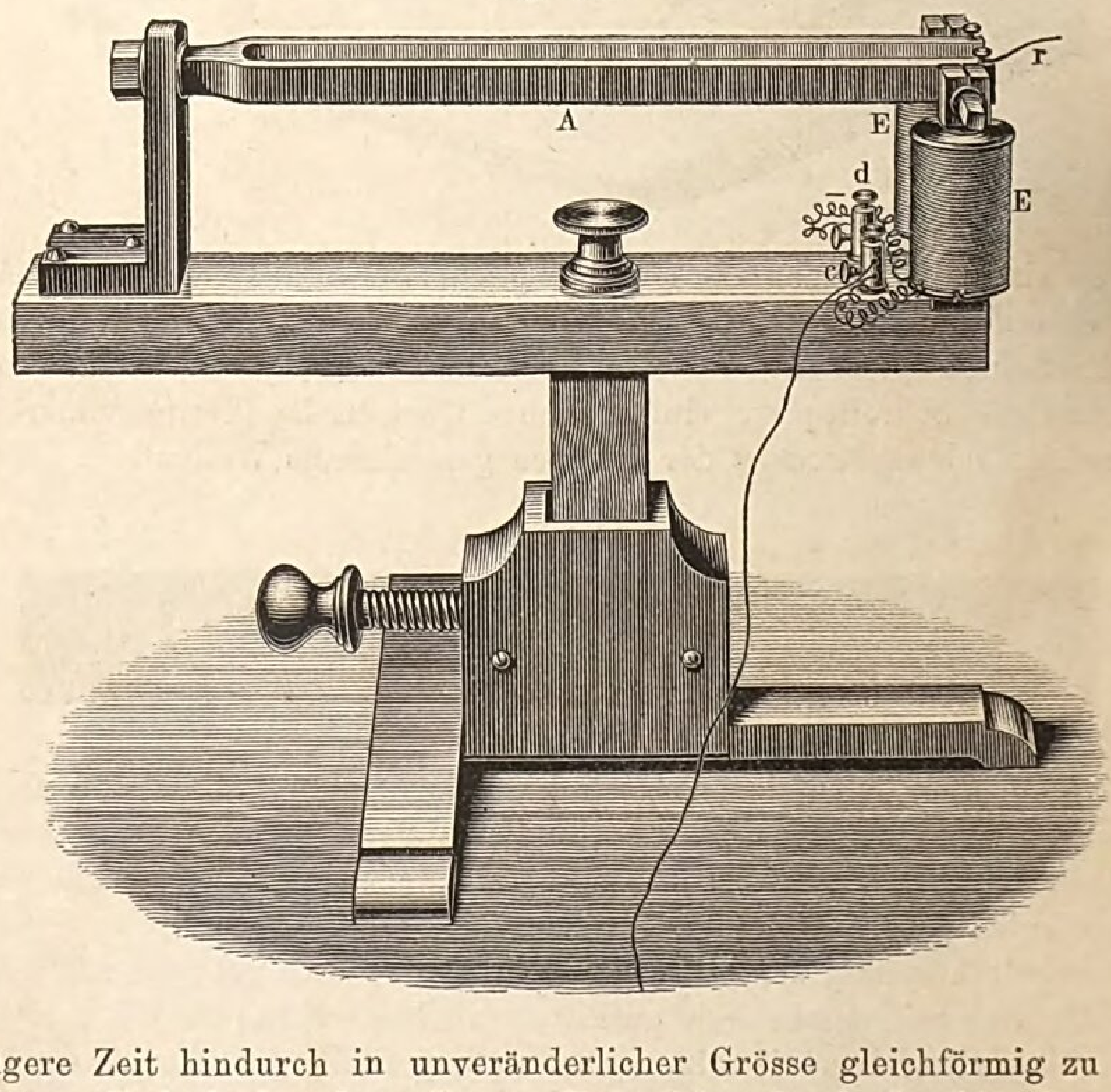
Trommel *T* aber mit dem anderen Pole eines Funkeninductors, dessen Beschreibung erst im zweiten Bande folgen kann, in leitende Verbindung gebracht. In die Leitung ist ein Secundenpendel in der Weise eingeschaltet, dass dasselbe bei jeder Schwingung auf einen Moment den elektrischen Strom schliesst, so dass ein Funke, von der Spitze *r* durch das Papier schlagend, daselbst eine feine Marke hinterlässt. Hat man, während die Stimmgabel vibrirte, und der Inductionsapparat im Gange war, die Trommel gedreht, so erhält man auf der Sinuscurve eine Reihe von Marken *a*, *b*, *c* etc., und kann dann leicht zählen, wie viel Schwingungen die Stimmgabel während einer Oscillation des Pendels macht.

Fig. 696.



Der Apparat, Fig. 694, leidet an dem Uebelstande, dass die durch Streichen der schreibenden Gabel erzeugten Vibrationen sehr rasch an Grösse abnehmen, so dass man meistens schon nach wenigen Umdrehungen der Trommel still halten und die Gabel von Neuem anstreichen muss. Hier nun, wie auch in manchen anderen Fällen, ist es aber erwünscht, die Vibrationen einer Stimmgabel

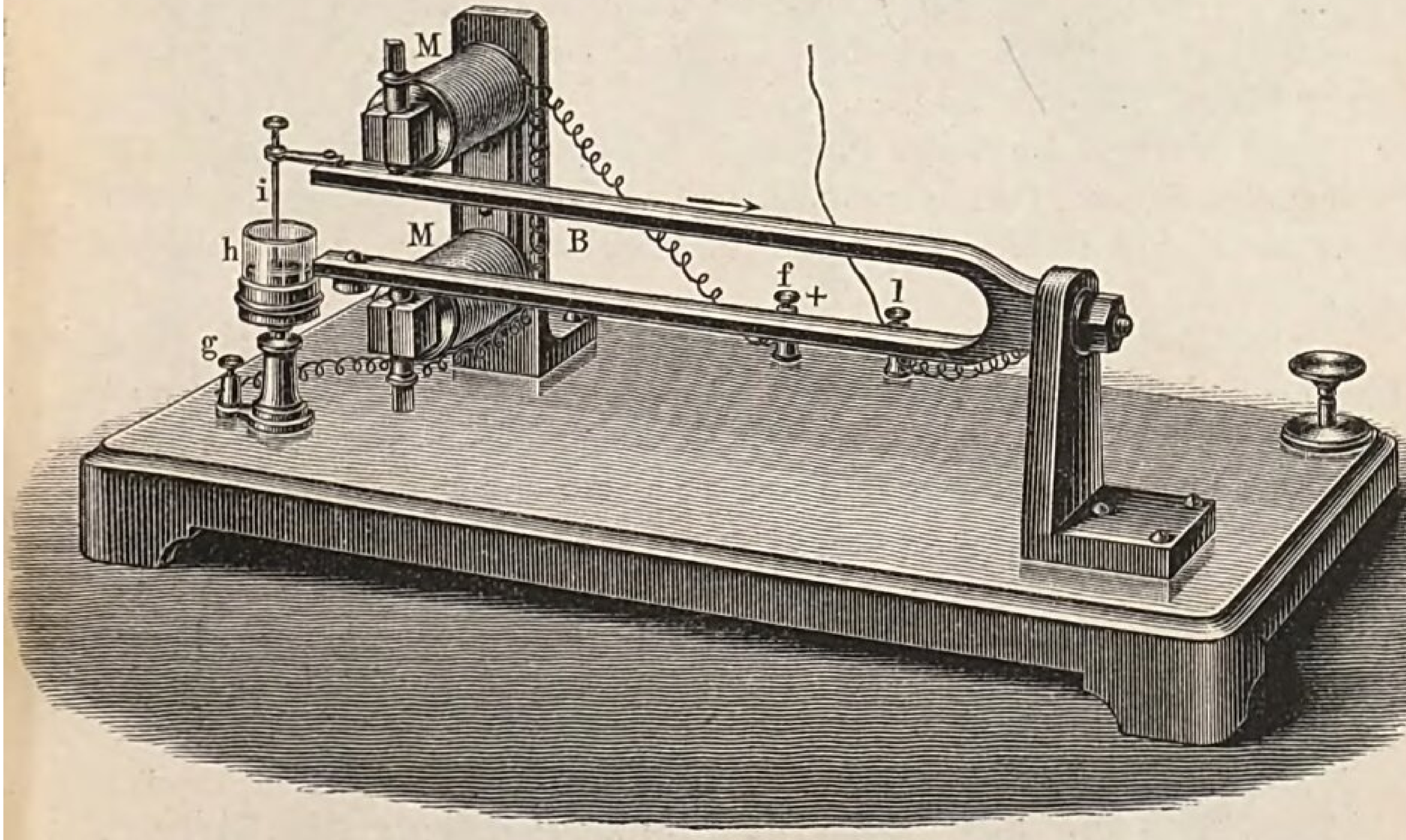
Fig. 697.



längere Zeit hindurch in unveränderlicher Grösse gleichförmig zu erhalten. Helmholtz hat diesem Bedürfniss durch Combination der

Stimmgabeln mit Elektromagneten abgeholfen. Die Figuren 697 und 698 stellen die Helmholtz'sche Vorrichtung dar, wie sie König zur Anstellung des in Fig. 694 angedeuteten Versuches ausgeführt hat. *A*, Fig. 697, ist die schreibende Gabel und *r* die Schreibspitze. Vor der einen und hinter der anderen Gabelzinke ist der Pol eines Elektromagnets *E* angebracht, in dessen Umwindungen der Strom durch die Klemmschraube bei *c* eingeführt und durch die Klemmschraube *d* ausgeführt wird. Wenn der Strom geschlossen ist, werden die beiden Gabelzinken durch die Magnetpole aus einander gezogen, sie fahren aber gegen einander, sobald der Strom unterbrochen wird. — Erfolgen nun Oeffnungen und Schliessungen des Stromes in gleichem Tempo, wie die nur vermöge ihrer Elasticität vibrirende Gabel, so wird dieselbe längere Zeit hindurch mit unveränderlicher Intensität vibriren.

Fig. 698.



Die abwechselnde Schliessung und Unterbrechung des Stromes im Elektromagnet *E* wird durch eine zweite Gabel *B* (die Unterbrechungsgabel), Fig. 698, bewirkt, welche, in verticaler Ebene schwingend, gleichfalls mit einem Elektromagnet *M* versehen ist. Die Gabel *B* ist entweder unisono mit *A*, oder ihre Schwingungsdauer ist ein einfaches Multiplum der Schwingungsdauer der anderen. Die obere Zinke der Gabel *B* trägt ein vertical herabreichendes Messingstäbchen *i*, welches unten in eine Platinspitze endigt. Diese Platinspitze taucht in ein Quecksilbernäpfchen *h*. Der eine, etwa der positive Pol, einer Säule von 1 bis 2 Bunsen'schen Bechern, wird in die Klemmschraube *f*, Fig. 698, eingeschraubt. Von *f* aus durchläuft der Strom die Umwindungen des Elektromagnets *M*, gelangt aus diesen zur Klemmschraube *g* und von hier in das Quecksilber des Näpfchens *h*. Von *h* geht der Strom durch

i und die obere Zinke der Gabel *B* bis an ihren Befestigungspunkt auf der rechten Seite, dann durch eine Drahtspirale nach der Klemmschraube *l*, welche durch einen Kupferdraht mit der Klemmschraube *c*, Fig. 697, verbunden ist. Bei *d* endlich ist der negative Pol der Säule eingeschraubt.

Sobald der Strom in der angegebenen Richtung circulirt, werden die beiden Elektromagnete *E* und *M* erregt, die Zinken des Elektromagnets *E* sowohl wie die von *M* werden aus einander gezogen und dadurch die Spitze von *i* aus dem Quecksilber gehoben. In Folge dessen verliert sich der Magnetismus der Eisenkerne von *E* und *M*, die Zinken der beiden Gabeln schnellen gegen einander und die Spitze von *i* wird wieder in das Quecksilber eingetaucht, so dass dasselbe Spiel von Neuem beginnt und längere Zeit ununterbrochen fortdauert. Dieselbe Vorrichtung, welche den Namen Unterbrechungsgabel führt, dient auch noch zu anderen später zu beschreibenden Experimenten. Neuestens pflegt man statt des Hufeisenmagnets einen einfachen Elektromagnet anzuwenden, den man so zwischen den Zinken der Stimmgabel befestigt, dass er diesen die Pole zukehrt.

Diese Methode lässt also direct die Schwingungszahl des Tones der verwendeten Stimmgabel bestimmen, aus welcher man dann indirect auf später zu beschreibende Weise die anderer tönender Körper ableiten kann.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass derselbe Apparat zur genauen Messung kleiner Zeiträume zu verwenden ist. Man braucht nur durch die nämliche Metallspitze, welche die Secundenmarken liefert, die Momente des Beginns und des Endes des zu messenden Zeitraumes durch Marken registriren zu lassen und dann die dazwischen liegenden Schwingungen der Stimmgabelcurve zu zählen. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob der bewusste Cylinder schneller oder langsamer gedreht wird.

In dieser Anwendung heisst der Apparat ein Stimmgabelchronograph.

205 **Bestimmung der Schwingungszahl durch die Sirene.** Eine akustisch-mechanische Methode zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne beruht auf der Anwendung der Sirene von Cagniard la Tour. Fig. 699 stellt eine solche dar, wie sie Stöhrer in Dresden in sehr übersichtlicher Form construirt. *AA* ist eine cylindrische Büchse von Messing, welche mittelst des Rohres *BB* luftdicht auf eine Windlade aufgesetzt werden kann.

In der oberen Deckplatte dieser Büchse befindet sich eine Reihe von Löchern, etwa zwölf, welche im Kreise um den Mittelpunkt herumstehen; dicht über dieser Deckplatte aber ist eine Messingscheibe *ss* angebracht, welche, um eine verticale Achse in Spitzen laufend, möglichst leicht beweglich sein muss, und welche ebenfalls mit zwölf gleich weit von einander abstehenden Löchern versehen ist, wie Fig. 701 zeigt, welche diese Platte von oben gesehen darstellt. Je nach der Stellung der beweg-

lichen Platte sind alle zwölf Oeffnungen der unteren gleichzeitig geöffnet oder gleichzeitig geschlossen.

Sowohl die Löcher der drehbaren Scheibe *ss* als auch die Löcher der darunter befindlichen Platte sind schräg gestellt, und zwar die der rotirenden Platte *ss* in entgegengesetzter Richtung, wie die der Deckplatte der Büchse, wie man Fig. 701 sieht, welche einen Durchschnitt der Büchse *AA* nach der Linie *nn* der Fig. 700 darstellt. Es ist also klar, dass der Wind, welcher den Löchern der Deckplatte entströmt, gegen die Wände

Fig. 699.

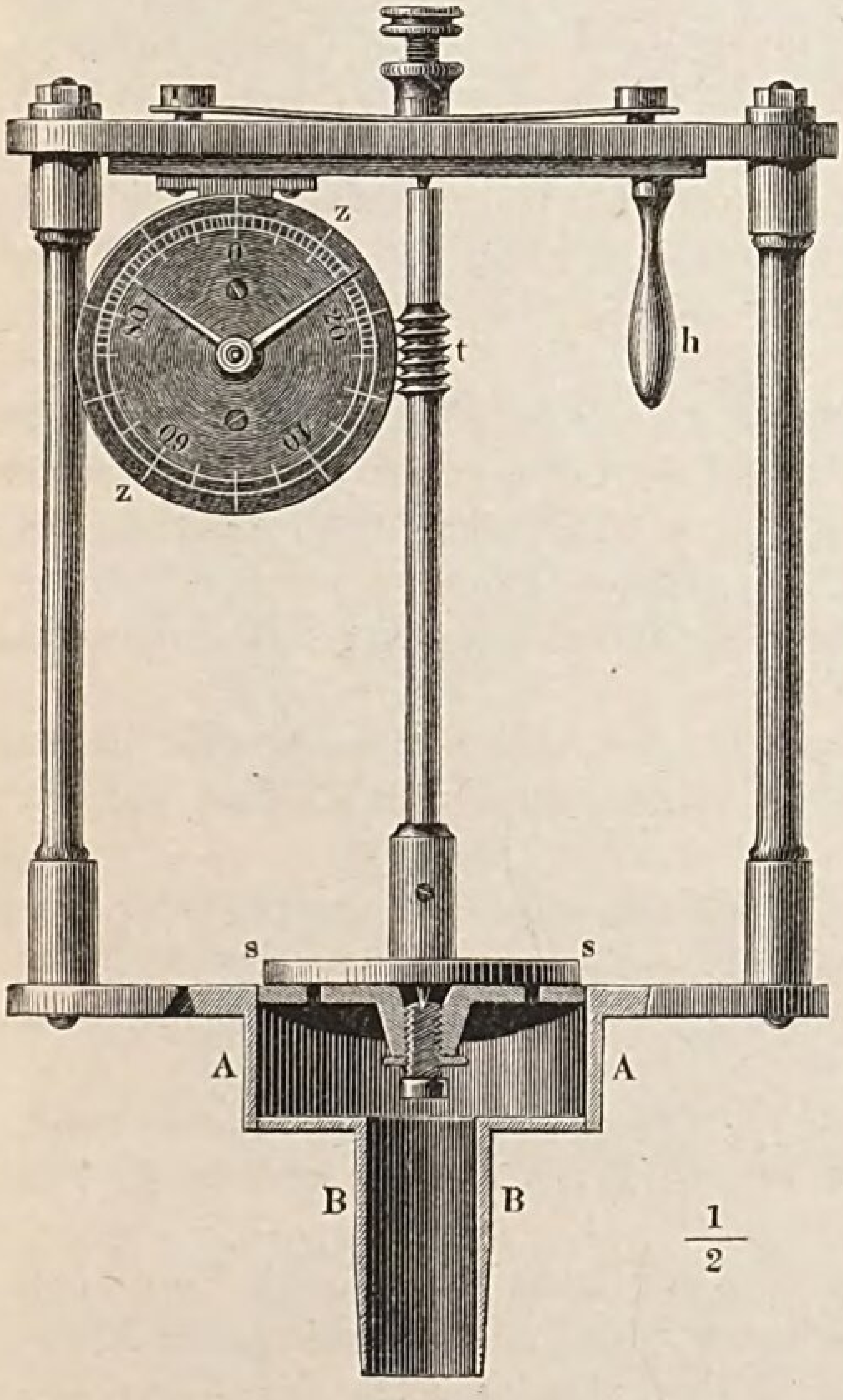


Fig. 700.

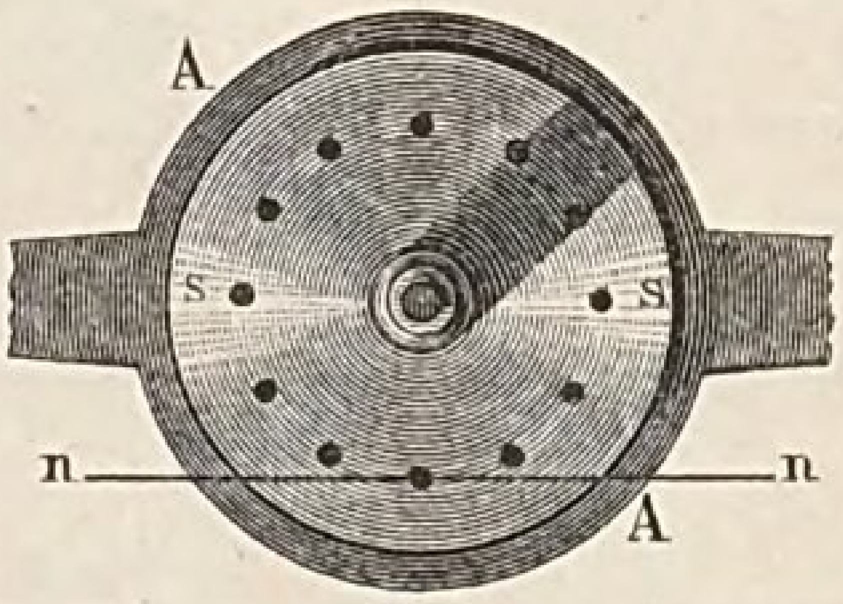
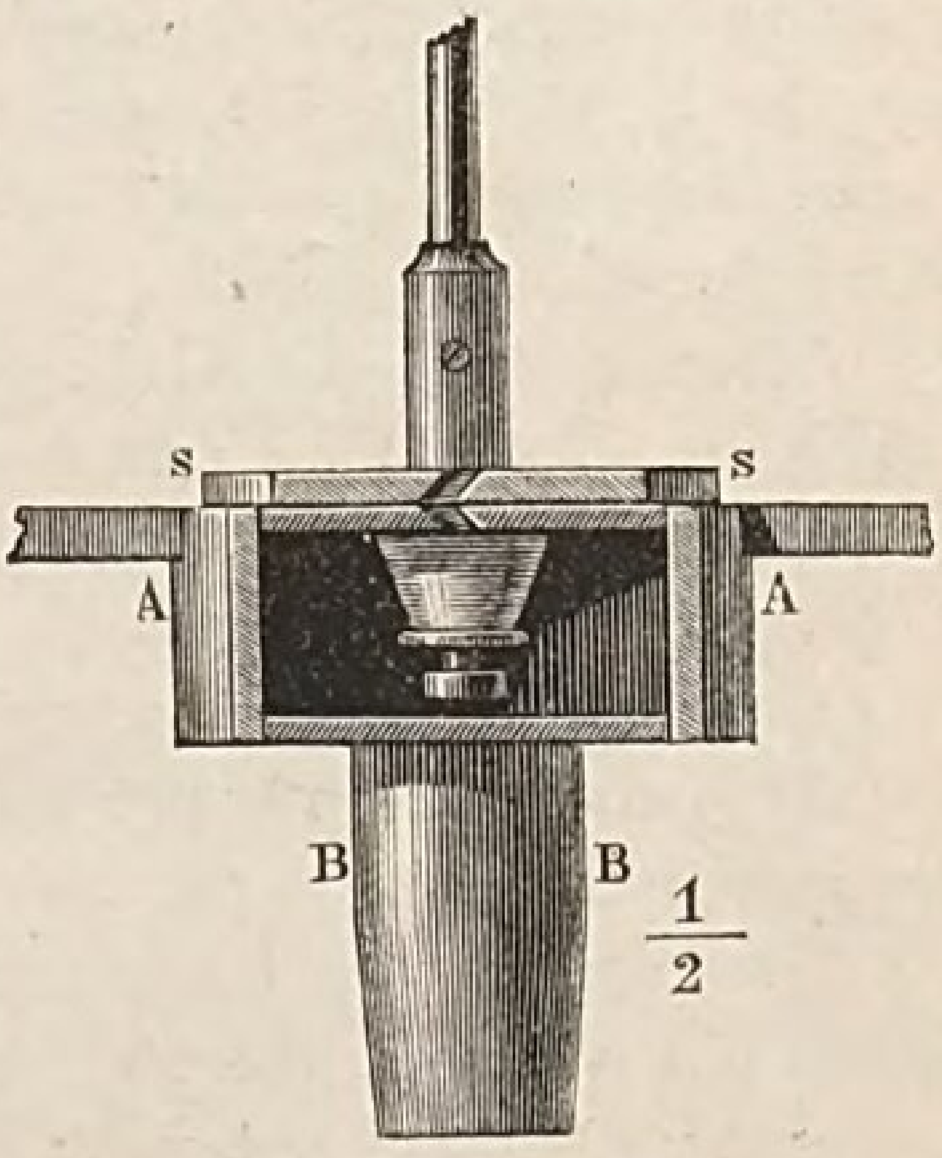


Fig. 701.



der Löcher der drehbaren Scheibe *ss* anstösst und diese dadurch in eine Rotation versetzt, deren Schnelligkeit von der Stärke des Windes abhängt.

Wird nun aus der Windlade Luft durch das Ansatzrohr *BB* eingeblasen, so beginnt die Scheibe *ss* sich zu drehen und alsbald lässt sich ein anfangs tiefer Ton hören, welcher allmälig höher und stärker wird, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *ss* zunimmt, und welcher auf einer bestimmten Tonhöhe stehen bleibt, wenn Gleichgewichtszustand eingetreten ist zwischen der beschleunigenden Kraft des ausströmenden Windes und den zu überwindenden Widerständen.

Der Ton entsteht dadurch, dass jedesmal ein Luftstrom durch die Löcher der Scheibe *ss* hervordringt, wenn die Löcher der rotirenden Scheibe gerade über den Löchern der festen sich befinden; bei einer jeden Umdrehung der Scheibe *ss* werden also zwölf solcher Stösse, also auch 12 Verdichtungswellen, erzeugt werden; man kann daher leicht die Schwingungszahl des durch die Sirene hervorgebrachten Tones berechnen, wenn man weiss, wie viel Umdrehungen die Scheibe *ss* in einer Secunde macht.

Um die Zahl der in einer gegebenen Zeit gemachten Umdrehungen der Scheibe *ss* zu bestimmen, dient nun ein besonderes Zählerwerk. Hinter dem in 100 gleiche Theile getheilten Zifferblatt *zz*, Fig. 699, befinden sich nämlich zwei Räder, von denen das eine 100, das andere 99 Zähne hat; das erstere führt den grossen, das letztere den kleinen Zeiger. Wenn nun der Ton der Sirene eine constante Höhe erreicht hat, so wird das eben besprochene Zählerwerk mit Hülfe des Griffes *h* etwas nach der rechten Seite gezogen, so dass die Zähne der beiden Räder in die Schraube *t* eingreifen, und nun wird natürlich bei jeder Umdrehung der Scheibe *ss* jedes der gezahnten Räder um einen Zahn fortgeschoben; für je 100 Umdrehungen aber wird der kleine Zeiger um einen Theilstrich mehr hinter dem grossen zurückbleiben, so dass man aus der Vermehrung des Abstandes beider Zeiger erfährt, wie viel hundert, und aus der Stellung des grossen, wie viel einzelne Umdrehungen noch über diese hinaus in einer gegebenen Zeit gemacht wurden.

Es versteht sich von selbst, dass das Zählerwerk so leicht gehen muss, dass das Einsetzen desselben keinen merklichen Einfluss auf den Gang der Sirene ausübt.

Eine wesentliche Verbesserung hat Stöhrer an seiner Sirene dadurch angebracht, dass er in der rotirenden Scheibe und der darunter befindlichen Platte statt der runden Löcher radial gestellte Schlitze in Anwendung bringt.

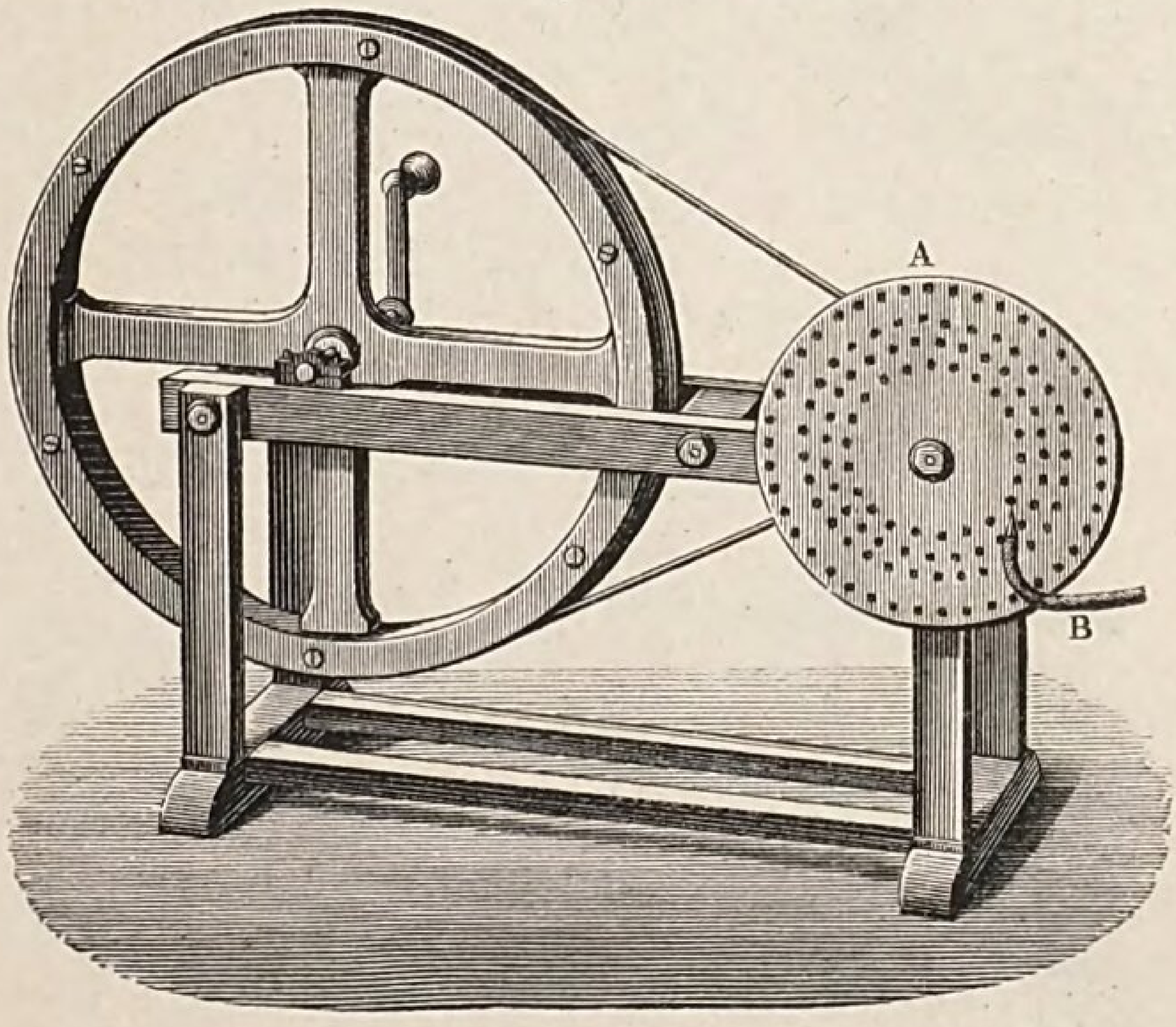
Dove hat eine Sirene mit mehreren Löcherreihen construirt, welche, sowie die Doppelsirene von H. Helmholtz, erst in §. 227 besprochen werden kann.

Die Sirene von Cagniard la Tour kann statt durch Luft auch durch einen Strom Wasser betrieben werden, während der ganze Apparat unter Wasser getaucht ist. Daher stammt auch der Name des Apparates.

Eine einfachere Form der Sirene, welche wohl nicht zu genauen Messungen der Schwingungszahl, aber zu vielen anderen wichtigen Versuchen dienen kann, ist die Sirene von Seebeck, Fig. 702. Eine Scheibe aus glattem Pappendeckel, welche 3 bis 4 dcm Durchmesser haben mag, ist an einer Schwungmaschine mit horizontaler Achse zu befestigen und in rasche Rotation zu versetzen. Auf der Scheibe sind concentrische Reihen gleich weit abstehender Löcher von ungefähr 4 mm Durchmesser eingeschlagen.

Durch ein Kautschukrohr B, in welchem ein Röhrchen eingesetzt ist, dessen Mündung etwas enger sein muss als der Durchmesser eines Loches, und welche ziemlich dicht an die Ebene der Scheibe hinzuhalten ist, wird nun ein Luftstrom gegen die in Rotation befindliche Löcherreihe geblasen und dadurch ein Ton erzeugt, dessen Schwingungszahl gleich ist der Anzahl der Löcher, welche während einer Secunde vor der Mündung der Röhre B passiren, eine Zahl, welche sich ergiebt, wenn man ermittelt hat, wie viel Umdrehungen der Scheibe A auf eine Umdrehung der Kurbel gehen. Es ist sehr bequem, wenn man das Röhrchen nicht mit der Hand frei zu halten braucht. Um es derartig zu befestigen, dass es rasch nach einander auf die verschiedenen Löcherreihen eingestellt werden kann, empfiehlt sich die in Fig. 703 skizzirte Construction.

Fig. 702.



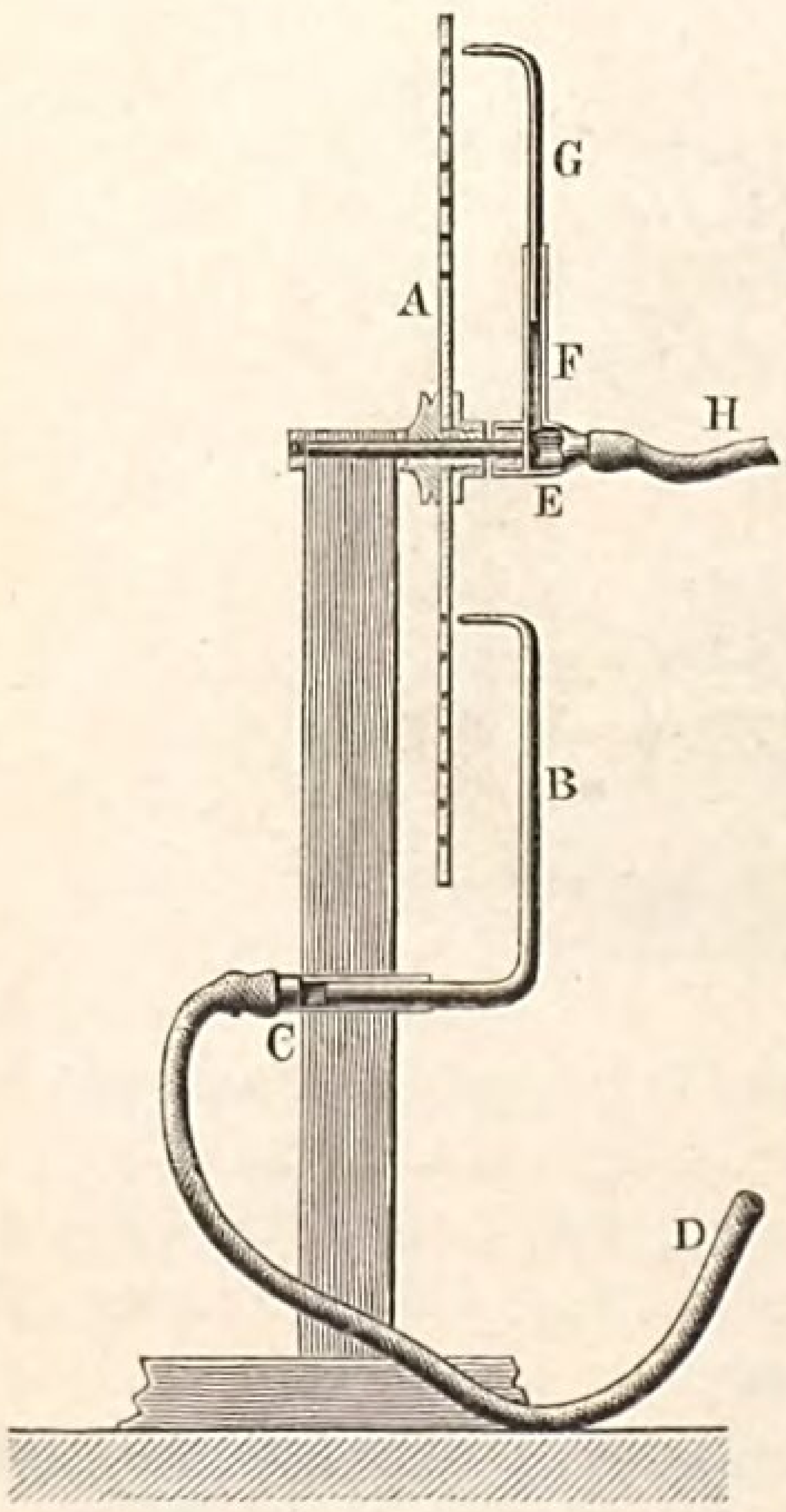
Das Blaserohr B ist zweimal rechtwinkelig umgebogen und steckt luftdicht drehbar in dem Rohrstück c, welches mit dem Schlauche D in Verbindung ist. Für einige später zu beschreibende Experimente ist noch eine zweite Blaseröhre G so anzubringen, dass ihre Oeffnung auf dem Löcherkreise selbst concentrisch verschiebbar ist. Die Röhre G ist in einer etwas weiteren F verschiebbar, die Luft wird durch den Schlauch H der Kammer E zugeführt, welche mittelst des sie von rückwärts verschliessenden Korkes auf eine conische Verlängerung der Achse aufgesetzt werden kann.

Versieht man die Scheibe mit acht Reihen von Löchern, deren Anzahl der Reihe nach 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48 beträgt, so erhält man beim Anblasen die C-Durscala. Dreht man dann mit grösserer, aber constanter Geschwindigkeit, so erhält man wiederum die C-Durscala,

aber in höherer Tonlage. Daraus folgt neuerdings, dass die Grösse des Tonhöhenunterschiedes nicht von der Differenz, sondern vom **Verhältnisse** der Schwingungszahlen abhängt. Dieses Verhältniss, welches gleich dem Verhältniss der Löcherzahl ist, bleibt bei allen Rotationsgeschwindigkeiten der Scheibe dasselbe, daher auch das musikalische Intervall. Giebt man den Löcherreihen die Löcherzahlen 24, 27, 30, 32, 24, 40, 36, 32 und bläst diese in passendem Rythmus der Reihe nach an, so erhält man die S. 705 angeführte Melodie. Dieselbe bleibt im Charakter ganz unverändert, nur dass ihre absolute Höhe wechselt, sobald man die Geschwindigkeit der Scheibe wechselt. Wenn man aber diese Geschwindigkeit ändert, während die Blaseöffnung von einer Löcherreihe zur anderen geht, so ändert sich die Melodie. Bläst man gegen eine Löcherreihe, in welcher die Löcher in unregelmässigen Abständen vertheilt sind, so entsteht kein reiner Ton, sondern ein **Geräusch**.

Statt der mit Löchern versehenen Scheibe kann man sich auch eines gezähnten Rades bedienen, gegen dessen Zähne ein elastischer Körper gehalten wird. Diese Methode rührt von **Savart***) her, dessen Apparat in Fig. 704 dargestellt ist. *a* ist ein sehr festes Gestell von Eichenholz, welches noch dadurch stabiler gemacht wird, dass man es auf dem Boden befestigt; *A* ist ein Rad von **1**,8 m Durchmesser, welches sich um eine sehr starke Achse dreht und durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird; durch eine Schnur ohne Ende wird die rotirende Bewegung auf ein zweites Rad *B* in der Weise übertragen, dass die Umdrehung der Achse von *B* weit schneller ist, als die Umdrehung der Achse des Rades *A*, dass z. B. zehn Umdrehungen des Rades *B* auf eine Umdrehung von *A* kommen. *B* ist ein gezahntes Metallrad, welches ungefähr 600 Zähne hat; wenn man die Kante einer Karte dem Stosse der Zähne aussetzt, so kann man leicht 24 000 Stösse in der Secunde erhalten, wenn *A* vier Umdrehungen in einer Secunde macht. Man erhält mehr oder weniger Stösse, je nachdem man rascher oder weniger rasch dreht. Der Ton, welchen man auf diese Weise erhält, ist rein und andauernd, seine Höhe hängt von der Schnelligkeit der Umdrehung ab, man kann es also leicht dahin bringen, dass er mit der Stimm-

Fig. 703.



*) Annal. de Phys. et de Chim. T. 44 et 47.

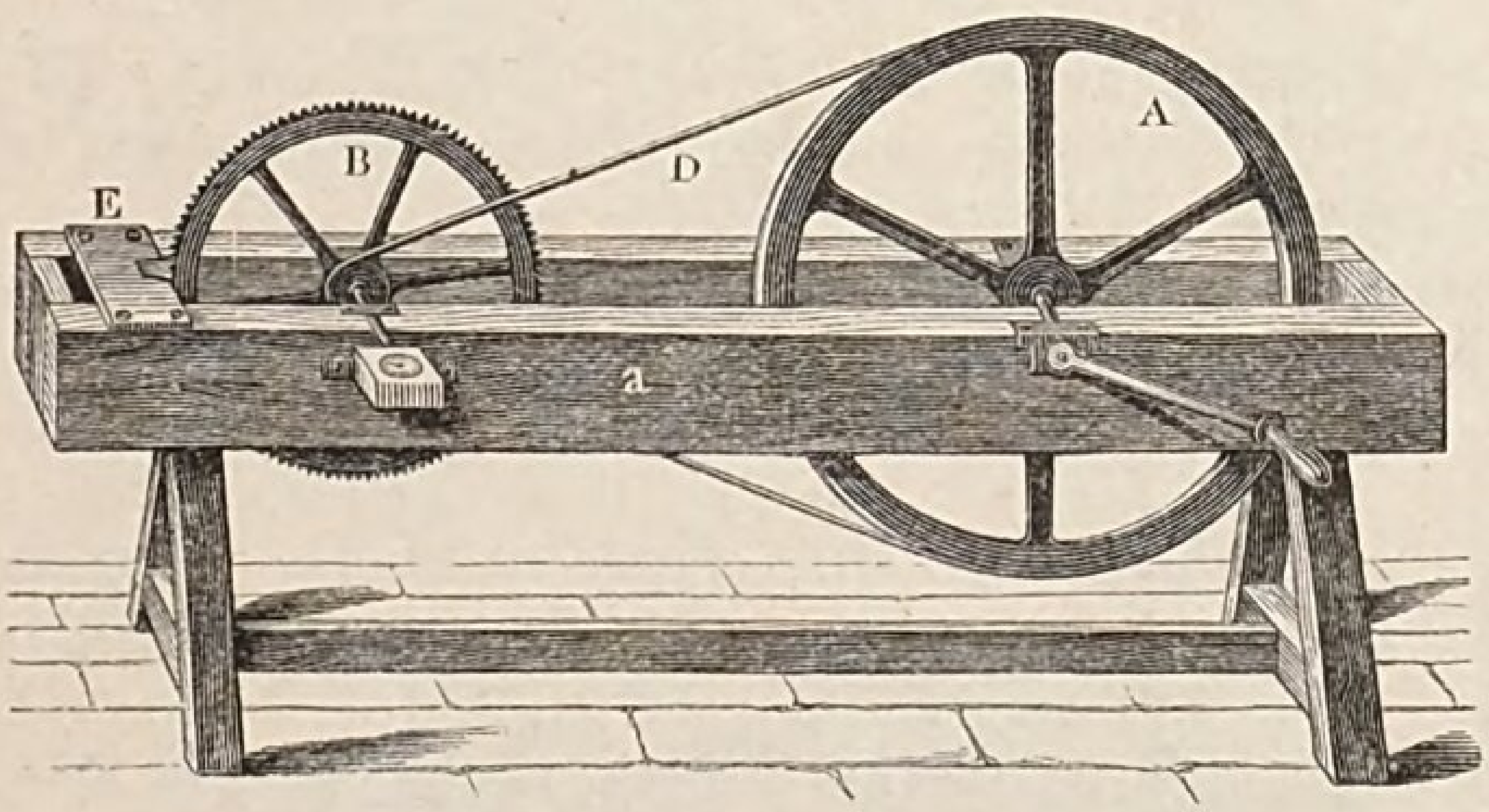
gabel im Einklange ist. Der Stoss der Zähne gegen das Plättchen giebt einen Ton, weil es dadurch in Schwingungen versetzt wird; während der Zahn vorübergeht, wird das Plättchen gehoben, geht aber in Folge seiner Elasticität zurück, ehe der folgende Zahn kommt. So erzeugt jeder vorübergehende Zahn einen Hin- und Hergang des Plättchens, also eine Vibration; man hat also nur zu ermitteln, wie viel Zähne in einer gegebenen Zeit vorübergehen, um auch die Schwingungszahl des erzeugten Tones zu kennen; zu diesem Zwecke ist an der Achse des Rades *B* eine Schraube ohne Ende angebracht, welche ganz in ähnlicher Weise wie bei der Sirene ein Zählerwerk in Bewegung setzt. Savart hat auf diese Weise bestätigt, dass a^1 440 Schwingungen in der Secunde macht, wie man mit der Sirene gefunden hatte.

Die Methode von Scheibler, sowie die optischen Methoden zur Messung von Schwingungszahlen können erst später beschrieben werden.

Grenzen der Hörbarkeit. Die in der Musik gebrauchten Töne haben Schwingungszahlen, deren Grenzen ungefähr zwischen 40 und 4000 gelegen sind, also gegen sieben Octaven umfassen. 206

Jenseits dieser Grenzen nach unten und oben giebt es aber noch Töne, welche zwar nicht musikalisch verwerthbar, aber noch hörbar sind.

Fig. 704.



Mehrere Physiker und Physiologen haben die untere und obere Grenze der Schwingungszahlen, welche noch hörbaren Tönen entsprechen, aufzufinden versucht, sind dabei aber zu sehr abweichenden Resultaten gekommen, was seinen Grund theils im Fehlen der Methode, theils in der ungleich weit gehenden Fähigkeit der Gehörorgane verschiedener Individuen hat.

Untere Grenze. Die Schwingungszahl des tiefsten noch hörbaren Tones ist nach Sauveur's Versuchen an Orgelpfeifen von 40 Fuss Länge $= 12^1/_2$, nach Chladni und nach Biot (Versuche an Saiten) $= 16$, nach Savart's Versuchen an einem eigens hierzu construirten Apparate, bei welchem ein rotirender Stab durch enge Spalten schlägt, $=$ 7 bis 8.

Bei allen diesen Bestimmungen ist nach Helmholtz*) der Einwurf zu erheben, dass nebst dem Grundton, den man zu hören glaubte, noch Obertöne (Töne mit Schwingungszahlen, welche einfache Multipla der Zahl des Grundtons sind) mit auftreten, welche man hört und für den Grundton hält, da eine Schätzung der Tonhöhe in dieser Tiefe sehr schwierig oder unmöglich ist.

Es sind daher nur solche Versuche beweisend, welche mit rein pendelartig schwingenden Körpern, welche reine Grundtöne ohne Obertöne geben, angestellt werden.

Helmholtz fand die untere Grenze der Hörbarkeit an Saiten, welche in der Mitte belastet waren und deshalb keine verwechselbare Obertöne lieferten, bei 37 bis 34 Schwingungen per Secunde, an grossen Stimmgabeln bei 28.

W. Preyer**) fand auf dieselbe Weise noch hörbare Töne bis zu 24 Schwingungen herab. Noch tiefere Töne hörte er an sehr tiefgestimmten Zungenpfeifen, wenn er das Ohr an den Kasten anlegte, nachdem der Wind unterbrochen worden und die sehr lauten Obertöne ausgeklungen hatten. Er bestimmte so die untere Grenze zu 15 Schwingungen und gab an, dass sie für normalhörige Personen zwischen 14 und 24 liege.

Helmholtz erhob aber gegen diese Versuche den Einwand, dass möglicher Weise von den Zungen aus Longitudinaltöne mit doppelt so grosser Schwingungszahl auf den Kasten übergehen und erklärte seine Zweifel für nicht beruhigt, so lange nicht durch Schwebungszählungen die Angaben controllirt seien.

Somit wäre die anerkannte untere Grenze bei 24 Schwingungen gelegen.

Obere Grenze. Ueber dieselbe gehen die Angaben, insbesondere die älteren, noch weiter aus einander. Sauveur nahm 6400, Chladni 8192, Wollaston 25 000 an. Der letztere machte bereits auf die grossen individuellen Verschiedenheiten aufmerksam. Savart erhielt an einem Zahnrade, gegen das eine Karte gehalten wurde, hörbare Töne von 24 000 Schwingungen, Despretz erreichte mit kleinen Stimmgabeln 36 864 Schwingungen. W. Preyer hörte an einer kolossalen Seebeck'schen Sirene des Mechanikers Appun in Hannau bei 24 000 Luftstössen noch einen leisen Ton, während andere Personen ihn nicht mehr hörten.

Rudolph König in Paris hat die obere Grenze der Hörbarkeit durch eine Reihe von zehn cylindrischen Stahlstäben nachgewiesen, welche sämmtlich gleichen Durchmesser von 20 mm haben. Die Länge der einzelnen Stäbchen ist in der zweiten Columne, die nach einem späteren Paragraphen sich ergebende Schwingungszahl derselben ist in der dritten Columne der folgenden Tabelle gegeben.

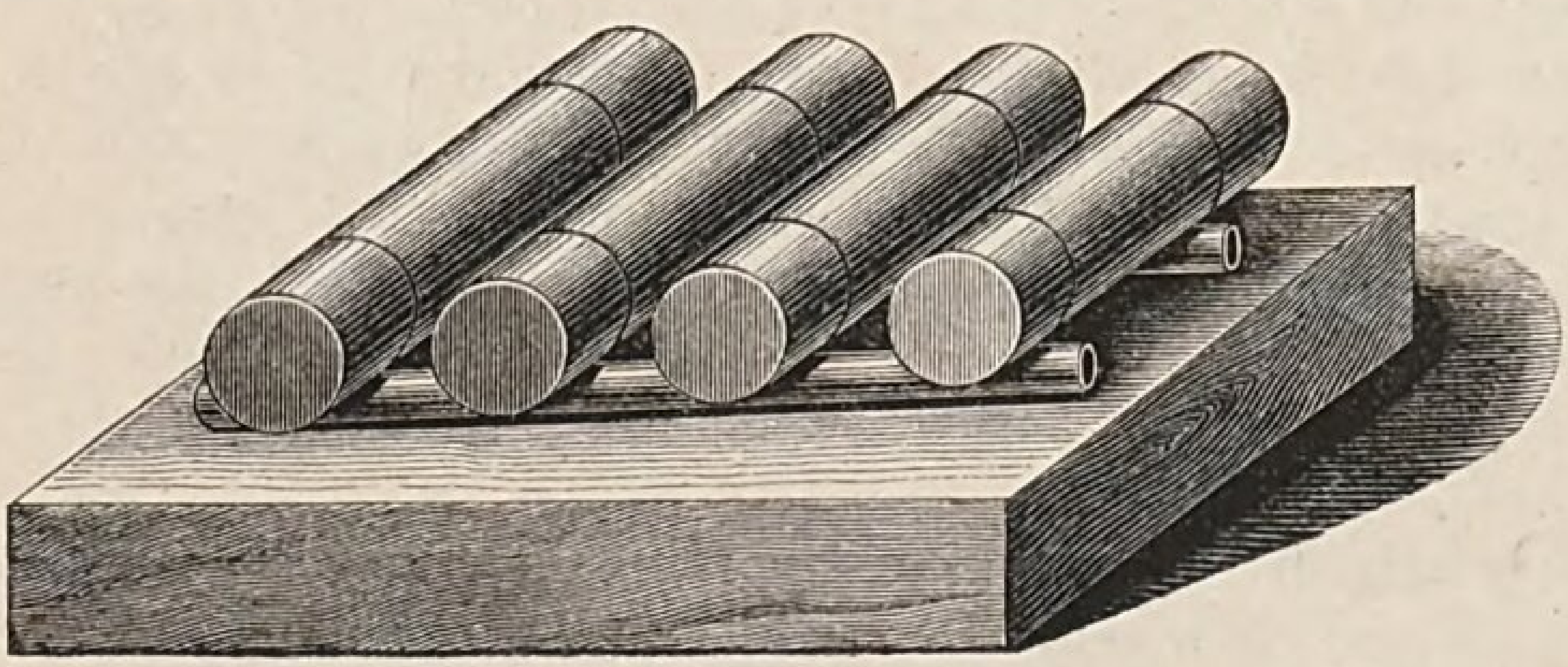
*) Tonempfindungen; IX. Abschnitt.

**) Physiologische Abhandlungen. I. Reihe, I. Heft 1876.

Nummer der Stäbe	Länge der Stäbe in Millimetern	Schwingungszahl	Musikalische Bezeichnung
1	149 149,0	4096	c^5
2	$149 \sqrt{4/5} = 132{,}3$	5120	e^5
3	$149 \sqrt{2/3} = 121{,}7$	6144	g^5
4	$149 \sqrt{1/2} = 105{,}3$	8192	c^6
5	$149 \sqrt{4/10} = 94{,}2$	10240	e^6
6	$149 \sqrt{2/6} = 86{,}0$	12288	g^6
7	$149 \sqrt{1/4} = 74{,}5$	16384	c^7
8	$149 \sqrt{4/20} = 66{,}6$	20480	e^7
9	$149 \sqrt{2/12} = 60{,}9$	24576	g^7
10	$149 \sqrt{1/8} = 52{,}6$	32768	c^8

Durch Anschlagen mit einem harten Klöppel werden die Stäbe in der Weise in Transversalschwingungen versetzt, dass sich zwei Schwingungsknoten bilden, von denen jeder um $^1/_5$ der ganzen Stablänge von dem einen Ende des Stabes absteht. An der Stelle dieser Schwingungsknoten sind die Stäbchen mit einer kleinen eingedrehten Rinne versehen, wie Fig. 705 zeigt.

Fig. 705.

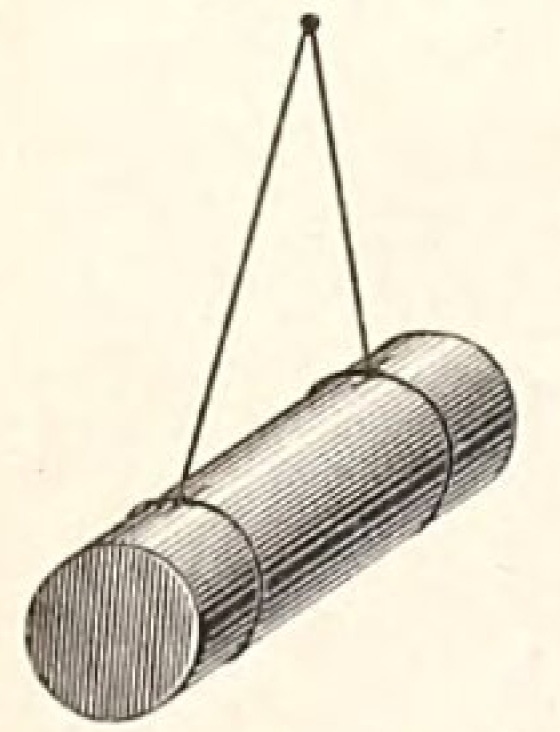


Diese Stäbe werden entweder mit ihren Schwingungsknoten auf Kautschukröhren aufgelegt, welche in convergirender Richtung auf ein Brett aufgeleimt sind, wie Fig. 705 zeigt, oder sie werden an Schnüren aufgehängt, wie man Fig. 706 (a. f. S.) sieht, welch letzteres namentlich bei den drei kürzesten Stäbchen geschieht.

Der längste dieser Stäbe giebt, mit dem Klöppel angeschlagen, den Ton c^5 (das fünfgestrichene c, ein Ton, welcher durch 4096 ganze Schwingungen in der Secunde erzeugt wird, wenn man das eingestrichene a zu 426,66 ... Schwingungen annimmt). Danach ergiebt sich denn die Schwingungszahl der übrigen Stäbe, wie dieselbe in der dritten Verticalreihe obiger Tabelle steht, während die letzte Verticalreihe die musikalische Bezeichnung der entsprechenden Töne enthält.

Der Transversalton des Stabes Nr. 1, also das fünfgestriche c, erklingt so voll und kräftig, dass man das Klappen beim Anschlagen des Hammers kaum wahrnimmt. Bei den folgenden Stäben wird nun das Klappen des Anschlages immer merklicher, während der Transversalton immer schwächer und feiner wird, bis er endlich vollständig verschwindet und nur noch das Klappen hörbar bleibt. Weniger feine Ohren hören kaum noch das g^6. Für ältere Personen bildet c^7 die Grenze der Hörbarkeit, während selbst die besten Ohren den Ton g^7 (24 576 Schwingungen in der Secunde) nicht mehr hören.

Fig. 706.



Dagegen gelang es Appun, mit kleinen Stimmgabeln eine noch höhere Grenze zu erreichen als selbst Despretz. Er fertigte aus 31 Stimmgabeln eine durch $4^1/_2$ Octaven fortschreitende Durtonleiter von $c^4 = 2048$ bis $c^8 = 40\,960$ Schwingungen an. Die letzte Gabel ist nur 13 mm lang, 14 mm breit und hat 3 mm dicke Zinken. Diese 31 Töne sind von mehreren Gewährsmännern alle gehört worden und es war, wenn sie der Reihe nach erklangen, auch deutlich zu erkennen, dass sie bis c^8 immer höher werden. Aeltere Personen hören meist schon c^7 nicht mehr.

Das Hören solch hoher Töne ist durchaus kein Vergnügen, sondern vielmehr schmerzhaft. Preyer beschreibt das Gefühl beim Anhören der Töne von c^7 an „wie wenn von beiden Ohren bis in die Mitte des Kopfes nach aufwärts ein dünner Draht gezogen würde“. Auch Thiere, insbesondere Hunde und Katzen, empfinden hohe Töne schmerzhaft.

So lange es nicht gelingt, noch kleinere hörbare Stimmgabeln herzustellen, ist also die obere Grenze der Hörbarkeit bis 40 960 erwiesen und umfassen daher die hörbaren Töne das Intervall von 24 bis 40 960, also über $10^1/_2$ Octaven.

Eine mit der Frage nach der kleinsten absoluten Tonhöhe verwandte, aber doch wesentlich verschiedene, ist jene nach der kleinsten absoluten Anzahl von Schallimpulsen, welche überhaupt auf einander folgen müssen, damit ein Ton wahrgenommen wird. Da es jedenfalls noch Töne mit 40 Schwingungen per Secunde giebt, andererseits in der Musik oft Töne von geringerer Dauer als $^1/_{40}$ Secunde angewendet werden, so würde ein solcher Ton in dieser kurzen Zeit nur einer einzigen Schwingung oder gar nur einem Bruchtheile einer solchen entsprechen.

Von einer Schwingungszahl per Secunde kann aber doch nur die Rede sein, wenn mindestens zwei Schwingungen auf einander folgen. Es ist aber von vornherein nicht zu sagen, ob nicht eine grössere Anzahl erforderlich ist.

Nachdem schon Savart 1830 und Seebeck 1841 diese Frage berührt, wurde dieselbe neuerdings (1877) vom Verfasser*), sowie von S. Exner**), Felix Auerbach***) und Jos. Kries, endlich von W. Kohlrausch†) Untersuchungen unterzogen.

Das Resultat derselben fiel abweichend aus, je nachdem die Frage aufgefasst wurde. Fragt man nach dem Minimum der Anzahl von Schwingungen, damit überhaupt ein Ton gehört werde, so lautet die Antwort: zwei; fragt man dagegen nach dem Minimum dieser Anzahl, wobei der Ton seine volle Charakteristik bezüglich der Tonhöhe angenommen, so lautet die Antwort nach Exner: 17, nach Auerbach: 20. Nach W. Kohlrausch beginnt (in Uebereinstimmung mit dem Verfasser) die Wahrnehmung der Tonhöhe schon bei zwei Impulsen. Die Genauigkeit der Tonhöheschätzung steigt aber mit der Anzahl der Impulse bis zur Anzahl 16 derselben, von wo an für ein Ohr mittlerer Feinheit das Auffassungsvermögen der Tonhöhe durch eine Vermehrung der Impulse nicht mehr weiter gesteigert wird.

Um zu zeigen, dass schon zwei Impulse genügen, um einen Ton wahrzunehmen und annähernd dessen Höhe zu schätzen, habe ich folgendes Experiment angestellt.

Eine gewöhnliche Seebeck'sche Sirene hat am Umfange nur eine geringe Zahl, z. B. sechs gleich weit abstehende Löcher.

Dagegen sind statt einer Blaseöffnung deren zwei vorhanden, deren eine feststeht, während die andere im Kreise herumgedreht und an beliebiger Stelle befestigt werden kann (Fig. 703, S. 726). Angenommen, die Scheibe mache zehn Umdrehungen per Secunde, die Bogendistanz der beiden Blaseöffnungen betrage $^1/_{72}$ des ganzen Umfanges, also $^1/_{12}$ des Abstandes zweier Löcher. An jeder Blaseöffnung gehen dann 60 Löcher per Secunde vorüber, wodurch der sehr tiefe Ton mit der Schwingungszahl 60 entsteht. Ausserdem geht aber jedes Loch zehnmal per Secunde an beiden Blaseöffnungen nach einander so rasch vorüber, dass auf jeden durch die erste dieser Oeffnungen erzeugten Luftstoss binnen $^1/_{720}$ Secunde ein durch die zweite Oeffnung erzeugter Stoss folgt. Es wird also zehnmal per Secunde durch je zwei Impulse ein Ton von der Schwingungszahl 720 hervorgerufen. Um diesen Ton neben dem anderen und neben dem Sausen der Scheibe wahrzunehmen, kann man ihn entweder zeitweilig ganz unterbrechen und wiederherstellen, indem man den Luftstrom einer Blaseöffnung unterdrückt und wieder zuführt oder, besser, man ändert während der Rotation sprungweise den Bogenabstand der beiden Blaseöffnungen. Hierdurch muss offenbar die Tonhöhe jenes durch je zwei Impulse her-

*) Wien. Acad. Ber. 1877. — **) Pflüger's Arch., Bd. 13. — ***) Wiedemann's Ann. VI. — †) Wiedemann's Ann. X.

vorgerufenen Tones herabsinken, während der andere Ton auf der Höhe von 60 Schwingungen stehen bleibt. Gerade durch die Veränderung der Tonhöhe wird man auf den gesuchten Ton und seine Höhe aufmerksam.

Eine im Wesentlichen nahe übereinstimmende Beobachtung kann man nach Baumgarten unter folgenden Umständen anstellen. Man wähle eine Stelle nahe an einer den Schall reflectirenden Mauer, von wo aus man das einförmige Geräusch eines entfernteren rauschenden Baches, Wasserfalles oder eines Eisenbahnzuges hören kann. Alle die unzähligen Einzelimpulse, welche von der Schallquelle ausgehen, gelangen dann zweimal in das Ohr: das erste Mal direct, das zweite Mal nach Reflexion an der Mauer. Die Zeitdauer zwischen diesen beiden Impulsen ist gegeben durch $\frac{s}{C}$, wo s den Abstand des Ohres von der Mauer, C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles = 340 in Metern beträgt. Falls diese Aufeinanderfolge für sich eine Tonwahrnehmung hervorzurufen vermag, so muss die Schwingungszahl derselben $= \frac{C}{s}$ sein. Bei 1 m Distanz muss man also den Ton 340 hören; um den Ton a^1 der Normalstimmgabel von 440 Schwingungen zu hören, muss man sich auf $\frac{340}{440} = 0{,}77$ m der Mauer nähern. Diese Töne werden nun unter günstigen Umständen wirklich gehört. Nur die erste Auffindung macht manchmal Schwierigkeiten; sie gelingt am leichtesten, wenn man das Ohr ziemlich rasch der Mauer nähert und es wieder entfernt, weil dann der gesuchte Ton ansteigt und absinkt. Hat man die Beobachtung nur einmal gemacht, so kann man sie auch unter weniger günstigen Bedingungen wiederholen. Beim Vorübergehen an den Bäumen einer Allee, welche einem rauschenden Flusse parallel verläuft, hört man bei jedem Stamme den auf- und absteigenden leisen Ton. Es scheint gar nicht unmöglich, dass derselbe seinerzeit der gläubigen Phantasie als Seufzen der Oreade erschienen ist.

Dass selbst ein einziger Impuls durch die Dauer und die Art des Verlaufes den Eindruck verschiedener Tonhöhe hervorbringen kann, hat bereits Helmholtz erwiesen.

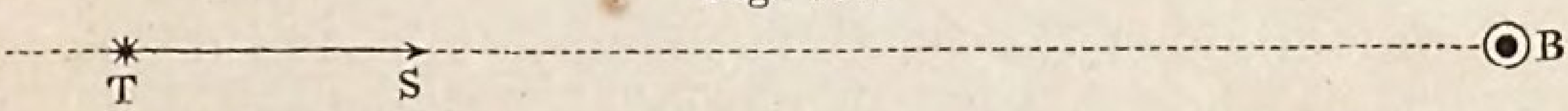
Der Knall einer Gewehrkapsel, eines Gewehrs, einer Kanone unterscheidet sich durch die Höhe. Schlägt man mit den hohlen Handflächen zusammen, entsteht ein Geräusch von tiefer (dumpfer) Tonlage, es erhöht sich dieselbe, wenn man dabei die Handflächen eben ausstreckt. Der Knall einer mit Wasserstoff und Luft gefüllten Seifenblase klingt desto tiefer, je grösser sie ist. Offenbar wird die Wellenlänge, also auch die Schwingungsdauer, desto grösser ausfallen, je längere Zeit die Explosion in Anspruch nimmt*).

*) Man vergleiche die Abhandlung von E. Brücke „Ueber die Wahrnehmung der Geräusche“. Wiener Acad. Ber. XC, B., III. Abth. S. 199 (1885).

Einfluss der Bewegung auf die Höhe des wahrgenommenen Tones. 207 Doppler hat zuerst in seiner 1842 zu Prag erschienenen Schrift: „Das farbige Licht der Doppelsterne etc.“ darauf hingewiesen, dass die Höhe des wahrgenommenen Tones eine andere sein müsse, wenn Beobachter und Tonquelle sich rasch einander nähern oder von einander entfernen, als wenn sie in unveränderter Entfernung von einander bleiben.

In Fig. 707 stelle B den ruhenden Beobachter, T aber die Tonquelle dar, welche sich mit solcher Geschwindigkeit gegen den Beobachter hin bewegt, dass sie in einer Secunde den Weg $TS = a$ zurücklegt.

Fig. 707.



Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles mit c, so ist die Zeit, welche der Schall braucht, um den Weg TS zurückzulegen, gleich $\frac{a}{c}$. Von dem Momente an, in welchem die durch den tönenden Körper bei T erzeugte Verdichtungswelle in B anlangt, bis zu dem Moment, in welchem B von der Schallwelle erreicht wird, welche der tönende Körper in dem Augenblicke erzeugt, in welchem er den Punkt S passirt, vergeht eine Zeit von $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Secunden. Während nun der tönende Körper von T bis S fortschreitet, also während einer Secunde, macht derselbe z Vibrationen und die dadurch erzeugten Schallwellen schlagen innerhalb $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Secunden an das Ohr des Beobachters in B, während einer Secunde wird also derselbe von $z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}}$ Vibrationen getroffen werden. Während also der tönende Körper einen objectiven Ton von der Schwingungszahl z erzeugt, vernimmt der Beobachter in B einen subjectiven Ton, welcher der Schwingungszahl

$$z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

entspricht. Unter den bezeichneten Umständen ist also der subjective Ton höher als der objective. Für den Fall, dass sich der tönende Körper mit der Geschwindigkeit des Schalles bewegt, dass also $a = c$, ergiebt sich aus Gl. 1) der Werth $z' = \infty$, der Beobachter würde also gewissermaassen einen Ton von unendlicher Schwingungszahl wahrnehmen müssen, alle Schallwellen, welche der tönende Körper auf dem Wege von T nach S erzeugt, würden gleichzeitig an das Ohr des Beobachters in B anschlagen.

Für den Fall, dass der tönende Körper sich von dem ruhenden Beobachter entfernt, geht Gleichung 1) über in

$$z'' = \frac{z}{1 + \frac{a}{c}} \quad \text{.} \quad 1\text{a)}$$

z'' ist also kleiner als z, der subjective Ton, welchen der Beobachter wahrnimmt, ist also tiefer als der objective. Wenn in diesem Falle $a = c$ wäre, so würde $z'' = 2z$, der ruhende Beobachter würde die nächst tiefere Octave des Tones hören, welchen der tönende Körper erzeugt.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der tönende Körper im fortpflanzenden Medium ruhig bleibt, während der Beobachter sich in demselben bewegt. Während sich der Beobachter in einer Secunde um die Länge BR, Fig. 708, welche auch hier mit a bezeichnet werden mag, dem tönenden Körper in T nähert, wird

Fig. 708.



dieser n Verdichtungswellen erzeugen, das Ohr des Beobachters wird aber von mehr als n Verdichtungswellen getroffen und zwar wird dieser Ueberschuss gerade so gross sein, als die Zahl der Vibrationen beträgt, welche der tönende Körper macht, während der Schall den Weg $BR = a$ zurücklegt. Um diesen Weg zurückzulegen, braucht der Schall $\frac{a}{c}$ Secunden und während dieser Zeit macht der tönende Körper $n\frac{a}{c}$ Vibrationen; die Zahl der Vibrationen also, welche an das Ohr des Beobachters anschlagen, während sich derselbe von B bis R bewegt, ist also

$$n' = n\left(1 + \frac{a}{c}\right) \quad \text{.} \quad 2)$$

Auch hier ist der subjective Ton höher als der objective, er ist die Octave desselben, wenn $a = c$, wenn sich also der Beobachter mit der Geschwindigkeit des Schalles dem tönenden Körper nähert. Wenn sich B von T entfernt, so geht die Gleichung 2) über in

$$n'' = n\left(1 - \frac{a}{c}\right) \quad \text{.} \quad 2\text{a)}$$

der subjective Ton wird tiefer als der objective. Für $a = c$ wird $n'' = 0$, die von T ausgehenden Schallwellen würden in diesem Falle den Beobachter gar nicht mehr erreichen.

Diese theoretischen Ergebnisse sind vielfach durch Beobachtungen auf Eisenbahnen bestätigt worden*). Dabei stand entweder der Beob-

*) Buys Ballot, Pogg. Ann. LXVI, 1845. Vogel, Pogg. Ann. CLVIII, S. 287. Mach, Wien. Acad. Ber. LXXVII.

achter ruhig an der Bahn, während eine Locomotive mit einer Tonquelle vorüber fuhr, oder es befand sich umgekehrt der Beobachter auf dem Zuge, während die Tonquelle ruhte. Dabei beobachtete man in der That eine Tonerhöhung, wenn eine Annäherung, eine Tonerniedrigung, wenn eine Entfernung zwischen Tonquelle und Beobachter stattfand. Für eine Geschwindigkeit der Locomotive von ungefähr 16 m in der Secunde betrug die beobachtete Tonerhöhung oder Erniedrigung den obigen Formeln entsprechend ungefähr einen kleinen halben Ton. Eine genaue Bestimmung der Differenz zwischen dem objectiven und dem subjectiven Tone wird übrigens durch das Geräusch der schnellfahrenden Locomotive sehr erschwert*).

Fährt die Locomotive gegen die Façade eines Tunnels, so hört der Mitfahrende den von der Wand reflectirten Ton der Signalpfeife höher als den directen. Fahren zwei Züge sich begegnend rasch an einander vorüber, so hört der Mitfahrende die Signalpfeife des anderen Zuges zuerst in höherer Tonlage, welche im Momente der Begegnung rasch in tiefere übergeht.

E. Mach**) hat ein Versuchsverfahren angegeben, welches hierher gehörige Beobachtungen einfacher und sicherer anzustellen gestattet.

Eine hohle Holzleiste von nahe 4 m Länge ist um eine durch ihre Mitte gehende verticale Achse drehbar und trägt an einem Ende ein Zungenpfeifchen (Stimmton a^1). Die hohle Achse steckt in einer weiteren Röhre mit Seitenrohr und angesetztem Kautschukschlauch, so dass man durch letzteres dem Pfeifchen Luft zuführen kann, während das letztere in horizontalem Kreise herumgedreht wird. Bei einer Rotationsdauer von 0,6 bis 0,7 Secunden ist dann sehr deutlich zu bemerken, wie der Ton des Pfeifchens bei der Entfernung vom Beobachter sinkt, bei der Annäherung steigt und zwar genau so viel, als die Rechnung verlangt.

Damit jedoch das Experiment gut gelinge, muss es im Freien ausgeführt werden, da in geschlossenen Räumen durch Einmischung der von den Wänden reflectirten Töne Störungen eintreten. Ausserdem soll die Bewegung nahe dem Boden und parallel zu demselben erfolgen. Statt des Pfeifchens kann auch eine Stimmgabel mit Resonanzkästchen benutzt werden.

Ein ebenfalls hierher gehöriges Experiment mit zwei gleichgestimmten Stimmgabeln hat König angegeben; wir können dasselbe aber erst später nach Erklärung der „Schwebungen“ mittheilen.

*) Pogg. Ann. LXVI.

**) Wien. Acad. Ber. XLI (1860), dann insbesondere LXXVII (1878).

Drittes Capitel.

Von den tönenden Körpern.

208 **Methoden zur Untersuchung schwingender Körper; Stroboskopie.** Da Wellenbewegungen und Töne durch stehend schwingende Körper hervorgerufen werden, so konnten wir in den beiden vorigen Capiteln nicht die beiden ersten behandeln, ohne zugleich von den schwingenden Körpern selbst zu sprechen. Wir kommen aber jetzt ausführlicher auf diese letzteren zurück. Bei der Untersuchung der Schwingungen tönender Körper können verschiedene Fragen zu beantworten sein. Die Zahl der Schwingungen (Tonhöhe), der zeitliche Verlauf derselben, die Form der Schwingungsbahnen der einzelnen Punkte, die Formen des schwingenden Körpers in verschiedenen Phasen, die Abtheilung des ganzen Körpers in einzelne für sich schwingende Theile, die Lage der Knotenpunkte und Knotenlinien etc.

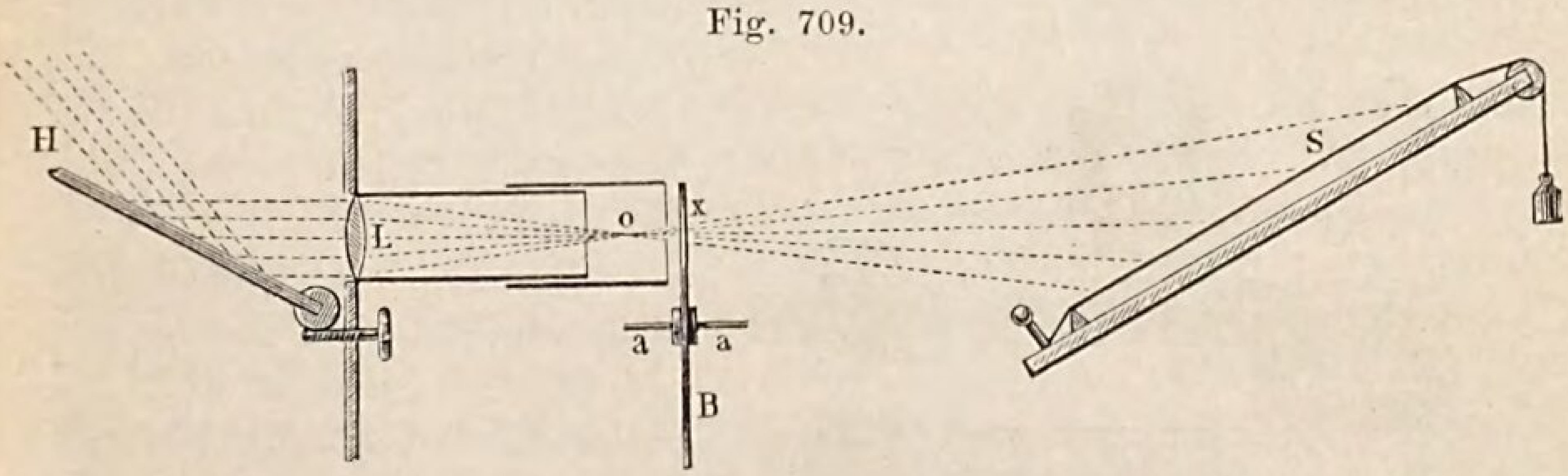
Da der Verlauf der Schwingungen in der Regel zu rasch ist, um direct messend beobachtet zu werden, so empfiehlt sich hier die auch sonst (z. B. beim freien Fall) angewendete Methode, die zu untersuchenden Bewegungen mit anderen bereits bekannten von vergleichbarer Geschwindigkeit so zu combiniren, dass eine der Beobachtung zugängliche resultirende Bewegung entsteht. Aus dieser Resultirenden und der einen bekannten Componente schliesst man dann auf die andere noch unbekannte Componente.

Auf diesem Princip beruht die bereits beschriebene graphische Methode (§. 204), bei welcher die Schwingungen der Stimmgabel mit der fortschreitenden Bewegung der Schreibfläche combinirt, die Sinuscurve liefern. Ebenso beruht hierauf die Benutzung des rotirenden Spiegels zur Analyse der singenden Flammen und der König'schen Flammenzeiger. In diesen beiden, wie in vielen anderen Fällen, ist die mit der zu untersuchenden Bewegung combinirte Componente eine senkrecht auf jene gerichtete geradlinige und gleichförmige Bewegung. Wir werden bald

eine von Lissajous stammende Methode kennen lernen, bei welcher die mit der ursprünglichen Bewegung combinirte eine pendelartige Bewegung ist. Eine verwandte, aber doch eigenthümliche Methode endlich ist die stroboskopische, von welcher wir das Theoretische und ein Beispiel der Anwendung bereits im §. 193 bei den singenden Flammen erörtert haben. Wir wollen hier noch einige andere Anwendungen beschreiben und uns dabei an die Darstellung von E. Mach*), dem wir die Mehrzahl dieser Methoden verdanken, halten.

Bei der ursprünglichen von Plateau herrührenden Form der stroboskopischen Methode wird der Anblick des schwingenden Körpers dadurch dem Auge periodisch entzogen, dass die zwischen den Spalten der rotirenden Scheibe befindlichen Theile als Diaphragmen vor das Auge treten. Eine sehr schätzenswerthe Vervollkommnung erzielte Töpler**) dadurch, dass er nach einem schon 1845 von Doppler***) gemachten Vorschlage mittelst der rotirenden Scheibe den schwingenden Körper (eine schwingende Saite) intermittirend beleuchtete. Einen weiteren Fortschritt erzielte Mach, indem er die nur schwierig und unvoll-

Fig. 709.



kommen regulirbare rotirende Scheibe durch einen mittelst elektromagnetischer Stimmgabel hergestellten Lichtunterbrecher ersetzte.

In Fig. 709 ist das von Töpler angewendete Verfahren dargestellt. H ist der Spiegel eines gewöhnlichen Heliostaten, wie man ihn bei einem Sonnenmikroskop benutzt. Die Linse L giebt in o ein kleines Sonnenbild, von welchem aus die Strahlen in das verfinsterte Beobachtungslocal divergiren.

Die rotirende Scheibe B wird so aufgestellt, dass der Conus von Sonnenstrahlen gerade durch eine oben bei x vorübergehende Oeffnung fallen kann. Alles Nebenlicht wird dadurch abgehalten, dass man auf die Röhre des Sonnenmikroskops noch ein Röhrenstück aufschiebt, wel-

*) E. Mach, Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, S. 63. Daselbst findet sich auch eine eingehende Darstellung der historischen Entwickelung dieser Methode.

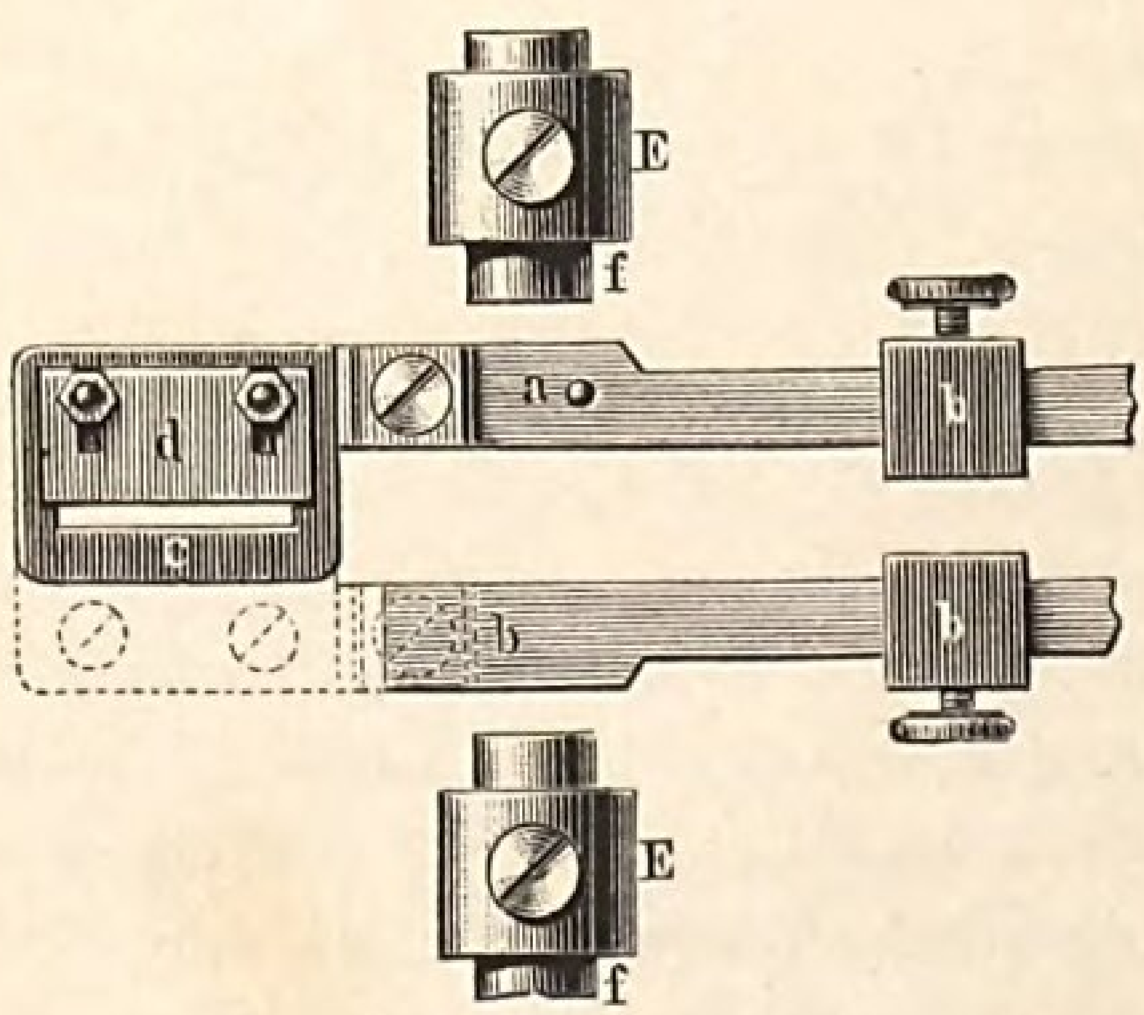
**) Pogg. Ann. CXXVIII.

***) Abh. d. kön. böhm. Ges. d. Wissensch. V. Folge, 3. Band, S. 779 (Doppler hat daselbst auch schon die Verbindung der stroboskopischen Scheibe mit Fernrohr, Mikroskop und Sirene vorgeschlagen).

ches fast zur Scheibe *B* reicht. Setzt man die Scheibe in Rotation, so erscheint bei einer gewissen Geschwindigkeit der austretende Strahlenkegel constant. Betrachtet man bei dieser Beleuchtung einen tönenden Körper, z. B. die Saite *S*, welche mit der Lochscheibe nahezu gleich gestimmt ist, so kann man die Schwingungen mit der grössten Deutlichkeit und Bequemlichkeit beobachten, wobei man noch den Vortheil hat, dass mehrere Personen zugleich an dem Experimente Theil nehmen können.

Die eben beschriebene Versuchsweise leidet an dem Uebelstande, dass es schwer hält, die Umdrehungsgeschwindigkeit der stroboskopischen Scheibe in entsprechender Weise zu reguliren, es war also wünschenswerth, die intermittirende Beleuchtung durch ein Stroboskop mit fixer Tonhöhe herzustellen und nach diesem den zu untersuchenden Körper zu stimmen. Dies gelang zuerst Professor Mach (Optisch-akustische Versuche) durch Anwendung einer Helmholtz'schen Unterbrechungsstimmgabel von grosser Excursionsweite an Stelle der rotirenden Scheibe. Auch Töpler und Boltzmann haben sich unabhängig derselben Methode bedient *). Eine eingehendere Besprechung der Helmholtz'schen Unterbrechungsgabel folgt an späterer Stelle.

Fig. 710.



Der Apparat unterscheidet sich dann von dem in Fig. 709 nur dadurch, dass an Stelle der rotirenden Scheibe eine elektromagnetisch vibrirende Stimmgabel gesetzt wird, deren beide Zinken mit leichten Blechschirmen versehen sind, in welchen sich je ein schmaler horizontaler Schlitz befindet. Die Ebene der Blechschirme, welche sich überdecken, fällt mit der verticalen Schwingungsebene der horizontal gestellten Gabel zusammen.

Fig. 710 zeigt die Zinken einer solchen Stimmgabel in ihrer Ausrüstung mit den Blechschirmen nach Töpler und Boltzmann. Auf das Zinkenende *a* ist ein Schuh fest aufgeschraubt, welcher ein sehr leichtes Blechrähmchen *c* mit rechteckiger Oeffnung trägt. Auf dieses kann die dünne Blechplatte *d* in verschiedener Höhe angeschraubt werden, je nach der Breite, die man der Spalte geben will. Am anderen Stimmgabelende ist eine ganz analoge Vorrichtung in umgekehrter Lage angebracht. *EE* sind die mit verstellbaren Fortsätzen *FF* versehenen Pole des Elektromagneten, *GG* die Laufgewichte zum Verstimmen der Gabel.

*) Pogg. Ann. CXLI.

Die obere Gabelzinke trägt bei a den (in der Zeichnung fortgelassenen) Draht zur Stromunterbrechung, welcher in einen Quecksilbernapf taucht.

Die beiden Spalten müssen sich in der Ruhelage gerade überdecken, weil dann die Zeitintervalle zwischen zwei Lichtdurchtritten genau gleich lang werden. Offenbar ist die Anzahl der Lichtintermittenzen gleich der Anzahl einfacher Schwingungen der Gabel, also doppelt so gross, wie die nach Doppelschwingungen gerechnete Schwingungszahl der Gabel. Der zu untersuchende schwingende Körper muss also nahe auf die obere Octave der Unterbrechungsgabel abgestimmt sein. Ist er auf dieselbe Tonhöhe gestimmt, so erscheint er doppelt.

Weniger zweckmässig, aber doch ausführbar ist es, die Gabel so einzurichten, dass der Lichtdurchtritt mit der äussersten Excursion der Gabel zusammenfällt, wo dann der zu untersuchende Körper nahe auf denselben Ton, wie die Gabel, gestimmt sein muss. Der Nachtheil dieser Einrichtung besteht in der relativ langen Dauer des Lichtdurchtritts. Bei den Versuchen von Töpler und Boltzmann war die Spaltbreite gleich 1 m, die Amplitude der Schwingungen = 3 mm, die Zeitdauer des Lichtdurchtrittes = $^1/_9$ der halben Schwingungsdauer der Gabel, also = $^1/_8$ der Dauer der Dunkelheit.

Um nach dieser Methode die Schwingungen der Luft in einer Pfeife sichtbar zu machen, verfuhr S. Mach in folgender Weise. Das Sonnenlicht wird nach dem Durchgange durch das Stimmgabeldiaphragma durch eine Linse nahe parallelstrahlig gemacht und der Länge nach durch eine horizontal liegende, nahe auf die Gabel gestimmte Orgelpfeife geführt.

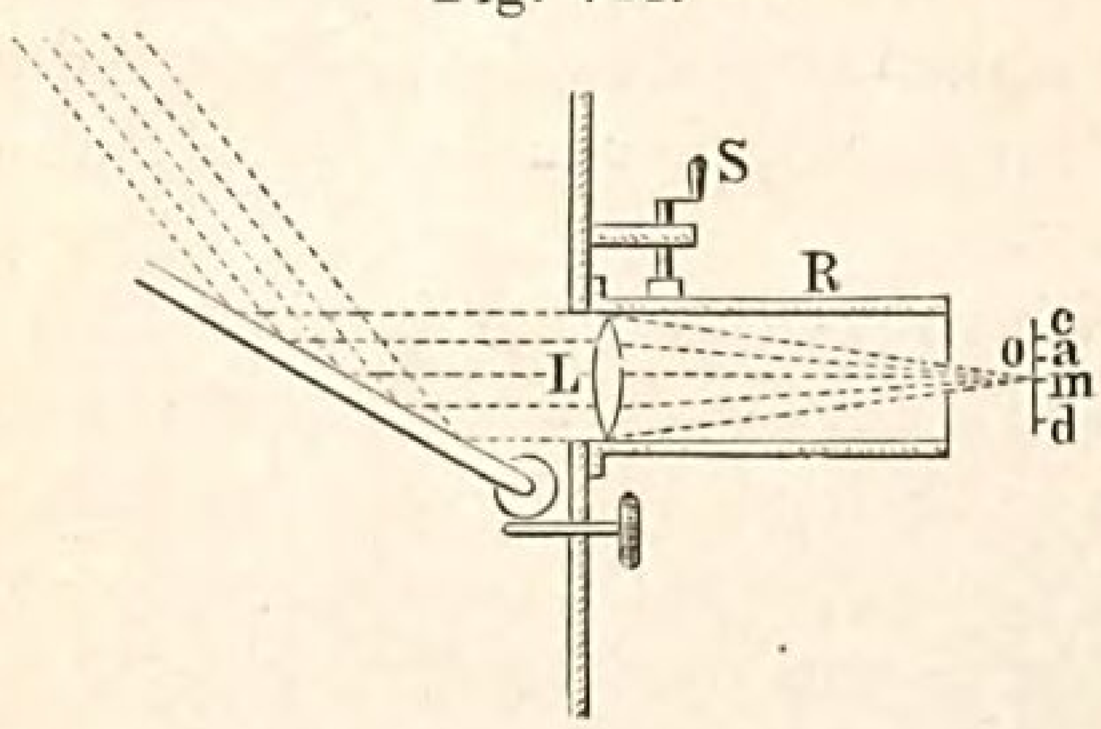
Die Pfeife ist in der Mitte an Stelle der Knotenfläche durch eine schlaff gespannte Membran abgetheilt, was den Ton nicht merklich beeinflusst, aber den Luftzug verhindert. Die verticalen Wände der Pfeife von der Membran bis zum offenen Ende sind aus Glas, der übrige Theil aus Holz. An der inneren oberen Wand der Pfeife zwischen Oeffnung und Membran ist ein dünner Platindraht ausgespannt mit den nöthigen Zuleitungen, um denselben mittelst eines galvanischen Stromes erhitzen zu können. Benetzt man diesen Draht mit concentrirter Schwefelsäure, so zieht sich diese in eine Anzahl gleich vertheilter Tröpfchen zusammen. Beim Erwärmen sinken die Dämpfe dieser Säuretröpfchen in Gestalt feiner Dampflinien vertical, also quer durch die Pfeife herab und bilden so die Marken, welche stroboskopisch schwingen, sobald der Versuch in Gang gesetzt wird. Die Excursionen betrugen am offenen Ende einer 125 cm langen Pfeife 4 mm.

Eine Vereinfachung dieser Methode erzielte E. Mach durch Anwendung des König'schen Brenners als intermittirende Lichtquelle. Macht man nämlich die Flammen dieser Brenner recht klein, so leuchten sie fast momentan periodisch auf, wenn sie durch eine Pfeife erregt werden. Man kann dann durch sie die Bewegung von Stimmgabeln, Saiten, Membranen, welche nahe auf die Pfeife gestimmt sind, recht gut stroboskopisch sichtbar machen. Um die Schwingungen der Luft in einer Pfeife

zu zeigen, legt man dieselbe, mit den oben beschriebenen Einrichtungen versehen, horizontal etwas höher vor die mit sechs bis acht König'schen Brennern versehene, nahe gleichgestimmte Beleuchtungspfeife, deren Flammen man durch das Glas der ersten Pfeife anblickt. Im finstern Zimmer sieht man dann recht schön die Schwingungen der durch die Schwefelsäure gebildeten Dampflinien.

Eine weitere von E. Mach als stroboskopische Selbstregulirung bekannt gemachte Verbesserung der Methode beruht auf folgendem Princip. Die Linse *L* des Apparates Fig. 709 sammt der sie tragenden Röhre *R* wird an dem Fensterladen in der aus Fig. 711 ersichtlichen Weise mittelst einer Schraube *S* von grosser Ganghöhe mit Kurbel auf und ab verschiebbar eingerichtet. Die Oeffnung von *R* und das Sonnenbildchen *o* steigt dann ebenfalls auf und nieder. Vor der Oeffnung von *R* wird die früher beschriebene Unterbrechungsgabel, welche aber diesmal nur mit einem Spaltschirm versehen sein darf, aufgestellt. *cd* stelle die Bahn der Spalte dieses Schirmes dar, *m* sei die Lage desselben in dem Momente, wo die Gabel ihre Ruhelage passirt. Lässt man die Schraube *S* unberührt und wirft das ins Zimmer durch die Spalte eintretende Licht mittelst eines Planspiegels auf die Unterbrechungsgabel zurück, so scheint letztere trotz ihrer Schwingungen vollständig ruhig zu stehen, da sie stets nur in dem Momente beleuchtet, also sichtbar wird, wo sie die Ruhelage passirt. Hebt man nun mittelst der Schraube das Sonnenbildchen *o* in die Lage *a*, so wird die Gabel immer in jenen Momenten beleuchtet, wo ihre Spalte die Lage *a* angenommen hat. Indem man also die Schraube auf und ab bewegt, bewegt sich auch die Gabel mit beliebiger Langsamkeit auf und ab, sie bleibt stehen, sobald man die Schraube stehen lässt. Letztere ist mit einer Theilung am Kopfe versehen, welche gestattet, die Schwingungen der Gabel in beliebige Bruchtheile zu theilen.

Fig. 711.



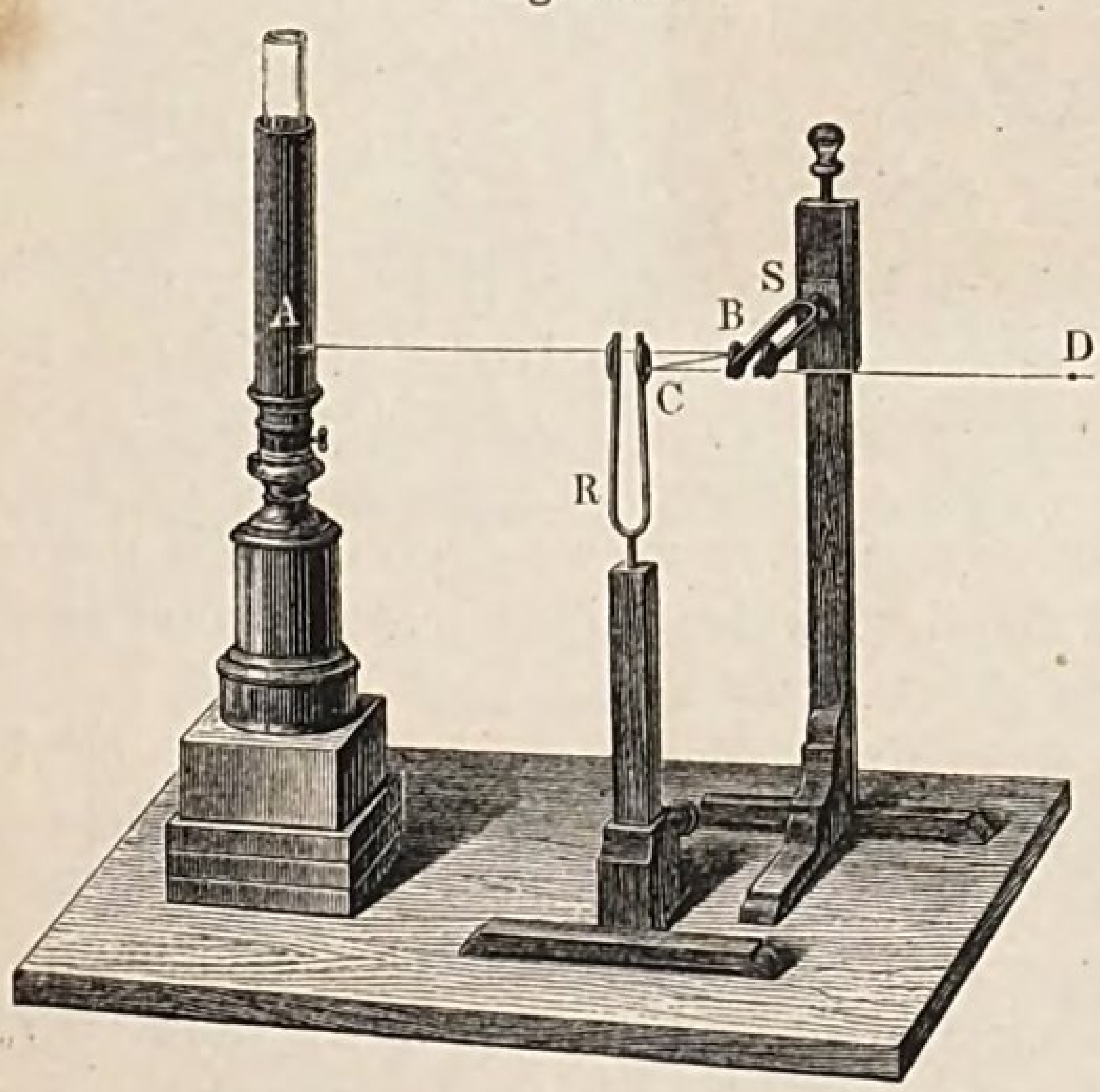
Ebenso wie die Bewegung der Unterbrechungsgabel selbst können auf diese Weise die Bewegungen solcher Körper untersucht werden, welche durch die Unterbrechungsgabel erregt werden. Bringt man z. B. die Mündung einer gläsernen Resonanzröhre mit Rauchflocken vor die Gabel, so bewegen sich die Flocken, sobald man die Schraube bewegt. Besonders schön ist der Versuch mit einem nach Melde schwingenden Faden (§. 191), den man durch die Unterbrechungsgabel selbst erregt. Findet zwischen der intermittirend beleuchtenden Gabel und dem durch sie erregten Körper ein Phasenunterschied statt, so sind im Allgemeinen zwei Lagen des Körpers zugleich sichtbar. Ist nämlich die Linse so gestellt, dass die Lichtspalte in dem Momente das Licht durchlässt, in welchem die Stimmgabel die Ruhelage passirt, so hat der schwingende

Körper diese Ruhelage bald schon überschritten, bald noch nicht erreicht. Er muss daher in diesen beiden Lagen erscheinen. Aehnlich verhält es sich bei den anderen Stellungen der Linse; nur den Stellungen grösster Excursion der Gabel entsprechen einfache Bilder des Körpers.

Bezüglich weiterer Methoden der stroboskopischen Selbstregulirung verweisen wir auf die oben citirte Originalschrift.

Optische Methode mittelst der Figuren von Lissajous. 209 Die optische Methode zur Untersuchung der Schwingungen eines Körpers beruht auf der Combination dieser Schwingungen mit solchen, welche senkrecht darauf gerichtet nach dem Pendelgesetz erfolgen. Als letztere werden in der Regel die Schwingungen einer Stimmgabel benutzt. Wir wollen zuerst zeigen, wie das Experiment ausgeführt wird, um die Schwingungen zweier Stimmgabeln mit einander zu combiniren. In Fig. 712 sei *R* eine auf einem festen Stativ befestigte Stimmgabel, deren Schenkel, in einer Verticalebene liegend, kleine Spiegel tragen. In der Nähe dieser ersten ist eine zweite Stimmgabel S, welche in gleicher Weise mit kleinen Spiegeln versehen ist, so aufgestellt, dass die Ebene ihrer Schenkel eine horizontale ist.

Fig. 712.



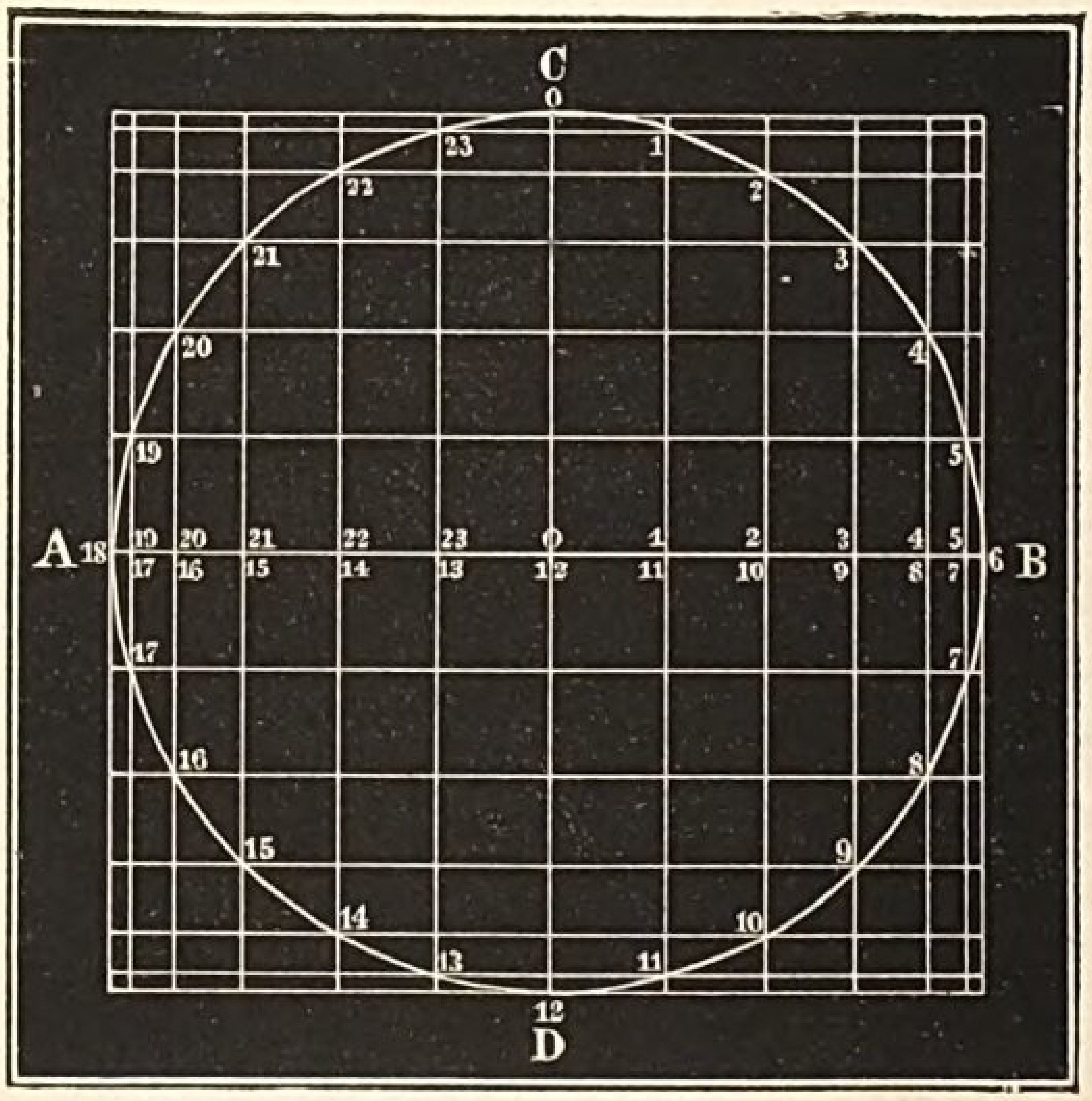
Die gegenseitige Stellung der beiden Stimmgabeln ist so angeordnet, dass ein vom Lichtpunkte *A* ausgehender Lichtstrahl, welcher den kleinen Spiegel *B* trifft, nach dem Spiegel *C* der anderen Stimmgabel und von diesem endlich in der Richtung nach *D* reflectirt wird.

Ein in der Richtung des zum zweiten Male reflectirten Strahles etwa bei *D* befindliches Auge sieht das Bild des Lichtpunktes *A*, welches ruhig steht, so lange die beiden Stimmgabeln nicht vibriren.

Wird aber die Stimmgabel *R* mit dem Fiedelbogen angestrichen, während *S* in Ruhe bleibt, so verlängert sich das Bild des Lichtpunktes zu einem verticalen Lichtstreifen. Vibrirt dagegen die Stimmgabel *S* allein, während *R* in Ruhe bleibt, so erscheint das Bild des Lichtpunktes zu einer horizontalen Linie verlängert.

Wenn aber beide Stimmgabeln gleichzeitig vibriren, so combiniren sich die horizontale und die verticale Bewegung des Lichtpunktes in der Weise, dass derselbe eine Curve beschreibt, deren Gestalt von dem akustischen Intervall der beiden Stimmgabeln und von dem Phasenunterschiede ihrer Vibrationen abhängt.

Fig. 713.



Diese Curven führen den Namen Lissajous', der durch ihre Einführung*) nicht allein die Physik mit einem reizend schönen Experimente, sondern überdies mit einem Hülfsmittel bereichert hat, dessen vorzügliche und vielseitige Verwendbarkeit wir alsbald kennen lernen werden.

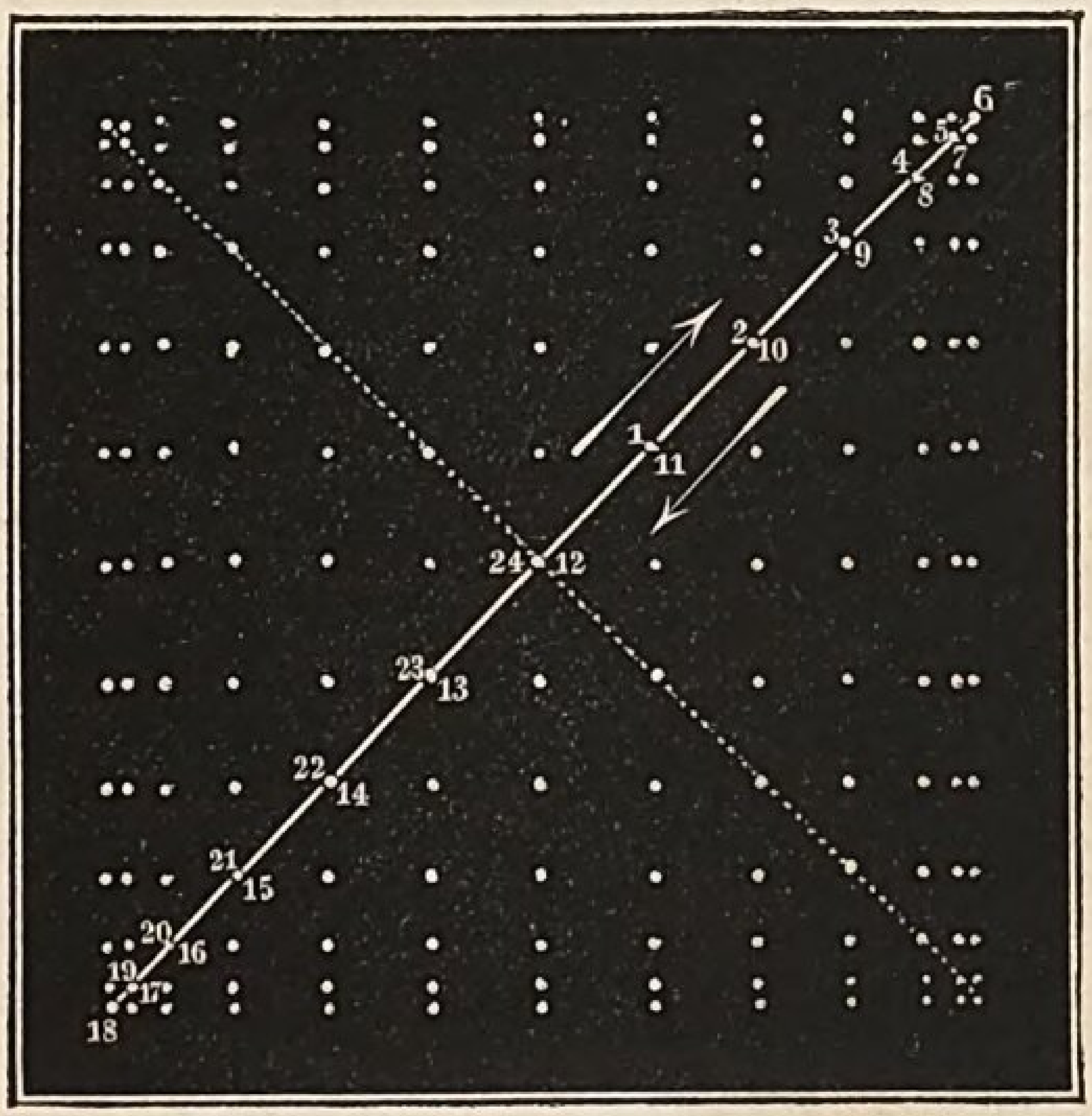
Gehen wir vorerst daran, diese Curven zu construiren. Wir nehmen dabei zunächst an, dass die Amplituden der beiden senkrecht auf einander stehenden Schwingungen gleich gross seien.

Wir ziehen (Fig. 713) einen Kreis, dessen beide Durchmesser AB und CD die Bahnen der componirenden Schwingungen nach Richtung und Grösse vorstellen. Wir theilen sodann den Umfang des Kreises in eine Anzahl, z. B. 24, gleicher Theile und ziehen durch die Theilpunkte mit den Durchmessern parallele Hülfslinien, die sich in $12 \times 12 = 144$ Punkten schneiden. Nach dem im §. 43 abgeleiteten Gesetze stellen dann die mit 0, 1, 2, 3 . . . bis 23 bezeichneten Punkte des horizontalen Durchmessers die Orte vor, welche ein zwischen A und B schwingender Körper in den auf einander folgenden gleich langen Zeitabschnitten der Schwingungsdauer erreicht. Wenn wir die Bewegung z. B. von der Mitte aus nach rechts ins Auge fassen, so käme der schwingende Körper nach dem ersten $^1/_{24}$ der Schwingungsdauer bis 1, nach $^2/_{24}$ bis 2 etc. Für die verticale Componente gilt dasselbe. Finden nun beide Schwingungen zugleich statt, so brauchen wir nur nach den Gesetzen des Bewegungsparallelogramms diejenigen Durchschnittspunkte aufzusuchen, welche sich als die Bahnpunkte des in der Richtung der Resultirenden bewegten Körpers nach je $^1/_{24}$ der Schwingungsdauer ergeben. Um nicht bei jeder einzelnen zu zeichnenden Curve diese Construction neu aus-

*) Ann. de chim. et de phys., III. Ser., T. 41.

führen zu müssen, bediene ich mich beim Unterrichte einer Schreibtafel, auf welcher die Durchschnittspunkte ohne die störenden Hülfslinien dauernd gemalt sind (Fig. 714 ohne die Diagonalen). Auch der Leser wird zweckmässig dieses durch eigene Construction erhaltene Punktsystem mittelst Durchstechens mit einer Nadel vervielfältigen, um die den verschiedenen Fällen entsprechenden Figuren leicht und schnell zeichnen zu können.

Fig. 714.



Als ersten Fall betrachten wir den, bei welchem die Schwingungsdauer beider Componenten dieselbe ist, was bei gleicher Tonhöhe der Stimmgabeln (Unisono) der Fall sein muss.

Beginnt dabei jede der beiden Bewegungen mit derselben Phase, oder ist, wie man sich auszudrücken pflegt, die Phasendifferenz = 0, so ist die Construction der resultirenden Curve eine besonders einfache, da letztere eine gerade Linie wird. Lassen wir z. B. die horizontale Schwingung von der Mitte beginnend nach rechts gehen, die verticale, ebenfalls daselbst beginnend, nach aufwärts, so erhalten wir als Punkte der resultirenden Bahn nach $^1/_{24}$, $^2/_{24}$, $^3/_{24}$ etc. der Schwingungsdauer, die in Fig. 714 mit 1, 2, 3 etc. bezeichneten Punkte, deren Verbindungslinie mit der Diagonale des ganzen Quadrates zusammenfällt. Die Schwingung erfolgt also diesmal in einer in sich zurückkehrenden geraden Linie.

Ist die Phasendifferenz = $^1/_2$, d. h. beginnt die eine Schwingung erst, nachdem die andere bereits halb vollendet ist, so erhält man ebenfalls eine gerade Linie, welche aber die in Fig 714 punktirt gezeichnete Lage hat. Die Bewegung nach aufwärts ist in diesem Falle bis zur Mitte zurückgekehrt und giebt mit der in diesem Momente beginnenden Rechtsbewegung die rechts abwärts gerichtete Diagonale als Resultirende.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz = $^1/_4$. Die Bewegung nach aufwärts sei bis zum Punkte *C*, Fig. 713, vorgerückt und nun erst beginne die Bewegung nach rechts. Indem sich selbe mit der gleichzeitig beginnenden Bewegung nach abwärts combinirt, erreicht sie nach $^1/_{24}$ Schwingungsdauer den Punkt 1 des Kreisbogens, nach weiteren gleichen Bruchtheilen der Schwingungsdauer die Punkte 2, 3, 4, 5, endlich den Punkt 6, wo nun die Rechtsbewegung in eine Linksbewegung übergeht,

während die Abwärtsbewegung fortdauert. So erhalten wir die Punkte 7, 8, 9, 10, 11 und 12. Nun geht die Abwärtsbewegung in Aufwärtsbewegung über, während die Linksbewegung fortdauert. Es entsteht also auf diese Weise ein Kreis, und zwar derselbe, der zur Construction des Punktsystems gedient hat.

Ist die Phasendifferenz = $^3/_4$, so entsteht derselbe Kreis, jedoch wird er in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz = $^1/_8 = {}^3/_{24}$. Lassen wir also (Fig. 715) die verticale Bewegung von der Mitte um drei Intervalle nach aufwärts vorgerückt sein und bezeichnen den dortigen Punkt, wo die horizontale Bewegung nach rechts beginnt, mit 0, so finden wir, indem wir stets den Diagonalen folgen, die Punkte 1, 2, 3, 4 ..., bis wir wieder zum Punkte 0 gelangen. Wir erhalten so eine Ellipse. Dieselbe Ellipse, jedoch in umgekehrter Richtung durchlaufen, finden wir für die Phasendifferenz = $^7/_8$ oder $^{21}/_{24}$. Den Phasendifferenzen $^3/_8$ und $^5/_8$ endlich entspricht die punktirt gezeichnete Ellipse, welche das Spiegelbild der vorigen ist.

Fig. 715.

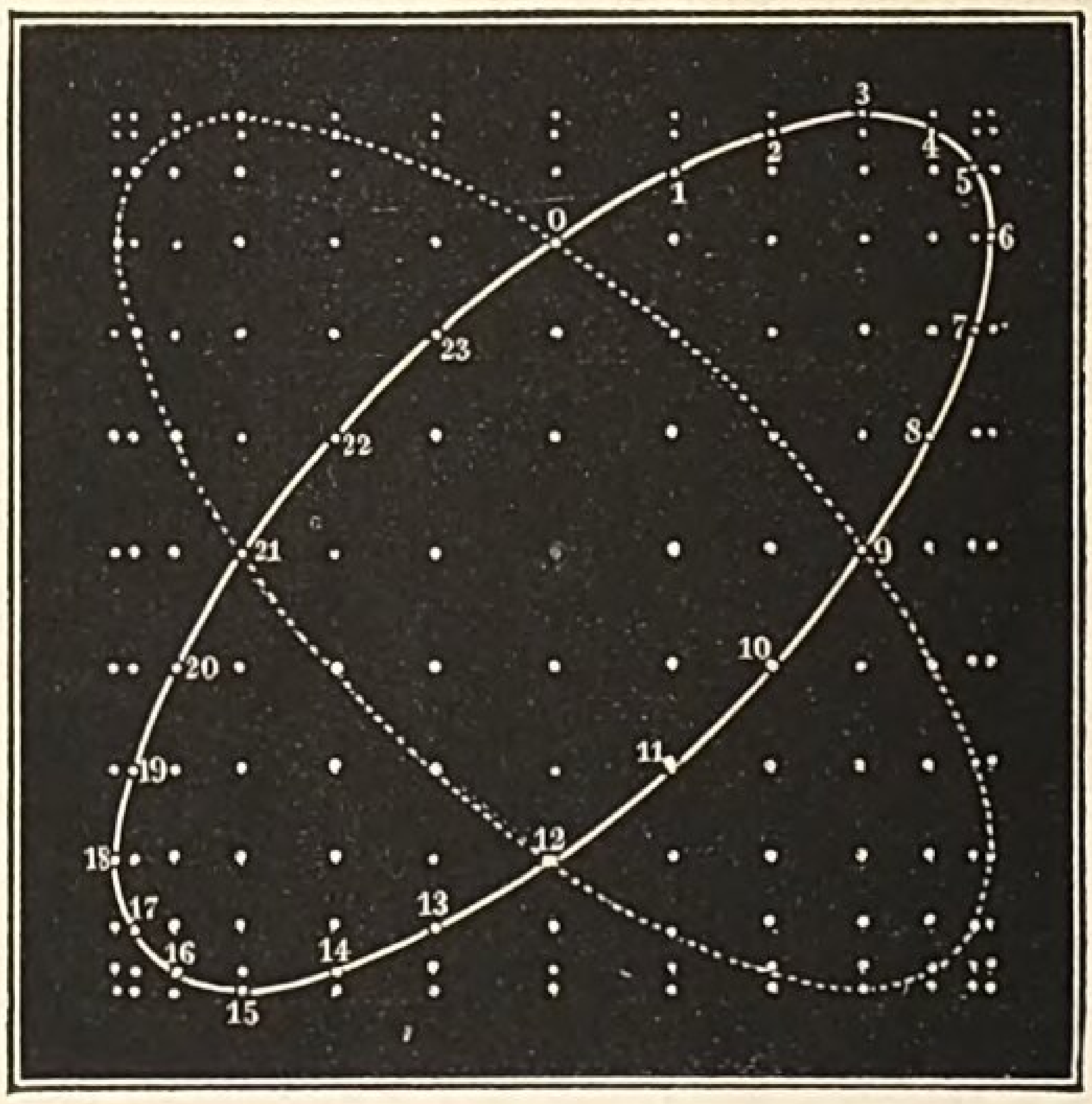
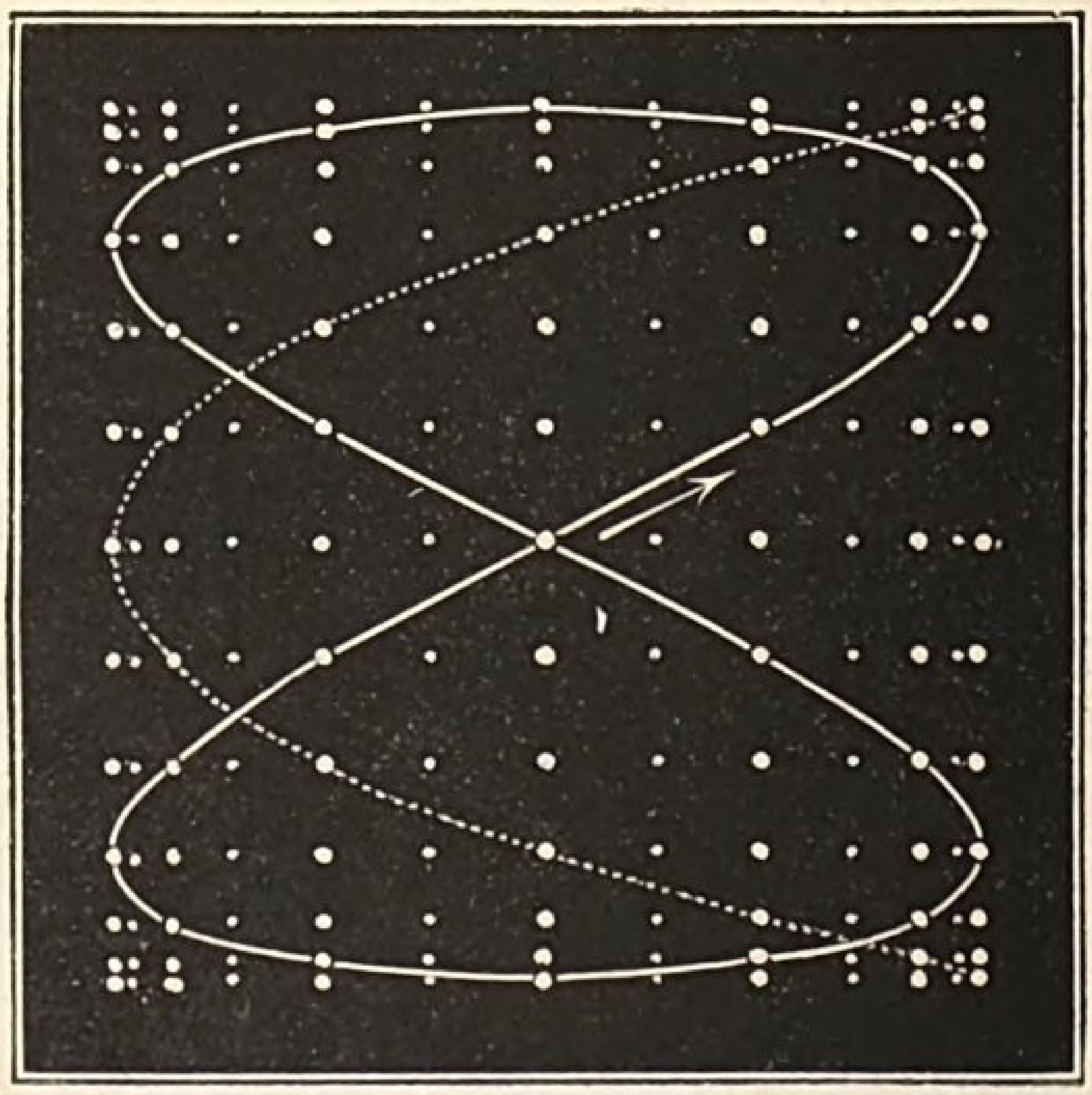


Fig. 716.



Allen übrigen Phasendifferenzen entsprechen ebenfalls mehr oder weniger excentrische Ellipsen, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man z. B. mit den Phasendifferenzen $^1/_{24}$, $^1/_{12}$, $^1/_6$ etc. die obige Construction durchführt. Man kann daher sagen, die Lissajous'sche Figur für das Unisono ist

im Allgemeinen eine Ellipse, welche für die Phasendifferenz 0 und $^1/_2$ in gerade Linien, für $^1/_4$ und $^3/_4$ in einen Kreis übergeht. Wären die beiden Amplituden nicht gleich gross, so würden die Figuren in die Länge gezogen, also auch der Kreis als Ellipse erscheinen. Geht man von der Phasendifferenz = 0 allmälig zu grösseren Phasendifferenzen über, so geht die gerade Linie zuerst in eine sehr excentrische Ellipse über, die sich immer mehr dem Kreise nähert, dann Kreis wird, hierauf in eine Ellipse entgegengesetzter Lage und endlich in eine Gerade sich verwandelt; aus dieser geht eine stark excentrische Ellipse mit entgegengesetzter Rotationsrichtung hervor, die ihrerseits sich zum Kreise erweitert und dann wieder zur ursprünglichen Geraden zusammenfällt. Die in Fig. 719 (a. S. 747) gegebene übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Lissajous'schen Curven zeigt in der ersten Horizontalreihe die Aufeinanderfolge dieser Verwandlungen. Hierbei ist zu bemerken, dass zuerst die Reihe der Figuren von links nach rechts, sodann dieselbe Reihe von rechts nach links, jedoch umgekehrt rotirend auftritt.

Construiren wir nun die Curven, welche entstehen, wenn die eine, z. B. die horizontal schwingende, Stimmgabel auf die Octave der anderen gestimmt ist. Ihre Schwingungen sind dann doppelt so schnell. Machen wir wiederum die vereinfachende Annahme gleicher Amplituden, so können wir das vorhin gebrauchte Punktsystem auch hier benutzen, indem wir in horizontaler Richtung stets um zwei Punkte weiter springen, während wir in verticaler nur um einen Punkt auf- oder absteigen. Wir brauchen also nur von den Punkten einer Horizontalreihe alle geradzahligen unberücksichtigt zu lassen (in Fig. 716 sind diese Punkte kleiner gezeichnet) und können dann wieder einfach den Diagonalen nachgehen, indem wir jedesmal die Richtung wechseln, so oft wir an den Rand kommen.

In der Fig. 716 sieht man zwei solcher Curven gezeichnet. Die ausgezogene, nach Art einer 8 gestaltete Curve entsteht in der durch den Pfeil angegebenen Richtung bei den Phasendifferenzen 0 und $^1/_2$ (der grösseren, verticalen Schwingungsdauer), in entgegengesetzter Richtung bei den Phasendifferenzen $^1/_4$ und $^3/_4$. Die in sich selbst zurückkehrende gestrichelte Curve entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_8$ und $^5/_8$. Für die dazwischen liegenden Phasendifferenzen erhält man Figuren, welche eine mehr oder weniger verschobene 8 vorstellen. Ausserdem entstehen bei den Phasendifferenzen $^3/_8$, $^7/_8$, die den Spiegelbildern der gestrichelten Curve entsprechenden Figuren. Die Reihenfolge der Figuren, welche bei allmälig veränderter Phasendifferenz entstehen, ist in der zweiten Reihe der Fig. 719 zusammengestellt.

Schwingt die horizontale Gabel dreimal so schnell als die verticale, so giebt sie die sogenannte Duodecime oder Quinte der Octave von dem Tone der anderen Stimmgabel. Die zugehörige Lissajous'sche Figur ist in Fig. 717 (a. f. S.) construirt. Von den horizontalen Punkten ist nur jeder dritte berücksichtigt. Es ergiebt sich dann die Construc-

tion von selbst, indem man die auf einander folgenden Diagonalen zeichnet. Zu einer genauen Zeichnung liegen dann freilich die Punkte zu weit von einander und wäre ein Punktsystem mit mehreren Punkten erforderlich, wie man es erhält, indem man den ursprünglichen Kreis, Fig. 713, statt in 24 in 48 oder noch mehr Bogenstücke eintheilt. Die ausgezogene Linie entspricht den Phasendifferenzen 0, $^1/_3$ und $^2/_3$. Ihr Spiegelbild entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_6$, $^3/_6$ und $^5/_6$ (auch hier sind darunter Bruchtheile der Schwingungsdauer für die verticale Componente verstanden). Die symmetrische, gestrichelt gezeichnete Figur entsteht in der Richtung des Pfeiles bei den Phasenunterschieden: $^1/_{12}$, $^5/_{12}$ und $^9/_{12}$, in entgegengesetzter Richtung bei den Phasenunterschieden: $^3/_{12}$, $^7/_{12}$ und $^{11}/_{12}$. Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Unterschiede der Phasen ist wiederum aus Fig. 719 dritte Reihe ersichtlich.

Fig. 717.

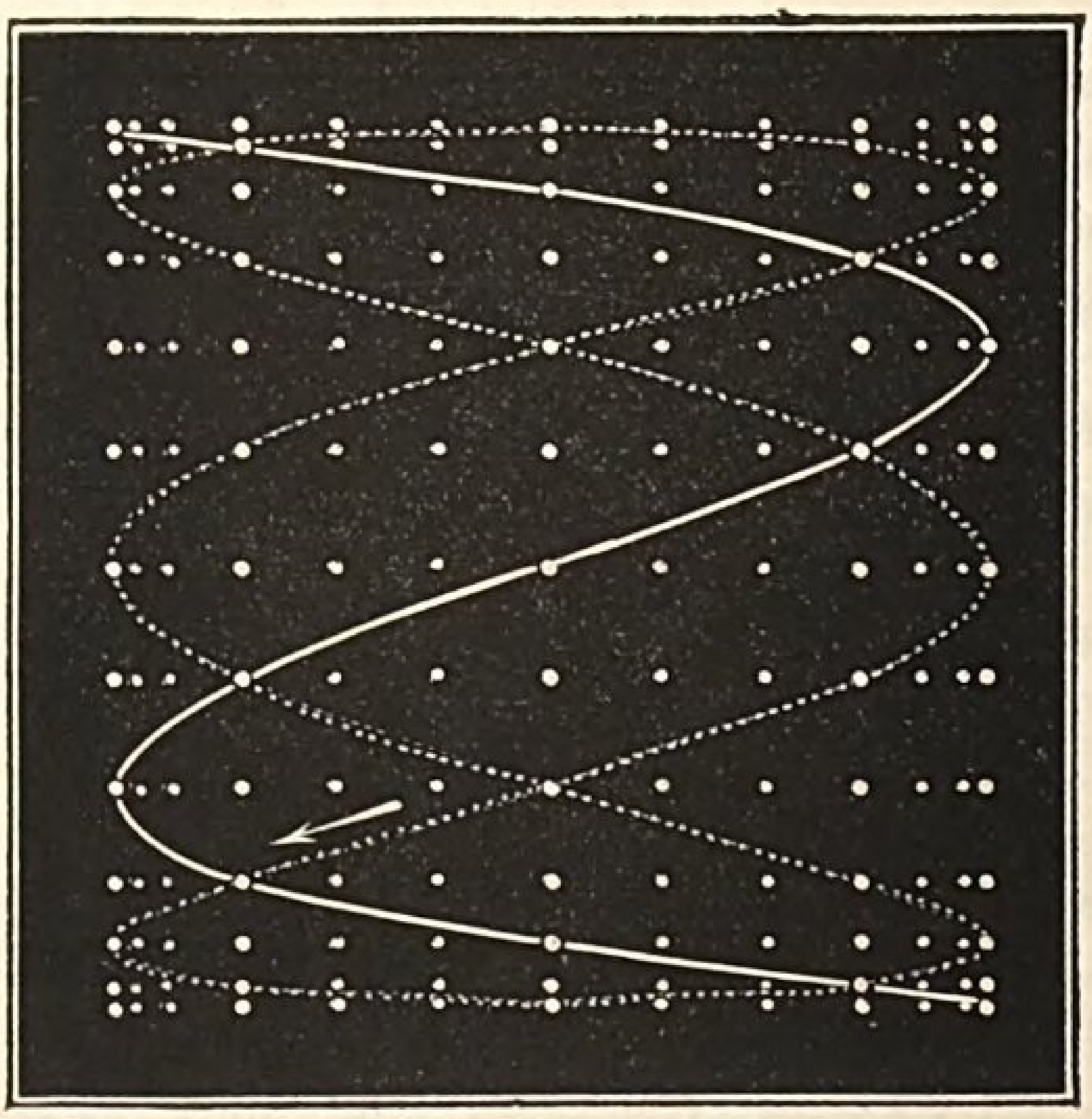
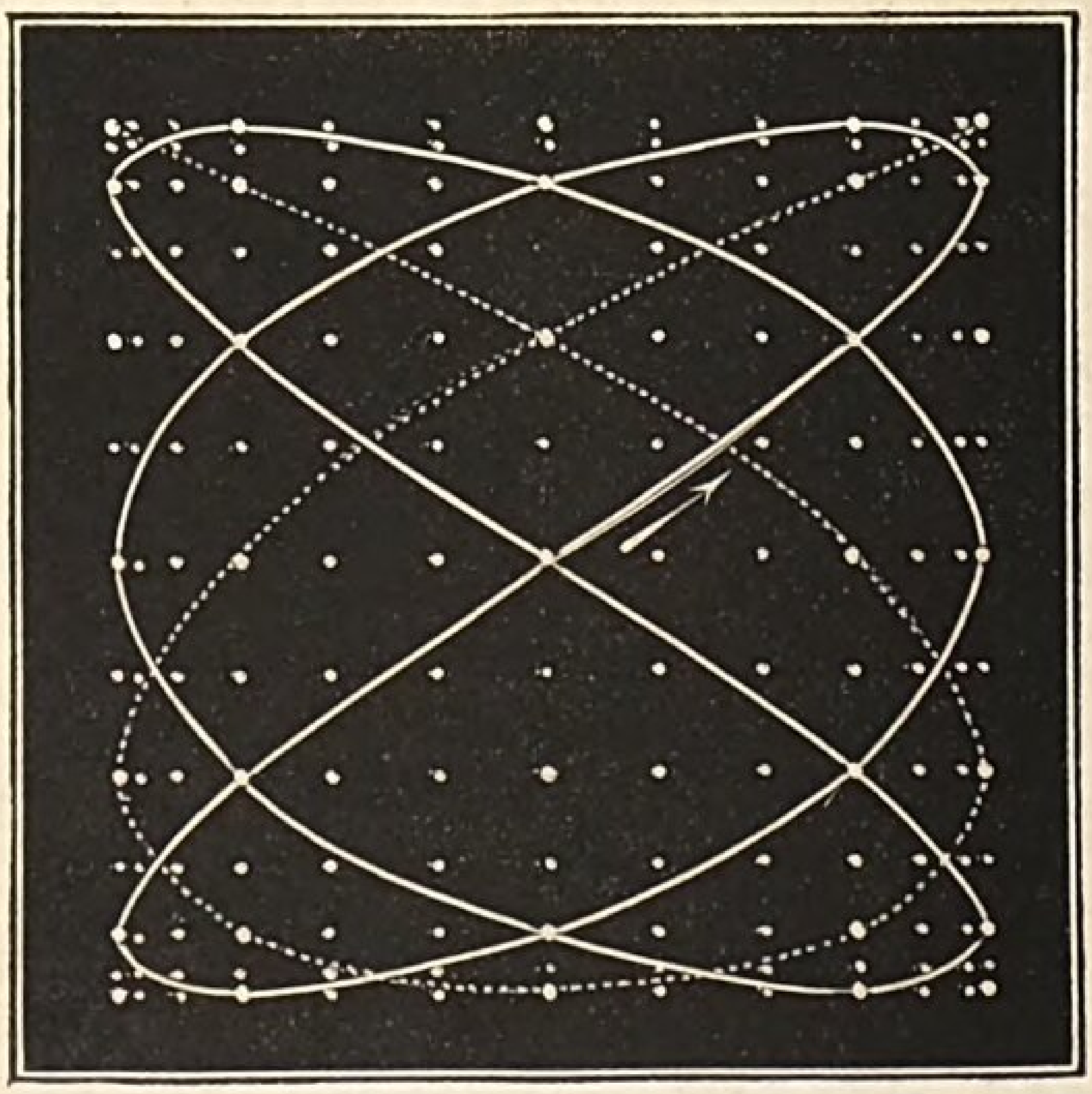


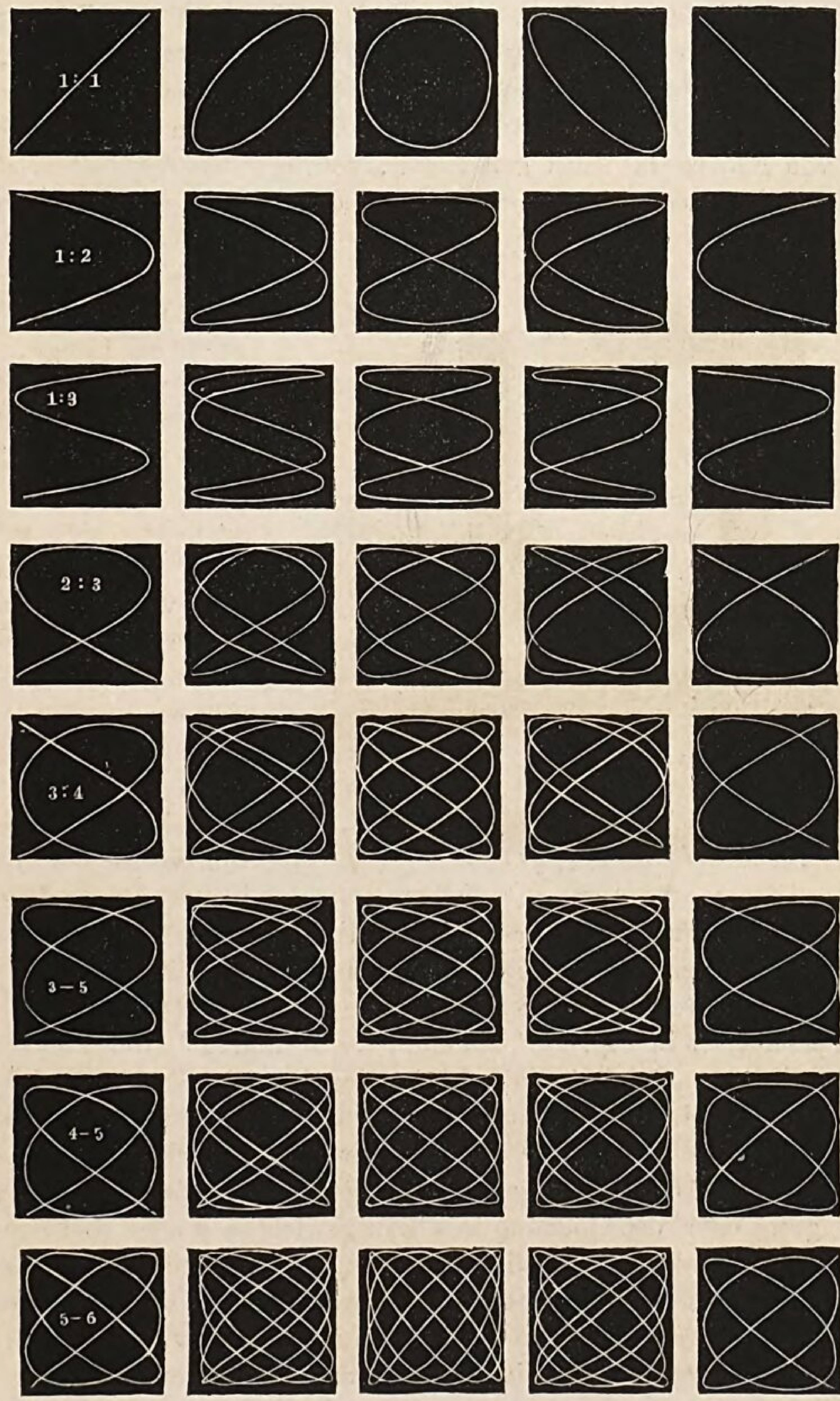
Fig. 718.



In Fig. 718 ist die dem Intervall 2 : 3, der Quinte, zugehörige Curve abgeleitet. Von den verticalen Punktreihen sind je ein Punkt, von den horizontalen je zwei Punkte übersprungen, so dass die Anzahl der gleichzeitig zurückgelegten Wegstücke im Verhältniss 2 : 3 stehen. Auch hier und noch mehr bei den complicirteren Figuren der Intervalle $^3/_4$, $^4/_5$ etc. stellt sich das Bedürfniss einer grösseren Anzahl von Punkten ein, da sonst die Verbindungslinien derselben nicht gut gezeichnet werden können. Die ausgezogene Figur entsteht bei den Phasendifferenzen 0, $^2/_6$, $^4/_6$ in der Richtung des

Pfeiles, bei den Phasendifferenzen $^1/_6$, $^3/_6$, $^5/_6$ in entgegengesetzter Richtung. Die gestrichelte Figur entsteht bei den Phasendifferenzen $^1/_{12}$, $^5/_{12}$, $^9/_{12}$; ihr Spiegelbild bei den Phasendifferenzen $^3/_{12}$, $^7/_{12}$ und $^{11}/_{12}$.

Fig. 719.

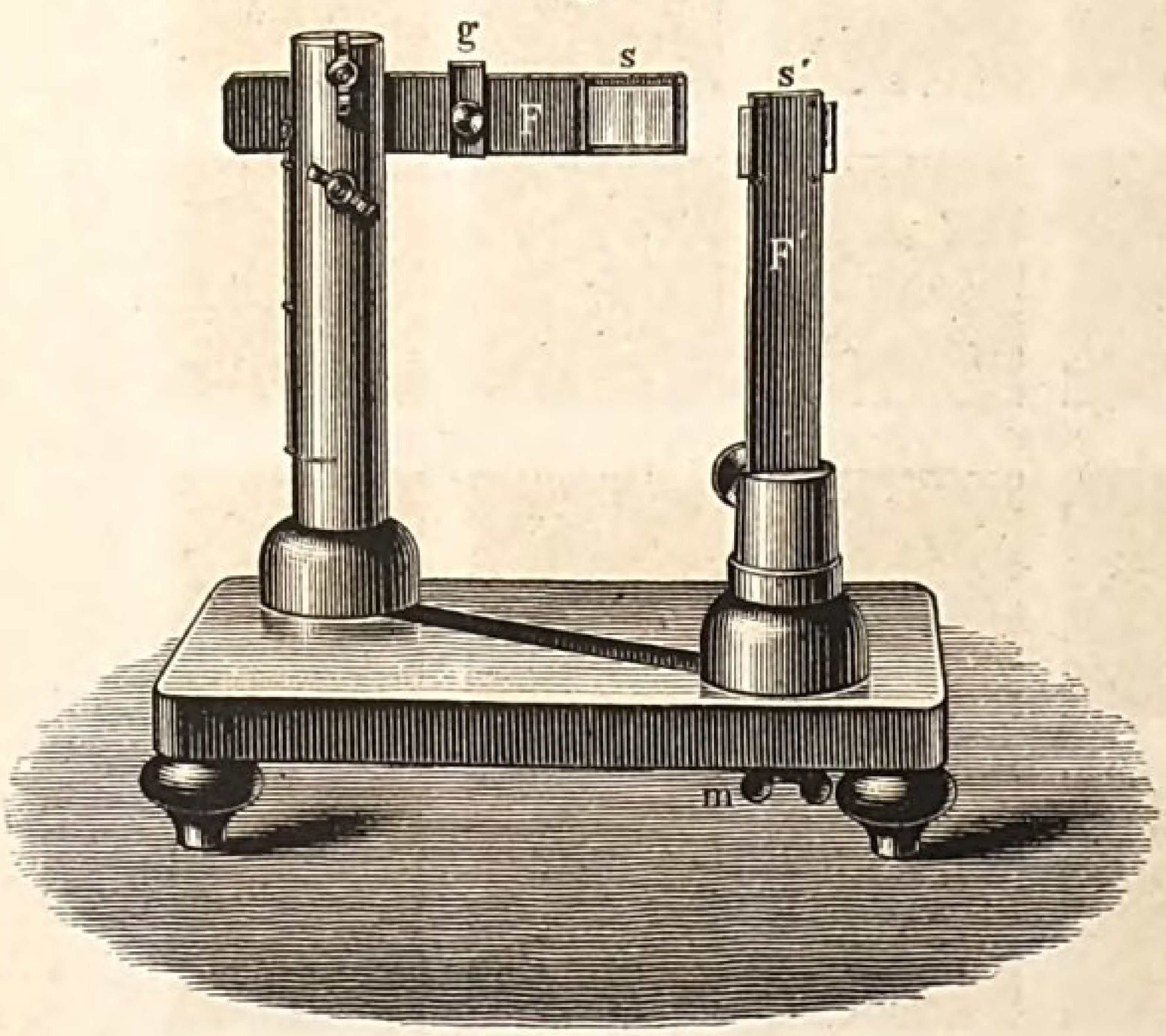


Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Phasendifferenzen findet sich Fig. 719 vierte Reihe abgebildet. Die übrigen Reihen stellen

die den Intervallen 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5, 5 : 6 entsprechenden Figuren dar, deren Ableitung nach den oben durchgeführten Beispielen keine Schwierigkeiten bereiten wird.

210 **Experimentelle Darstellung der Figuren von Lissajous, drehende Bewegung derselben; Vibrationsmikroskop, Kaleidophon.** Um die Lissajous'schen Figuren nach der in Fig. 712 dargestellten Methode hervorzubringen, bedient man sich gewöhnlich eines von König in Paris gelieferten, vorzüglichen Apparates, dessen Stimmgabeln solche Dimensionen haben, dass sie grosse und lange anhaltende Vibrationen machen. Die Schenkel derselben besitzen bis zu 22 cm Länge, 5 mm Dicke und 10 mm Breite. Man beobachtet die Figuren entweder mittelst eines Fernrohrs, oder projicirt sie mittelst einer Convexlinse an eine weisse Wand, so dass sie einem ganzen Auditorium zugleich sichtbar werden.

Fig. 720.



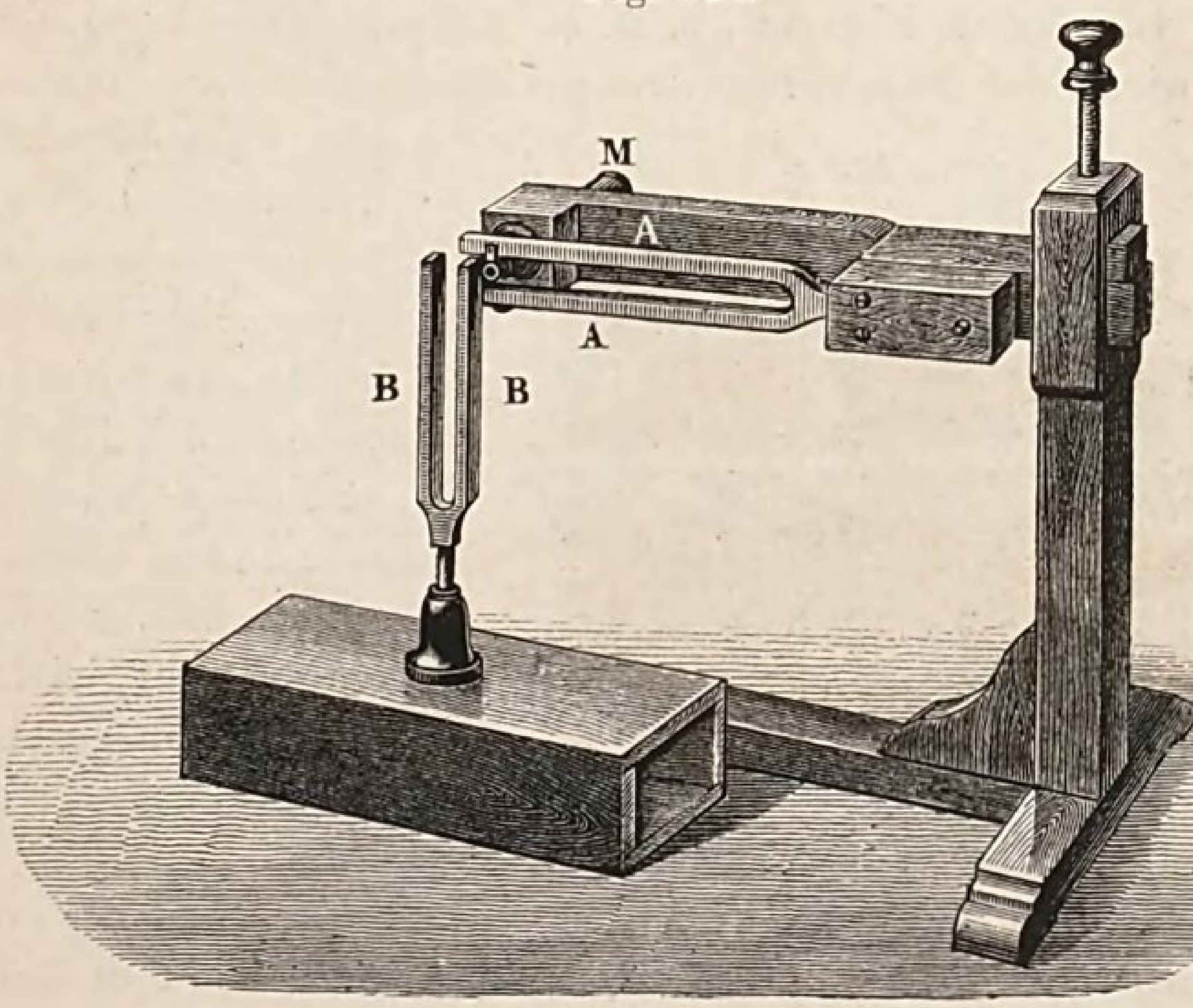
Statt des König'schen Apparates kann man sich zu Demonstrationsversuchen auch einer sehr einfachen Vorrichtung bedienen, welche ich bei dem Universitätsmechaniker Miller in Insbruck construiren liess, bei welcher die Stimmgabeln durch federnde Stahlstreifen ersetzt sind.

Derselbe ist in Fig. 720 abgebildet. F und F' sind die schwingenden Federn, s und s' die beiden Spiegel. Die Säulen, welche die Federn tragen, sind drehbar und können längs des schiefen Schlitzes im Fussbrett einander genähert und mittelst der Flügelschrauben m befestigt werden. Die Schwingungsdauer der Federn wird entweder durch Anbringung oder Verschiebung von Laufgewichten g oder (bei der horizontalen Feder) durch Verstellen derselben im Einschnitte der Tragsäule regulirt. Man beobachtet auch hier entweder direct oder mittelst Projection an eine Wand, welche bei heller Lichtquelle keinerlei Schwierigkeit bietet. Klopft man mit einem harten Gegenstande auf die Mitte der Federn, so entstehen schön gekräuselte Figuren, welche von den Obertönen herrühren, die durch die Unterabtheilung der Stahlstreifen in mehrere schwingende Partien momentan hervorgerufen werden.

Eine andere Methode der optischen Zusammensetzung zweier senkrecht auf einander stattfindender Schwingungen ist bei dem Comparator von Lissajous, welcher in der von H. Helmholtz vervollkommneten Construction auch Vibrationsmikroskop genannt wird, in Anwendung gebracht. Dieser Apparat dient zunächst dazu, die Schwingungsdauer einer Stimmgabel mit der einer Normalstimmgabel von bekannter Tonhöhe aufs Genaueste zu vergleichen.

Die Normalstimmgabel *A*, Fig. 721, ist in einem passenden Stative so angebracht, dass ihre beiden Schenkel in einer Verticalebene liegen und ihre Schwingungen in dieser Verticalebene in der Richtung von oben nach unten vor sich gehen. — Der obere Schenkel der Normalstimmgabel trägt das Objectiv eines schwach vergrössernden Mikroskops, während an dem anderen Schenkel ein entsprechendes Gegengewicht

Fig. 721.



angebracht ist. Die Stimmgabel ist so adjustirt, dass sie mit dem Objectiv und dem Gegengewicht belastet einen bestimmten Ton giebt, also eine bestimmte Anzahl von Schwingungen in der Secunde macht.

In Fig. 722 (a. f. S.) ist der vordere Theil der Stimmgabel *A* sammt dem daran angeschraubten Objectiv in grösserem Maassstabe dargestellt.

Vor der Normalgabel *A* wird nun die zu prüfende Stimmgabel *B*, etwa auf einem Resonanzkästchen befestigt, aufgestellt, und zwar so, dass die Vibrationsrichtung ihrer Schenkel horizontal, also rechtwinkelig ist zu der Vibrationsrichtung der Stimmgabel *A*. Auf dem oberen Ende des einen Schenkels, welcher gerade vor dem Objectiv *o* stehen muss, ist auf irgend eine Weise ein Punkt markirt, den wir *p* nennen wollen.

Das Rohr des Mikroskops, dessen Objectiv an die Stimmgabel *A* angeschraubt ist, steckt hinter diesem Objectiv in dem Stativ, wie man

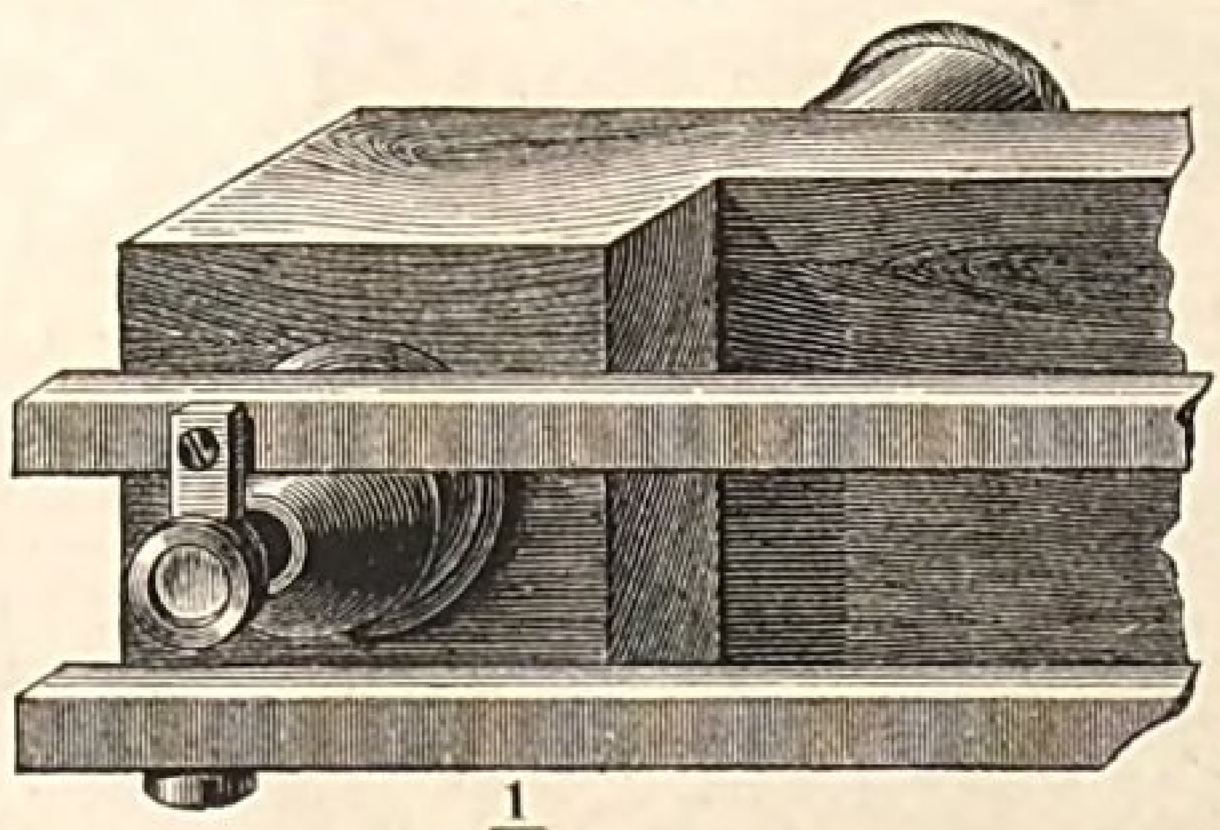
in Fig. 721 und noch deutlicher in Fig. 722 sieht. Dies Mikroskop unterscheidet sich von einem gewöhnlichen nur dadurch, dass das Objectiv nicht an der Mikroskopröhre, sondern dicht vor derselben an der Stimmgabel befestigt ist.

Durch das Ocular bei *M* in das Mikroskop hineinschauend, sieht man nun das Bild des markirten Punktes *p*, welcher ruhig steht, wenn keine der Stimmgabeln vibrirt. Oscillirt die Stimmgabel *A* allein, so beschreibt der Punkt *p* eine verticale Linie; vibrirt die Stimmgabel *B* allein, so beschreibt er eine horizontale Linie, wenn aber endlich beide Stimmgabeln vibriren, so beschreibt *p* eine Curve, deren Gestalt von dem Intervall der Stimmgabeln abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Stimmgabeln seien auf Unisono gestimmt, so muss der Punkt *p* eine der auf Fig. 719 erste Reihe verzeichneten Curven beschreiben.

Welche von diesen Figuren, z. B. ob Ellipse oder ob gerade Linie beschrieben wird, das hängt von dem vorhandenen Phasenunterschiede ab. Da man schwer im Stande ist, die Bewegung beider Gabeln absolut gleichzeitig beginnen zu lassen, so wird im Allgemeinen bei jedesmaligem neuen Ingangsetzen eine andere Ellipse entstehen, welche aber dann, eine absolut gleiche Tonhöhe vorausgesetzt, so lange andauert, als die Gabeln ungestört fortschwingen. Ist aber die Stimmung keine absolut richtige, so eilt allmälig die eine Gabel der anderen voraus, es entsteht ein immer grösserer Phasenunterschied und es entstehen deshalb der Reihe nach die diesen verschiedenen Phasenunterschieden entsprechenden Figuren, welche allmälig in einander übergehen. Dabei beobachtet man überdies als auffallende Erscheinung, dass die Figuren sich um eine in der Bildebene liegende Achse zu drehen scheinen. Dasselbe zeigt sich auch bei den anderen Entstehungsweisen dieser Figuren. Wie diese Täuschung entsteht, kann auf folgende Weise erklärt werden.

Fig. 722.

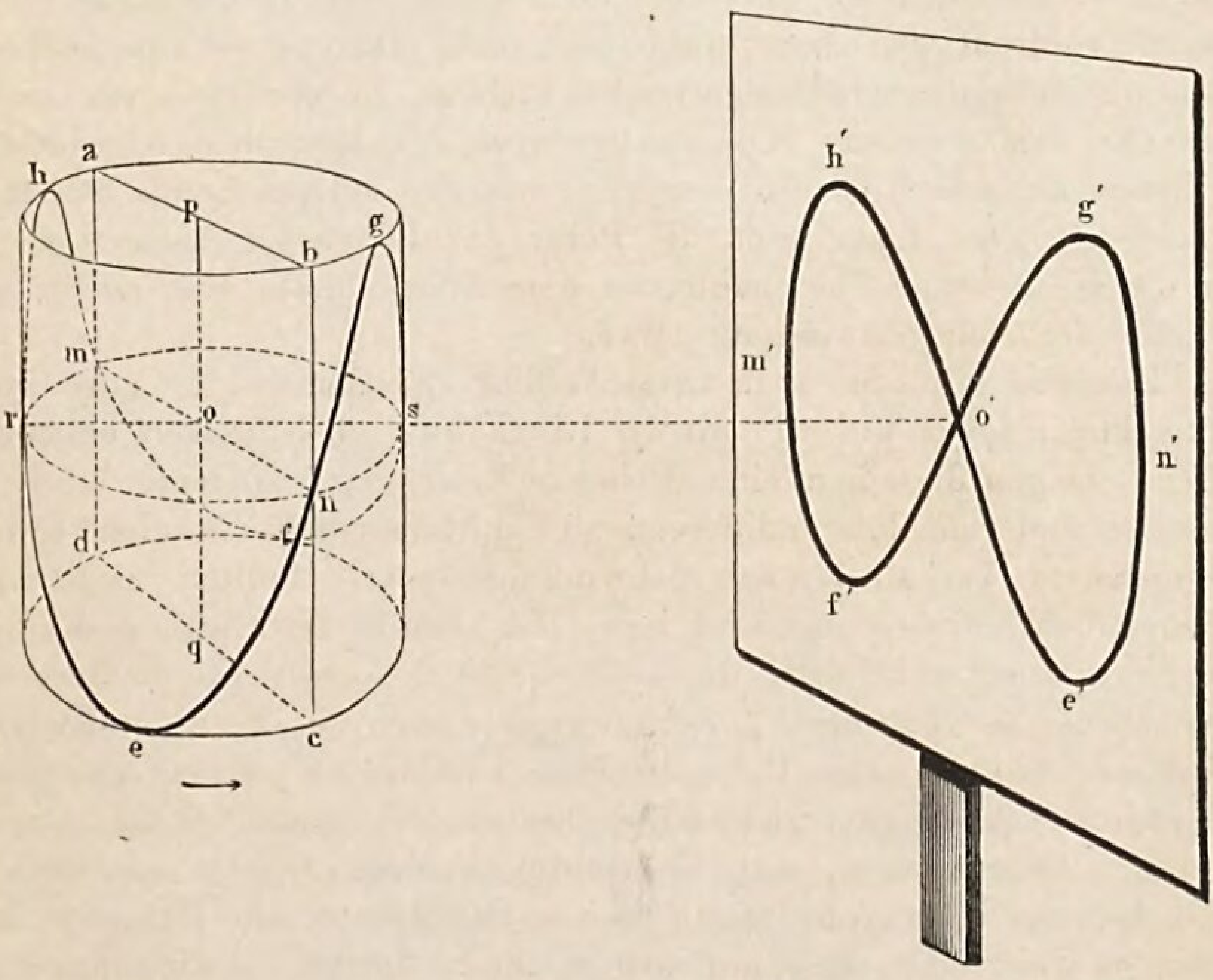


$\frac{1}{2}$

Man denke sich, Fig. 723, einen weissen Schirm, in sehr grosse Entfernung davon ein Licht und dazwischen die mit dem Schirme parallele Ebene *abcd* gestellt. In dieser Ebene werde ein Punkt *o* zu horizontalen und verticalen Schwingungen nach den Amplituden *mn* und *pq* veranlasst. Die verticalen Schwingungen erfolgen beispielsweise doppelt so schnell als die horizontalen. Der Schatten, der dann bei der Phasendifferenz = 0 auf dem Schirme entworfen wird, hat die gezeichnete Gestalt, nämlich dieselbe, wie die vom schwingenden Punkte be-

schriebene Figur. Jetzt denken wir uns denselben Punkt mit derselben verticalen Bewegung von o nach r übertragen und statt der horizontalen längs mon erfolgenden Schwingungsbewegung eine gleichförmige Bewegung längs dem Kreise $rnsmr$ ausführen; es muss dann eine combinirte Bewegung auf der Cylinderfläche, nämlich $rengsfmhr$, entstehen. Da nun aber die gleichförmige Bewegung längs der Peripherie des Kreises auf den Durchmesser projicirt, die schwingende Bewegung giebt (§. 43), so muss sie auch auf den Schirm projicirt dieselbe geben. Das heisst, ein längs $mrns$ gleichförmig bewegter Punkt giebt einen zwischen m' und n' hin und her schwingenden Schatten. Hat er ausserdem eine vertical schwingende Bewegung, so erzeugt der Schatten die Lissajous'sche Figur. Wickeln wir jetzt die Cylinderfläche ab, so

Fig. 723.



enthält dieselbe eine Curve eingezeichnet, welche entsteht, wenn ein Punkt längs der Abscissenachse gleichförmig, längs der Ordinatenachse schwingend sich bewegt. Es ist dies die §. 43 abgeleitete und Seite 184 gezeichnete Schwingungscurve, und zwar werden zwei Wellenlängen derselben längs der abgewickelten Peripherie aufgetragen sein. Die auf dem Schirme entstehende Figur ist also als Schatten einer auf der Cylinderfläche aufgewickelten Schwingungscurve zu betrachten.

In der Zeichnung ist angenommen, dass die verticale und die horizontale Bewegung gleichzeitig von o respective r ausgehen. Es liegt deshalb der Durchschnittspunkt der Schwingungscurve und des Halb-

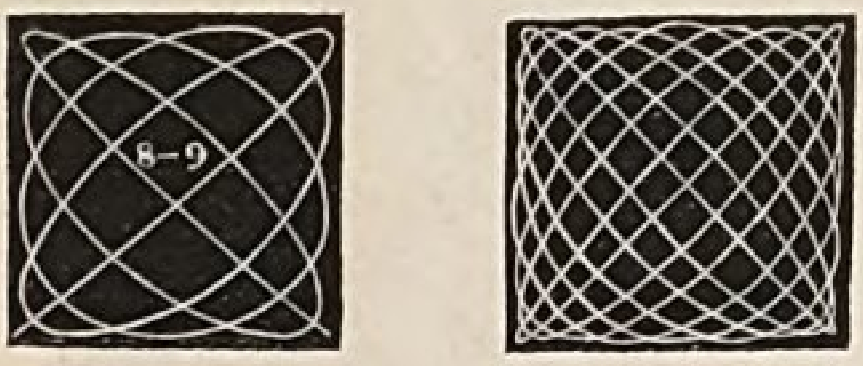
kreises mrn (der aufgewickelten Abscissenachse) in der Verlängerung von $o'o$. Um eine Phasendifferenz hervorzurufen, müssten wir die Zeichnung der Schwingungscurve auf dem Cylinder etwas aus ihrer Lage drehen, oder wenn wir uns die Zeichnung fest denken, müssten wir den Cylinder sammt Zeichnung etwas um seine Achse drehen. Geschieht dies in der Richtung des Pfeiles, so rückt der Theil hre der Curve mehr nach vorn, ihr Schatten $h'o'e'$ mehr nach rechts; dagegen der Theil gsf mehr nach hinten, ihr Schatten $g'o'f'$ mehr nach links. Die Projection dieser so verschobenen Schwingungscurve auf die Ebene $abcd$, also auch ihr Schatten auf dem Schirme, muss daher die entsprechende Lissajous'-sche Figur für eine vorhandene Phasendifferenz geben. Dreht sich der Cylinder langsam, so entsteht also auch langsam die Reihe der Figuren, welche der langsam zunehmenden Phasendifferenz entsprechen, wie sie Fig. 719, zweite Reihe (nur sind die Figuren dort in der Papierebene um 90^0 verdreht gezeichnet) aufgeführt sind. Denken wir uns jetzt ein Auge an Stelle des schattenwerfenden Lichtes, so verstehen wir leicht, dass die sich drehende Schwingungscurve des durchsichtig gedachten Cylinders demselben ebenso erscheint, wie der entsprechende Schatten. Umgekehrt wird daher auch die Reihe der Lissajous'schen Figuren für die zunehmende Phasendifferenz dem Auge ebenso erscheinen, wie die sich drehende Schwingungscurve.

Dasselbe gilt nun auch beim Anblick der Curven des Vibrationsmikroskops, sowie überall, wo wir Lissajous'sche Figuren entstehen sehen. Zeigen dieselben eine drehende Bewegung, so deutet dies auf eine sich ändernde Phasendifferenz und mittelbar auf ein nicht genau hergestelltes Verhältniss der Schwingungsdauer. Sollten z. B. zwei Stimmgabeln unisono gestimmt sein, hat aber in Wirklichkeit die eine die Schwingungszahl 440, die andere 440,1, so eilt die letztere der ersteren per Secunde um $^1/_{10}$ Schwingung voraus, in 10 Secunden vollführt sich also die ganze Reihe der Phasendifferenzen; die entsprechende Lissajous'sche Figur wird daher binnen 10 Secunden sich einmal drehen. Angenommen, man beobachte an diesen Gabeln ein anderes Mal, dass die Lissajous'sche Figur in der Minute eine Drehung vollende, so weiss man, dass auf $440 \times 60 = 26\,400$ Schwingungen der einen Gabel 26 401 Schwingungen der anderen Gabel kommen, dass also ihr Intervall $= \frac{26\,401}{26\,400} = 1{,}000038$ sei. Hieraus ersieht man, wie ausserordentlich empfindlich dieses Verfahren zur Vergleichung der Tonhöhe sein müsse. Man begreift auch, dass es viel schwieriger ist, ruhig stehende Figuren zu erhalten, als drehende. Es genügt die geringste Belastung mit einem Stückchen Wachs, um erstere zum Drehen zu bringen.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch untersuchen, welche Wirkung durch eine beträchtliche Verstimmung eines reinen Intervalls hervorgebracht wird. Die Fig. 724 zeigt die zweien

verschiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Lissajous'schen Curven für das Intervall 8 : 9. Sowie wir dieses Verhältniss einerseits als das reine Intervall $\frac{8}{9}$, andererseits als das beträchtlich verstimmte Intervall $\frac{1}{1}$, also als stark verstimmtes Unisono auffassen können, so lässt die Figur 724 zwei Auffassungen zu. Einmal betrachten wir die ganze Figur als eine einzige, geschlossene Curve, welche vollkommen ruhig steht. Andernfalls betrachten wir sie als eine Reihe von sich rasch ändernden Ellipsen, welche in der für ein verstimmtes Unisono abgeleiteten Weise rasch bald durch die Formen des Kreises, bald durch die der schrägen Geraden hindurch in einander übergehen. Man braucht nur den Linien der Fig. 724 langsam nachzugehen, um dies aufzufinden. Natürlich ist keine der einzelnen Ellipsen in sich geschlossen, weil jede während ihres Entstehens sich bereits verändert. Ob dem Auge eine solche, durch einen schwingenden Körper wirklich hervorgebrachte (nicht bloss abgebildete) Curve in der einen oder der anderen Weise erscheint, hängt von der Zeitdauer ab, innerhalb welcher die 8 resp. 9 Schwingungen zu Stande kommen. Ist diese nicht länger als die Nachwirkung auf der Netzhaut des Auges, so wird dasselbe die ganze Curve auf einmal und ruhig stehend erblicken, also die Figur des reinen Intervalls $\frac{8}{9}$ sehen. Dauert die Nachwirkung auf der Netzhaut aber nur während eines Bruchtheils der Zeit, innerhalb welcher die ganze Figur zu Stande kommt, so sieht das Auge nur die sehr rasche Aufeinanderfolge der einzelnen Ellipsen, es nimmt also die mit rasch vergrösserter Phasendifferenz zu Stande kommenden Figuren des gestörten Intervalls $\frac{1}{1}$ wahr, wodurch ein unruhiges, schwer erkennbares Bild entsteht.

Fig. 724.



Das Vibrationsmikroskop unterscheidet sich vom Lissajous'schen Comparator durch einen elektromagnetischen Apparat, der die Schwingungen der das Objectiv tragenden Gabel beliebig lange fortzusetzen gestattet.

Fig. 725 (a. f. S.) zeigt eine Abbildung des Helmholtz'schen Apparates, welcher nach dem früheren keiner weiteren Erklärung bedarf.

Eine verwandte Art, die Figuren von Lissajous zu reproduciren, beruht auf der Anwendung sich senkrecht kreuzender schwingender Spalten. Fig. 726 zeigt einen Apparat, den ich zu diesem Zwecke angegeben. *S* ist ein schweres eisernes Prisma, an dessen abgeschrägten Enden schwingende Stahlstreifen befestigt sind, deren Enden zwei leichte Metallschirme mit feinen Spalten tragen.

Bringt man die Stahlstreifen zum Schwingen, so beschreibt der Durchkreuzungspunkt der Spalten eine Lissajous'sche Figur, welche

Fig. 725.

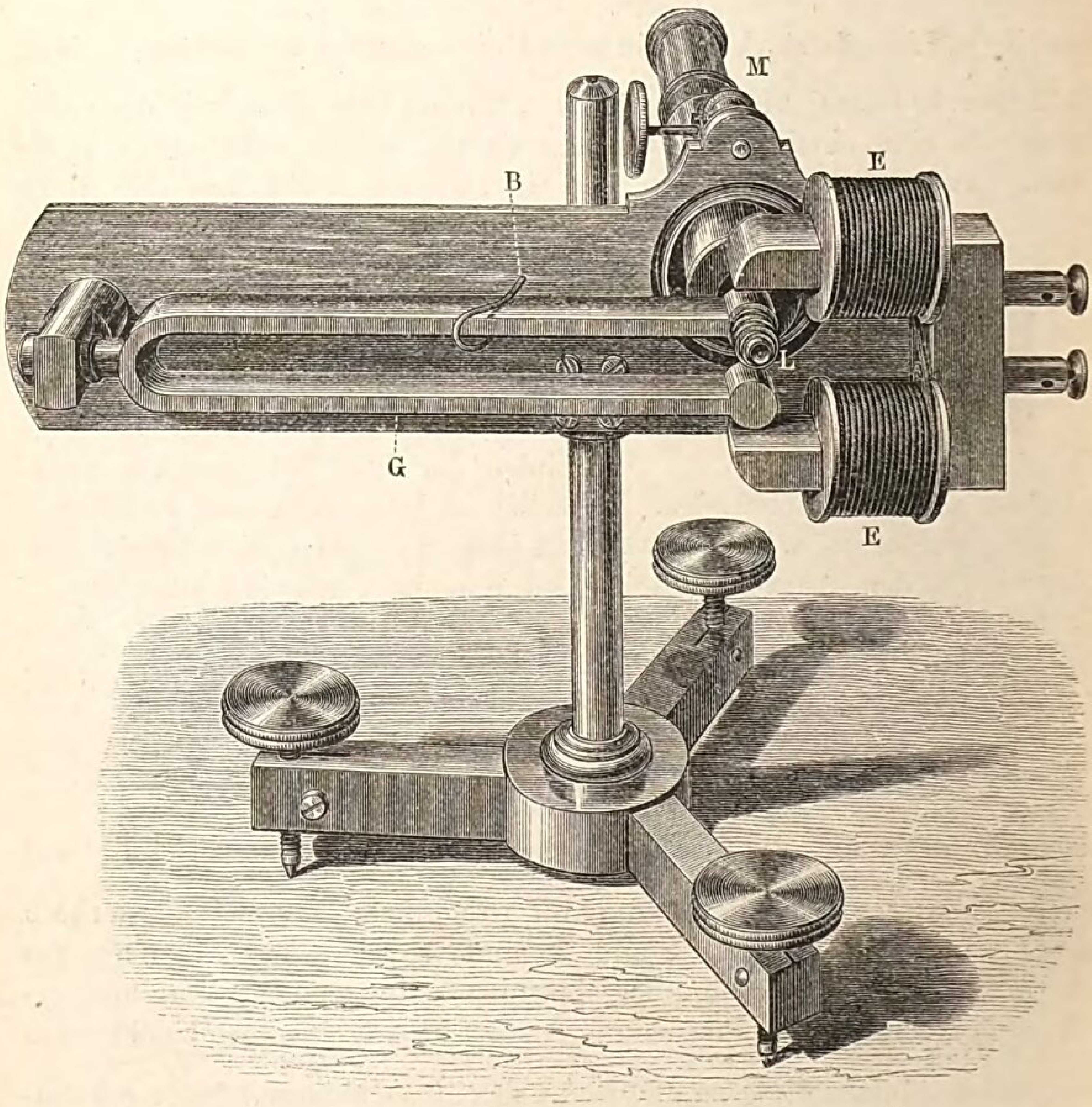
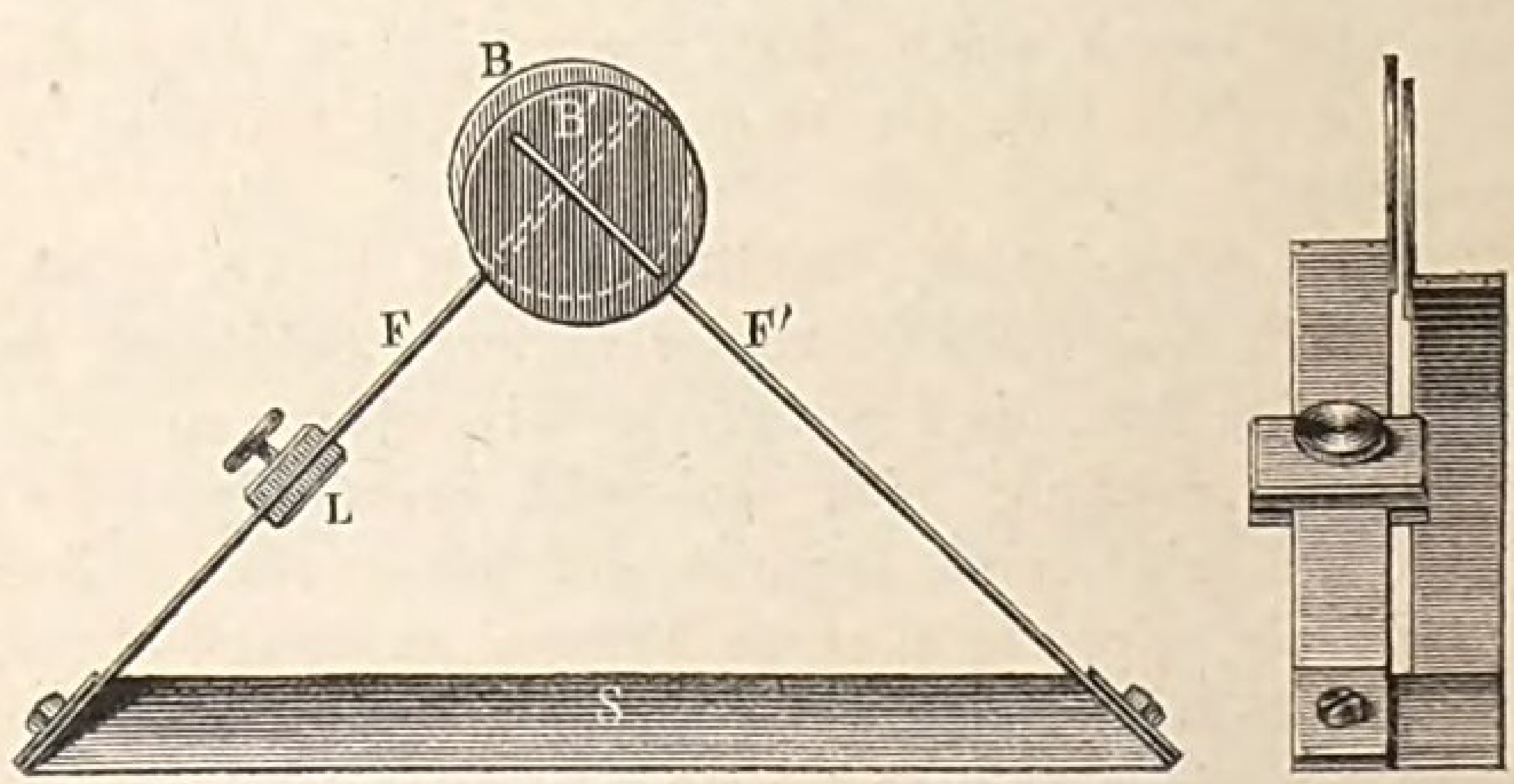


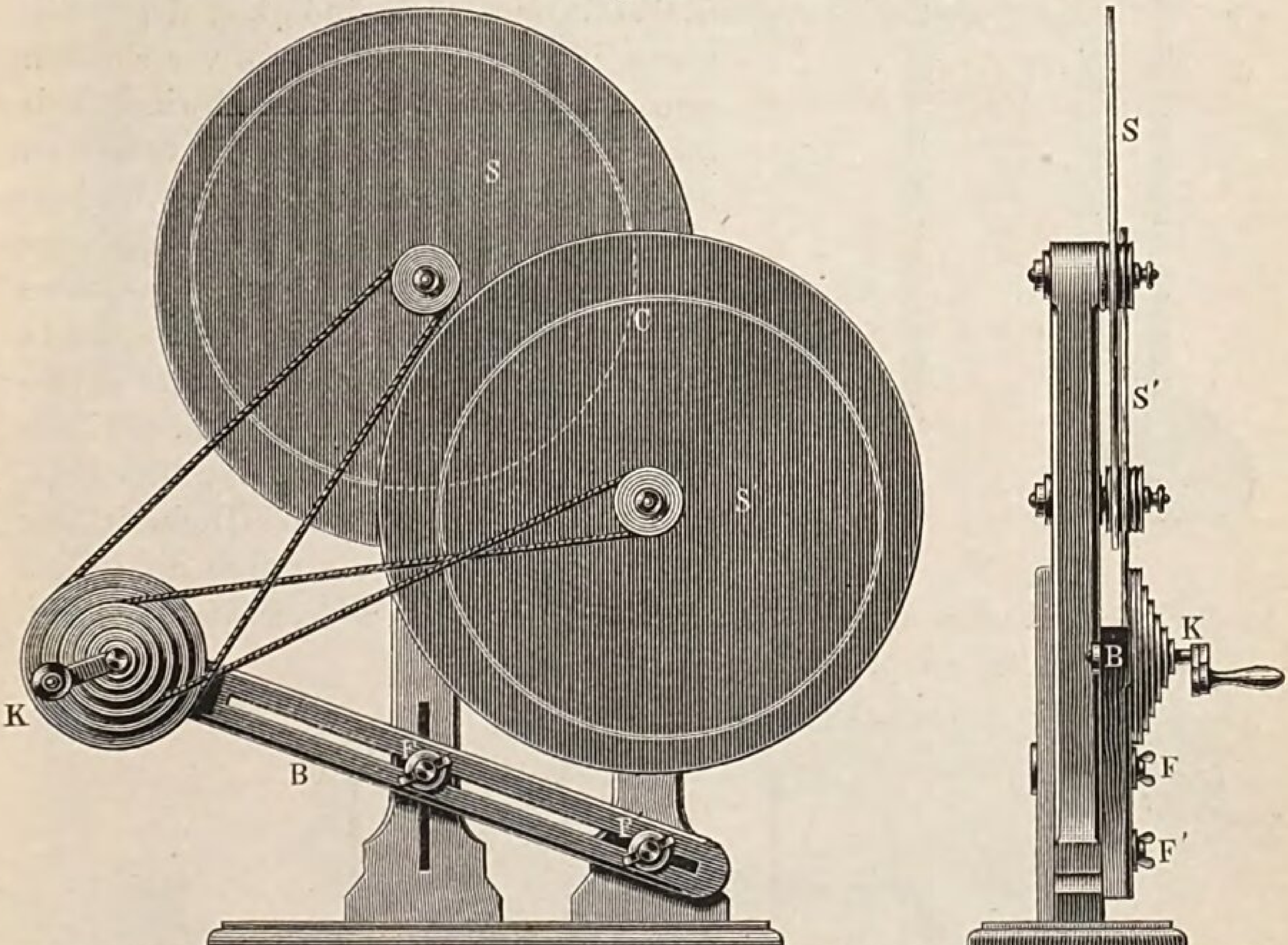
Fig. 726.



um 45° geneigt erscheint. Mittelst eines Laufgewichtes L können die Figuren geändert werden.

Fig. 727 stellt ferner einen Apparat vor, den ich construirt, um auf analoge Weise zwei beliebige Schwingungsarten senkrecht zu combiniren. In den Ueberzug der beiden geschwärzten Glasscheiben S und S' sind durchsichtige Curven eingerissen, welche sich in der Zeichnung wie excentrische Kreise darstellen, in Wirklichkeit aber Schwingungscurven sind, von denen je eine Wellenlänge auf der Peripherie eines mit der Achse concentrischen Kreises aufgetragen wurde. Steht die Scheibe S unbewegt und rotirt S', so schwingt der Lichtpunkt C auf und ab; steht S' und rotirt S, so schwingt er horizontal; rotiren beide Scheiben, so

Fig. 727.



beschreibt er eine Lissajous'sche Figur, deren Gattung von dem Verhältnisse der Rotationsgeschwindigkeiten beider Scheiben abhängt. Der Anblick der Kurbelscheibe K mit den verschiedenen Schnurläufen und des Befestigungsmechanismus B wird genügen, um zu verstehen, wie die verschiedenen Verhältnisse hervorgerufen werden. Die Phasendifferenzen lassen sich durch verschiedene Spannung der Schnüre herstellen. Dieser Apparat ist jedoch nicht eigentlich zur Herstellung der gewöhnlichen Figuren von Lissajous bestimmt, wozu einfachere Mittel ausreichen, als vielmehr zur künstlichen Zusammensetzung beliebiger anderer Schwingungsformen, wie z. B. pendelartiger Schwingungen mit Saitenschwingungen, worauf wir später zurückkommen werden.

Eine besonders einfache Methode zur Erzeugung der in Rede stehenden Figuren endlich ist jene mittelst des Kaleidophons von Wheatstone, Fig. 728. Ein elastisches Stäbchen von rectangulärer Form, welches am unteren Ende *A*, Fig. 729, festgeklemmt ist, kann sowohl in der Richtung *ab* als auch in der Richtung *cd* vibriren, je nachdem man es nach der einen oder nach der anderen dieser beiden Richtungen aus seiner Gleichgewichtslage bringt. Ist aber die Dicke des Stäbchens nach der Richtung *ab* nicht gleich der Dicke desselben nach der Richtung *cd*, so wird die Vibrationsgeschwindigkeit des Stäbchens in der Ebene *Aab* verschieden sein von der Vibrationsgeschwindigkeit in der Ebene *Acd*. Wird das Stäbchen nach einer Richtung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, welche mit keiner der eben genannten Ebenen zusammenfällt, so vibrirt es in der Weise, dass sein oberes Ende eine Curve beschreibt, deren Gestalt abhängt von dem Verhältniss der Dicke des Stäbchens in der Richtung *ab* zu der Dicke in der Richtung *cd*. Um die durch die Curve beschriebene Figur sichtbar zu machen, brachte Wheatstone einen glänzenden Metallknopf an.

Fig. 728.

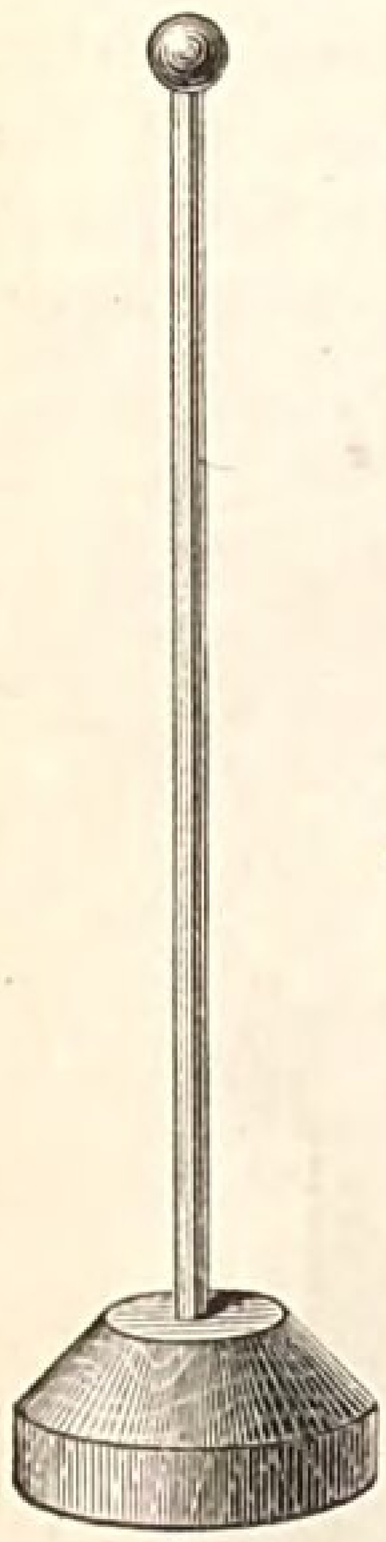


Fig. 729.

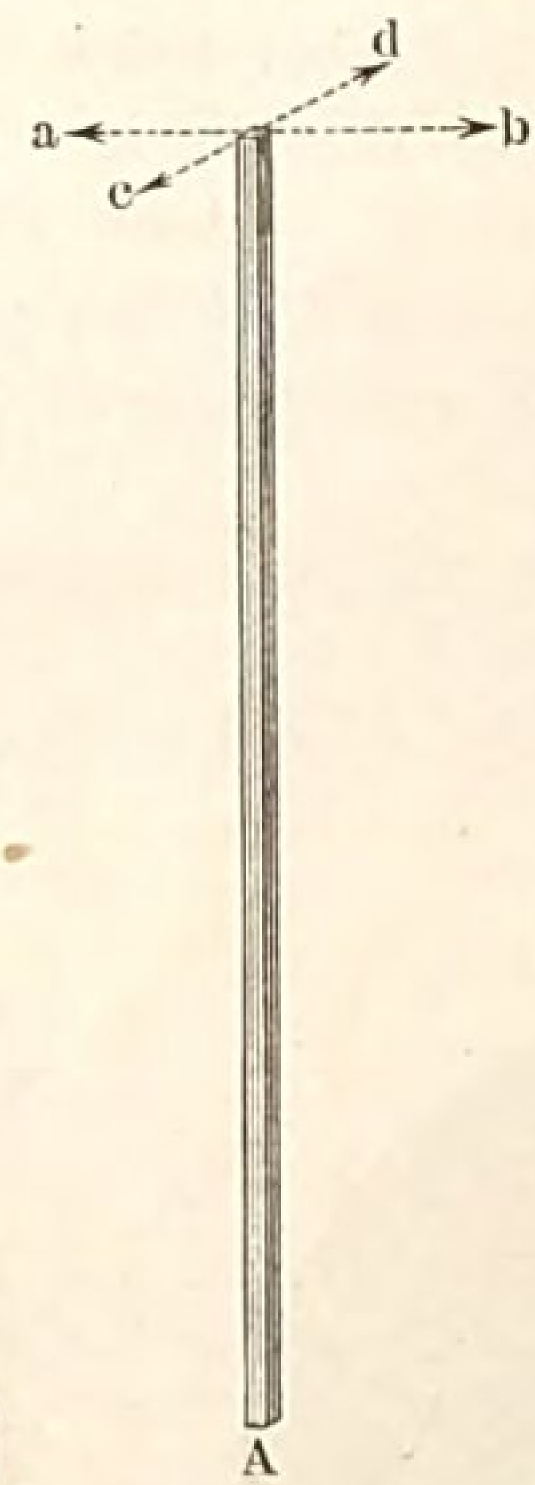


Fig. 730.

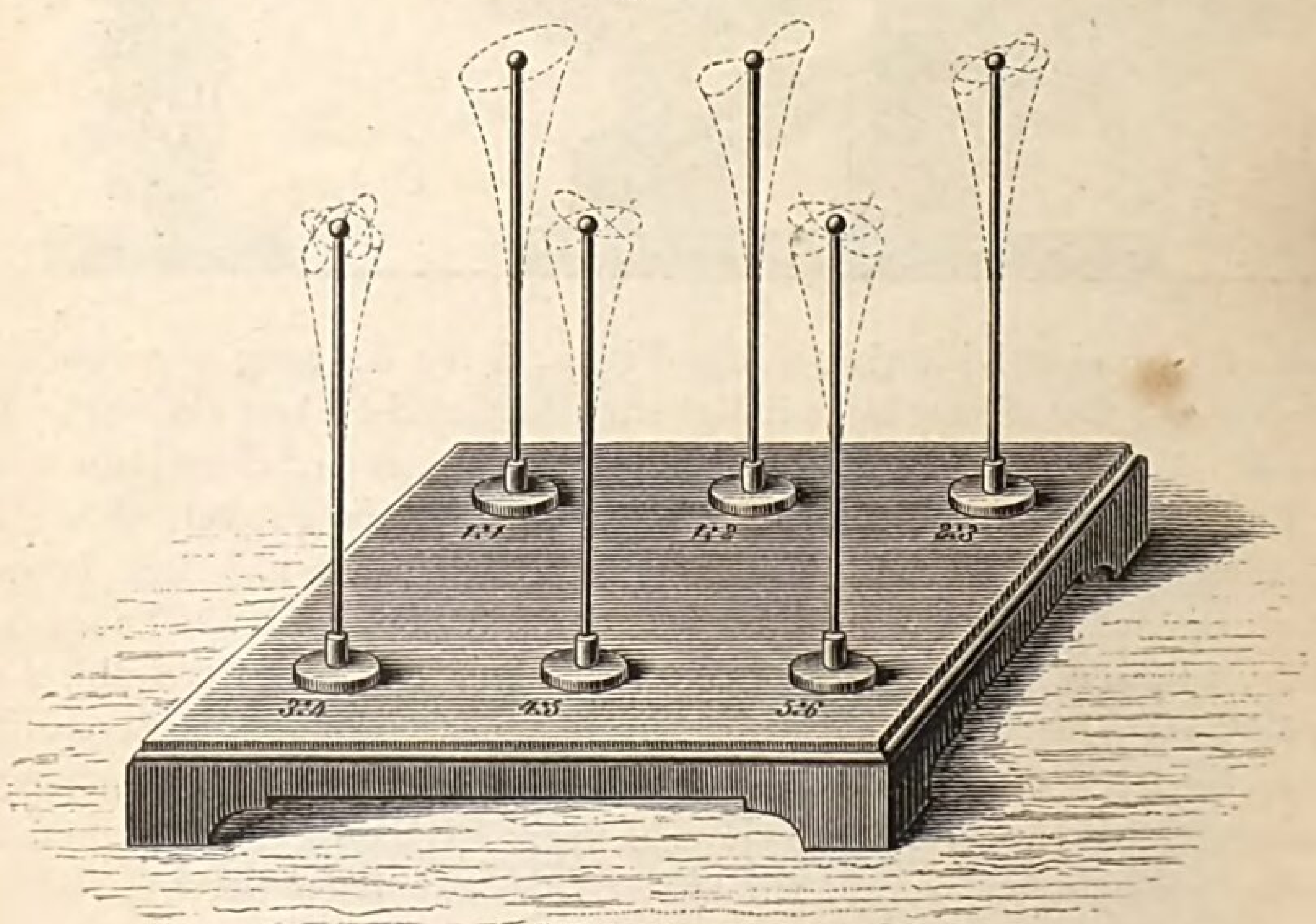


Fig. 730 zeigt die Abbildung einer Zusammenstellung von sechs Kaleidophonen auf einem Fussbrette von R. König.

Als eine Vervollkommnung dieses Apparates ist das von Lippich und fast gleichzeitig von Melde construirte Universalkaleidophon zu bezeichnen, welches in Fig. 731 dargestellt ist. In einen Holzklotz *A*, welcher in passender Weise an einem Tische befestigt ist, ist eine Messingfeder *B* eingeklemmt, welche ungefähr $1^1/_2$ mm dick und gegen 40 cm lang ist. Oben trägt die Feder *B* eine Messingklammer *D*, in welcher eine, oben ein glänzendes Knöpfchen tragende Stahlfeder *C* steckt.

Fig. 731.

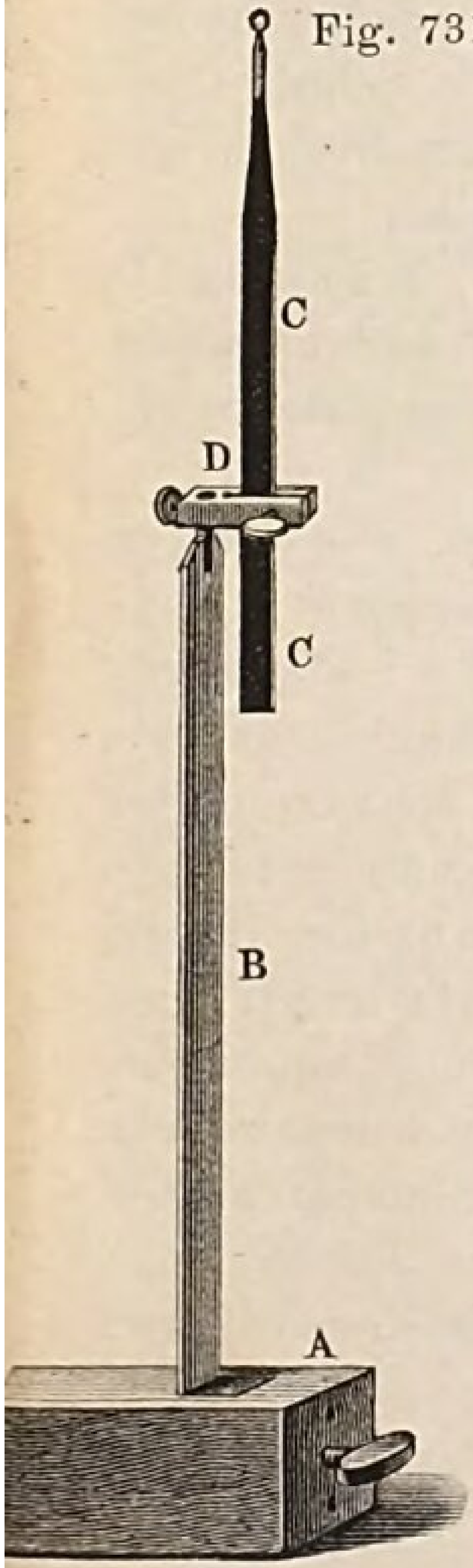
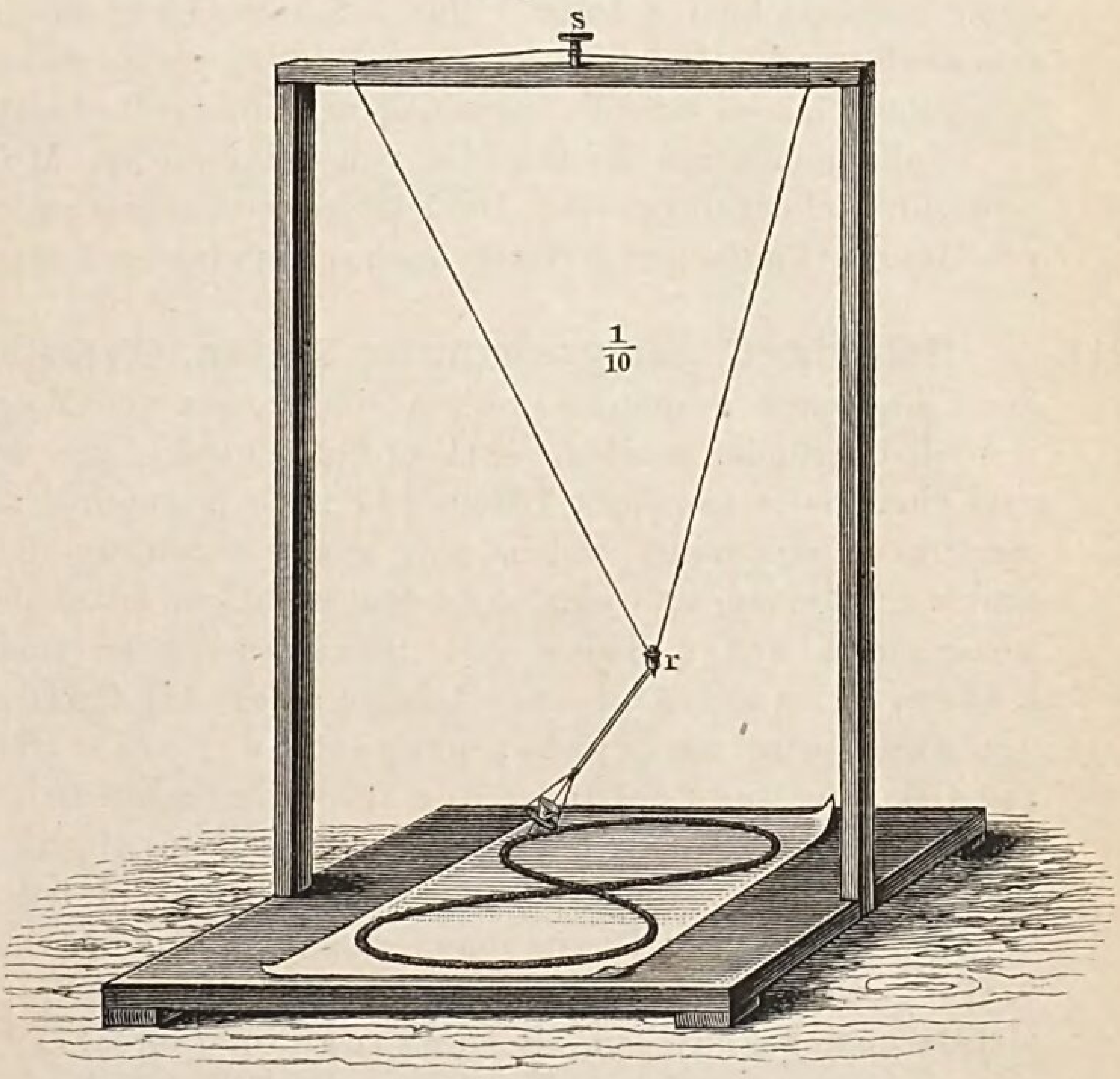


Fig. 732.



Je nachdem man die Stahlfeder *C* mehr hinauf- oder herunterzieht, kann man es erreichen, dass ihre Schwingungsdauer gleich, oder dass sie $^2/_3$ oder $^1/_2$ etc. von der Schwingungsdauer der Feder *B* ist. Statt des glänzenden Knöpfchens kann man auch nach J. Tollinger eine glimmende Sprengkohle mit Wachs ankleben, welche im Dunkeln die erwähnten Curven besonders schön erscheinen lässt. Auch kann ein Spiegelchen aufgesetzt werden, durch welches ein Bündel Lichtstrahlen gegen eine weisse Wand reflectirt wird, wo dann die Curve erscheint. Melde hat seinen Apparat auch für schiefwinkelige Combination eingerichtet und hierzu einen Atlas mit zahlreichen Figuren publicirt*).

*) Melde, Lehre von den Schwingungscurven.

Wolf befestigte die Spiegel an den schwingenden Zungen von Zungenpfeifen, so dass dieselben beliebig lange in Bewegung erhalten werden können, indem man die Pfeifen anbläst.

Am einfachsten gelangt man zu einer mechanischen Hervorbringung der besprochenen Figuren mittelst geeigneter Pendelvorrichtungen. Für den Fall gleicher Schwingungsdauer beider Componenten genügt das einfache Fadenpendel, dessen Kugel in Ellipsen schwingt, die in eine gerade Linie oder einen Kreis übergehen können. Für die übrigen Verhältnisszahlen eignet sich recht gut ein Apparat von der Form Fig. 732 (a. v. S.), bei welchem die Figuren durch den aus dem Trichter ausfliessenden Sand aufgezeichnet werden. Durch Verschiebung des die Schnüre zusammenfassenden Röhrchens r, sowie durch entsprechendes Drehen der Schraube s lassen sich die verschiedenen Intervalle herstellen.

Vollkommeneres leisten die von Eisenlohr, Mos, Knoblauch construirten Pendelapparate[1]. Der letztere zeichnet die entstehenden Curven mit Tinte auf Papier und gestattet auch schiefwinklige Zusammensetzungen.

211 **Schwingungen gespannter Saiten, Obertöne.** Die Gesetze der Vibrationen gespannter Saiten sind zuerst von Mersenne experimentell begründet worden. Um zu untersuchen, wie die Schwingungszahl einer Saite von ihrer Länge und ihrer Spannung abhängt, experimentirte er mit Saiten, welche lang genug waren, um ihre Schwingungen zählen zu können, und kam so zu dem wichtigen Satze, dass die Schwingungszahl einer Saite bei unveränderter Spannung ihrer Länge, bei unveränderter Länge aber der Quadratwurzel aus der Spannung umgekehrt proportional sei. Die mathematische Entwickelung des Problems der schwingenden Saiten wurde zuerst von Taylor (*Methodus incrementorum* 1716) in Angriff genommen und theilweise gelöst. Dieses Problem veranlasste ein halbes Jahrhundert lang die lebhaftesten Discussionen zwischen den ersten Mathematikern. J. Bernouilli, d'Alembert, Euler und Daniel Bernouilli hatten viel darüber geschrieben, als Lagrange im Jahre 1759 fast zu Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn alle Schwierigkeiten hob und den Discussionen ein Ende machte.

Bezeichnet

- l die Länge einer Saite,
- p das Gewicht derselben,
- s die Kraft, welche sie spannt,
- g die beschleunigende Kraft der Schwere (also 981, wenn man das Centimeter zur Längeneinheit nimmt, wobei dann das Gramm zur Gewichtseinheit genommen werden muss, in welcher p und s auszudrücken sind),
- t die Schwingungsdauer der Saite (nach der Bezeichnung der französischen Physiker die Zeit für einen Hingang oder Hergang), so ist

$$t = \sqrt{\frac{p \,.\, l}{g \,.\, s}}.$$

Bezeichnet φ das specifische Gewicht der Substanz, aus welcher die Saite verfertigt ist, r aber den Halbmesser derselben, so ist $p = \pi r^2 l \varphi$, also auch:

$$t = r \,.\, l \sqrt{\frac{\pi \,.\, \varphi}{g \,.\, s}}.$$

Bezeichnet ferner z die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite in einer Secunde vollendet, so ist $zt = 1$ oder $z = \frac{1}{t}$, folglich auch:

$$z = \frac{1}{r \,.\, l} \sqrt{\frac{g \,.\, s}{\pi \,.\, \varphi}}.$$

Das durch diese Formel, deren Ableitung ohne höhere Mathematik nicht wohl möglich ist, ausgesprochene Gesetz heisst in Worten ausgedrückt:

1. Die Schwingungszahl einer Saite verhält sich umgekehrt wie ihre Länge, d. h. wenn eine Saite auf irgend ein Instrument, wie eine Violine, eine Guitarre etc., aufgespannt ist und in einer gegebenen Zeit eine bestimmte Anzahl von Schwingungen macht, so macht sie in derselben Zeit 2 mal, 3 mal, 4 mal etc. so viel Schwingungen, wenn man bei unveränderter Spannung nur $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ etc. der ganzen Länge schwingen lässt; sie würde $^3/_2$-, $^4/_3$-, $^5/_4$ mal so schnell schwingen, wenn man nur $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ der ganzen Länge schwingen liesse.

2. Die Zahl der Schwingungen einer Saite ist der Quadratwurzel aus den spannenden Gewichten proportional, d. h. wenn das Gewicht, welches die Saite spannt, 4 mal, 9 mal, 16 mal so gross gemacht wird, während ihre Länge unverändert bleibt, so wird die Geschwindigkeit der Schwingungen 2 mal, 3 mal, 4 mal so gross.

3. Die Schwingungszahlen verschiedener Saiten derselben Materie verhalten sich umgekehrt wie ihre Dicke. Wenn man z. B. zwei Stahlsaiten von gleicher Länge nimmt, deren Durchmesser sich wie 1 zu 2 verhalten, so wird die dünnere bei gleicher Spannung in derselben Zeit doppelt so viel Schwingungen machen als die dickere. Für Darmsaiten ist dieses Gesetz wohl nicht immer genau wahr, weil sie nicht immer ganz gleichartig sind.

4. Die Schwingungszahlen von Saiten verschiedener Materien verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln ihrer specifischen Gewichte. Wenn z. B. eine Saite von Kupfer, deren specifisches Gewicht 9 ist, und eine Darmsaite, deren specifisches Gewicht 1 ist, gleiche Länge und gleichen Durchmesser haben, und wenn beide durch gleiche Gewichte gespannt sind, so schwingt die Kupfersaite dreimal langsamer als die Darmsaite.

Es versteht sich von selbst, dass diese Gesetze nur für solche Saiten gelten, die ihrer ganzen Dicke und Länge nach homogen sind, dass sie

also nicht auf Darmsaiten, welche mit Metallfäden übersponnen sind, angewandt werden können. Die metallische Hülle ist hier eine träge Masse, welche durch die Elasticität der Saite in Bewegung gesetzt werden muss und welche also die Schwingungsdauer vergrössert.

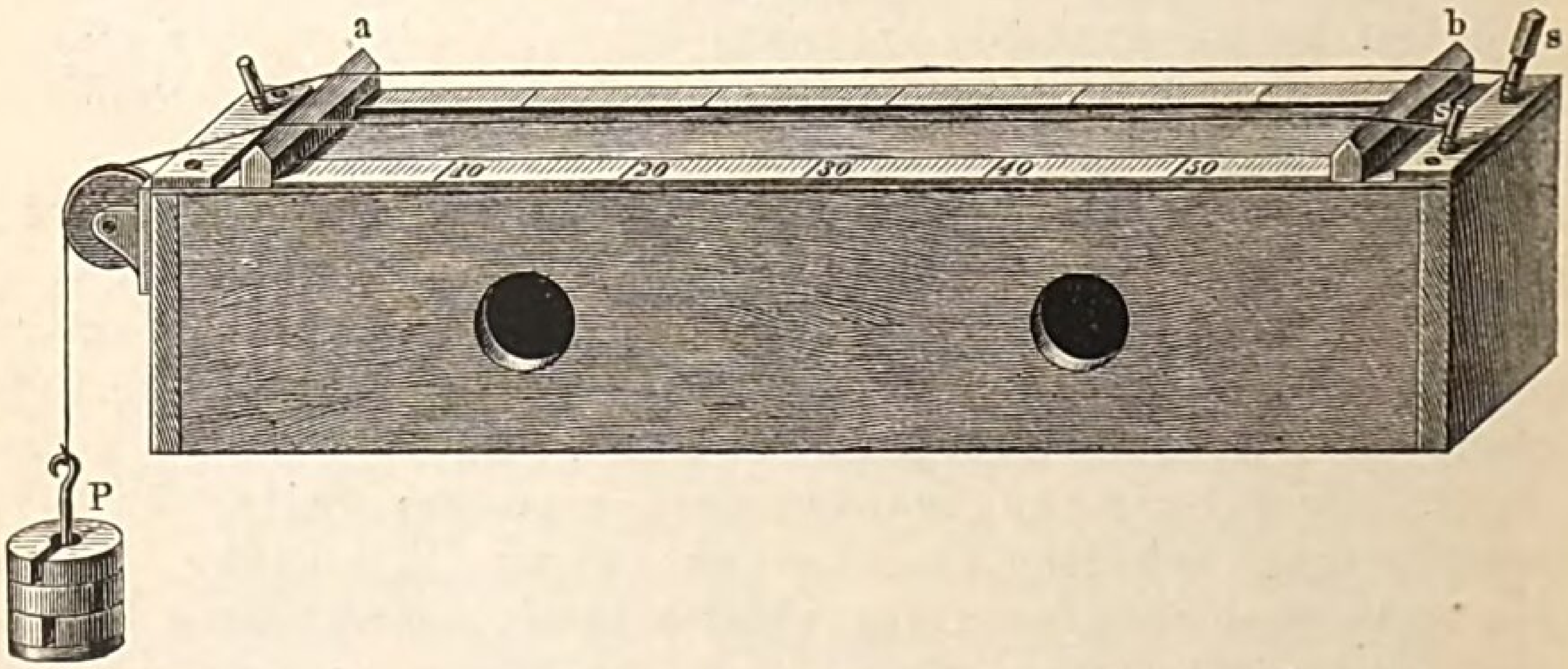
Um die wichtigsten Gesetze der Oscillationen gespannter Saiten und ihrer Töne durch den Versuch nachzuweisen, bedient man sich des Seite 696 beschriebenen Monochordes.

Prüfen wir zuerst den Zusammenhang, welcher zwischen der Spannung der Saite und der Tonhöhe besteht. Wenn für ein Gewicht von 1000 g, welches an den Haken *h*, Fig. 733, gehängt wird, die Saite einen bestimmten Ton giebt, den wir mit *c* bezeichnen wollen, so muss man

das Gewicht 1562,5 anhängen, um die grosse Terz,
" " 2250 " " " Quint,
" " 4000 " " " Octav

von *c* zu erhalten. Nun verhalten sich aber die Zahlen 1000 : 1562,5 : 2250 : 4000 zu einander wie $1 : \frac{25}{16} : \frac{9}{4} : 4$, oder wie die Quadrate von $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ 2, wodurch der Satz unter Nr. 2 bewiesen ist.

Fig. 733.



Die Ausführung dieses Versuches bietet dadurch einige Schwierigkeit, dass es schon eines ziemlich bedeutenden Gewichtes bedarf, um selbst mit einer dünnen Saite einen einigermaassen klangvollen Ton zu erhalten, so dass es unter Umständen nicht gerathen erscheint, das vierfache Gewicht anzuwenden, um die Octav des ursprünglichen Tones zu erhalten. Es genügt aber zu zeigen, dass man durch Anwendung eines $^{25}/_{16}$ mal oder eines $^{9}/_{4}$ mal so grossen Gewichtes die grosse Terz oder die Quinte des ursprünglichen Tones erhält. Auch eignet sich zu diesem Versuche eine Darmsaite besser als eine Stahlsaite.

Das Gesetz unter Nr. 2 haben wir bereits durch die im §. 197 aufgeführten Versuche erwiesen. Von dem Grundtone, welchen die Saite giebt, wenn man sie ihrer ganzen Länge nach schwingen lässt, erhält man:

die grosse Terz, wenn der frei schwingende Theil $^4/_5$,
die Quint, " " " " " $^2/_3$,
die Octav, " " " " " $^1/_2$
der ganzen Saitenlänge beträgt.

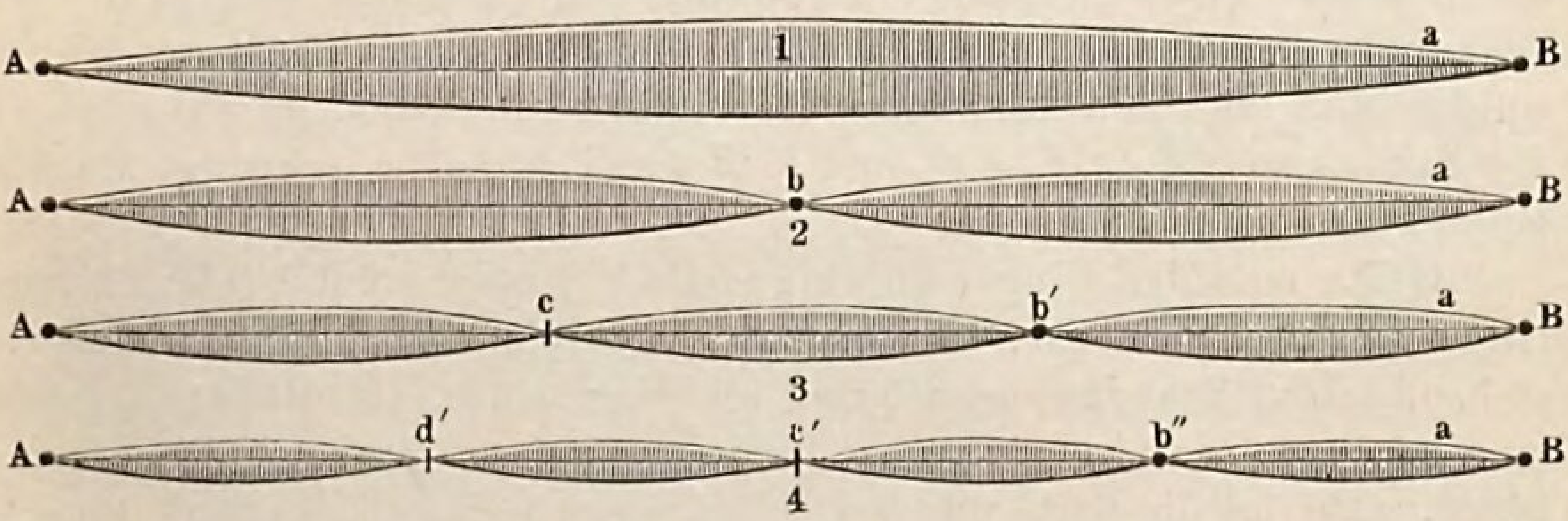
Ein für genaue Versuche bestimmtes Monochord beschreibt Weber im XV. Bande (1829) von Pogg. Ann.

Wenn man die Saite an irgend einem Punkte sanft mit dem Finger oder mit der Faser einer Feder berührt, so ist freilich die freie Bewegung des berührten Punktes verhindert, aber die Vibrationen des rechts vom berührten Punkte liegenden Saitenstückes pflanzen sich auf das links liegende fort und umgekehrt.

In Fig. 734 stelle Nr. 1 den Schwingungszustand einer Saite dar, welche zwischen den festen Punkten *A* und *B* ausgespannt und bei *a* mit dem Fiedelbogen gestrichen ihrer ganzen Länge nach schwingt, also ihren Grundton giebt.

Wenn man aber nun die Mitte der Saite bei *b* sanft mit einem Finger oder auch mit der Fahne einer Schreibfeder berührt und dann bei

Fig. 734.



a streicht, so kann jetzt die Saite nicht mehr ihrer ganzen Länge nach schwingen, weil der Punkt *b* sich nicht bewegen kann. Zunächst schwingt die gestrichene Hälfte *bB* für sich; sie giebt aber die Octav des Grundtones, weil bei gleicher Spannung die Länge der Saite auf $^1/_2$ reducirt ist.

Wenn aber das Saitenstück *b B* schwingt, so theilen sich seine Schwingungen auch der anderen Saitenhälfte *bA* mit, welche nun gleichfalls doppelt so viele Schwingungen in der Secunde macht, als wenn die Saite *AB* ihrer ganzen Länge nach vibrirte. Man kann die Schwingungen des Saitenstückes *bA* leicht dem Auge sichtbar machen, wenn man kleine Papierreiter, d. h. kleine Papierstückchen, aufsetzt, welche so gebogen sind, wie es Fig. 735 in natürlicher Grösse darstellt. Alle die zwischen *A* und *b* aufgesetzten Reiter gerathen in hüpfende Bewegung, sobald die Saite bei *a* gestrichen wird, und werden abgeworfen, wenn die Schwingungen lebhaft genug sind.

Fig. 735.



Wird die Saite *AB*, Fig. 734, mit dem Figer oder der Federfahne in einem Punkte *b*′, Nr. 3, angehalten, welcher um $^1/_3$ der Saitenlänge

AB von B absteht, so wird, wenn man bei a streicht, das 3 mal kürzere Saitenstück $b'B$ auch 3 mal schneller schwingen, als die ganze Saite AB, man wird also die Quint der Octav, oder, was dasselbe ist, die Duodecime des Grundtones von AB hören.

Die Schwingungen des Saitenstückes $b'B$ pflanzen sich aber auch auf das Saitenstück $b'A$ in der Weise fort, dass sich Ab' in zwei Theile, Ac und cb', Nr. 3, theilt, deren jedes so lang ist, wie bB, und deren jedes für sich schwingt. Die beiden Saitenstücke Ac und cb' sind durch den Knotenpunkt c getrennt; zwischen A und c, sowie zwischen c und b', b' und B befinden sich Bäuche.

Das Vorhandensein des Schwingungsknotens c, Nr. 3, lässt sich mit Papierreitern leicht nachweisen, wenn man eine Reihe derselben zwischen b' und A aufsetzt und dann bei a streicht; der bei c bleibt ruhig sitzen, während die anderen abgeworfen werden oder doch lebhaft tanzen.

Hält man den Finger oder die Federfahne an einen Punkt b'', Nr. 4, welcher um $^1/_4$ der ganzen Saitenlänge von B entfernt ist, so theilt sich die bei a mit dem Fiedelbogen gestrichene Saite in vier gleiche Theile, deren jeder für sich schwingt und deren jeder von dem benachbarten durch einen Schwingungsknoten getrennt ist, es bilden sich also drei Schwingungsknoten, b'', c' und d', und vier Bäuche, wie Nr. 4 der Figur zeigt. Man hört nun die zweite Octav des Grundtones, da jeder Theil der Saite, also Ad', $d'c'$, $c'b''$ und $b''B$ 4 mal schneller schwingt als die ganze Saite AB.

Hielte man den Finger an eine Stelle b''', welche um $^1/_5$ der Saitenlänge von B entfernt ist, so würde durch Streichen bei a ein Ton entstehen, dessen Schwingungen 5 mal schneller sind, als die des Grundtones, man würde also die grosse Terz der zweiten Octav des Grundtones hören, während die Saite durch vier Schwingungsknoten in fünf Bäuche getheilt wird.

Die Töne, welche 2 mal, 3 mal, 4 mal, 5 mal etc. so viel Schwingungen in der Secunde machen als der Grundton, werden die Obertöne dieses Grundtones genannt. Wenn also die Saite schwingt, wie in Nr. 2, Nr. 3 und Nr. 4 der Figur angedeutet ist, so hört man ihren ersten, ihren zweiten, ihren dritten Oberton.

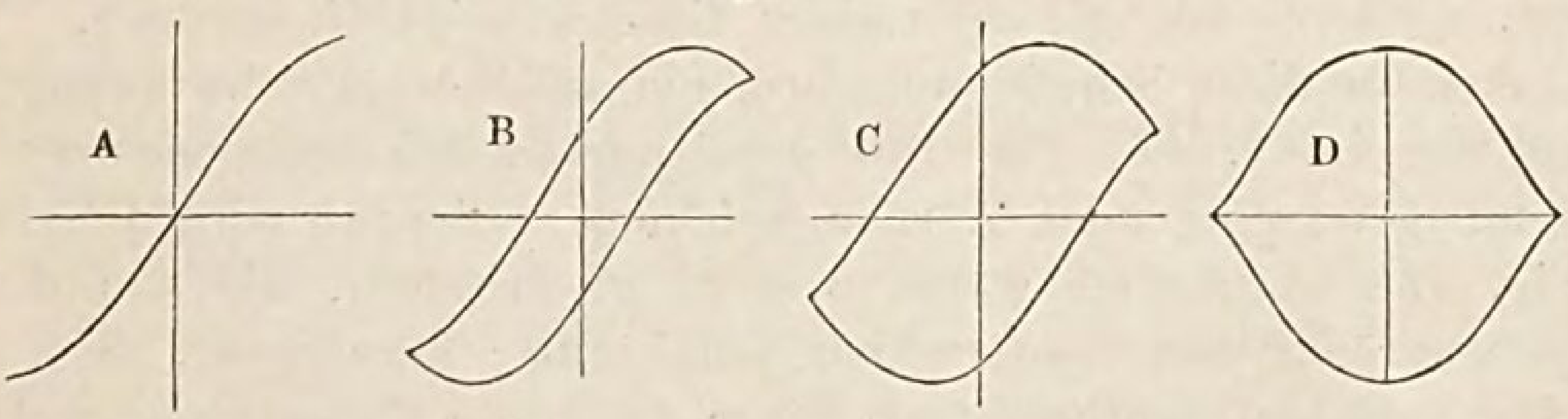
Das gleichzeitige Vorhandensein dieser Obertöne hat nicht allein Einfluss auf den Klang der Saite, sondern ist auch im Zusammenhange mit dem zeitlichen Verlaufe der Schwingungsbewegung, welche demgemäss sehr von jener Form abweicht, welche wir bei der Stimmgabel beobachten können und welche wir als pendelartige oder harmonische Schwingungsart bezeichnet haben.

Dies lässt sich am besten mittelst des Vibrationsmikroskops nachweisen. Will man mit diesem die Vibrationen einer Violinsaite untersuchen, so wird die Violine vor dem Apparate, Fig. 725, Seite 754, so befestigt, dass die fragliche Saite in verticaler Richtung gerade vor die Mitte des Objectivs L zu stehen kommt. Um ein Pünktchen auf der

Saite zu markiren, welches durch das Mikroskop beobachtet werden soll, wird die betreffende Stelle der Saite mit Tinte geschwärzt, wenn sie trocken geworden ist, mit Klebwachs eingerieben und dann etwas Stärkemehl darauf gepulvert, wovon einige Körnchen haften bleiben, von denen dann eines durch das Mikroskop beobachtet wird, während Stimmgabel und Saite vibriren.

Vibrirt die Stimmgabel allein, so erscheint das beobachtete weisse Pünktchen als eine verticale Linie; vibrirt die Saite allein, so erscheint

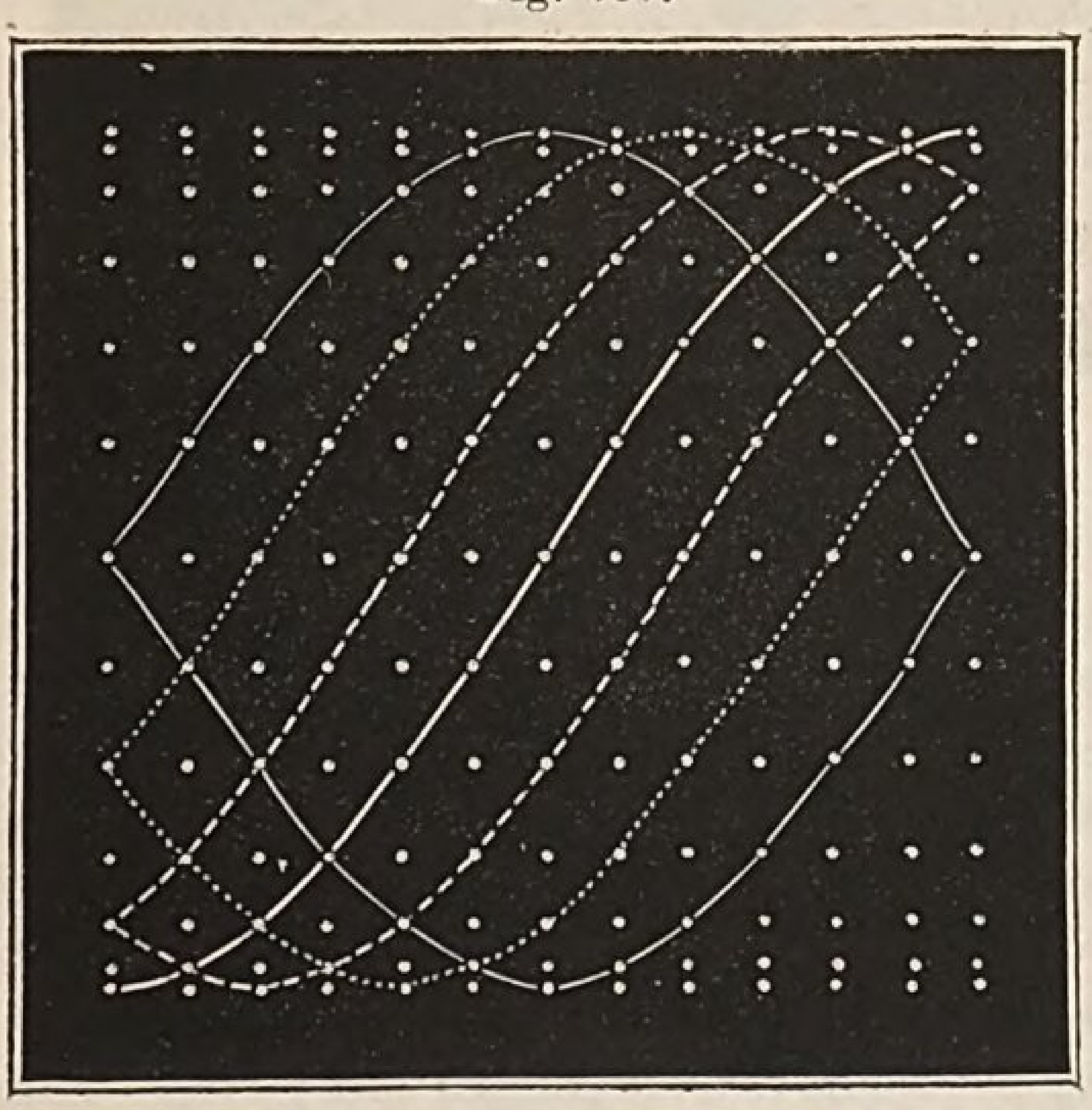
Fig. 736.



es als eine horizontale Linie; vibriren aber beide gleichzeitig, so beobachtet man eine Curve, welche von dem musikalischen Intervall der Stimmgabel und der Saite abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Saite sei unisono mit der Stimmgabel, so müsste eine der auf S. 747, Fig. 719, erste Reihe, dargestellten Figuren erscheinen, wenn die Vibrationen der Saite nach demselben Gesetz vor sich gingen wie die Schwingungen der Stimmgabel. Für den Fall, dass die Mitte der Saitenlänge dem Mikroskopobjectiv gegenübersteht und dass die Saite mit dem Violinbogen gestrichen wird, erscheinen aber die Fig. 736 abgebildeten Figuren und zwar tritt Fig. 736 *A* statt der schiefen Geraden, Fig. 736 *B* und *C* statt der Ellipsen, Fig. 736 *D* statt des Kreises auf. Aus dieser veränderten Form der Lichtcurven kann man aber auf die Schwingungsform der Saite schliessen.

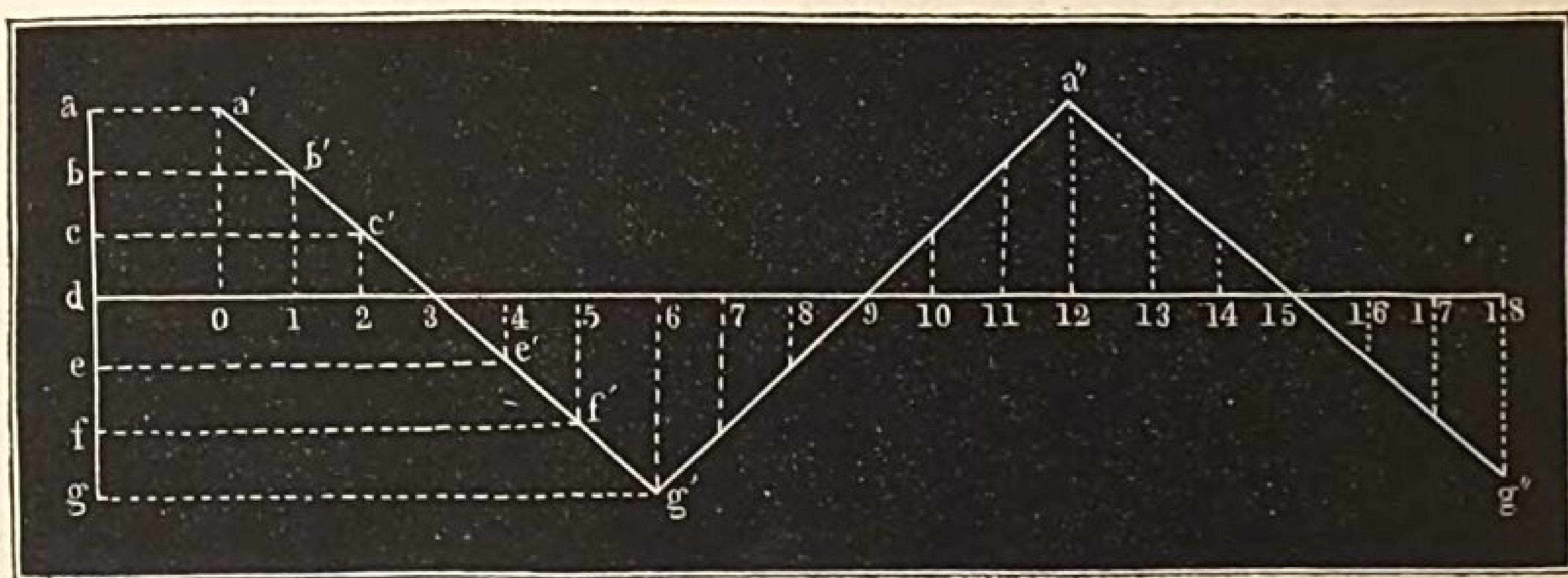
Fig. 737.



Es lässt sich leicht durch Construction der Beweis liefern, dass gerade diese Figuren entstehen, wenn ein Punkt in verticaler Richtung nach dem Pendelgesetze und zugleich in horizontaler Richtung mit gleich-

förmiger Geschwindigkeit hin und her schwingt. Zu diesem Zwecke construiren wir ein Punktsystem, ähnlich dem der Fig. 714, Seite 743, jedoch mit dem Unterschiede, dass die horizontalen Abstände der Punkte einander gleich gemacht werden. Fig. 737 (a. v. S.) zeigt ein solches Punktsystem. Indem wir nun ganz nach den im §. 209 abgeleiteten Constructionsregeln verfahren, erhalten wir für die Phasendifferenzen $= 0$, $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$ die in Fig. 737 gezeichneten Curven, welche mit den wirklich beobachteten der Fig. 736 übereinstimmen. Daraus müssen wir schliessen, dass die Schwingungen der Violinsaite nicht nach dem Pendelgesetz, sondern mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen. Wenn wir daher für diese Schwingungsform die zugehörige Schwingungscurve analog der im §. 43, Fig. 150 gezeichneten Schwingungscurve eines pendelartig schwingenden Körpers zeichnen wollen, so wird dieselbe die in Fig. 738 abgeleitete Form $a'\ g'\ a''\ g''$ erhalten, wie aus der von selbst verständlichen Construction unmittelbar hervorgeht. Um dieses Resultat auch auf synthetischem Wege durch ein Experiment zu demonstriren, kann man sich des von mir construirten Apparates, Fig. 727, S. 755,

Fig. 738.



bedienen. Man ersetzt zu diesem Zwecke eine der beiden Scheiben durch eine andere, auf welcher statt der Pendelcurve die Schwingungscurve $a'\ g'\ a''$ längs eines concentrischen Kreises aufgetragen ist. Man erhält dann beim gleich schnellen Drehen beider Scheiben die Curven der Fig. 736.

Recht einfach ist auch folgende Weise der Untersuchung. Man lässt zwei Saiten, welche übers Kreuz aufgespannt sind, in Ebenen schwingen, welche zu den beiden Saiten parallel sind. Es entsteht dann eine Figur, welche jener von Lissajous verwandt ist, aus welcher sich auf das Schwingungsgesetz zurückschliessen lässt. Ein Punkt, welcher zu zwei rechtwinkelig auf einander gerichteten Schwingungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit gezwungen wird, beschreibt bei Unisono je nach der Phasendifferenz ein Quadrat oder ein Rechteck, bei der Octave eine aus zwei Vierecken bestehende Acht u. s. f., wie sie sich leicht entwickeln lässt, wenn man in Fig. 737 die verticalen Punktreihen ebenso anordnet, wie die horizontalen. Die überkreuzten Saiten repräsentiren zwar nicht einen einzigen derartig schwingenden Punkt, geben aber eine Figur, welche

sich leicht deuten lässt. Man hat übrigens gar nicht nöthig, die Saiten übers Kreuz zu spannen. Man kann zwischen die parallel gespannten Saiten ein Spiegelchen derart unter 45^0 aufstellen, dass man in einem Fernrohr die vordere Saite direct horizontal und die rückwärtige als verticales Spiegelbild erblickt. Ogden N. Rood*) hat auf analoge Weise die Schwingungen von Stäben, Platten, Glocken und Membranen studirt.

Wir kommen auf die Deutung der Schwingungscurve der Fig. 738 sowie auf ihren Zusammenhang mit der Klangfarbe in den §§. 223 und 225 nochmals ausführlicher zurück.

Transversalschwingungen elastischer Stäbe. Unter elastischen Stäben verstehen wir starre Körper von solcher Form, dass ihre Länge sehr bedeutend ist im Vergleich zu ihrer Breite und Dicke, welche aber doch noch breit und dick genug sind, um ihnen die Biegsamkeit der Saiten zu benehmen, so dass also solche Stäbe ohne Weiteres schon Elasticität genug haben, um zu vibriren und zu tönen, und nicht erst einer Spannung bedürfen, wie die Saiten. 212

Ein solcher Stab kann, wie eine gespannte Saite, mehrere Töne geben, je nachdem sich mehr oder weniger Knotenlinien in demselben bilden.

Die Beziehungen der Schwingungszahl eines Stabes und seiner Dimensionen ist durch die Formel

$$z = C \frac{e}{l^2} \sqrt{\frac{g K}{\varphi}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 1)$$

ausgedrückt, in welcher z die Schwingungszahl, l die Länge des Stabes, e dessen Dicke in der Richtung der Schwingungen und C einen constanten Factor bezeichnet, welcher von der Art abhängt, in welcher der Stab unterstützt oder eingeklemmt ist, sowie auch von der Anzahl der Schwingungsknoten, durch welche er sich abtheilt. Es bezeichnet ferner g die beschleunigende Kraft der Schwere, K den Elasticitätsmodulus, und φ das specifische Gewicht der Substanz, aus welcher der Stab verfertigt ist.

Nach Gleichung 1) ist also die Schwingungszahl eines Stabes

1. direct proportional der Dicke,
2. umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge,
3. direct proportional der Quadratwurzel aus dem Elasticitätsmodulus,
4. umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem specifischen Gewichte der Substanz.

Von der Breite des Stabes ist die Schwingungszahl unabhängig.

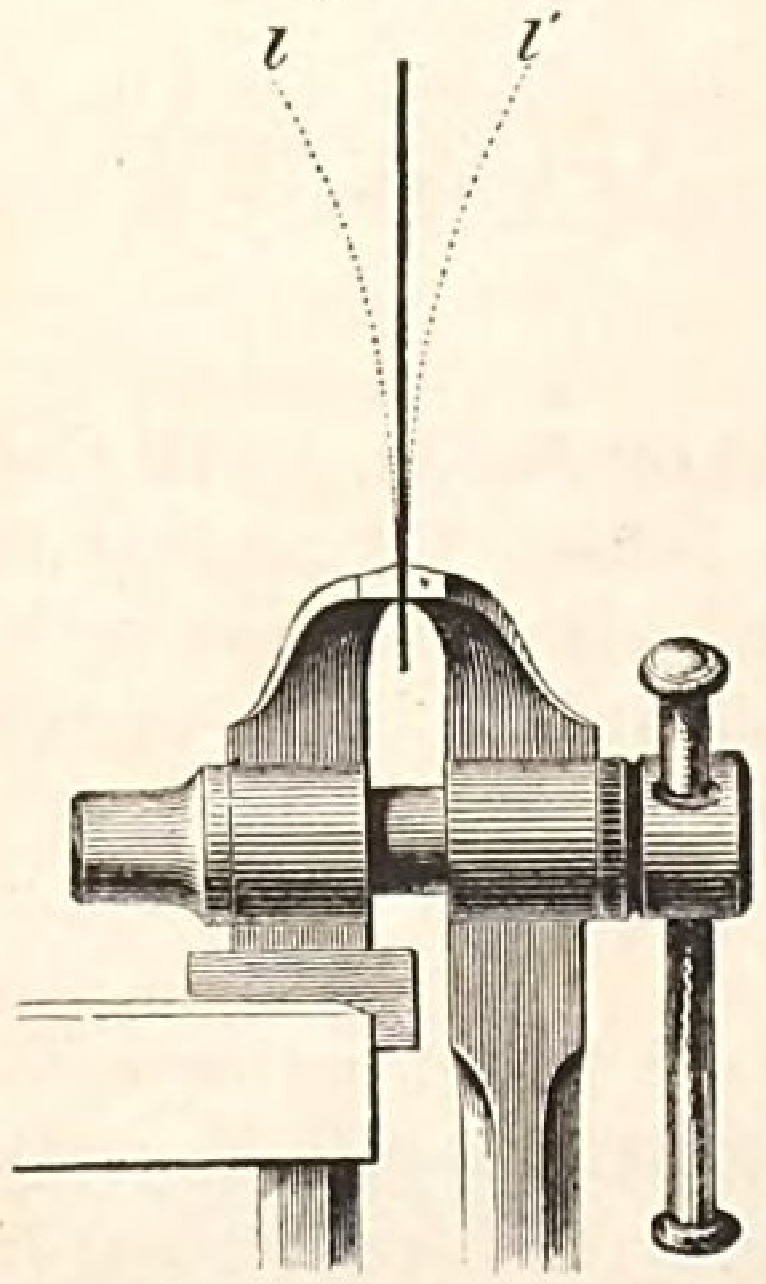
Den tiefsten Ton, dessen ein Stab überhaupt fähig ist, giebt er, wenn sich seiner ganzen Länge nach kein Schwingungsknoten bildet, wie es

*) Pogg. Ann. Bd. 154, S. 604.

der Fall ist, wenn das eine Ende desselben auf zweckmässige Weise eingeklemmt wird.

Bei einem elastischen Streifen, welcher eingeklemmt ist, wie Fig. 739 zeigt, und welcher langsam genug schwingt, um seine einzelnen Schwingungen zählen zu können, lässt sich ganz direct die Richtigkeit der Gleichung 1) in Beziehung auf die Länge nachweisen. Macht z. B. ein so eingeklemmter 1 m langer Streifen 40 Schwingungen in 30 Secunden, so wird er, auf 75 cm verkürzt, 71 Schwingungen in der gleichen Zeit machen, woraus sich leicht ergiebt, dass die Schwingungszahlen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der schwingenden Längen.

Fig. 739.



Je bedeutender die Dicke des Stabes im Vergleich zu seiner Länge wird, desto mehr nimmt die Zahl der Schwingungen zu, so dass man sie alsbald nicht mehr einzeln verfolgen und zählen kann; alsdann aber hat man an der Tonhöhe ein Mittel, die Richtigkeit des obigen Gesetzes zu controliren.

Auf einem Resonanzboden seien vier Stahlstäbchen von gleicher Dicke befestigt, wie es Fig. 740 zeigt, deren Längen sich verhalten wie

$$1 : \sqrt{\frac{4}{5}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}},$$

so wird, mit dem Fiedelbogen gestrichen, das zweite Stäbchen die grosse Terz, das dritte die Quint und das vierte die Octav desjenigen Tones geben, welchen man von dem ersten erhält.

Wenn die beiden Enden eines Stabes frei schwingen sollen, so hängt die Schwingungszahl davon ab, welche Stellen desselben festgehalten oder unterstützt sind. Ist der Stab nur in der Mitte seiner Länge befestigt, so ist sein Grundton derselbe, wie der eines sonst gleichen Stabes von halber Länge, welcher an dem einen Ende befestigt ist.

Wenn sich in einem an beiden Enden frei schwingenden Stabe zwei Schwingungsknoten bilden, so liegt jeder derselben um $^1/_5$ der gesammten Stablänge von dem entsprechenden Stabende ab, so dass der Zwischenraum zwischen den beiden Schwingungsknoten $^3/_5$ der gesammten Stablänge beträgt, wie dies Fig. 741 andeutet. Man erhält diese Schwingungsart unter anderem, wenn man den Stab in einem der Schwingungsknoten zwischen zwei Fingern festhält und ihn mit einem Holzhammer in der Mitte seiner Länge anschlägt, oder auch, wenn man ihn, wie Fig. 742 andeutet, auf zwei Schnüre legt, welche ungefähr um $^3/_5$ der Stablänge von einander abstehen, und dann die Mitte oder das eine Stabende mit dem Holzhammer schlägt.

An so unterstützten Stäben ist es nun auch leicht, die Richtigkeit der Gleichung 1) S. 765 nachzuweisen.

Zwei Stahlstäbe, 1 und 2, Fig. 743, geben gleichen Ton, weil sie gleiche Länge und gleiche Dicke haben, obgleich 2 viel schmäler ist als 1.

Der Stab 3 giebt die Octav der Stäbe 1 und 2, weil bei gleicher Dicke seine Länge $\sqrt{\frac{1}{2}}$, also 0,707 mal kleiner ist.

Da bei gleicher Länge der Stab 4 nur halb so dick ist wie 3, so giebt 4 die nächst tiefere Octav von 3, der Stab 4 hat also gleiche Tonhöhe mit 1 und 2.

Obgleich die Breite des Stabes ohne Einfluss auf die Tonhöhe ist, so ist sie doch von wesentlichem Einfluss für die Stärke und Reinheit des Tones.

Fig. 740.

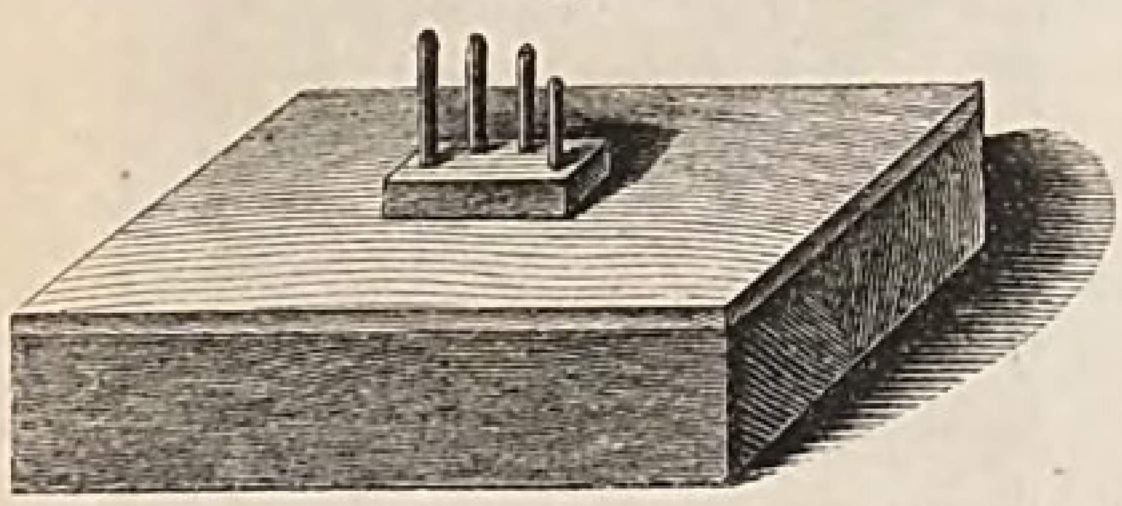


Fig. 741.

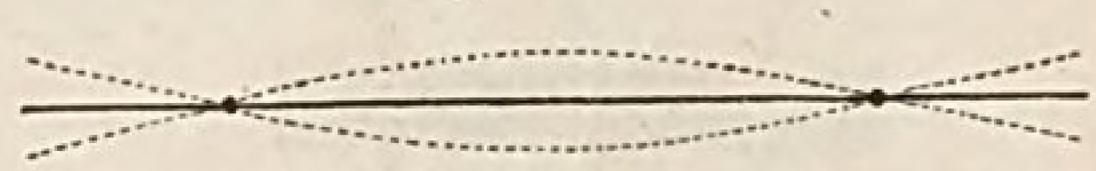


Fig. 742.

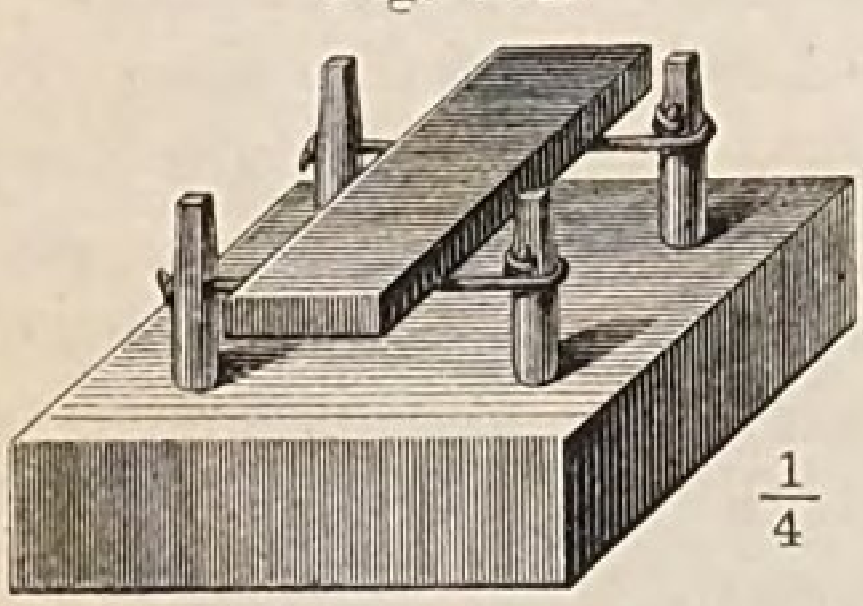
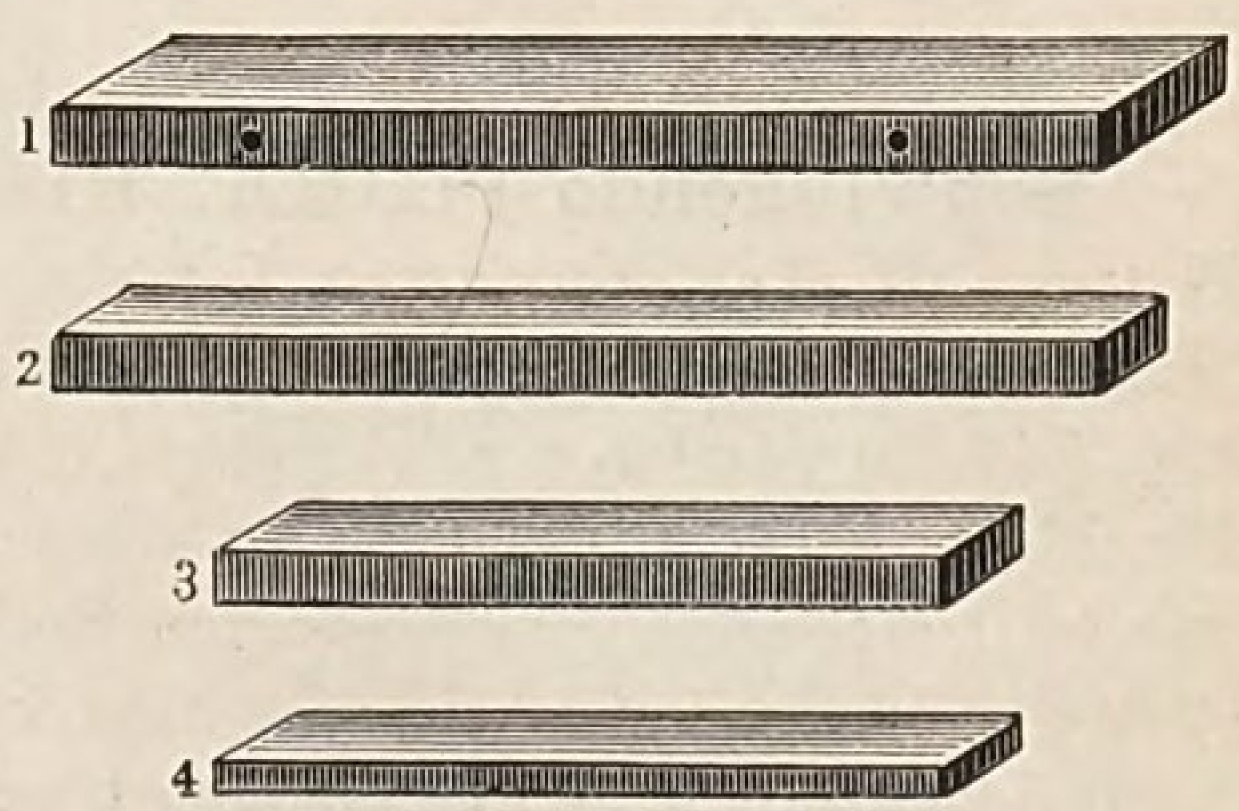


Fig. 743.



Bezeichnen wir mit l die Länge eines Stabes, welcher ungefähr die Gestalt des Stabes 2, Fig. 743, hat, so muss ein Stab derselben Substanz bei gleicher Dicke die Länge $l\sqrt{\frac{4}{5}} = l\,.\,0{,}89$ oder die Länge $l\sqrt{\frac{2}{3}} = l\,.\,0{,}816$ haben, wenn er die grosse Terz oder die Quint des ersteren Stabes geben soll.

Will man mehrere harmonische Metallstäbe der eben besprochenen Art in einem Apparate vereinigen, so kann man jeden Stab an der Stelle der Schwingungsknoten parallel mit den Breitekanten durchbohren, wie beim Stabe 1, Fig. 743, angedeutet ist, und sie dann mittelst durchgezogener Schnüre zusammenfassen, Fig. 744 (a. f. S.), oder man kann die Stäbe auf convergirenden gespannten Bändern aufleimen, wie man Fig. 745 sieht.

Nach Art der Fig. 745 ist das *Lignum psalterium* aus Holzstäben und die Glasharmonika aus Glasplatten construirt, welche mit Korkhämmern geschlagen werden.

Die Stimmgabel und das Kaleidophon, welche beide zu den schwingenden Stäben gehören, wurden bereits an höherer Stelle abgehandelt.

Fig. 744.

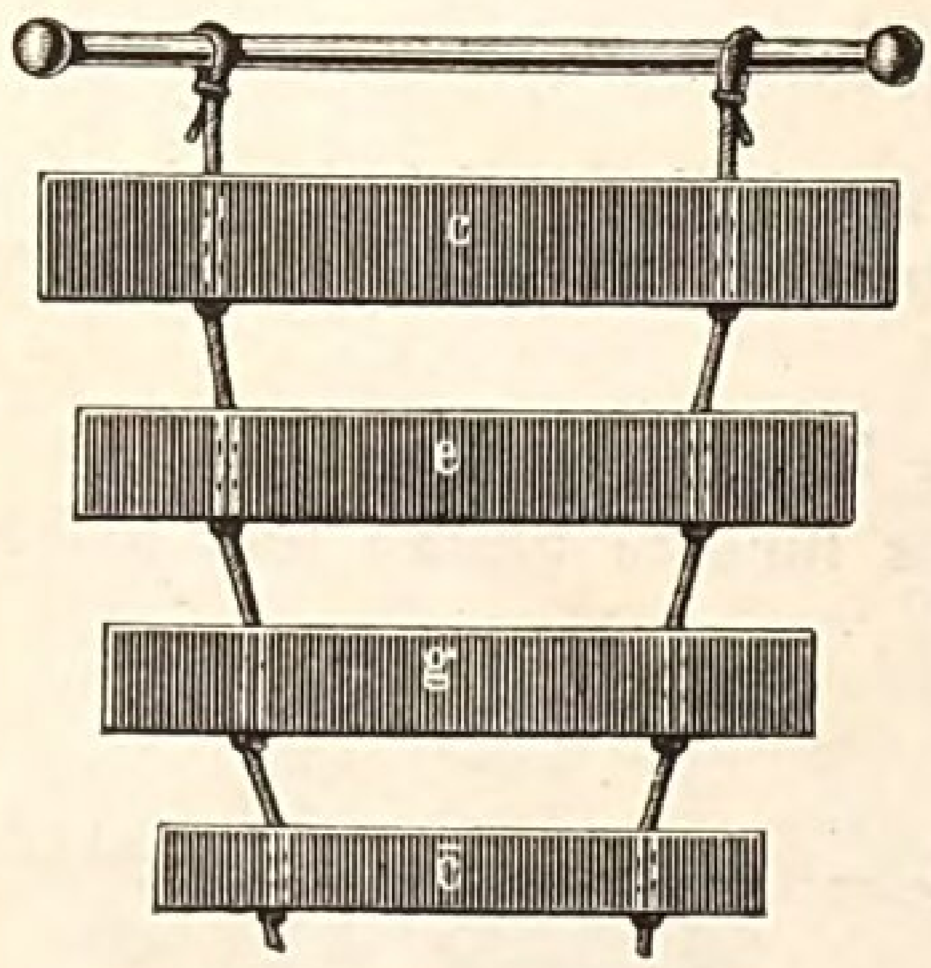
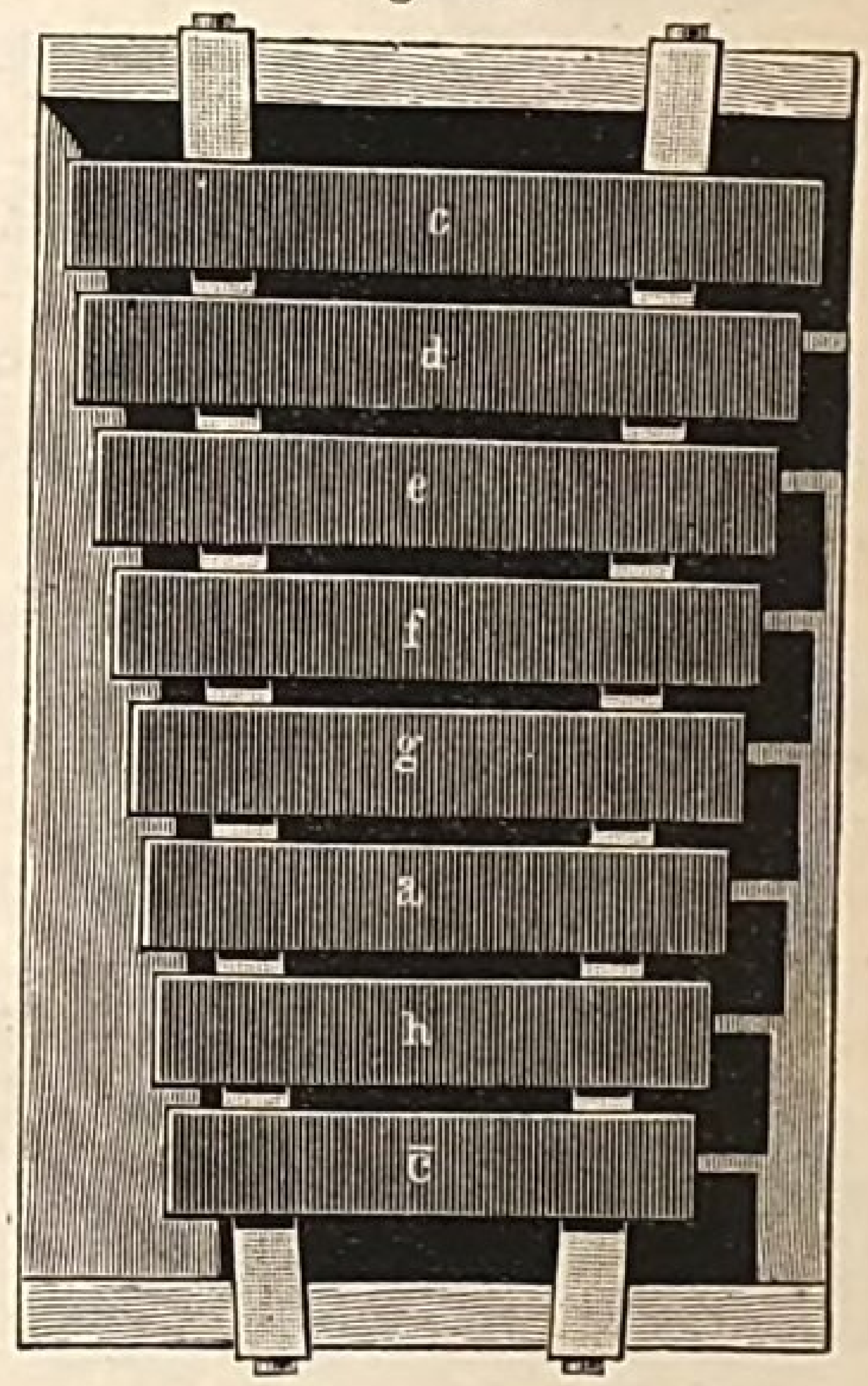


Fig. 745.



213 **Schwingende Platten, Klangfiguren von Chladni.** In Platten, Glocken etc. lassen sich ebenfalls stehende Schwingungen hervorbringen. Um Platten vibriren zu machen, kann man die Zange, Fig. 746, anwenden, welche aber selbst sehr gut befestigt sein muss. Die Platte wird zwischen den Cylinder *a* und die Schraube *b* gebracht, welche beide mit einem Stückchen Kork oder Leder endigen. Wenn die Platte gehörig festgeschraubt ist, kann man die Vibrationen durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen hervorbringen.

Man kann auf diese Weise Platten von Holz, Glas, Metall etc. in Schwingungen versetzen, sie mögen nun dreieckig, viereckig, rund oder elliptisch etc. sein. Die vibrirenden Platten erzeugen ebenso wie die vibrirenden Saiten Töne, welche bald höher, bald tiefer sind. Man beobachtet ferner, dass sich die Platte für jeden dieser Töne in schwingende Theile abtheilt, welche durch Ruhelinien oder Knotenlinien getrennt sind. Im Allgemeinen wird die Ausdehnung der schwingenden Theile um so kleiner, die Knotenlinien also um so zahlreicher, je höher der Ton wird.

Um die Existenz dieser Knotenlinien nachzuweisen, streut man auf die obere Fläche der Tafel feinen trockenen Sand, welcher während des Tönens in die Höhe hüpft und niederfällt und sich endlich an den Knotenlinien anhäuft. Auf diese Weise entstehen die sogenannten Klangfiguren, deren Erfinder Chladni ist.

Savart hat ein sinnreiches Mittel ausgedacht, um auf eine vollständig correcte Weise diese Figuren aufzubewahren, die man doch nur

sehr schwer copiren könnte, wenn sie complicirt und verwickelt sind. Er wandte nämlich statt des Sandes Lackmus an, welches mit Gummi pul-

Fig. 746.

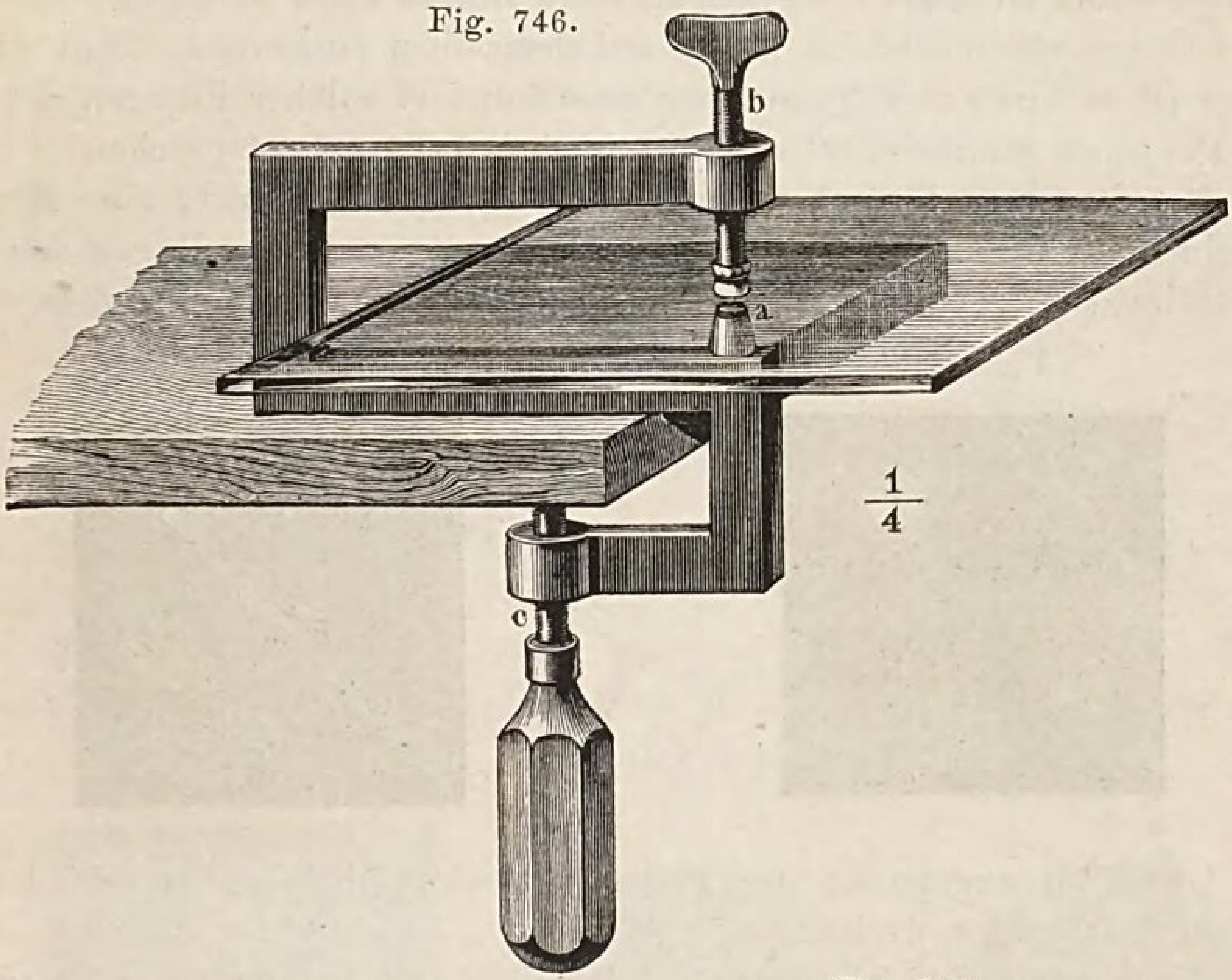


Fig. 747.



Fig. 748.



Fig. 749.

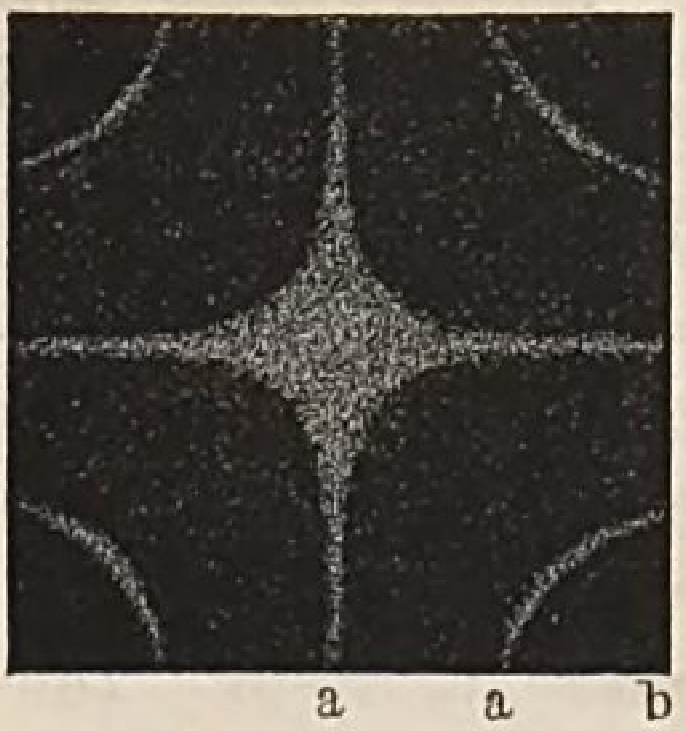
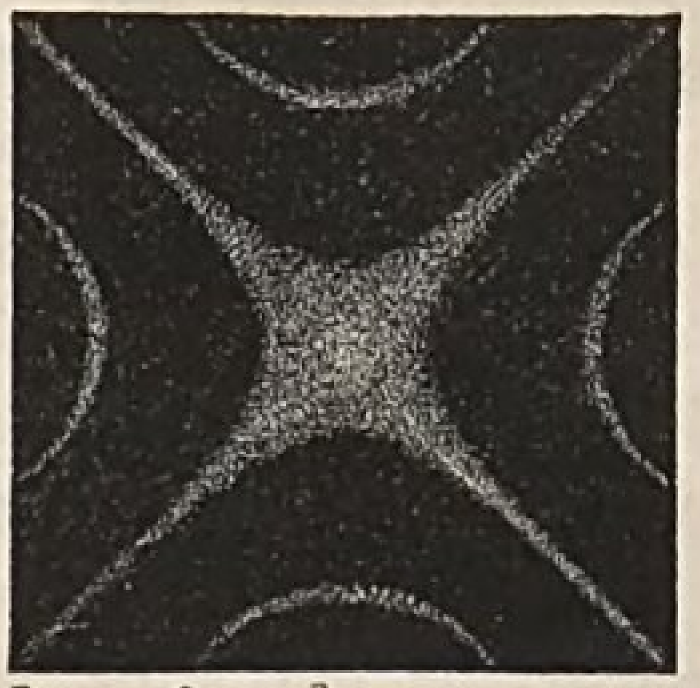


Fig. 750.



verisirt und zu einem Teige angemacht, getrocknet, von Neuem pulverisirt und durchgesiebt wird, um Körnchen von passender Dicke zu erhal-

ten. Wenn dieses farbige und hygroskopische Pulver auf der Platte sich in den Knotenlinien angesammelt hat, so reicht es hin, auf die Platte ein mit etwas Gummiwasser befeuchtetes Blatt Papier zu legen, um die Figur durch einen leichten Druck auf demselben zu fixiren. Auf diese Weise ist es Savart gelungen, mehrere hundert solcher Figuren derselben Platte zu sammeln, welche verschiedenen Tönen entsprechen.

Mit derselben Platte lassen sich, wie schon bemerkt, eine Menge verschiedener Figuren erzeugen, je nachdem man mit dem Bogen stärker oder schwächer, schneller oder langsamer streicht, oder je nachdem man

Fig. 751.

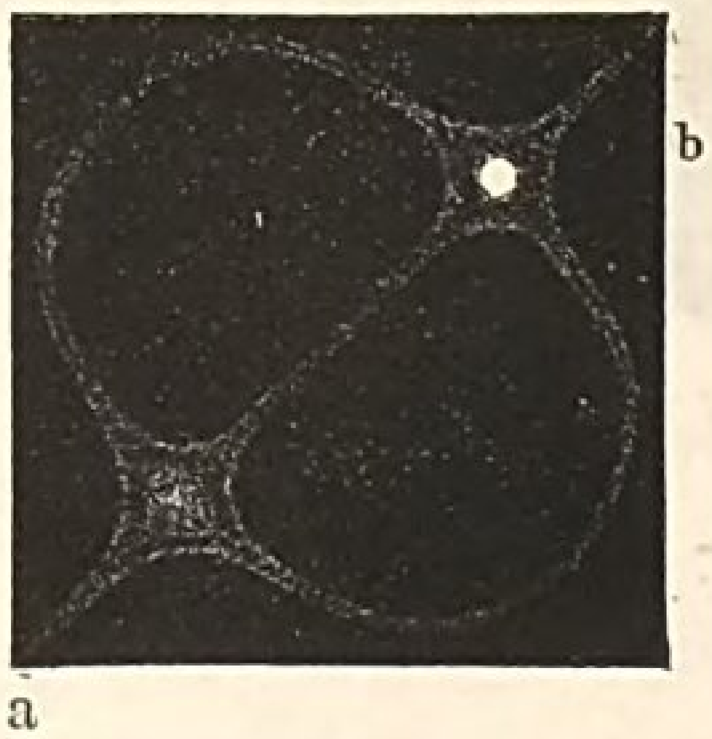


Fig. 752.



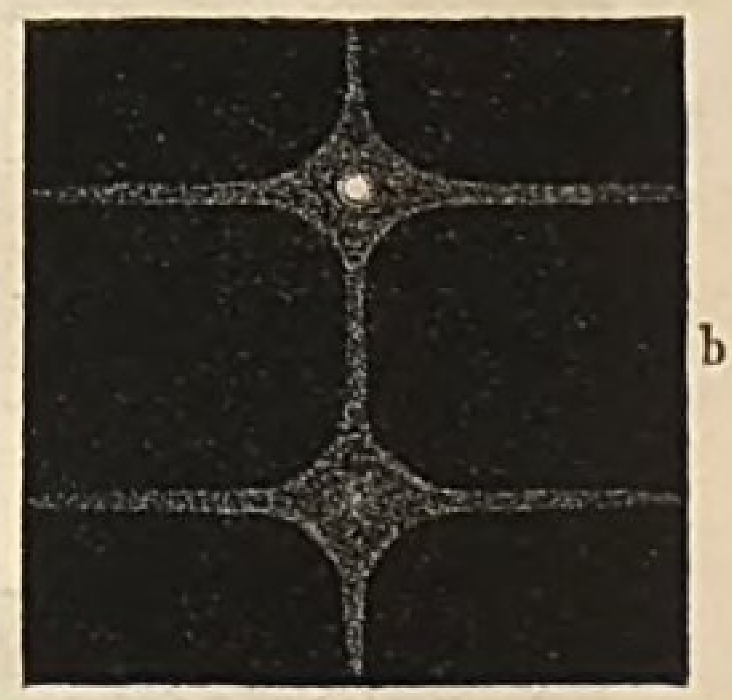
den Unterstützungspunkt der Platte verändert und an verschiedenen Stellen des Randes streicht.

Die Figuren 747 bis 750 (a. v. S.) stellen vier bei centraler Einspannung (d. h. wenn die Platte gerade in ihrem Mittelpunkte von der Zange, Fig. 746, festgehalten wird), erhaltene Klangfiguren dar, welche entstehen, wenn man an den mit *a* bezeichneten Stellen des Randes einen Finger

Fig. 753.



Fig. 754.



anlegt und dann an der durch *b* bezeichneten Stelle mit dem Fiedelbogen streicht.

Die Figuren 751 bis 755 stellen einige der unendlich mannigfaltigen Klangfiguren dar, welche bei excentrischer Einspannung erhalten werden, und zwar ist die Stelle, welche gerade von der Zange, Fig. 746, festgehalten wird, als ein ganz weisser Punkt dargestellt. Die Stelle des Randes, welche mit dem Fiedelbogen anzustreichen ist, ist auch hier mit *b*, die mit dem Finger anzuhaltende durch *a* bezeichnet. Um die Fig. 755 sicher zu erhalten, muss man noch bei *c* einen Finger aufsetzen.

Nicht alle Glasplatten von gleicher Grösse und Gestalt geben bei gleichem Verfahren genau dieselbe Figur, sondern es kommen Abweichungen vor, welche man als Varietäten desselben Grundtypus bezeichnen kann. So sind die Figuren 752 und 753 Klangfiguren, die bei gleichem Verfahren mit zwei verschiedenen aber gleich grossen Glasplatten erhalten wurden. Häufig beobachtet man auch mehr oder weniger bedeutende Abweichungen vom regelmässigen Verlauf der Klangfiguren, was durch Ungleichförmigkeiten in der Masse der Glasplatten zu erklären ist.

Dreieckige und vieleckige Platten geben ähnliche Erscheinungen.

Kreisförmige Platten geben auch unzählig viele Töne, und jedem derselben entspricht auch eine besondere Figur. Man unterscheidet diametrale, concentrische und gemischte Systeme.

Das diametrale System ist nur aus Durchmessern zusammengesetzt, wie Fig. 756 und 757, und theilt den Umfang in eine gerade Anzahl von Theilen.

Man erhält solche Figuren, wenn man die Platte in ihren Mittelpunkt einspannt und am Rande streicht. Die Fig. 756 erhält man, wenn

Fig. 755.

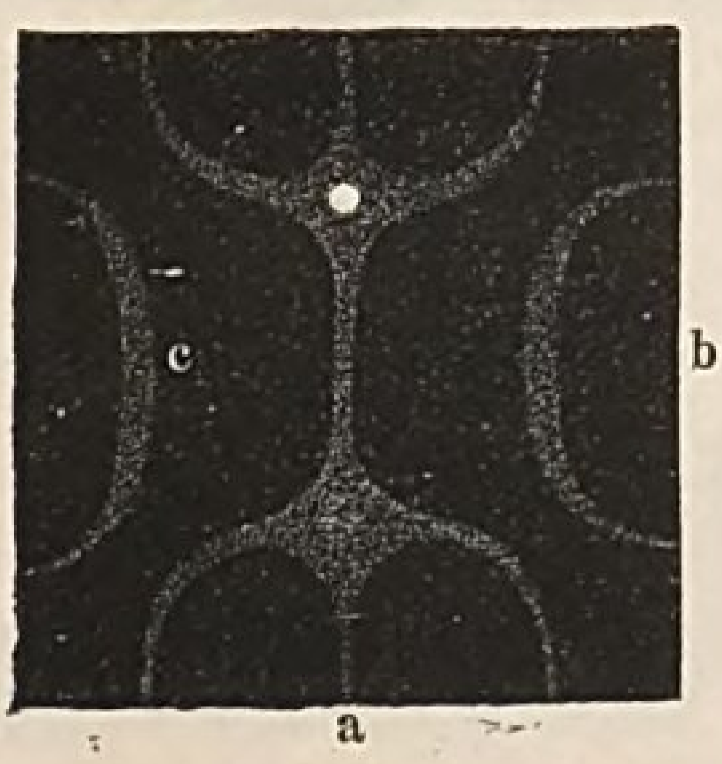
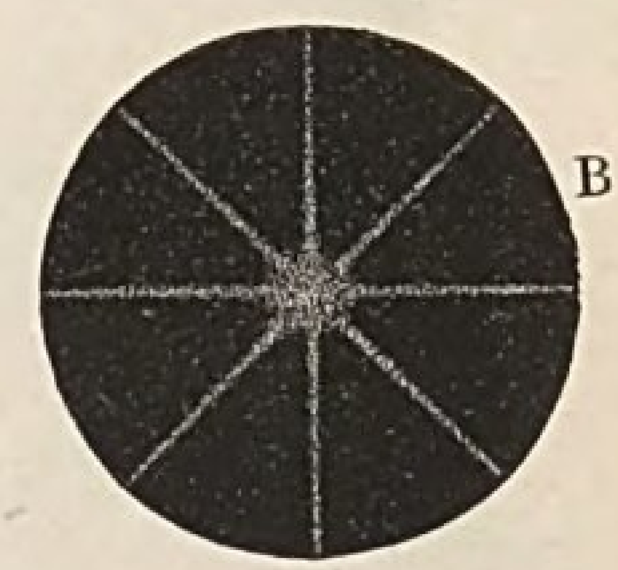


Fig. 756.



Fig. 757.



man mit dem Finger einen Punkt des Randes berührt, welcher 45^0 von der Stelle absteht, an welcher man streicht. Um die Fig. 757 zu erhalten, muss man zwei Punkte des Randes berühren, welche um 45^0 von einander abstehen, und an einer Stelle streichen, welche $22^1/_2{}^0$ von dem einen dieser Punkte entfernt ist.

An Metallscheiben von 3 bis 4 dcm Durchmesser beobachtet man oft 36 bis 40 Abtheilungen am Umfange. Es ist leicht einzusehen, warum bei dieser Theilungsart durch Radien stets eine gerade Anzahl von Abtheilungen entstehen muss; denn 1) ist klar, dass die Schwingungen aller Abtheilungen im Einklange sein müssen, d. h. sie müssen alle in gleicher Zeit gleichviel Schwingungen machen, und da sie gleiche Länge haben, so muss auch ihre Ausdehnung dieselbe sein; 2) müssen die neben einander liegenden Abtheilungen entgegengesetzte Bewegungen haben, und dies wäre bei einer ungeraden Anzahl von Abtheilungen nicht möglich.

Um concentrische Knotenlinien zu erhalten, wovon Fig. 758 (a. f. S.) die einfachste Form zeigt, muss die Platte vom Mittelpunkte aus in Schwingungen versetzt werden, was am besten dadurch bewerkstelligt werden

kann, dass man aus der Mitte ein Stück herausschneidet, wie Fig. 759 andeutet, welches gross genug ist, um mit einem Fiedelbogen hineinzukommen. Nachdem nun diese Platte excentrisch in die Schraubklemme, Fig. 746, Seite 769, eingespannt worden ist, wird eine beliebige Stelle des inneren Randes mit dem Fiedelbogen gestrichen. Ist z. B. der Punkt *a*, Fig. 759, eingeklemmt, so entsteht die hier abgebildete Figur, wenn man bei *b* streicht.

Fig. 758.

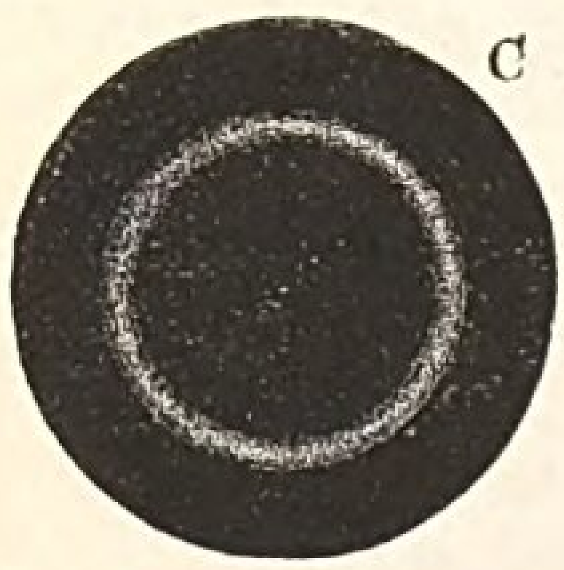
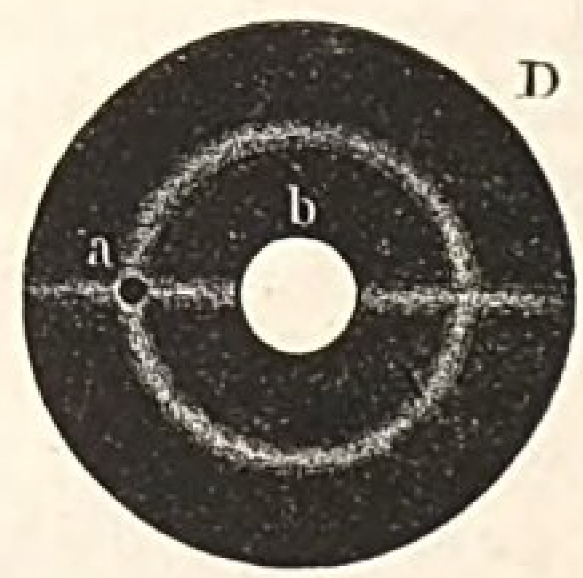


Fig. 759.



Um ringförmige Knotenlinien zu erzeugen, kann man sich auch einer Metallplatte bedienen, in deren Mitte ein ungefähr 4 mm dicker und ungefähr 1 m langer Stahlstab eingesteckt und angelöthet ist. Wenn

Fig. 760.

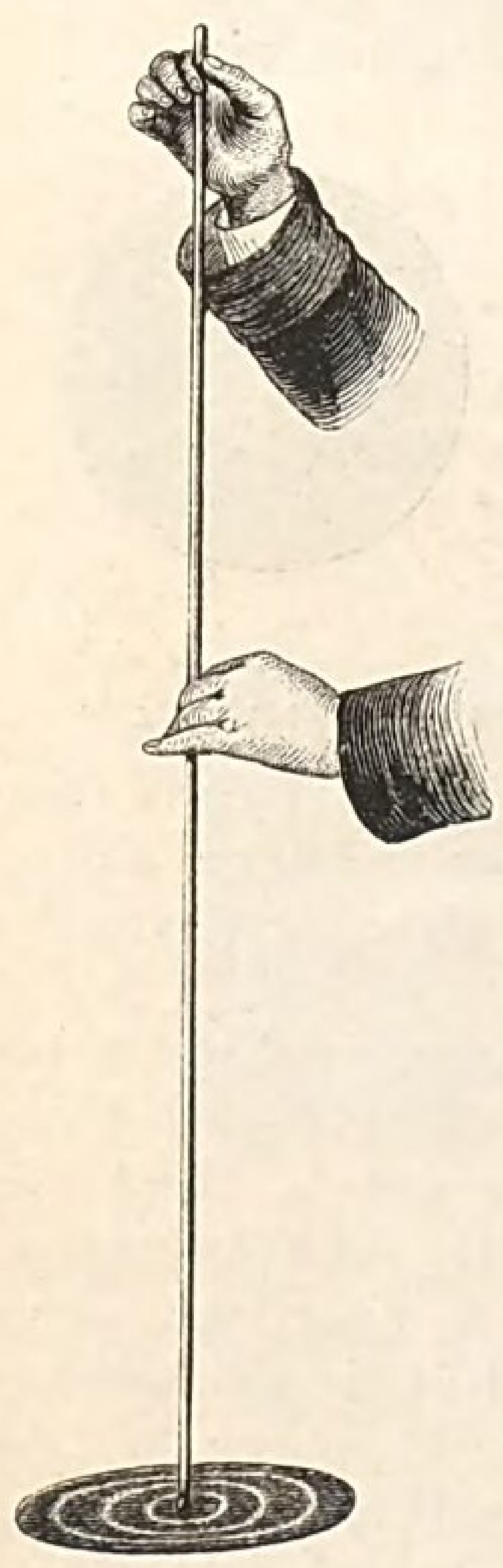


Fig. 761.



Fig. 762.

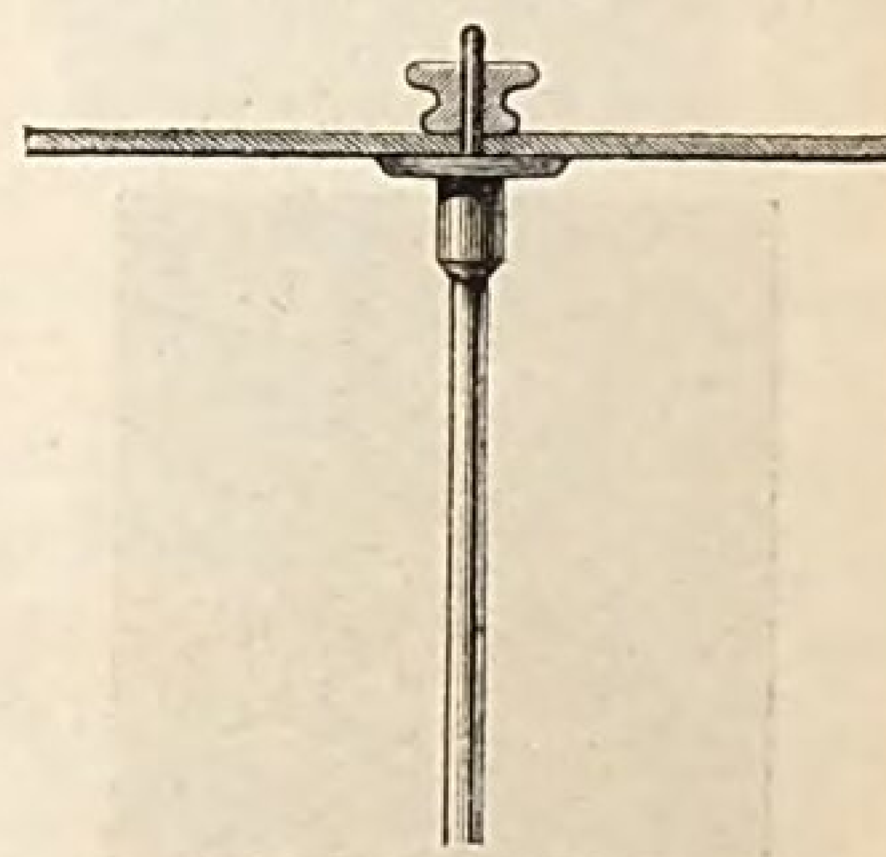
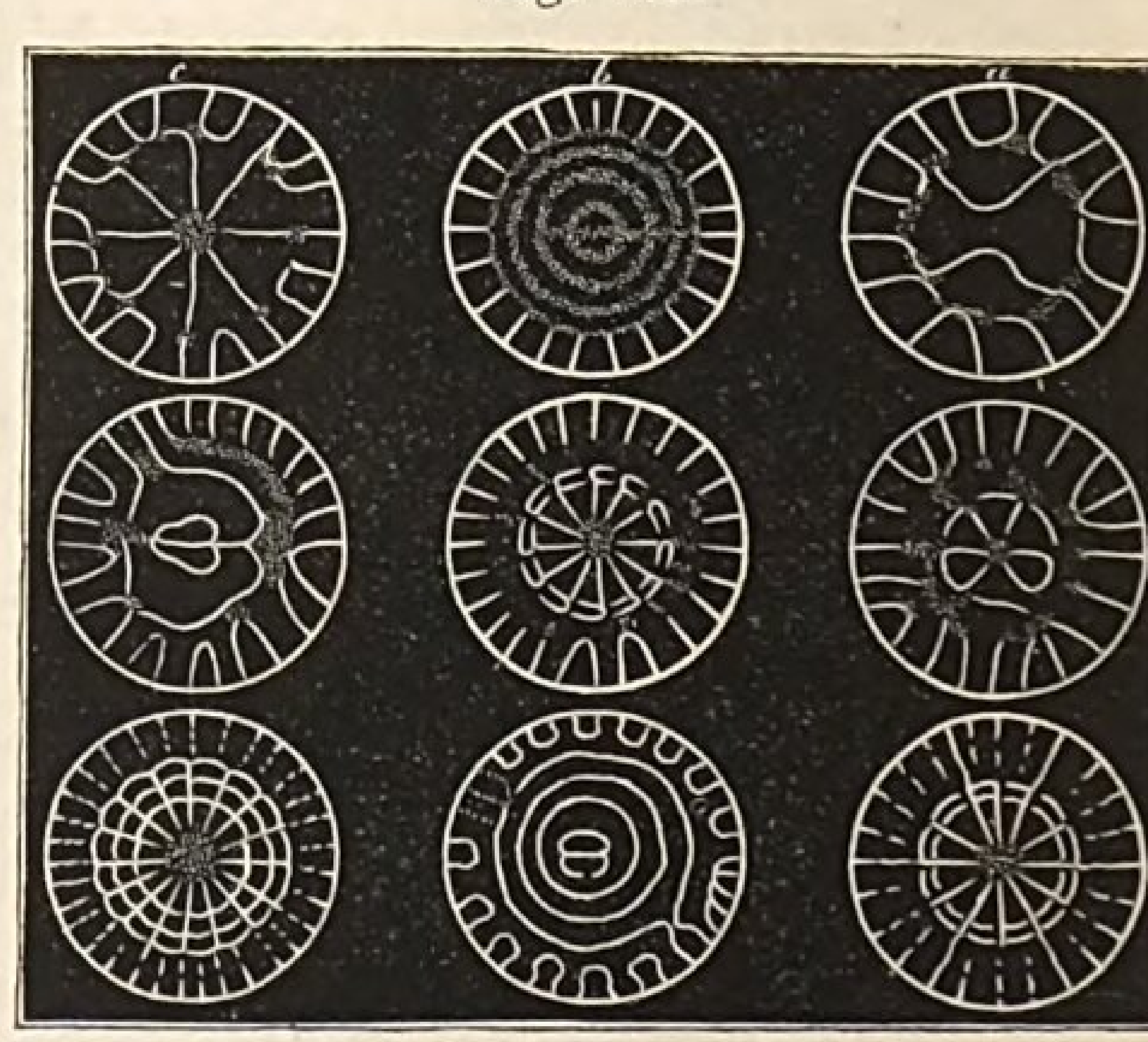


Fig. 763.



man den Stab in der Mitte seiner Länge zwischen zwei Fingern der linken Hand festhält und am oberen Ende dann mit den Fingern der

anderen Hand, zwischen denen man vorher etwas Kolophonium zerrieben hat, herabstreicht, wie Fig. 760 andeutet, so giebt der Stahlstab seinen Längston und der auf die Platte gestreute Sand ordnet sich dabei zu mehreren concentrischen Ringen.

Dieser Versuch lässt sich auch dahin abändern, dass man eine Glas- oder Metallplatte in der Fig. 761 und Fig. 762 anschaulich gemachten Weise auf dem oberen Ende eines gegen 7 dm langen, 4 bis 6 mm dicken, unten in einen Holzklotz eingeleimten Holzstäbchens befestigt und dieses durch Streichen mit dem Finger zum Tönen bringt.

Das gemischte System von Knotenlinien besteht aus diametralen Linien, welche mehr oder weniger gebogen, und Kreisen, die ebenfalls mehr oder weniger verändert sind. Um solche Figuren zu erhalten, ist immer einige Geschicklichkeit nöthig; das Princip besteht darin, mit den Fingern auf mehrere der Punkte zu drücken, durch welche die Knoten-

Fig. 764.

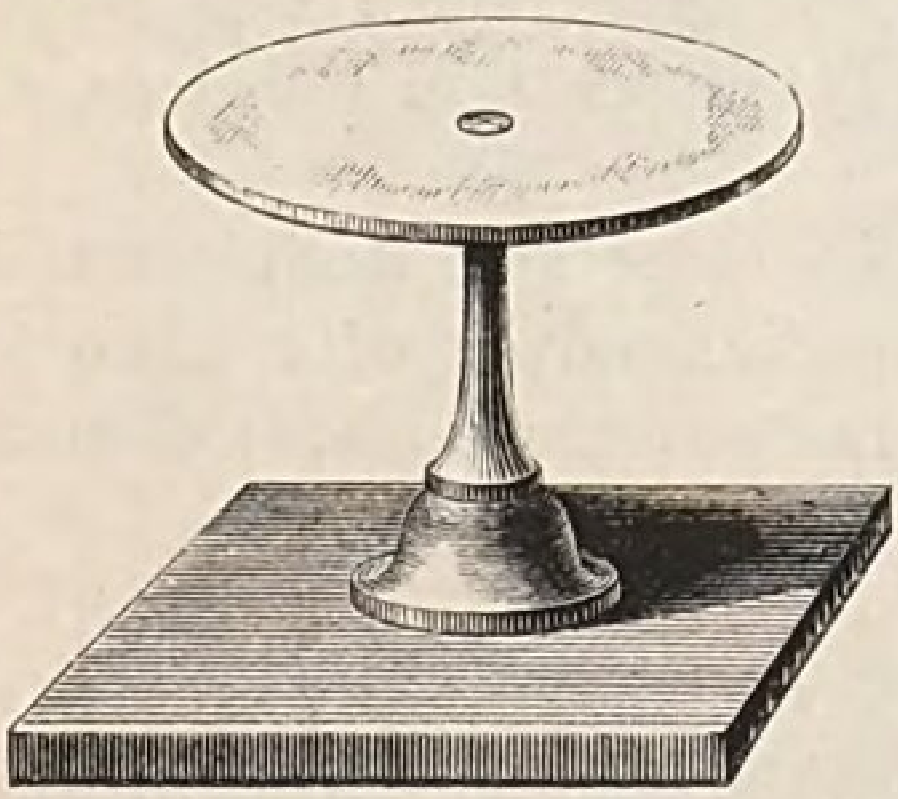
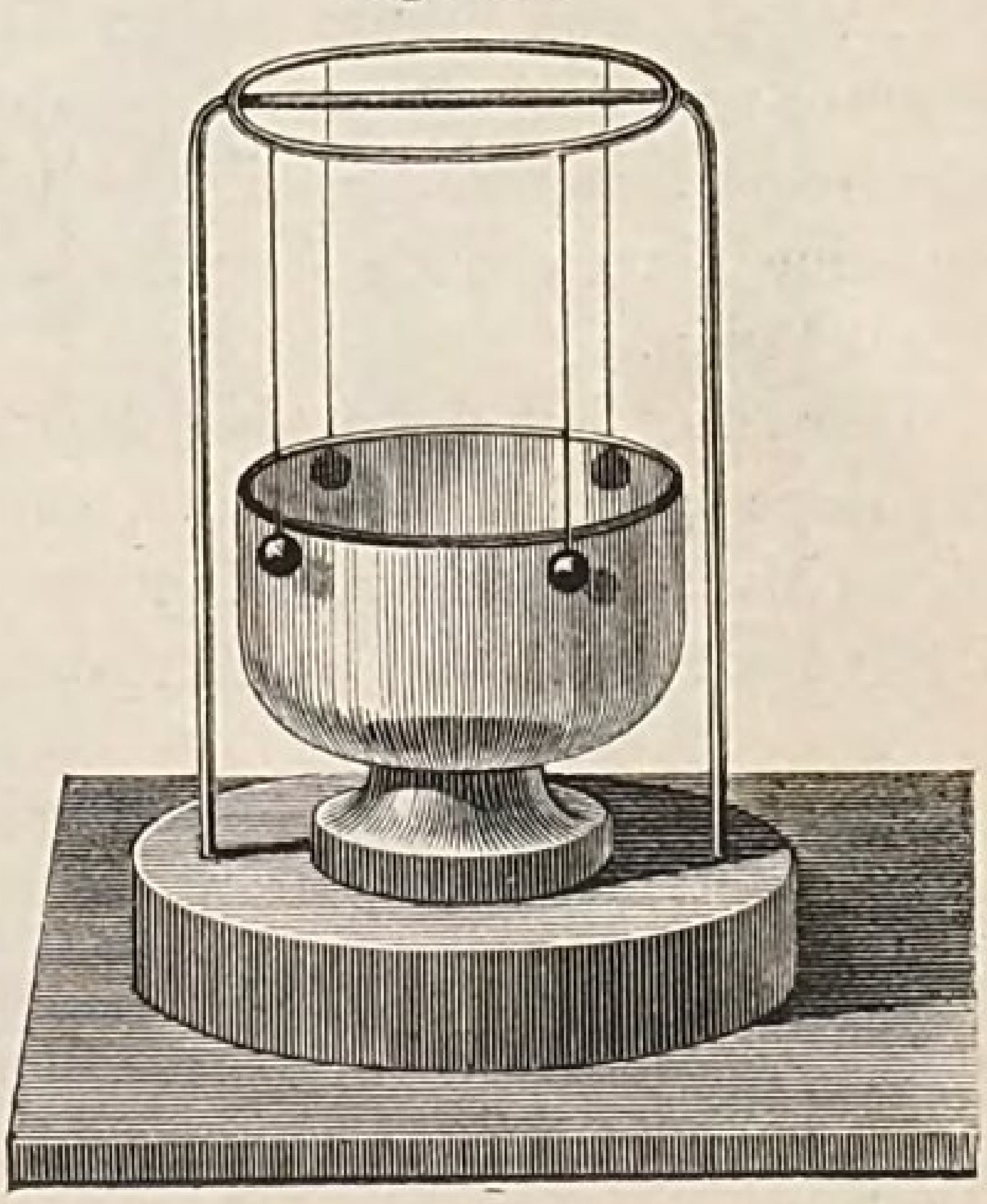


Fig. 765.



linien gehen sollen. In Fig. 763 sind mehrere solcher zusammengesetzten Klangfiguren zusammengestellt.

Savart hat auch die Klangfiguren runder Platten studirt und hat z. B. gefunden, dass die diametralen Linien sich nicht bis zur Mitte fortpflanzen, wenn ihre Anzahl etwas gross wird. Nach Strehlke sind überhaupt alle Knotenlinien gekrümmt, die scheinbar geraden Linien in manchen dieser Figuren sind nur Zweige hyperbolischer Curven.

Eine merkwürdige, von Savart aufgefundene Thatsache ist die Verrückung der Knotenlinien. Wenn man eine sorgfältig gearbeitete Messingplatte von ungefähr 4 dcm Durchmesser und 2 bis 3 mm Dicke in der Weise befestigt, wie man Fig. 764 sieht, und, nachdem man *Semen lycopodii*, welches weit leichter ist als Sand, darauf gestreut hat, mit einem Fiedelbogen am Rande streicht, so beobachtet man, für gewisse tiefe und volle Töne, welche einer diametralen Figur von 4, 6

oder 8 Strahlen entsprechen, dann die Knotenlinien nicht fest bleiben; sie erleiden eine entschiedene Oscillationsbewegung, und wenn man mit der Bewegung des Fiedelbogens fortfährt, gelangt man selbst dahin, ihnen eine continuirliche Rotationsbewegung zu ertheilen, so dass das Pulver eine Art Wirbel bildet, welcher in einer bestimmten Entfernung vom Umfange der Scheibe, dem er parallel bleibt, die Ebene der Scheibe durchläuft. Savart erklärt diese interessante Erscheinung auf folgende Weise: In den Scheiben, sie mögen noch so gut gearbeitet sein, ist die Elasticität nicht nach allen Richtungen dieselbe; es giebt zwei Durchmesser, von welchen einer der grössten, ein anderer der kleinsten Elasticität entspricht. Wenn man nun mit dem Fiedelbogen an einer solchen Stelle anstreicht, dass die Knotenlinien auf diese Durchmesser fallen, so bleiben die Knotenlinien unbeweglich; wenn man aber an einem anderen Punkte anstreicht, so sind die Bewegungen, welche der Fiedelbogen an dem Rande der Scheibe hervorbringt, unsymmetrisch, und die Knotenlinien, welche sich bilden, haben ein Bestreben, in die erste Lage zurückzukehren, und deshalb oscilliren sie um diese Lage, oder sie drehen sich continuirlich, wenn die hinlänglich grossen Excursionen der Scheibe ihnen eine hinreichende Amplitude geben, damit sie ihre Ruhelage verlassen können.

Faraday hat dann aber durch Versuche unter dem Recipienten der Luftpumpe gezeigt, dass die vom Lycopodiumpulver oder ähnlichen leichten Massen gebildeten Figuren durch Luftströmungen entstehen und vollständig ausbleiben, wenn man die Luft ausschliesst.

214 **Theorie der Klangfiguren.** Wir verdanken Wheatstone*) die erste in der Hauptsache befriedigende Erklärung der Chladni'schen Klangfiguren. Dieselbe beruht auf der Annahme, dass sich auf der Platte zwei (oder auch vier) Systeme von Schwingungen, deren Knotenlinien sich durchkreuzen, zu einem resultirenden Schwingungssystem vereinigen.

Nehmen wir als einfachsten Fall jenen der quadratischen Platte. Fassen wir dieselbe als einen Stab auf, welcher in der Weise zum Schwingen gebracht werde, dass sich, wie in Fig. 766, Knotenlinien nach ab und cd und wie in Fig. 768 nach ef und gh ausbilden, während die dazwischen liegenden Felder nach entgegengesetzten Richtungen schwingen. Wir können uns denken, dass in einem gegebenen Moment die schattirten Stellen nach aufwärts, die nicht schattirten nach abwärts in Bewegung seien. Wirken nun die Anregungen zu beiden Schwingungssystemen in einer und derselben Platte zusammen, so wird man das resultirende Schwingungssystem ableiten können, indem man sich die Fig. 766 und 768 über einander gelegt denkt, wie es in Fig. 767 ausgeführt erscheint. Dabei ist fürs Erste sicher, dass die doppelt schattirten Stellen

*) Phylos. Transact. 1833.

entgegengesetzt mit jenen schwingen, wo keine Schattirung hintrifft. Ferner ist einleuchtend, dass jene Stellen, welche an den Durchschneidungsstellen der ursprünglichen Knotenlinien liegen, auch hier in Ruhe bleiben werden. Da ferner die Richtungen nach unten und nach oben durchaus gleichwerthig sind und daher keine von beiden überwiegen kann, so werden die Knotenlinien zwischen den Grenzen der doppelt schattirten und der hell gebliebenen Felder symmetrisch hindurchgehen müssen. Diese Schlüsse lassen uns einsehen, dass die resultirenden Knotenlinien mit den beiden Diagonalen des Quadrates zusammenfallen müssen.

Für den anderen Fall, dass in beiden ursprünglichen Schwingungssystemen die mittleren Felder gleiche Schwingungsrichtung hatten, wie in Fig. 769 und 771 angedeutet ist, führt eine ganz ähnliche Betrachtungsweise zu der resultirenden Fig. 770. Die Knotenlinien haben in

Fig. 766.

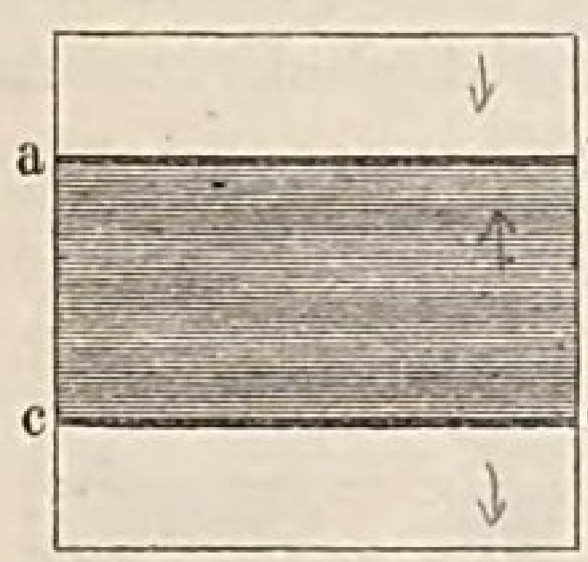


Fig. 767.

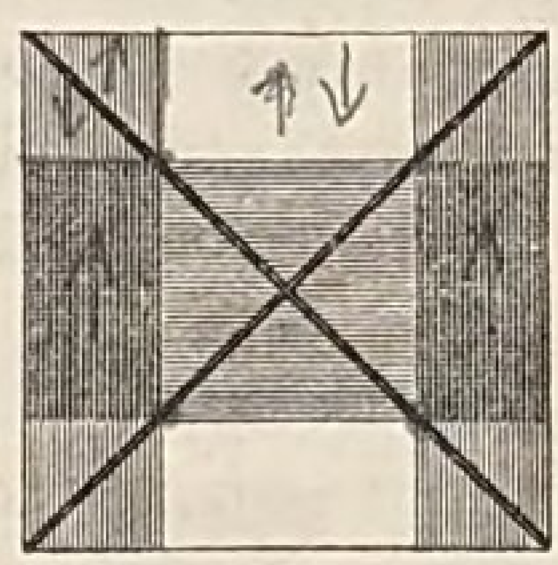


Fig. 768.

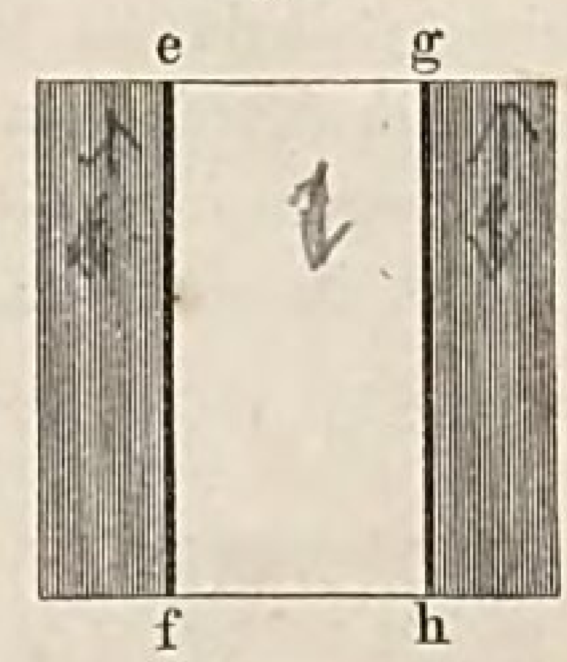


Fig. 769.

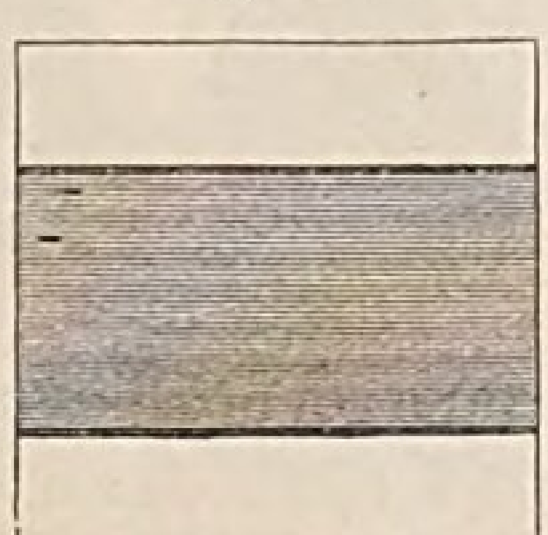


Fig. 770.

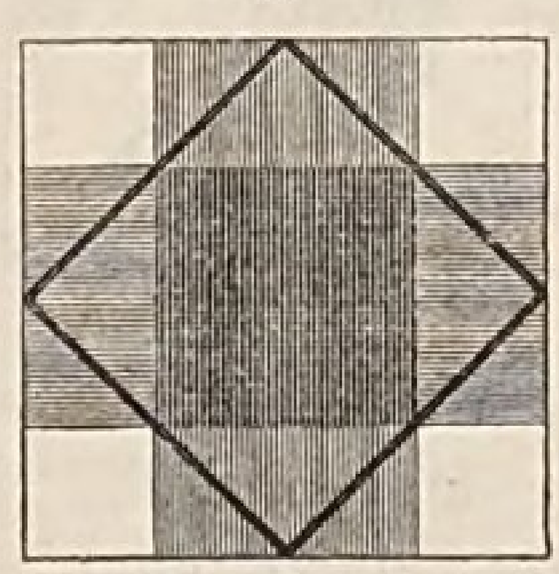
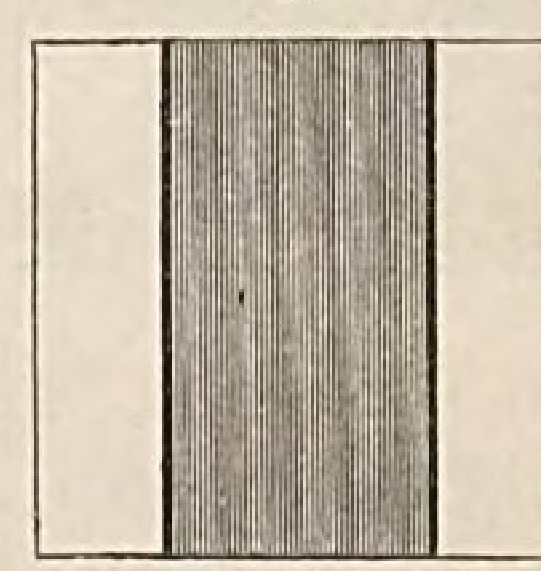


Fig. 771.



diesem Falle die Lage von Geraden, welche die Mitten der benachbarten Quadratseiten verbinden.

In ähnlicher Weise hat Wheatstone componirende Schwingungen mit Knotenlinien von verschiedener Anzahl und von verschiedener Neigung gegen die Saiten der Platten zusammengesetzt und dadurch eine Anzahl von 47 Chladni'schen Figuren erklärt. Wir müssen uns aus Raummangel versagen, hierauf näher einzugehen. Dagegen giebt es noch eine Anzahl von Chladni'schen Figuren, nämlich alle mit krummen Knotenlinien, welche sich nur durch Uebereinanderlagerung von vier einfachen Figuren ableiten lassen.

Es seien als Beispiel die vier schwingenden Platten in Fig. 772, 773, 774, 775 (a. f. S.) mit den ursprünglichen Knotenlinien gegeben und es sollen wiederum die schattirten Felder jene Punkte der Platte darstellen, welche gleichzeitig momentan nach aufwärts schwingen. Durch Ueber-

einanderlegung von Fig. 772 und 773, sowie von Fig. 774 und 775 entstehen zunächst die Figuren 776 und 778. Zeichnet man in diese nach den oben entwickelten Grundsätzen die resultirenden Knotenlinien ein, so erhält man hiefür Gerade, welche parallel den Quadratseiten ver-

Fig. 772.

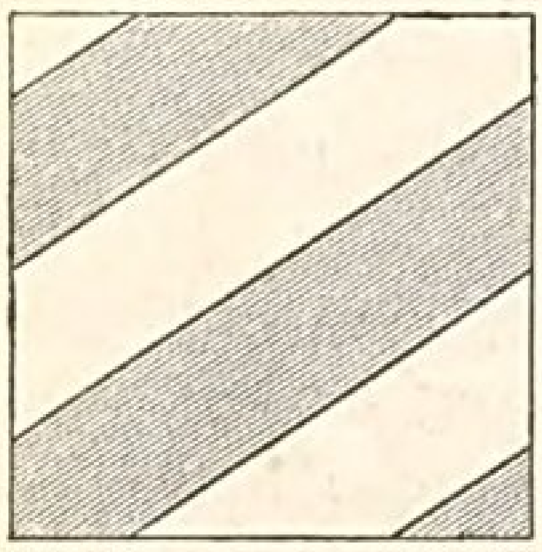


Fig. 773.

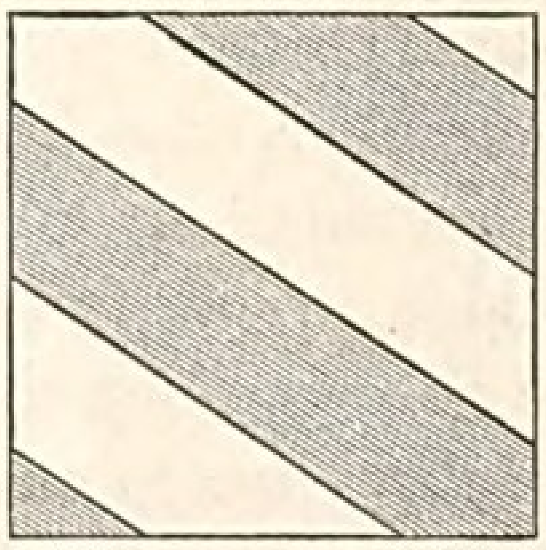


Fig. 774.

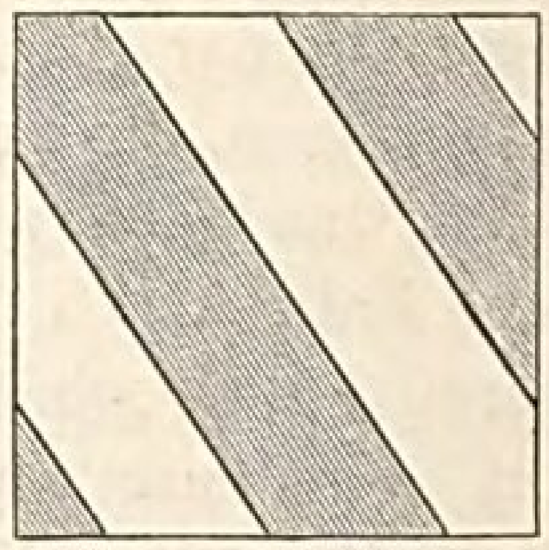
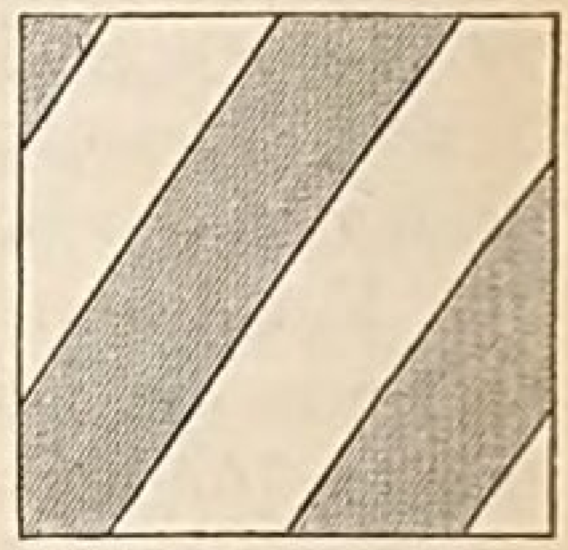


Fig. 775.



laufen. Die Figuren 779 und 781 stellen die nämlichen Knotenlinien dar, wobei jedoch die Felder so mit Schattirung ausgefüllt sind, dass wiederum die momentan nach aufwärts bewegten dunkel erscheinen.

Legt man nun diese beiden Figuren über einander, so erhält man die Fig. 780, in welcher man wiederum nach denselben Grundsätzen die

Fig. 776.

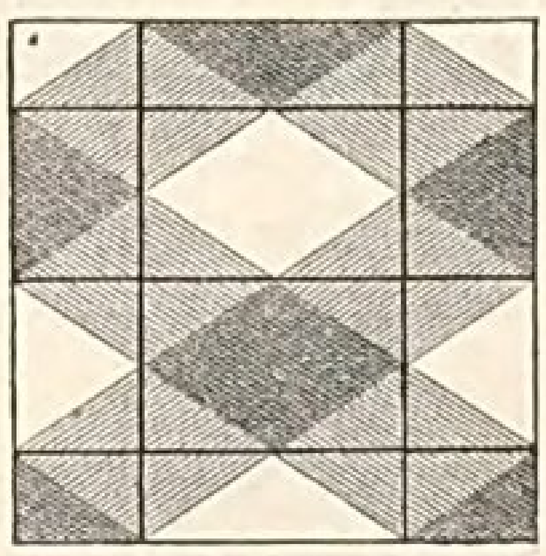


Fig. 777.

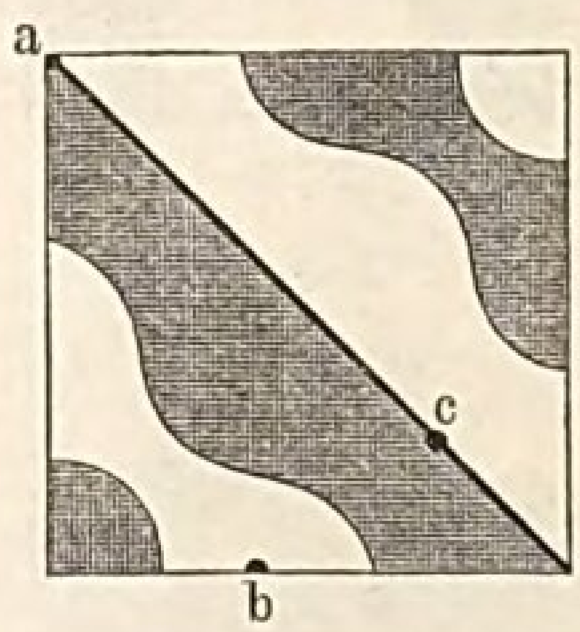
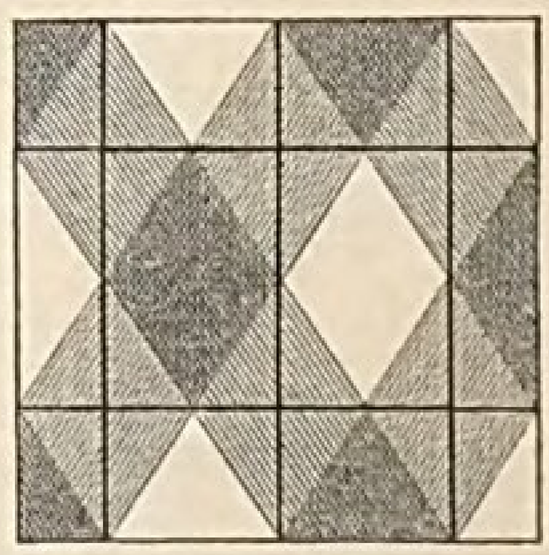


Fig. 778.



Knotenlinien erhält, von denen eine Gerade nach der Diagonale des Quadrates, die übrigen aber Curven sind. Fig. 777 stellt den resultirenden Schwingungszustand der Platte vor; *c* ist der Befestigungspunkt, bei *b* wird der Bogen, bei *a* der Finger angesetzt. Siehe auch Fig. 753, Seite 770.

Fig. 779.

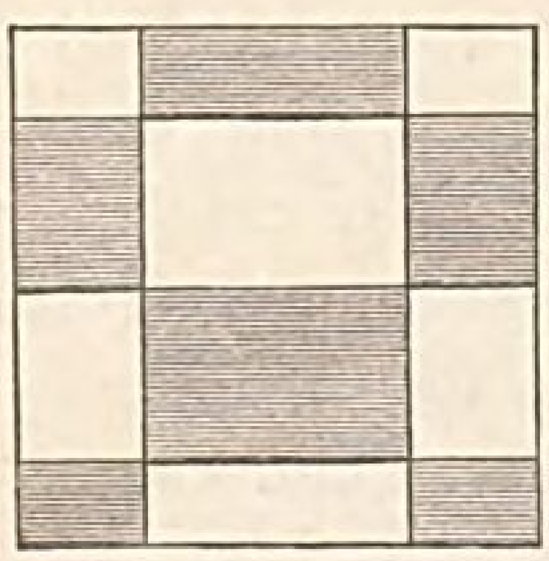


Fig. 780.

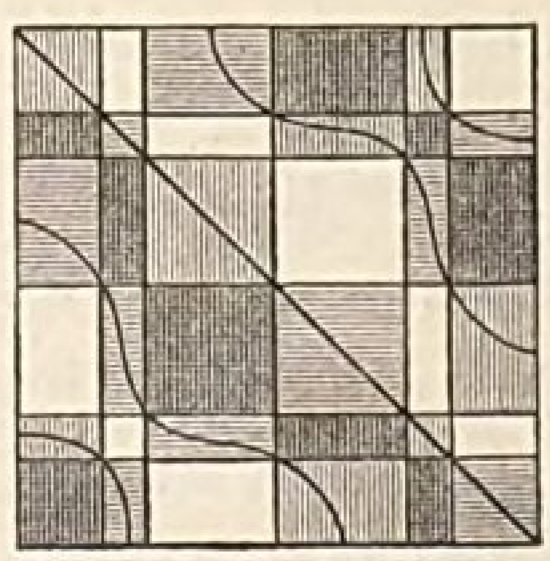
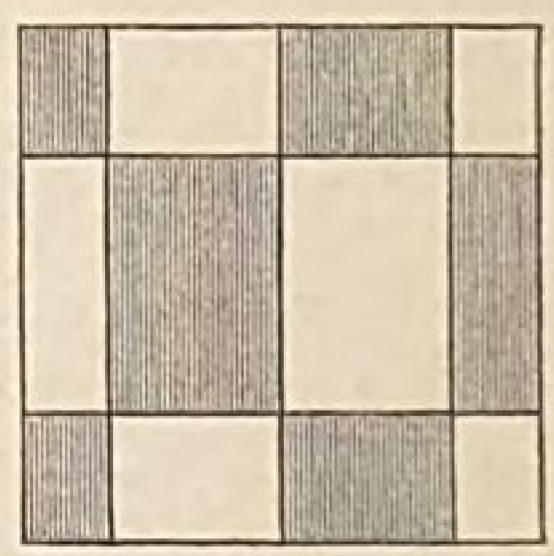


Fig. 781.



Es ist einleuchtend, dass auf diese Weise kein ganz genaues Resultat zu erhalten ist und dass man zur Erzielung eines solchen die Grösse der componirenden Elongationen für jeden Punkt der Platte berücksichtigen müsste.

Die Erklärungsweise von Wheatstone wird unterstützt durch die früheren Versuche der Gebrüder Weber*), welche durch Interferenz von Flüssigkeitswellen in quadratischen Gefässen dieselben Ruhelinien erhalten hatten. Ferner sprechen für dieselbe die Versuche Savarts**) mit ungleichartig elastischen Platten, sowie jene von Wheatstone mit rechteckigen Holzplatten, an denen nur dann die Klangfigur mit Diagonalen sich ausbildet, wenn die Seiten des Rechtecks sich wie die Grössen der Elasticitätsachsen verhalten, da nur dann die Töne der combinirenden Schwingungen gleiche Höhe haben.

Eine Erweiterung der Wheatstone'schen Theorie wurde dann durch die Versuche von R. König***) mit rechteckigen Platten von Messing angebahnt, bei welchen die Dimensionen so gewählt waren, dass die Töne nahe gleiche Höhe hatten, welche entstanden, wenn sich die Platte nach Knotenlinien parallel zur einen oder zur anderen Seite des Rechteckes abtheilte. Dabei war jedoch die Anzahl der Knotenlinien nach beiden Richtungen verschieden. Die Fig. 782, 783, 784 geben hierfür ein Beispiel. Die Platte Fig. 782 giebt in drei Theilen schwingend nahe denselben Ton wie die Platte 784, wenn sie in vier Abtheilungen schwingt. Ihre Combination Fig. 783 führt zu der daselbst eingetragenen Knotenlinie, welche, wie auch in anderen Fällen, wesentlich analoge Form hat, wie die demselben Zahlenverhältnisse entsprechende Lissajous'sche Figur.

Fig. 782.



Fig. 783.

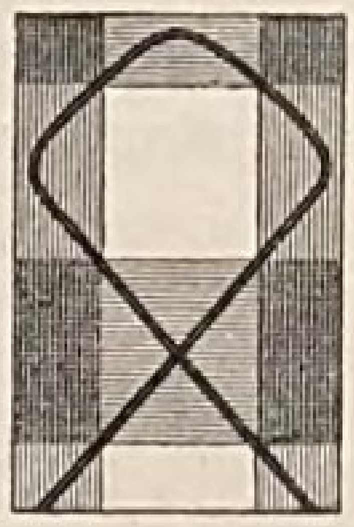
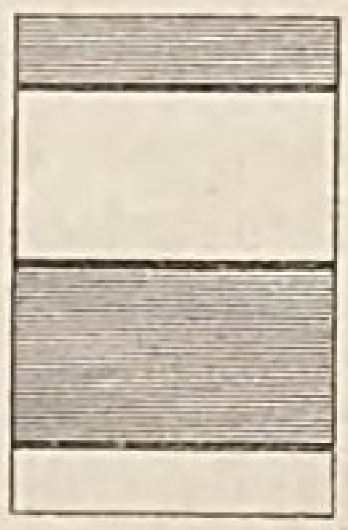


Fig. 784.



Noch nicht erklärt ist die bei Stäben und Platten dieser Art constatirte Thatsache, dass der Ton der Combinationsfigur und diese selbst am reinsten und leichtesten sich ausbildet, wenn die Töne der componirenden Schwingungen nicht genau im Unisono stehen, sondern ein Intervall eines starken ganzen Tones bilden. Strehlke†) hat ferner bei genauerer Untersuchung der Figuren nachgewiesen, dass die Knotenlinien der quadratischen Platten stets krumme Linien seien und dass sich dieselben nie durchschneiden. Eine vollständige mathematische Theorie der Figuren für quadratische und rechteckige Platten fehlt bis jetzt. Dagegen hat Kirchhoff††) eine solche für kreisförmige Platten ausgearbeitet, nachdem er eine ältere von Poisson als nicht ganz richtig erkannt hatte. Durch sehr sorgfältige Messungen von Strehlke wurde die Kirchhoff'sche Theorie bestätigt. So z. B. berechnete Kirchhoff, unter Annahme des Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilata-

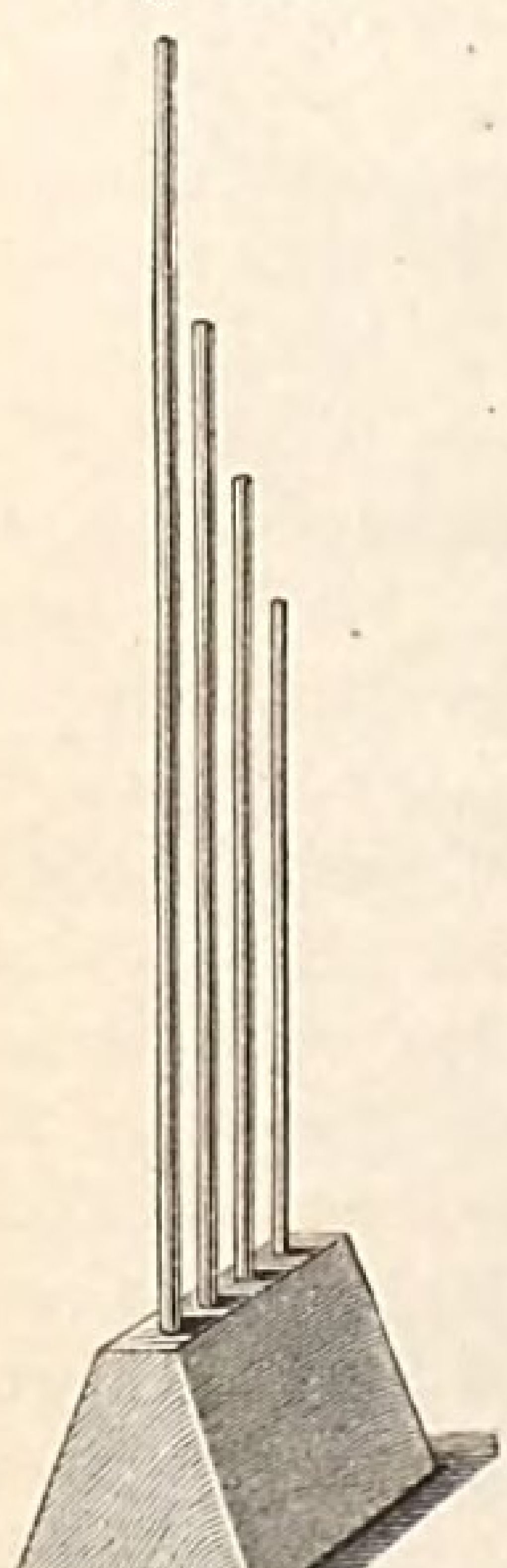
*) Wellenlehre 1825, S. 474.
**) Pogg. Ann. XVI.
***) Pogg. Ann. CXXII, S. 238.
†) Pogg. Ann. IV, XVIII, XXVII.
††) Crelle's Journ. f. Math. XL.

tion = $\frac{1}{3}$ (s. S. 342), den Durchmesser des Knotenkreises in Fig. 758 zu 0,6794 des Scheibendurchmessers, Strehlke fand an einer sorgfältig gearbeiteten Glasscheibe 0,6792 und 0,6782. Etwas weniger gut stimmen die aus der Theorie abgeleiteten Tonhöhen, deren Beziehung zur Anzahl der Knotenlinien eine sehr complicirte ist.

215 **Longitudinalschwingungen der Saiten und Stäbe.** Wir haben bisher nur die Querschwingungen der Saiten und Stäbe betrachtet; dieselben können aber auch ihrer Länge nach schwingen, ganz ähnlich wie eine in einer Röhre eingeschlossene Luftsäule. Solche Längenschwingungen kann man dadurch erzielen, dass man eine gespannte Saite unter sehr spitzem Winkel mit einem Fiedelbogen streicht oder eine Glasröhre mit nassen Fingern oder einem nassen Tuche der Länge nach reibt.

Nimmt man z. B. eine Glasröhre von etwa 2 m Länge, welche einen Durchmesser von 2 bis 3 cm hat, und hält man sie in der Mitte mit einer Hand fest, während man die andere Hälfte mit einem in der anderen Hand gehaltenen nassen Tuche reibt, so wird man einen Ton hören, den man mit einiger Geschicklichkeit leicht rein und voll erhalten kann*). Die Schwingungen, welche man auf diese Weise erzeugt, sind offenbar Longitudinalschwingungen. Durch schnelleres Reiben und stärkeren Druck kann man ausser dem Grundton des Stabes auch noch höhere Töne erzeugen. Die Schwingungen können dabei leicht so sehr gesteigert werden, dass die stärkste Glasröhre in viele Stücke zerbricht.

Fig. 785.



Man erhält dieselben Resultate mit langen cylindrischen und prismatischen vollen Glasstäbchen, mit Röhren und Stäben von Holz und Metall; bei den letzteren wendet man aber statt des nassen Tuches ein mit Harz bestreutes Tuch an.

Zur Hervorbringung von Longitudinalschwingungen hölzerner Stäbe kann man den Apparat Fig. 785 anwenden. In einem Holzklotz von entsprechender Grösse sind mehrere Holzstäbchen von ungefähr 6 mm Dicke eingeleimt. Streicht man diese Stäbchen von oben nach unten fahrend zwischen zwei Fingern, mit denen man vorher etwas Kolophonium gerieben hat, so entstehen reine volle Töne. Gesetzt, die Länge der Stäbchen verhielte sich wie 30 : 24 : 20 : 15, so geben sie den Grundton, seine grosse Terz, seine Quint und seine Octav.

Die Longitudinalschwingungen eines Stabes sind im Wesentlichen den Vibrationen der Luftsäulen in Pfeifen ganz analog, d. h. die einzel-

*) Einen hiezu geeigneten Apparat hat R. König angegeben.

nen Querschichten oscilliren in der Richtung der Längenachse des Stabes hin und her. Der Longitudinalton eines Stabes ist demnach zunächst von seiner Länge abhängig. Die Schwingungszahlen zweier Stäbe desselben Materials verhalten sich verkehrt wie ihre Längen. Man kann sich davon leicht mit Hülfe des Apparates Fig. 785 überzeugen.

Stäbe, welche in der Mitte festgehalten, an beiden Enden aber frei sind, verhalten sich wie offene Pfeifen; Stäbe dagegen, welche an einem Ende befestigt sind, wie die in Fig. 785, verhalten sich wie gedeckte Pfeifen.

Wie die Tonhöhe der Pfeifen von dem Querschnitte derselben nicht ganz unabhängig ist, so verhält es sich auch mit den Längsschwingungen von Stäben. Von zwei Stäben derselben Holzart, welche gleiche Länge, aber ungleichen Durchmesser haben, giebt der dickere einen etwas höheren Ton.

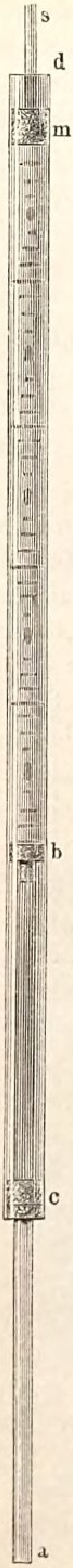
Wenn ein Stab denselben Ton durch longitudinale und transversale Erregung zu geben vermag, so treten die Längen- und Querschwingungen immer gleichzeitig auf, man mag den Stab longitudinal oder transversal in Schwingungen versetzen. Diese von Terquem entdeckte Thatsache dient auch zur Erklärung der eigenthümlichen Anordnung der Knotenlinien an Stäben mit quadratischem Querschnitt, welche von Savart beobachtet und von Seebeck zuerst richtig gedeutet worden sind. Demnach ist es also nicht möglich, in einem Körper, welcher nach zwei verschiedenen Schwingungsarten in nahe gleicher Tonhöhe zu schwingen vermag, einen dieser Töne isolirt hervorzurufen.

Da die Longitudinalschwingungen von Stäben, deren eines Ende vollkommen festgeklemmt ist, wie in Fig. 785, ganz den Gesetzen der stehenden Schwingungen in Röhren eingeschlossener Luftsäulen folgen, so ist auch die Länge eines solchen Stabes $1/4$ der Wellenlänge, mit welcher sich sein Grundton in dem Medium des Stabes fortpflanzen würde.

Dies giebt ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in irgend einem festen Stoffe experimentell zu bestimmen. Man mache nur aus diesem Stoffe einen Stab, den man mit seinem einen Ende festklemmt, um ihn dann in Longitudinalschwingungen zu versetzen. Es verhält sich dann die Länge des Stabes zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in seinem Material, wie die Länge einer gedeckten Pfeife, welche denselben Ton giebt, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft.

So findet man z. B., dass ein 1 m langer Stab von Erlenholz, in der durch Fig. 785 erläuterten Weise befestigt, einen Longitudinalton giebt, welcher dem Longitudinalton einer 7 cm langen gedeckten Pfeife gleich ist. Die Wellenlänge eines Tones in Erlenholz verhält sich demnach zur Wellenlänge desselben Tones in Luft wie 1 zu 0,07, die

Fig. 787.



Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist also $\frac{100}{7}$ $= 14{,}3$ mal grösser für Erlenholz als für Luft.

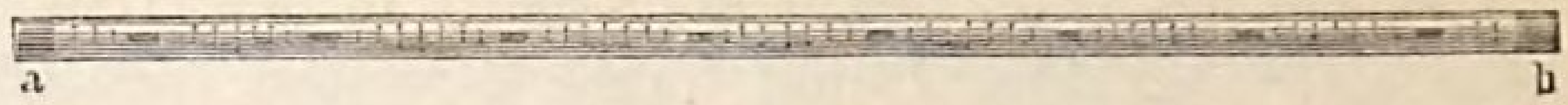
Nach dieser Methode haben Chladni sowohl wie auch Savart die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen festen Körpern bestimmt.

Die folgende Tabelle enthält einige der von Chladni erhaltenen Resultate.

Namen der Substanzen	Geschwindigkeit, verglichen mit Schallgeschwindigkeit in der Luft
Fischbein	$6^2/_3$
Zinn	$7^1/_2$
Silber	9
Nussbaumholz	$10^2/_3$
Messing	$10^2/_3$
Eichenholz	$10^2/_3$
Kupfer	12
Ahornholz	$12^1/_3$
Akacienholz	$14^2/_5$
Ebenholz	$14^2/_5$
Erlenholz	$14^2/_5$
Lindenholz	15
Glas	$16^2/_3$
Eisen oder Stahl	$16^2/_3$
Tannenholz	18

Wenn eine ungefähr 1 m lange, 2 cm weite, nach der in §. 194 besprochenen Weise mit Lycopodium oder Korkstaub versehene, an jedem Ende durch einen wohl passenden Kork geschlossene Glasröhre *ab*, Fig. 786, in horizontaler Lage in

Fig. 786.



ihrer Mitte festgeklemmt und durch Reiben mit einem befeuchteten wollenen Lappen zum Tönen gebracht wird, so bilden sich in der Röhre ähnliche Staubfiguren, wie wir sie bereits in §. 194 kennen lernten. Diese Staubfiguren rühren von stehenden Luftwellen her, welche dadurch entstehen, dass die geschlossenen Enden der Röhre bei der abwechseln-

den Verlängerung und Verkürzung derselben die eingeschlossene Luft abwechselnd ausdehnen und verdichten und sie auf diese Weise in stehende Schwingungen versetzen, deren Ton genau derselbe ist, wie der der Glasröhre. Da nun im Glase die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beinahe 16 mal so gross ist als in der Luft, da ferner die Länge des Rohres ab gleich ist der halben Wellenlänge ihres Tones in Glas, so müssen auf die Luftsäule in ab 16 halbe Wellenlängen kommen, die Staubfigur in derselben wird also stets 16 Maxima und Minima zeigen müssen, welches auch die Länge der Röhre sein mag.

Fig. 788.

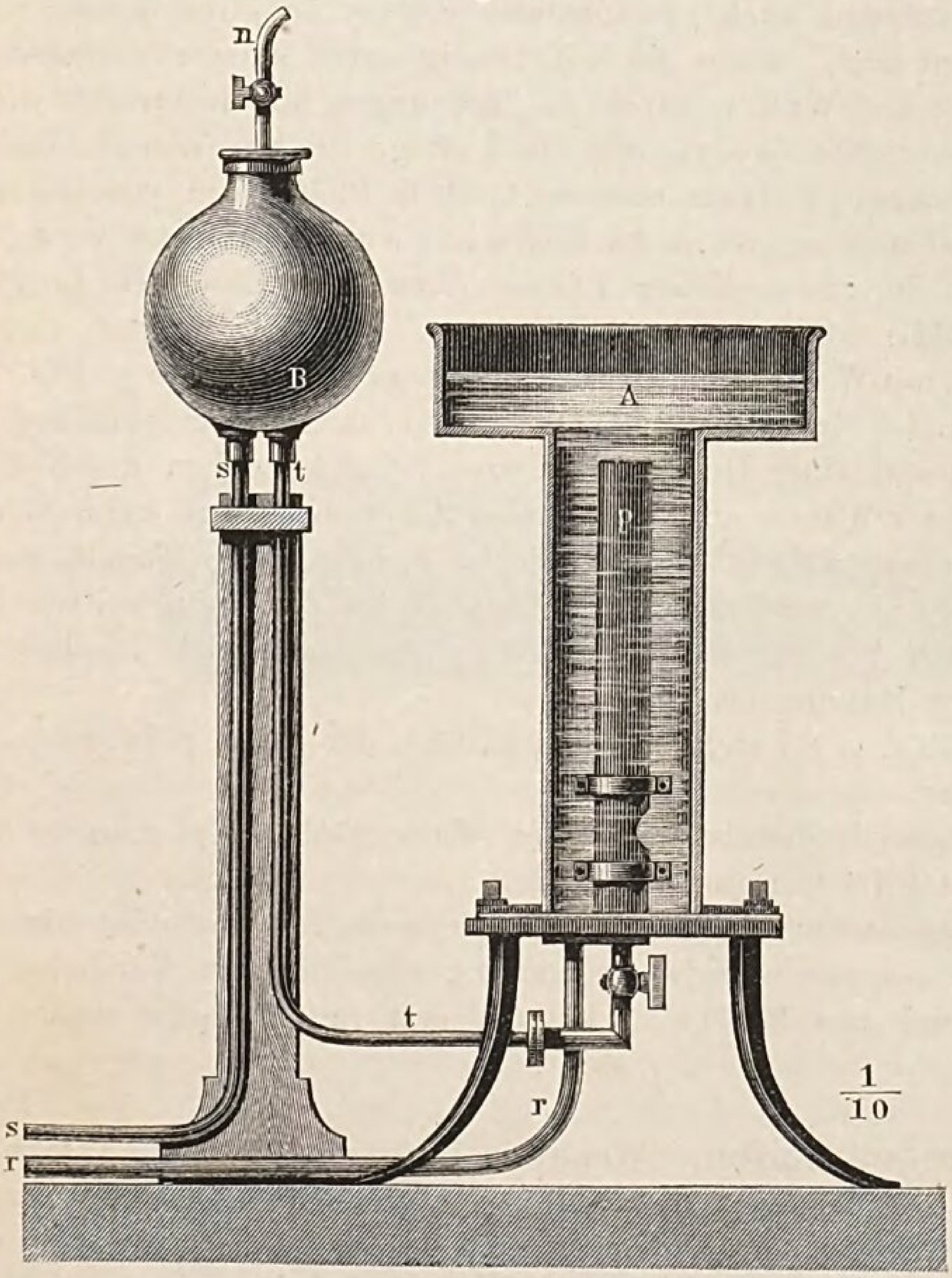
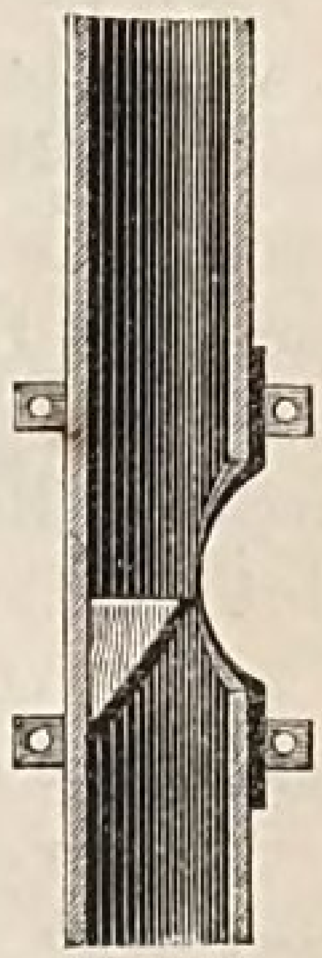


Fig. 789.



Bringt man statt Luft ein anderes Gas in die Röhre ab, so ändert sich auch die Länge der Staubwellen in derselben; sie wird 20, wenn die Röhre mit Kohlensäure, sie wird 10, wenn sie mit Leuchtgas gefüllt ist.

Der Apparat Fig. 787, den wir bereits in §. 194 kennen lernten, gestattet nun auch auf eine sehr einfache Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luft mit der verschiedener fester Stoffe zu ver-

gleichen. Man hat nur die Glasröhre *ab* durch einen gleich langen Stab des fraglichen Körpers zu ersetzen und den Versuch in der bekannten Weise zu wiederholen; die Länge der Staubwellen ändert sich, je nachdem man für *ab* einen anderen Stab einsetzt. Die halbe Länge einer Staubwelle wird $\frac{1}{12}$ *ab* sein, wenn *ab* ein Stab von Kupfer, sie wird $\frac{1}{18}$ *ab* sein, wenn der Stab *ab* aus Tannenholz besteht.

Hier dürfte wohl der geeignetste Ort für die Bemerkung sein, dass Wasser den Schall nicht allein zu leiten im Stande ist, sondern dass es unter Umständen auch als tönender Körper fungiren kann. Die Sirene ertönt auch, wenn sie vollständig unter Wasser getaucht ist und ein Strom von Wasser durch die Oeffnungen hindurchtreibt, wie es bei den gewöhnlichen Sirenen mit der Luft geschieht. Wertheim hat förmliche Wasserpfeifen construirt, d. h. Pfeifen, in welchen eine Wassersäule ebenso in tönende Schwingungen versetzt wird, wie die Luftsäule in gewöhnlichen Pfeifen (Annal. d. Chim. et de Phys. 3. Ser. T. XXIII).

Die ganz mit Wasser gefüllte, offene oder gedeckte Pfeife *p*, Fig. 788 (a. v. S.), befindet sich in einem 52 cm hohen, mit Wasser gefüllten Gefässe *A*. Mittelst einer Druckpumpe wird beim Aufziehen des Kolbens durch das Rohr *r* Wasser aus dem Gefässe *A* herausgesaugt, beim Niedergange des Kolbens aber wird es durch das Rohr *s* in den Windkessel *B* hineingepresst, aus welchem es durch den Druck der comprimirten Luft durch die Röhre *t* in den Fuss der Pfeife *p* getrieben wird. Die Röhre *n* führt zu einem Manometer.

Fig. 789 (a. v. S.) stellt das Mundstück der Pfeife *p* in grösserem Maassstabe dar.

Dieser Versuch beweist, dass die Wassersäule in *p* ganz in ähnlicher Weise vibrirt wie eine Luftsäule.

Die interessanten Erscheinungen, welche ein schwingender Glasstab im Polarisationsapparate zeigt, sowie die einschlägigen Versuche von A. Kundt und von E. Mach können erst in der Optik besprochen werden.

216 **Die Zungenpfeifen.** Wenn ein Luftstrom durch eine Oeffnung hervordringt, welche durch die Vibrationen eines elastischen Körpers in regelmässigen Intervallen geschlossen und wieder geöffnet wird, so entsteht ein Ton ganz in der Weise, welche wir bei der Sirene kennen lernten. Bei jedem Freiwerden der Oeffnung nämlich entsteht ein Luftstoss, welcher eine Verdichtungswelle erzeugt. Solche Instrumente nun, durch welche nach diesem Princip Töne erzeugt werden, nennt man Zungenwerke.

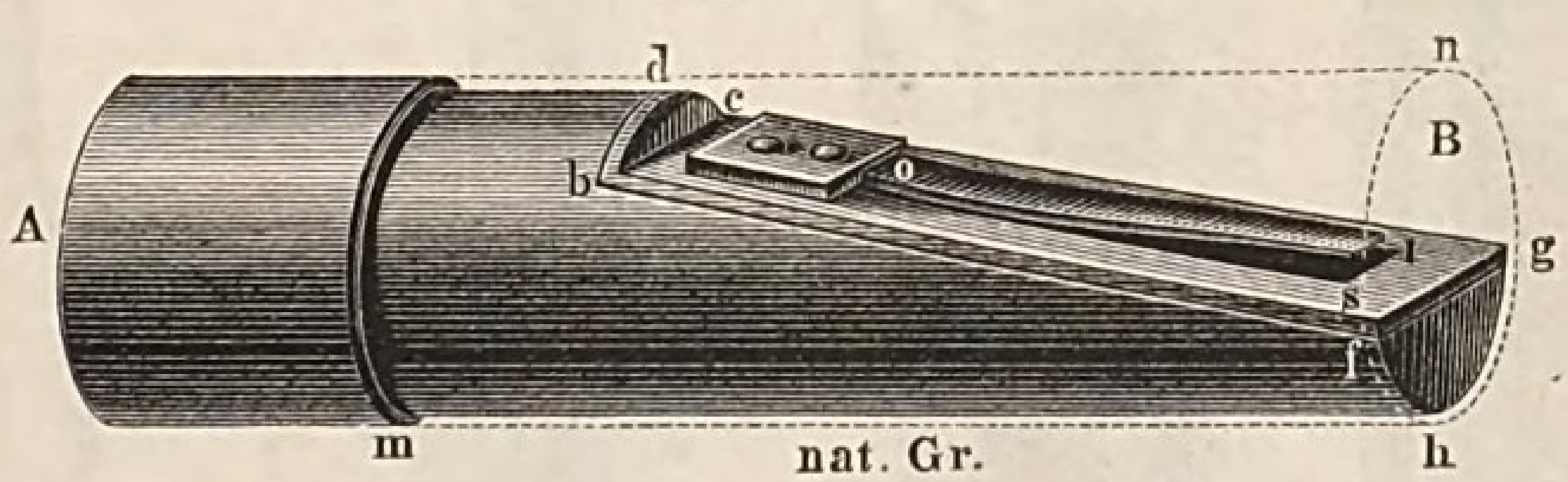
Eine der einfachsten Formen der Zungenpfeifen ist in Fig. 790 dargestellt. Von einem bei *A* offenen Messingrohre ist durch einen

schrägen Schnitt ein Stück abgeschnitten und auf die Schnittfläche die Messingplatte *bcfg* aufgelöthet; ausserdem ist aber das Messingrohr durch die Messingstücke *bdc* und *fhg* auf der rechten Seite vollständig geschlossen, so dass man einen Hohlraum hat, welcher einerseits geschlossen, bei *A* aber offen ist.

Aus der Messingplatte *bfgc* ist oben eine rectanguläre Oeffnung *ost* ausgeschnitten und über derselben ein federnder Metallstreifen, eine sogenannte Zunge, angebracht, welche nur um sehr weniges kürzer und schmäler ist, als die Oeffnung *ost*. In ihrer Ruhelage steht das freie Ende der Zunge ein wenig in die Höhe, etwas niedergedrückt passt sie aber fast ganz genau in dieselbe hinein, so dass bei dieser Lage die Oeffnung durch die Zunge geschlossen ist.

Wenn man die Zunge auf irgend eine Weise, etwa mittelst des Fingernagels, ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage herausbiegt und dann loslässt, so hört man einen ganz schwachen, klanglosen, sehr bald wieder verschwindenden Ton; in dieser Weise könnten also die Schwingungen des federnden Metallstreifens nicht für musikalische Zwecke verwendet werden. Um mittelst der Zunge kräftige Töne zu erzeugen,

Fig. 790.



nat. Gr.

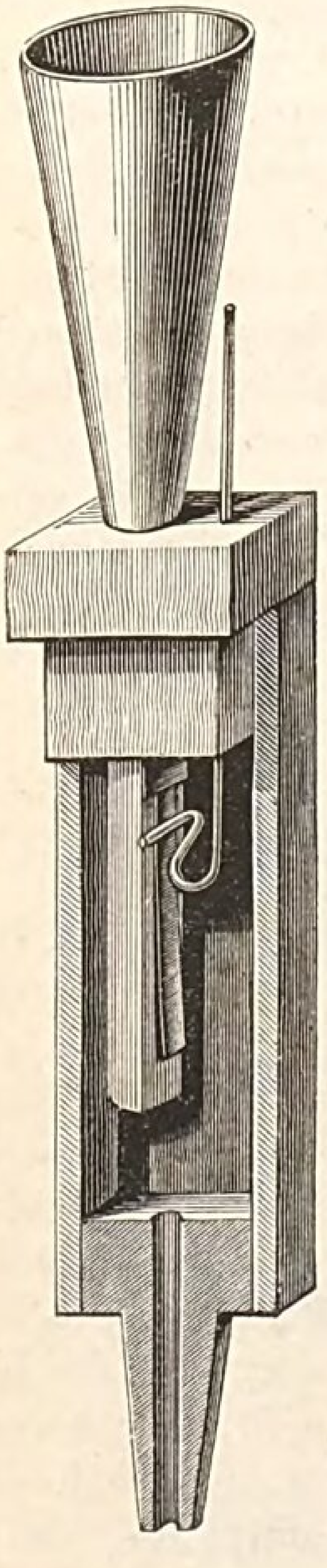
wird nun über die rechte Seite des bereits besprochenen Messingrohres ein zweites Rohr *mn* geschoben, welches in unserer Figur nur durch Punktirung angedeutet ist, so dass nun ein zweiter, bei *B* offener Hohlraum gebildet wird, welcher nur durch die Oeffnung *ost* mit dem bei *A* mündenden in Verbindung steht. — Wird nun bei *B* Luft eingeblasen, so wird dadurch die Vibration der Zunge eingeleitet. So oft in Folge dieser Vibration die Oeffnung *ost* theilweise frei wird, dringt ein Luftstrom durch dieselbe und aus der Mündung *A* hervor, um sogleich wieder unterbrochen zu werden, wenn die Oeffnung *ost* durch die vibrirende Spalte wieder geschlossen wird.

Es sind also nicht die Vibrationen der Zunge selbst, welche die Schallwellen erzeugen, vielmehr dienen diese Vibrationen nur dazu, den aus *ost* hervorquellenden Luftstrom zu reguliren und ihn in regelmässigen Zwischenräumen zu unterbrechen. So viele Schwingungen die federnde Zunge in der Secunde macht, so viele Verdichtungswellen treten der Reihe nach bei *A* aus dem Rohre hervor.

In der Regel ist an das Rohr bei *A* noch ein kleiner Schallbecher, bei *B* aber ein entsprechendes Mundstück angesetzt.

Fig. 791 zeigt die Form der Zunge, wie sie gewöhnlich zur Construction der Mundharmonika, der Blasbalgharmonika und der Physharmonika verwendet werden, und zwar zeigt *A* eine perspectivische Ansicht, *B* den Durchschnitt der Zunge sammt Fassung.

Hierher gehören auch die Zungenwerke unserer Orgeln, deren Einrichtung durch Fig. 792 und 793 erläutert wird. In dem durchbohrten


Fig. 792.

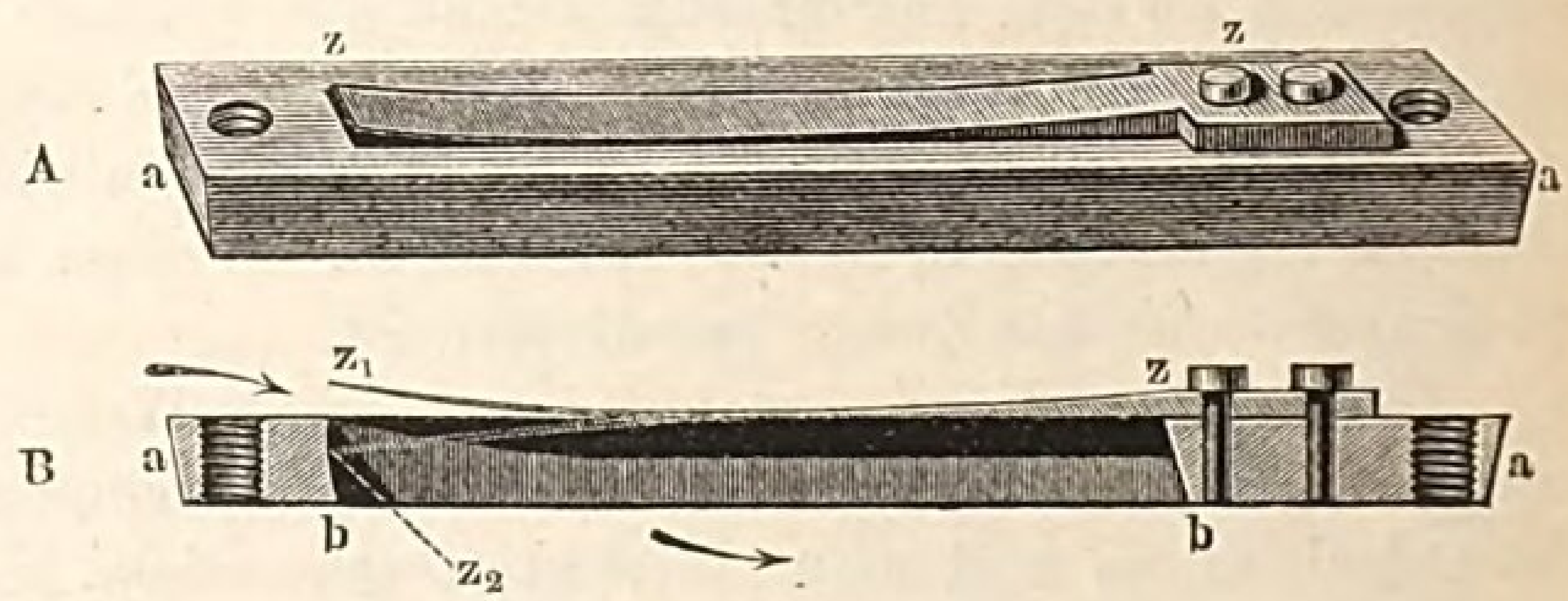


Fig. 791.

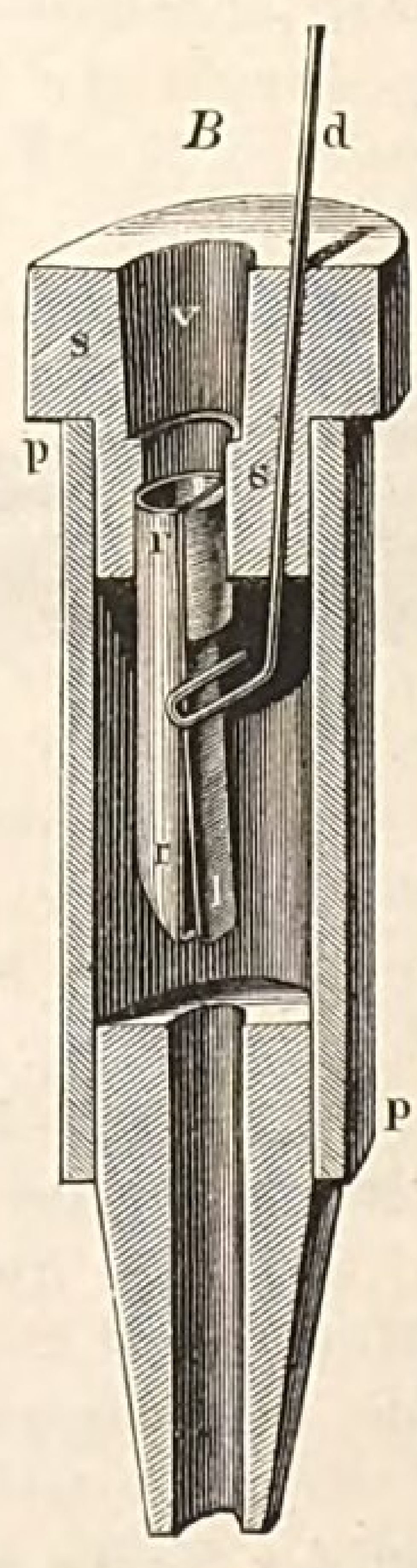


Fig. 793.

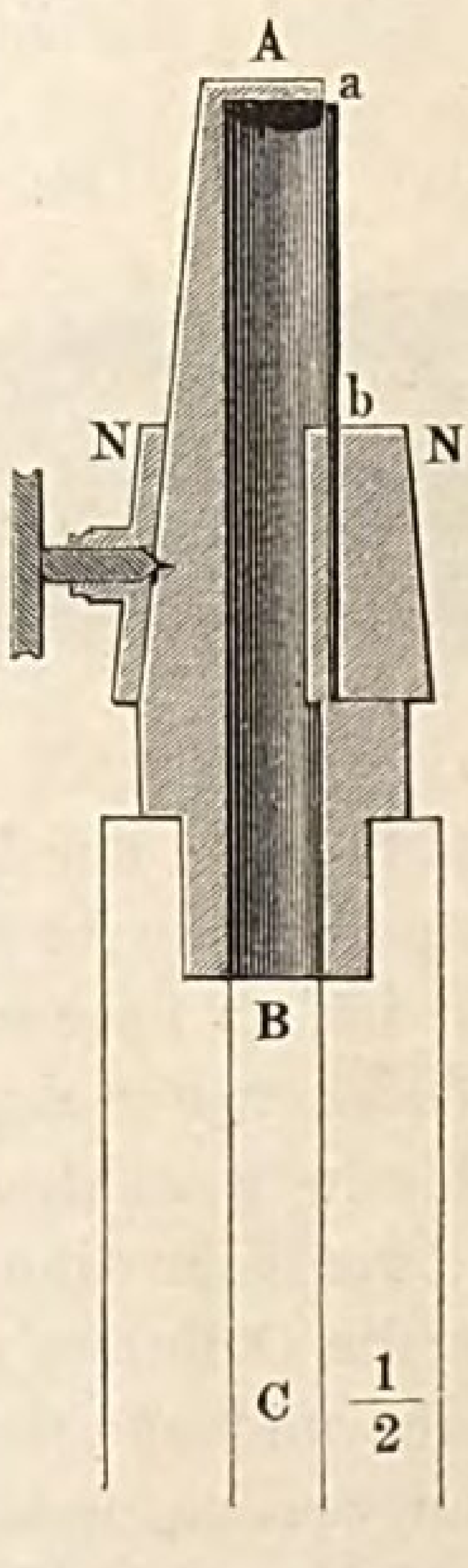


Fig. 794.

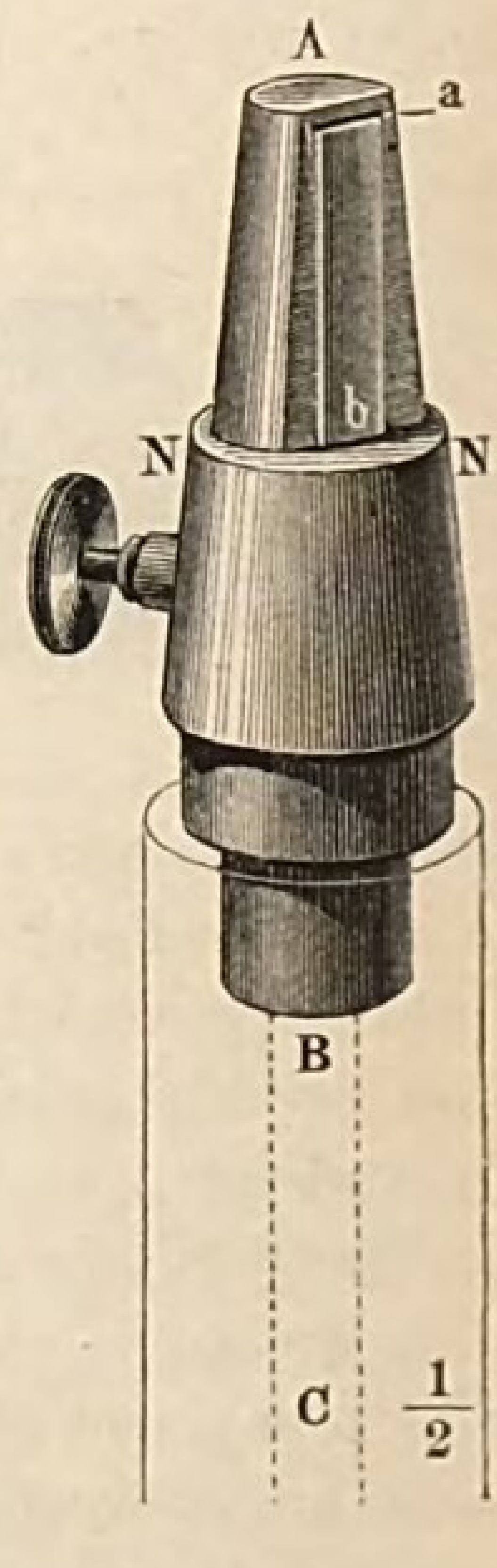


Fig. 795.

hölzernen Stopfen *s*, Fig. 793, ist unten eine Rinne *r* von Messingblech befestigt, deren Querschnitt ungefähr einen Halbkreis bildet, und welche den Namen Canile führt. Oben ist diese Rinne offen, unten ist sie geschlossen und ihre seitliche Oeffnung wird durch die elastische Platte *l* bedeckt, welche bei ihrer Vibration auf die Ränder der Rinne aufschlagend dieselbe vollständig verschliesst und dann wieder zurückschwingend einen Luftstrom in die Canile eintreten lässt.

Dieser Stopfen *s* mit der Canile *r* und der Zunge *l* wird nun in das kurze Rohr *pp* eingesetzt, in welches man von unten her den Wind einblasen kann. Sobald dies geschieht, beginnt die Zunge *l* zu vibriren, es wird also in den durch die Zunge bedingten Intervallen ein Luftstrom aus dem Inneren der Röhre *p* durch die Canile und die Höhlung *v* hervordringen, um dann sogleich wieder unterbrochen zu werden. Durch dieses stossweise Vordringen des Luftstromes wird nun der Ton erzeugt, zu dessen Verstärkung man noch ein kegelförmiges Rohr, den Schallbecher, aufsetzt, wie man es Fig. 792 sieht.

Solche Zungen, welche, wie die in Fig. 791 und Fig. 792 dargestellten, etwas kleiner sind als die zugehörige Oeffnung, so also, dass sie mit den Rändern derselben nicht in Berührung kommen, nennt man durchschlagende Zungen, im Gegensatz zu den aufschlagenden, welche, wie die Zunge Fig. 793, bei jeder Oscillation auf den Rahmen schlagen. Die aufschlagenden Zungen werden ihres rasselnden Tones wegen selten mehr gebraucht.

Durch Aufziehen oder Niederdrücken des Stimmdrahtes *d*, dessen unteres horizontal gebogenes Ende die Zunge gegen die Canile andrückt, kann man die Länge des vibrirenden Theiles der Zunge vergrössern oder verkleinern und dadurch die Tonhöhe abändern.

Wenn gar kein Schallbecher oder doch nur eine kurze Röhre auf das Zungenwerk aufgesetzt ist, so hängt die Schwingungsgeschwindigkeit der Zunge, also der Ton, den sie giebt, von ihrer Elasticität und von ihren Dimensionen ab; wenn aber eine lange Röhre aufgesetzt wird, so modificirt diese den Ton wesentlich; die Bewegung der Zunge hängt dann mehr von der Bewegung der in der langen Pfeife hin und her laufenden Luftwellen als von ihrer eigenen Elasticität ab; sie wird also eigentlich mehr geschwungen als sie selbst schwingt.

W. Weber hat über diesen Gegenstand eine Reihe ausführlicher Versuche angestellt (Pogg. Annal. XIV, XVI und XVII). Fig. 794 und Fig. 795 stellen seinen Apparat in $^1/_2$ der natürlichen Grösse dar, und zwar Fig. 794 im Durchschnitt, Fig. 795 in perspectivischer Ansicht. Der schraffirte Theil *AB* ist aus Messing verfertigt, *ba* ist die vibrirende Zunge. Bei *B* können hölzerne Röhren von beliebiger Länge angesteckt werden, wie man aus den Figuren ersieht, wo sie nur durch Contouren angegeben sind.

Diese Vorrichtung wird nun mittelst des conischen Zapfens *NN* in eine entsprechende Oeffnung einer Windlade so eingesetzt, dass *A* nach unten, die hölzerne Ansatzröhre *BC* aber nach oben steht.

Als in den Apparat, Fig. 794, eine 0,48 mm dicke Messingzunge eingesetzt war und in die Windlade Luft eingepresst wurde, erhielt Weber ohne Ansatz eines Holzrohres den Ton g^1. Als nun aber der Reihe nach Holzröhren von verschiedener Länge aufgesetzt wurden, erhielt er die folgenden Töne, wenn die Gesammtlänge der mittönenden

Luftsäule die nebenstehenden, in Millimetern ausgedrückten Werthe hatte:

g^1	92 mm	c^1	290 mm
fis^1	178	ais	331
f^1	202	g	394
d^1	252	g^1	439

Kurze Ansatzröhren bringen also keine merkliche Veränderung der Tonhöhe hervor; bei allmäliger Verlängerung der Röhre wird aber der Ton tiefer, und zwar bis zur nächst niederen Octave des Anfangstones, um dann für eine bestimmte Länge l (im vorliegenden Falle 440,6 mm) wieder auf den Ton zurückzuspringen, welchen die Zunge für sich allein giebt.

Die Länge l (hier 440,6 mm) ist die Länge einer offenen Pfeife, deren Grundton unisono ist mit dem Tone, welcher der Schwingungszahl der nur unter dem Einflusse ihrer Elasticität vibrirenden Zunge entspricht.

Eine Verlängerung der Röhre über die Länge l hinaus macht, dass der Ton abermals tiefer wird, und zwar in unserem Falle bis d^1 für die Röhrenlänge 866,3 mm, um für $2l$ (hier 881,2 mm) zum zweiten Male auf den ursprünglichen Ton zurückzuspringen.

Fig. 796.

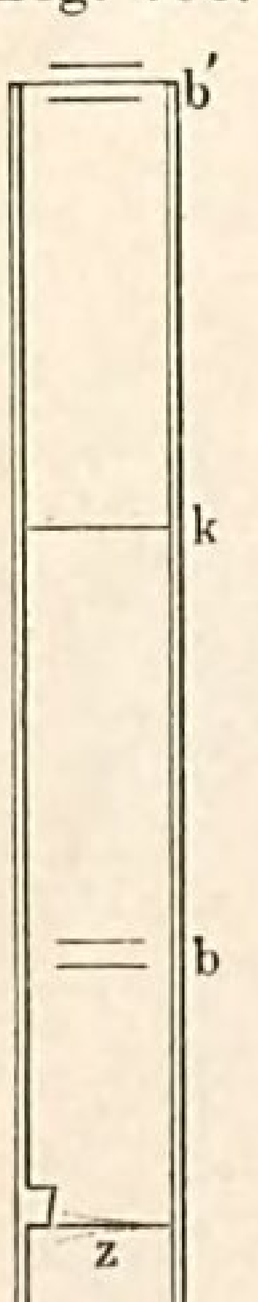
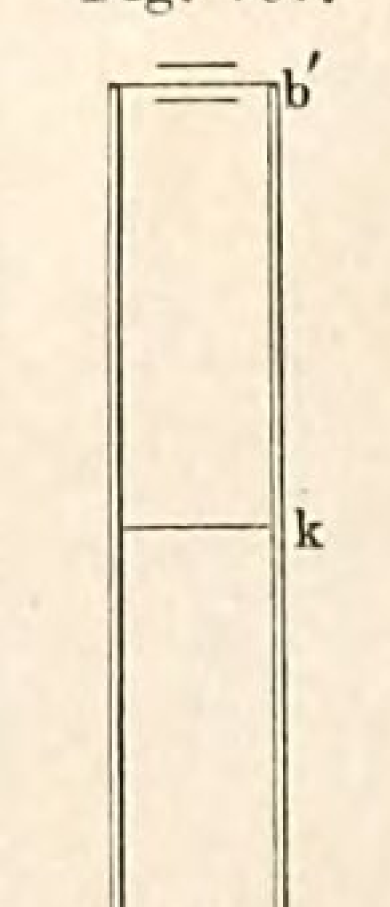


Fig. 797.



Kurz, der Ton der Zungenpfeife ist für die Röhrenlängen l, $2l$, $3l$ u. s. w. derselbe wie ohne Ansatzrohr, während jede andere Länge der Ansatzröhre den Ton der Zungenpfeife tiefer macht, wenn sie durch Einblasen von Luft in die Windlade zum Tönen gebracht wird, wie es bei den eben besprochenen Versuchen der Fall war.

Wird dagegen die Zungenpfeife dadurch zum Tönen gebracht, dass die Luft aus der Windlade ausgesaugt wird, so hat das Ansetzen von Röhren eine Erhöhung des Tones zur Folge.

Der Grund dieser Erscheinung ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Fig. 796 stelle eine an beiden Enden offene Röhre dar, welche eine im Zustande stehender Schwingungen sich befindliche Luftsäule enthält. Schwingungsknoten befinden sich in k und k', Bäuche dagegen in b und an den Enden der Röhre in b' und b''.

Der Ton dieser Pfeife wird nun keinerlei Aenderung erfahren, wenn an irgend einer Stelle im Inneren der Röhre ein Scheibchen angebracht

wäre, dessen Ebene rechtwinkelig auf der Röhrenachse steht und welches genau dieselben Oscillationen machte, welche einer an dieser Stelle befindlichen Luftschicht in Folge des Tönens der in der Röhre eingeschlossenen Luftsäule zukommen. An die Stelle dieses Scheibchens könnte aber auch ohne merkliche Aenderung eine in gleicher Weise oscillirende Zunge eingesetzt werden.

Es sei nun eine solche Zunge in der Röhre Fig. 796 bei z zwischen dem Schwingungsknoten k' und dem Bauche angebracht, welche so eingerichtet ist, dass sie die Verbindung zwischen dem oberen und unteren Theile der Röhre absperrt, während sie aus ihrer Gleichgewichtslage nach oben (also in Beziehung auf den oberen Theil der Röhre nach innen) entfernt ist, dass dagegen die Verbindung zwischen der Luft im oberen und unteren Theile der Röhre hergestellt ist, während die Zunge nach unten (respective nach aussen) gebogen ist.

Die Zunge z wird sich aber von ihrer Gleichgewichtslage nach unten (aussen) bewegen müssen, während die benachbarten Luftschichten in Folge der stehenden Wellen in der Röhre gleichfalls von einer nach unten gerichteten Bewegung afficirt sind, während sich also beim Knoten k eine Luftverdichtung bildet. Während der äusseren Schwingung der Zunge ist es offenbar einerlei, ob die Luft unmittelbar über z mit der bei k' verdichteten Luft im unteren Theil der Röhre $b'b''$ oder mit der gleich verdichteten Luft in der Windlade, W, Fig. 797, communicirt; während der inneren Schwingung der Zunge aber ist die Verbindung zwischen dem unteren Theil des Röhrenstückes zb' mit dem unter z befindlichen Raume ohnehin unterbrochen, es ist also in dieser Periode gleichgültig, ob sich unterhalb z das Röhrenstück zb'' oder die Windlade befindet.

Man kann also, ohne in den Vibrationen der Zunge und der Luftschichten in dem Röhrenstücke zb' etwas zu ändern, das Röhrenstück zb'' mit einer Windlade vertauschen, welche entsprechend verdichtete Luft enthält.

Aus diesem Raisonnement ergiebt sich nun auch, dass in einer Zungenpfeife, welche auf einer Windlade mit verdichteter Luft aufgesetzt wird, sich in der Röhre über der Zunge zunächst ein Bauch, und erst jenseits des Bauches ein Knoten bilden kann.

Betrachten wir aber nun den Einfluss, welchen die abwechselnde Verdichtung und Verdünnung der Luft am Fusse der Röhre zb' auf die Schwingungen der Zunge ausüben muss.

Während der inneren Schwingung der Zunge ist die untere Endabtheilung der Luftsäule zb' verdünnt, und sie beschleunigt die Platte nach innen, während dieselbe durch ihre eigene Elasticität nach aussen beschleunigt ist. Während der äusseren Schwingung der Zunge ist dagegen die untere Endabtheilung der Luftsäule zb' verdichtet und sie beschleunigt die Platte nach aussen, während dieselbe durch ihre eigene Elasticität eine Beschleunigung nach innen erleidet.

Der Einfluss der schwingenden Luftsäule hält also immer einem Theile der elastischen Kraft der Zunge das Gleichgewicht, sie wird also langsamer schwingen, der Ton der Zungenpfeife wird also tiefer sein, als der Ton der isolirt schwingenden Zunge.

Denken wir uns dagegen die Zunge in der Röhre $b'b''$, Fig. 798, zwischen dem Knoten k und dem Bauche b eingesetzt, so ist klar, dass die äussere (nach unten gerichtete) Schwingung der Zunge z mit einer Verdünnung der Luft zwischen b und k zusammenfallen muss. Während also die Zunge z so steht, dass der obere Theil zb' der Röhre mit dem unteren zb'' communicirt, ist die Luft unmittelbar über und unter z verdünnt; man kann also, ohne die Schwingungen in dem Röhrenstücke zb' zu alteriren, statt des unteren Röhrenstückes zb'' eine Windlade W, Fig. 799, substituiren, welche verdünnte Luft enthält; in diesem Falle aber muss sich in der Röhre zunächst über der Zunge ein Knoten und erst jenseits desselben ein Bauch bilden.

Fig. 798.

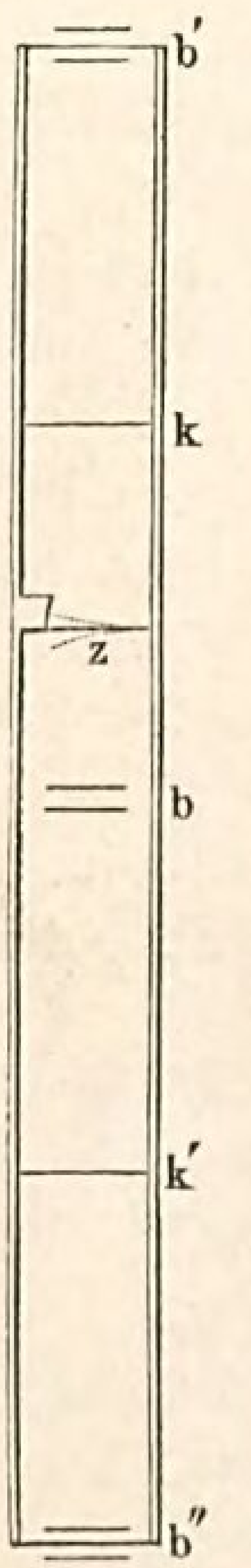
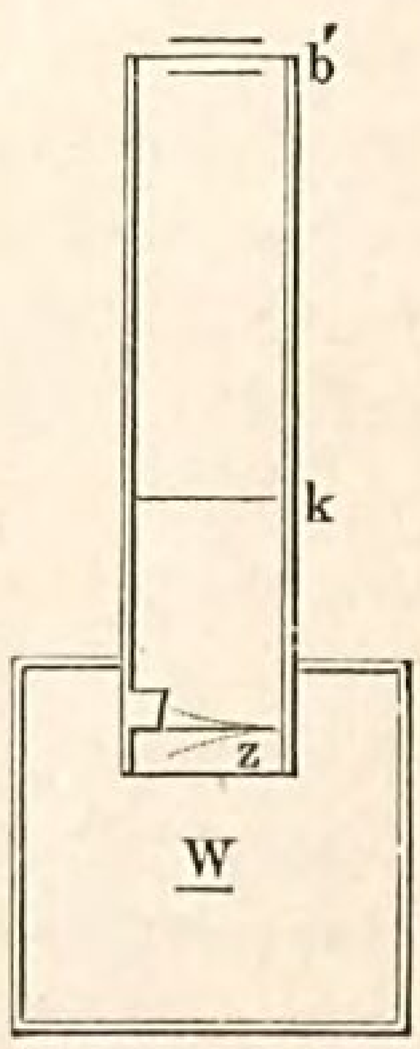


Fig. 799.



Für den Fall, dass die Luft in der Windlade verdünnt wird, ist also während der äusseren Schwingung der Zunge das untere Ende der Luftsäule zb', Fig. 799, verdünnt und beschleunigt die Platte nach innen, während sie durch ihre eigene Elasticität nach derselben Richtung beschleunigt wird. Während der inneren Schwingung der Zunge aber ist die Luft im unteren Ende der Röhre zb' verdichtet, und beschleunigt die Platte gleich ihrer eigenen Elasticität nach aussen.

Da also hier der Einfluss der schwingenden Luftsäule stets in gleichem Sinne auf die Zunge wirkt, wie deren eigene Elasticität, so muss sie schneller schwingen, ihr Ton muss höher werden, als der Ton der isolirt schwingenden Platte.

Wenn die Zunge gerade an der Stelle eines Bauches sich befindet, so findet unmittelbar über derselben weder Verdünnung noch Verdichtung der Luft statt, die stehenden Wellen der Luftsäule in der Röhre üben also in diesem Falle weder einen beschleunigenden noch einen verzögernden Einfluss auf die Vibrationen der Zunge aus, der Ton der Luftsäule ist unisono mit dem der isolirt schwingenden Zunge.

Die Labial- oder Lippenpfeifen. Eine zweite Art der Zungenwerke wird durch membranöse elastische Platten gebildet, welche die beiden Lippen eines schmalen Spaltes bilden und welche durch ihre Oscillationen den Spalt abwechselnd öffnen und schliessen. Joh. Müller construirte membranöse Zungenpfeifen in der durch Fig. 800 erläuterten Weise, indem er auf ein rechtwinkelig zur Achse abgeschnittenes Rohr zwei Lappen von vulcanisirtem Kautschuk so aufband, dass nur ein schmaler Spalt zwischen ihnen frei blieb. Noch besser als diese sprechen solche membranöse Zungenpfeifen an, wie sie in Fig. 801 dargestellt sind. Das obere Ende des hölzernen Rohres, in welches unten die Luft eingeblasen wird, ist von zwei Seiten schräg abgeschnitten, wie man Fig. 802 sieht, so dass zwei ungefähr rechtwinkelige Spitzen zwischen 217

Fig. 800.

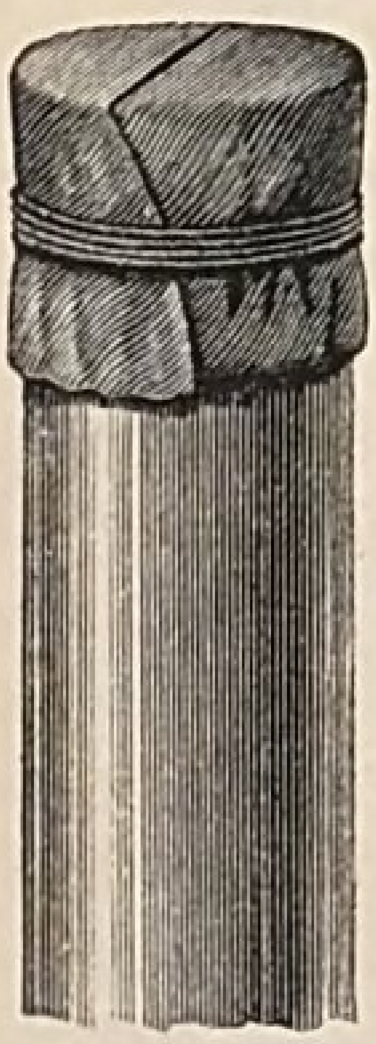


Fig. 801.

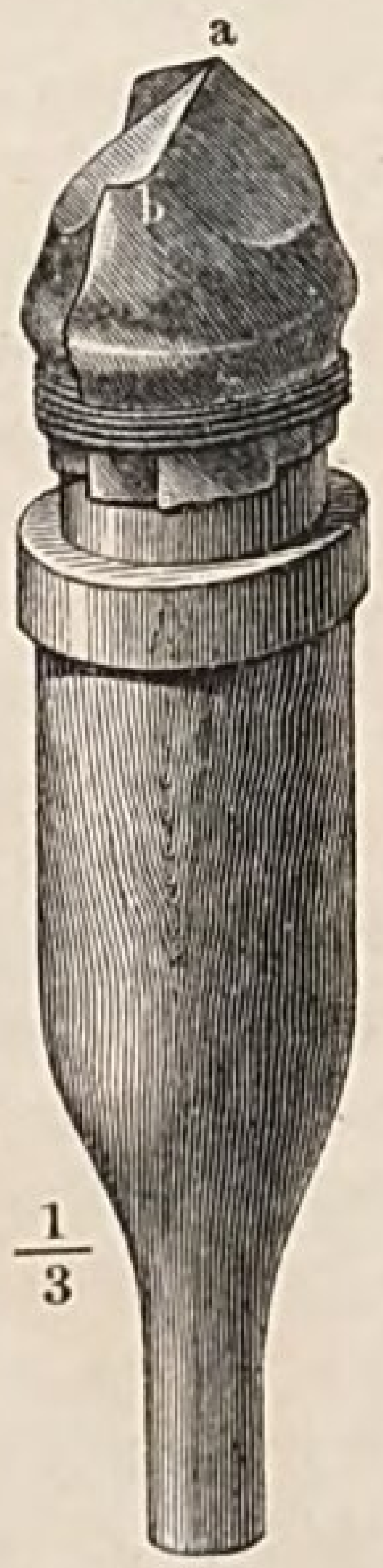


Fig. 802.

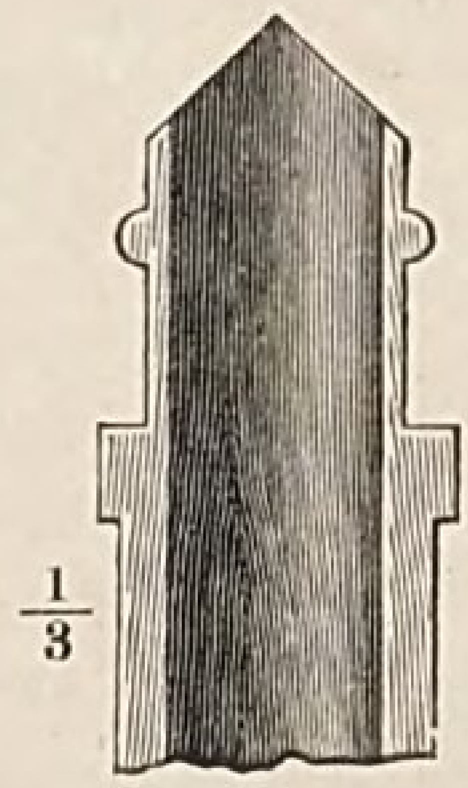
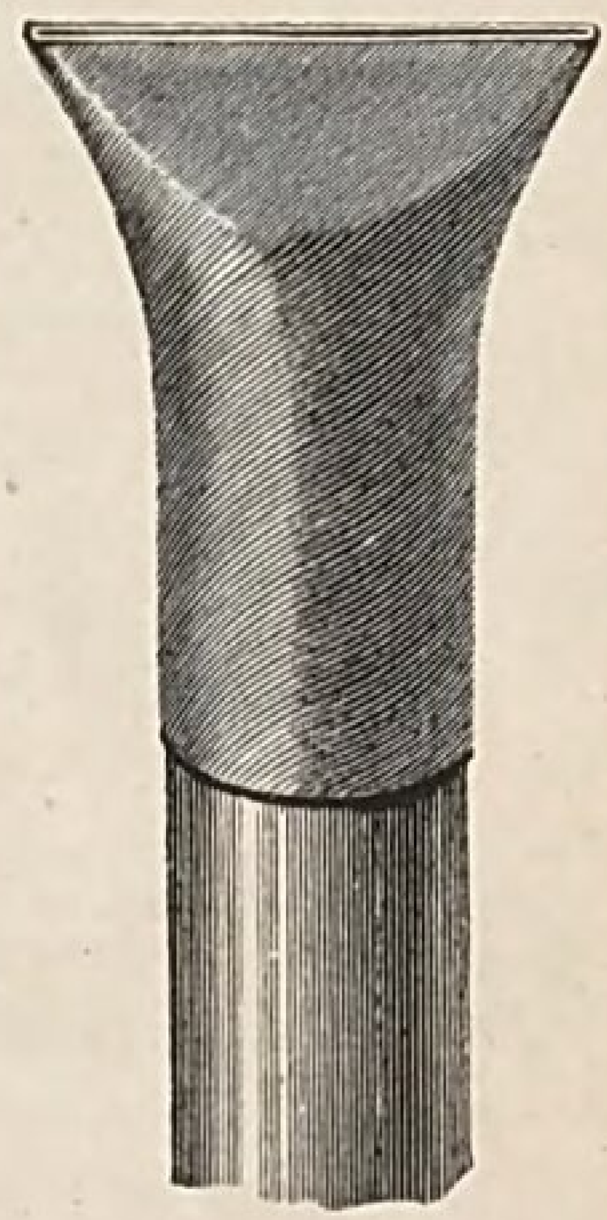


Fig. 803.



den beiden schrägen Schnittflächen stehen bleiben. Ueber die beiden Abdachungsflächen werden alsdann mit leichter Spannung Streifchen von Kautschuk so gelegt, dass sie einen schmalen Spalt zwischen sich lassen, und endlich mit einem Faden festgebunden.

Sehr leicht lässt sich eine membranöse Zungenpfeife auch in folgender Weise herrichten: von einer Röhre dünnen vulcanisirten Kautschuks, welche 1 bis 2 cm weit ist, schneide man ein 4 bis 5 cm langes Stück ab und befestige es am Ende eines Glasrohres von entsprechender Weite, wie man Fig. 803 sieht. Wenn man nun die Kautschukröhre an ihrem oberen Ende an zwei gegenüberliegenden Punkten fasst und aus einander zieht, so bildet sich eine Ritze, wie sie unsere Figur zeigt, deren Ränder von Kautschuk sind, und wenn man dann unten in das Rohr hineinbläst, so erhält man einen Ton, der um so höher wird, je stärker die beiden Lippen angespannt werden. Man kann dabei ganz deutlich die Vibrationen der beiden Kautschuklippen sehen, welche die Ritze bilden.

218 **Mittheilungen der Schallschwingungen zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern.** Wenn mehrere feste Körper unter einander zu einem Ganzen verbunden sind, so verbreiten sich die von einem Theile dieses Systems ausgehenden Vibrationen mit der grössten Leichtigkeit als fortschreitende Wellen über die ganze Masse; an der Grenze angekommen, gehen nun aber die Wellen nur theilweise in das angrenzende Mittel, einen luftförmigen oder flüssigen Körper, über, theilweise aber werden sie reflectirt und durch die Interferenz der reflectirten Wellen mit den neu ankommenden bilden sich in den einzelnen Theilen des festen Systems stehende Schwingungen. Ein solches System bildet ein Ganzes, welches sich, wenn ein Punkt in Schwingungen versetzt wird, wie ein einzelner fester Körper in einzelne schwingende Theile abtheilt, die durch Schwingungsknoten getrennt sind. Jeder einzelne Theil verliert gewissermaassen seine Individualität; seine Verbindung mit den benachbarten Stücken hindert ihn, so zu schwingen, wie es geschehen würde, wenn er allein wäre.

Savart hat viele Versuche über diesen Gegenstand gemacht; er hat seine Apparate auf mancherlei Weise abgeändert, um zu zeigen, dass sich die Vibrationen wirklich über ein ganzes System von Platten, Streifen, Glocken, Saiten u. s. w. verbreiten. Unter den Resultaten, die in seiner Abhandlung (Annal. de Phys. et de Chim. T. XXV) niedergelegt sind, wollen wir folgendes Beispiel hervorheben, welches den Vortheil hat, zugleich den Einfluss nachzuweisen, welchen die Richtung der Bewegung auf die Bildung der Schwingungsknoten hat. Eine Holzplatte *a*, Fig. 804, ist an dem einen Ende befestigt, an dem anderen aber durch eine Saite *b* gespannt, und diese kann durch einen Schlüssel mehr oder weniger angezogen werden. Sobald die Saite durch einen Fiedelbogen angestrichen wird, geräth auch die Platte *a* in Schwingungen. Für denselben Ton sind die Knotenlinien, welche sie auf der oberen Seite zeigt, von der Schiefe des Fiedelbogens oder der Richtung abhängig, in welcher die Platte schwingt, wie man in Fig. 805 bis 808 sieht, wo die entsprechende Richtung, in welcher der Fiedelbogen streicht, durch einen kleinen Pfeil bezeichnet ist.

Fig. 804.

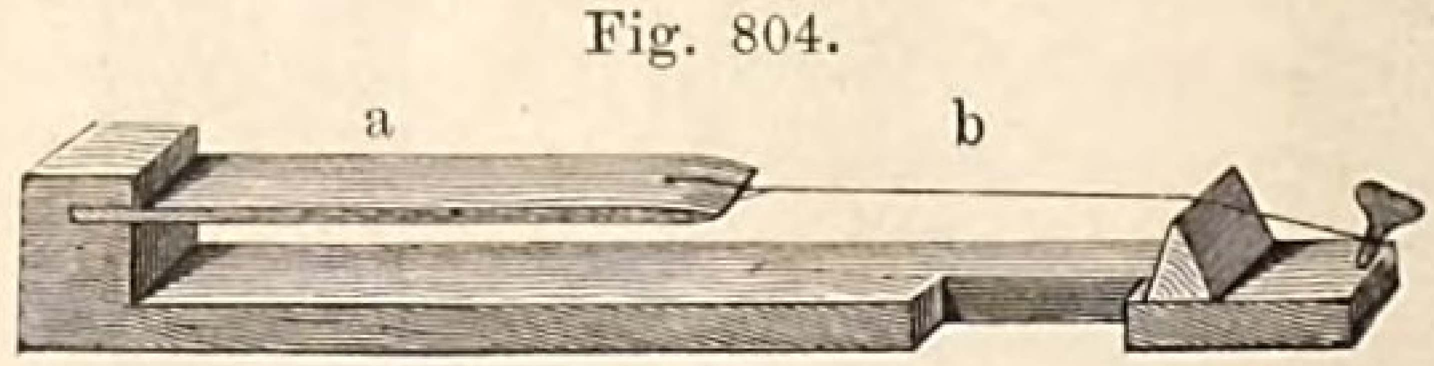


Fig. 805.

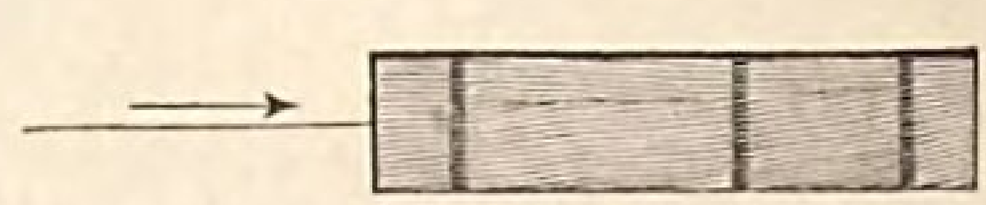


Fig. 806.

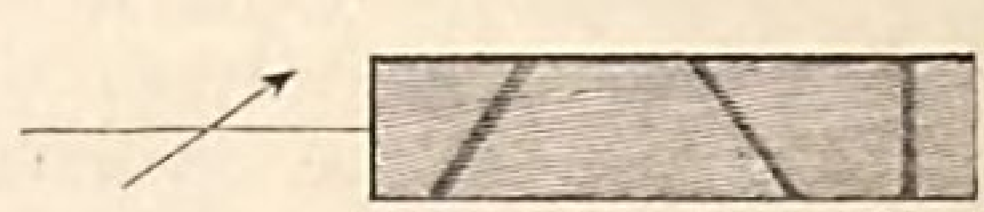


Fig. 807.

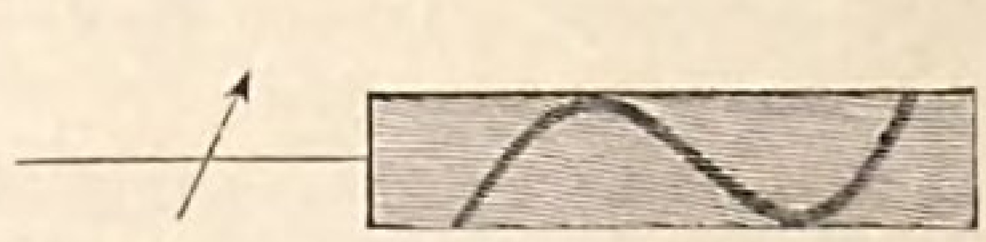
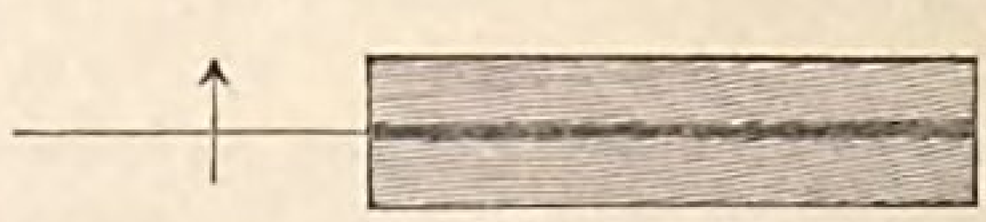


Fig. 808.



Während sich die Schallwellen leicht über ein System von festen Körpern verbreiten, gehen sie nicht so leicht von einem festen Körper auf einen flüssigen, noch weniger leicht auf einen gasförmigen über; so kommt es denn, dass mancher ziemlich stark vibrirende feste Körper doch nur einen ganz schwachen Ton hören lässt, nur weil er seine Schwingungen der Luft nicht gehörig mittheilen kann. Dies ist z. B. theilweise die Ursache, warum die Stimmgabel, stark angeschlagen und frei in der Luft gehalten, doch nur einen ganz schwachen Ton hören lässt.

Um den Ton eines solchen Körpers zu verstärken, muss man die Mittheilung seiner Schwingungen an die Luft durch Resonanz, d. h. dadurch befördern, dass man die stehenden Schwingungen des tönenden Körpers noch auf einen anderen zu übertragen sucht. Ein Mittel dazu haben wir schon kennen gelernt, die schwach tönenden, aber doch stark vibrirenden Körper vor eine Röhre von entsprechender Länge zu halten, und so die Luftmasse in derselben zum Mittönen zu bringen.

Ein zweites Mittel, den Ton zu verstärken, besteht darin, den tönenden Körper mit einem anderen, leicht in Schwingungen zu versetzenden festen Körper von verhältnissmässig grosser Oberfläche in Berührung zu bringen. Es bilden sich dann auf diesem, wie schon erwähnt wurde, ebenfalls stehende Schallschwingungen, und diese theilen sich, der grossen Oberfläche des mittönenden (resonirenden) Körpers wegen, der Luft leichter mit. Setzt man z. B. die stark angeschlagene, aber in freier Luft schwach tönende Stimmgabel auf einen Kasten von dünnem, elastischem Holze, so hört man den Ton ungleich stärker. Darauf beruht die Anwendung des Resonanzbodens in verschiedenen musikalischen Instrumenten. Bei Flöten, Orgelpfeifen u. s. w. ist kein Resonanzboden nöthig, weil hier die stehenden Schwingungen einer Luftmasse den Ton geben und diese sich ganz leicht der umgebenden Luft mittheilen.

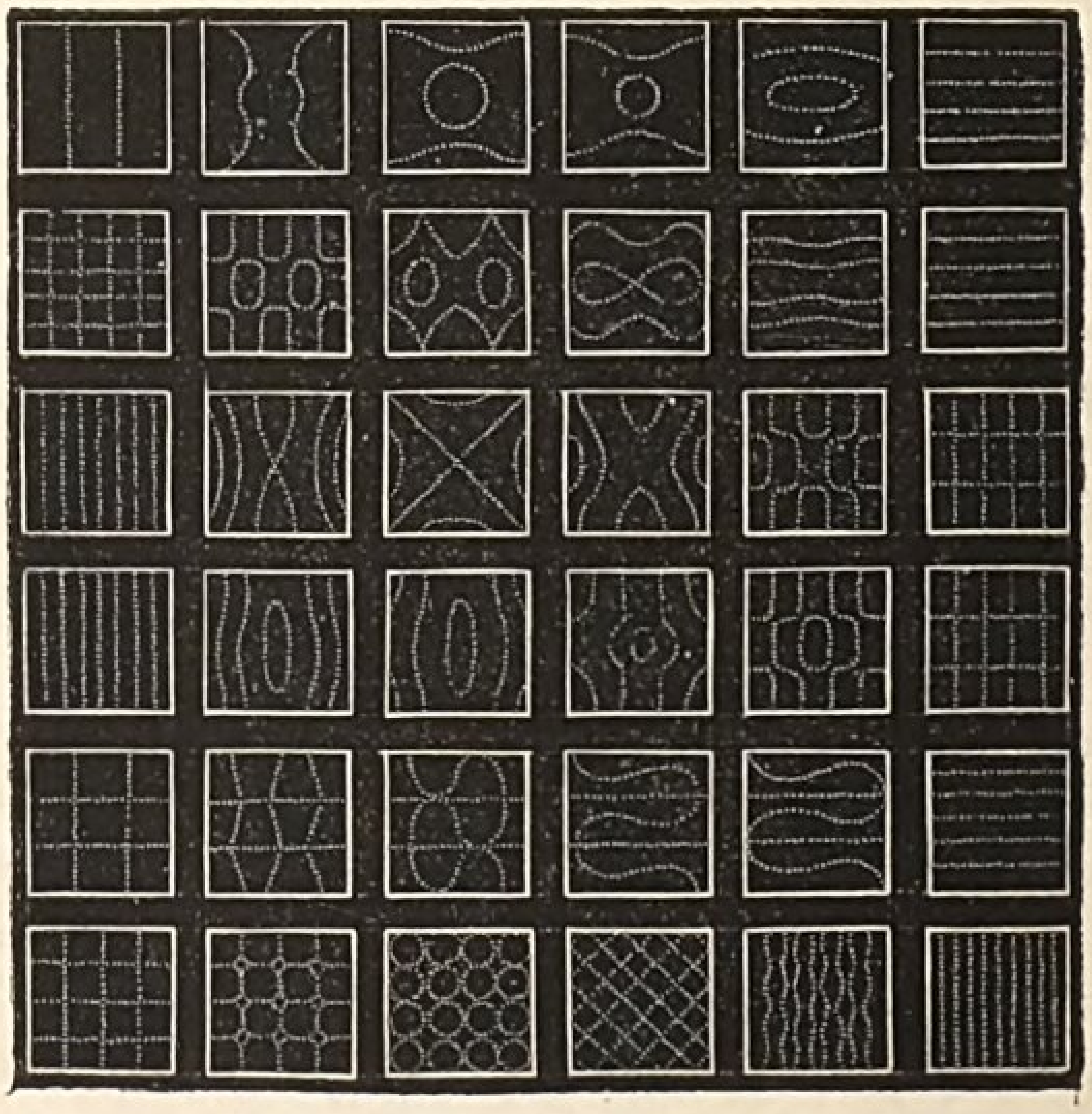
So wie Vibrationen fester Körper Schallwellen in der Luft erzeugen, so können auch umgekehrt Schallwellen, die, sich in der Luft verbreitend, einen festen Körper treffen, diesen zum Vibriren bringen. So sieht man z. B. die Saite eines Instrumentes in Schwingungen gerathen, wenn sie von den Schallwellen des Tones, welchen sie selbst giebt, oder eines seiner harmonischen Töne getroffen wird; so erzittern die Fensterscheiben heftig unter dem Einflusse gewisser Töne der Stimme oder des Knalles einer Kanone. Diese Erscheinung, welche man so auffallend an leicht beweglichen Körpern wahrnimmt, findet auch bei grösseren Massen und weniger elastischen Körpern statt; alle Pfeiler und Mauern eines Domes erzittern mehr oder weniger beim Läuten der Glocken.

Leicht in Schwingungen zu versetzende Körper theilen sich, wenn sie durch Schallwellen, welche sie treffen, in Vibrationen versetzt werden, durch Knotenlinien auf ähnliche Weise in einzelne vibrirende Abtheilungen, wie dies auch bei selbsttönenden Körpern der Fall ist. Savart, welcher diese Erscheinungen ganz besonders studirt hat, befestigte Mem-

branen von Papier, Pergament oder Goldschlägerhaut, indem er ihre Ränder auf einen Holzrahmen oder über die Oeffnung einer Glasglocke klebte; sie wurden mehr oder weniger befeuchtet, um ihnen eine grössere oder geringere Spannung zu ertheilen. Um sie in Schwingungen zu versetzen, näherte er eine schwingende Stimmgabel oder eine Orgelpfeife, deren Ton voll und andauernd war. Sobald der Ton sich hören lässt, vibrirt die Membran gerade so, als ob sie direct wäre erschüttert worden; die Sandkörnchen, welche sie bedecken, springen auf der Oberfläche umher, um sich in den Knotenlinien anzuhäufen. Die Figuren, welche man erhält, sind äusserst mannigfaltig und hängen von der Spannung der Membran und der Höhe der Töne ab, welche sie treffen.

In Fig. 809 ist eine Reihe solcher an quadratischen Membranen beobachteter Knotenlinien dargestellt. Savart hat beobachtet, dass, wenn man durch irgend einen Ton eine bestimmte Figur erzeugt hat,

Fig. 809.



dieselbe allmälig in andere übergeht, wenn der Ton höher und höher wird. In unserer Figur enthält jede Horizontalreihe eine Reihe solcher auf einander folgender Modificationen.

Dreieckige, vieleckige und kreisförmige Membranen bieten ähnliche Erscheinungen dar.

Viertes Capitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

Interferenz isochroner Schallwellen. Schon im §. 188 219
haben wir das Resultat des Zusammenwirkens oder der Interferenz von Wellenzügen gleicher Wellenlänge, wie sie durch isochrone Schwingungen entstehen, abgeleitet. Seitdem sind wir mit experimentellen Hülfsmitteln ausgerüstet worden, welche uns gestatten, die damals erhaltenen theoretischen Folgerungen durch Versuche zu bestätigen. Wenn zwei Wellenzüge in derselben Fortpflanzungsrichtung zusammentreffen, addiren sich ihre Excursionen mit Rücksicht auf das Zeichen. Ist demnach ihr Gangunterschied ein ungerades Multiplum der halben Wellenlänge, so vernichten sich Wellen gleicher Amplituden; ist ihr Gangunterschied = Null oder ein gerades Multiplum der halben Wellenlänge, so erhält man eine resultirende Welle doppelter Amplitude. Es muss daher unter Umständen gelingen, durch Zusammenwirken zweier Töne deren Intensität zu vermindern oder zu steigern. Zu diesem Zwecke dienen folgende Versuche: Eine quadratische Platte, wie sie zu den Klangfiguren Chladni's dient, wird so eingespannt und zum Tönen gebracht, dass die Klangfigur, Fig. 810 (a. f. S.) entsteht. Hierauf wird ein Röhrensystem aus Holz oder Pappe von der in Fig. 811 (a. f. S.) abgebildeten Form, dessen obere Mündung *a* mit einer Membran verschlossen ist, mit den unteren gabelförmigen Enden in kurzem Abstande über die Klangplatte gehalten, so dass die beiden Röhrenmündungen abwechselnd über zwei gleich schwingende Felder 1 und 3, 2 und 4, dann über zwei entgegengesetzt schwingende Felder, 1 und 2, 3 und 4 zu stehen kommen. Im ersten Falle wird Sand, den man auf die Membran gestreut hat, lebhaft bewegt, im zweiten Falle bleibt er ruhig liegen.

Am klarsten und entschiedensten zeigt sich die Interferenz der Schallwellen, wenn man einen Ton in eine Röhre eintreten lässt, welche in eine, zwei Zimmer trennende Wand eingemauert ist und die sich im

Inneren der Wand in zwei alsbald sich wieder vereinigende Canäle theilt. Wenn die Differenz der Wege gerade $1/2$ Wellenlänge des einfallenden Tones beträgt, so müssen sich die aus den beiden Canälen

Fig. 810.

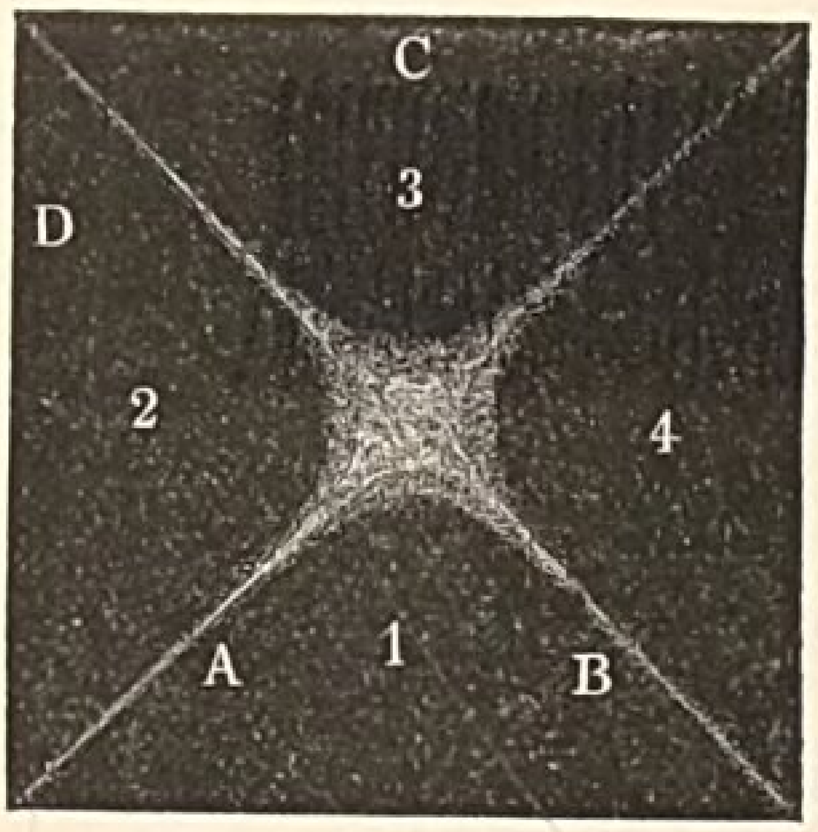
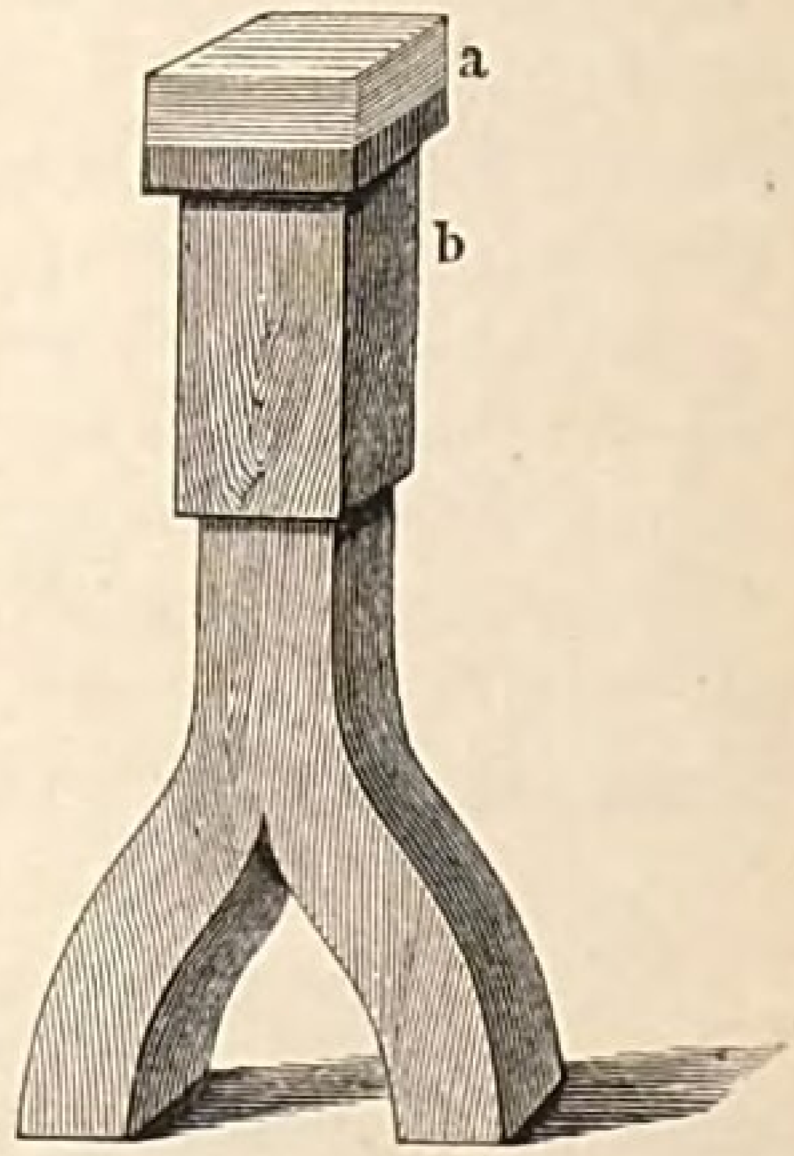
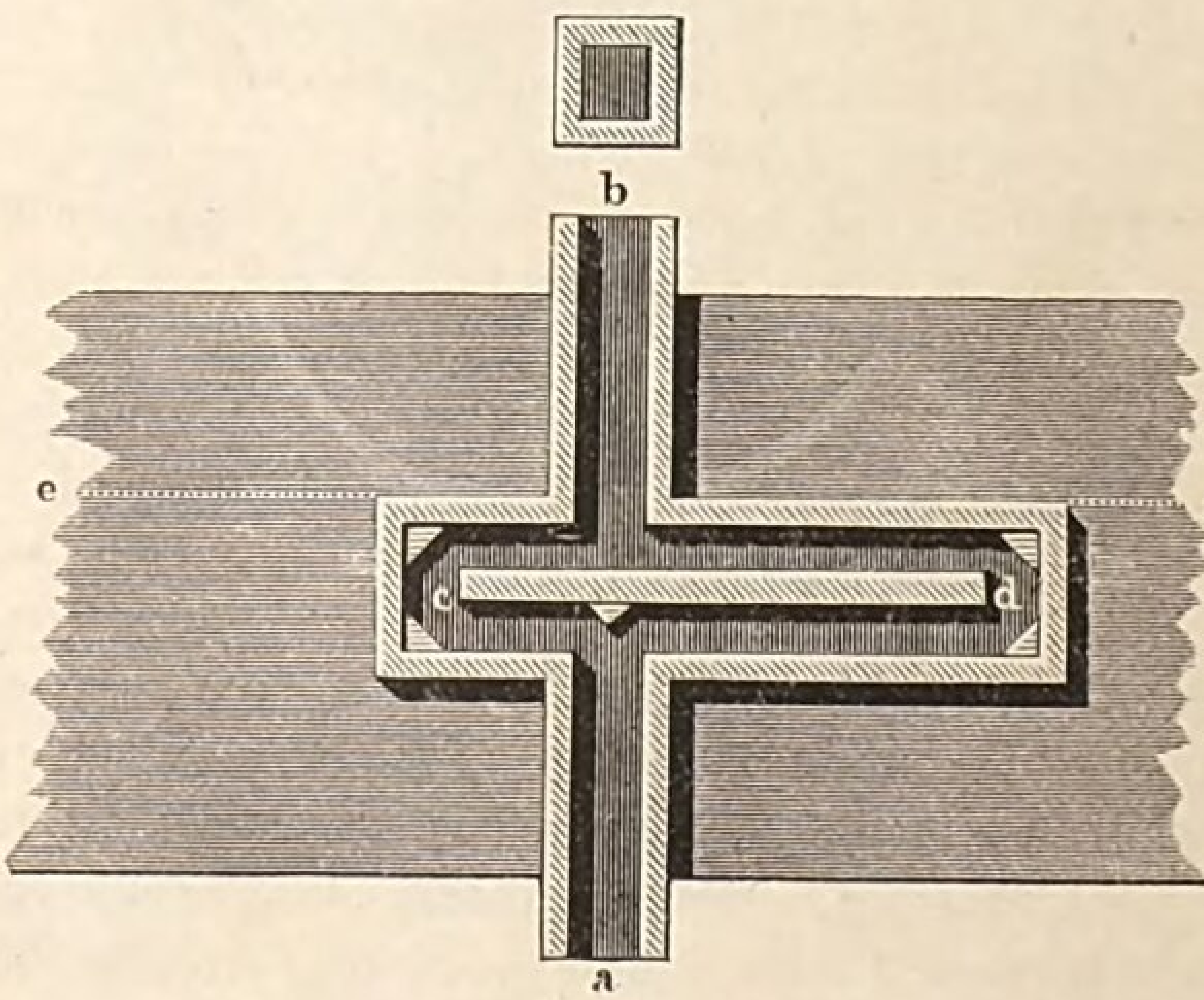


Fig. 811.



kommenden Schallwellen bei ihrem Zusammentreffen aufheben. Wenn also in dem einen Zimmer der richtige Ton in die Röhre eintritt, so wird man im anderen nichts hören, wenn beide Canäle offen sind, während der Ton sogleich wieder erscheint, wenn einer der Canäle verschlossen wird.

Fig. 812.



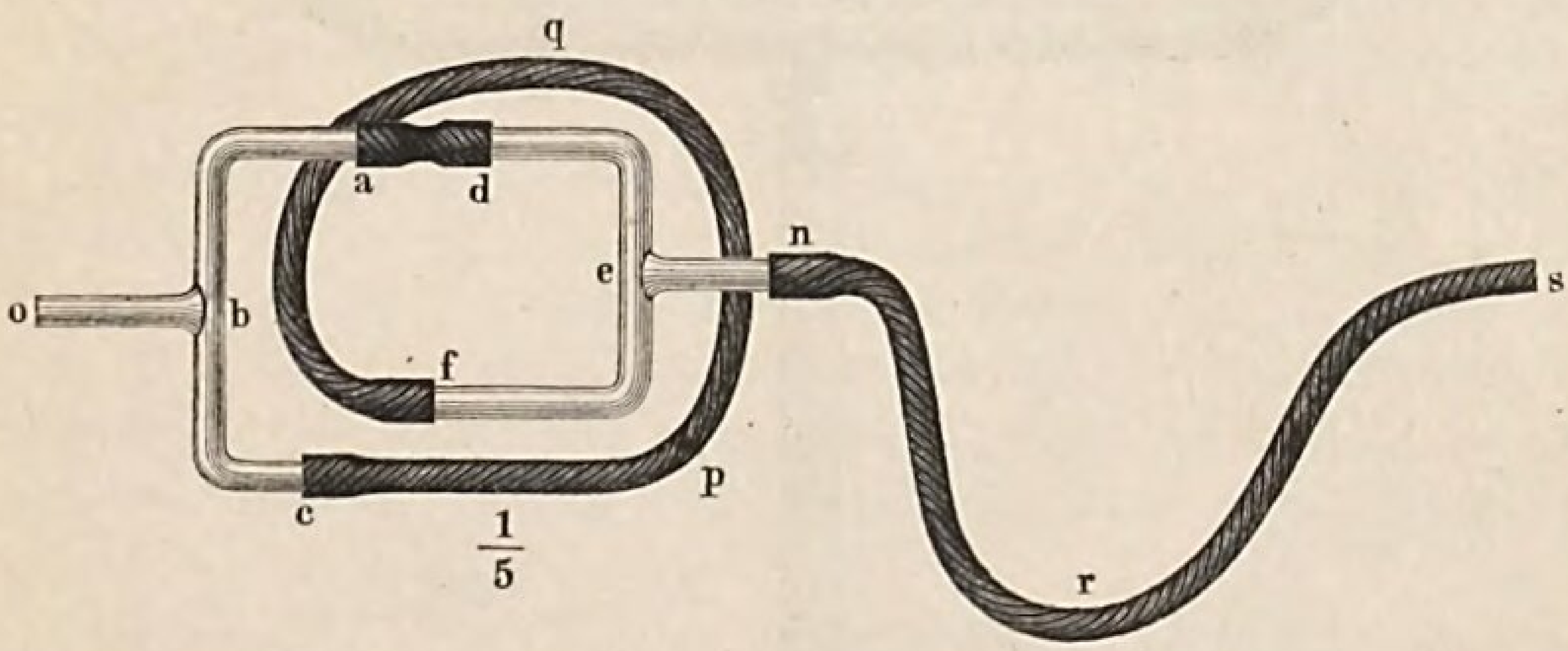
Die Idee dieses Versuches rührt ursprünglich von Herschel her, aber erst Nörrenberg hat nach diesem Princip einen Apparat construirt, welcher genügende Resultate liefert.

Fig. 812 stellt eine Nörrenberg'sche Interferenzröhre im horizontalen Durchschnitt dar. Der ganze Apparat ist in eine Wand einge-

mauert, welche zwei Zimmer trennt, so dass die Luft der beiden Zimmer nur durch die Canäle des Apparates in Verbindung steht. Die Dimensionen des Apparates sind der Art, dass der Weg von *n* über *d* nach *o* um 30 cm länger ist, als der Weg von *n* über *c* nach *o*. Lässt man daher bei *a* einen Ton von 60 cm Wellenlänge, wie ihn eine 30 cm lange offene Pfeife bei mässigem Anblasen giebt, eintreten, so beträgt der Gangunterschied gerade eine halbe Wellenlänge und ist daher im anderen Zimmer fast nichts zu hören. Dagegen wird der Ton hörbar, wenn man bei *b* einen Schieber einschiebt, welcher einen der beiden Canäle absperrt. Bläst man die Pfeife stärker an, so giebt sie ihren ersten Oberton mit der Wellenlänge = 30 cm, welcher dann auch bei offenem Schieber im anderen Zimmer stark gehört wird.

Fig. 813 stellt einen von Quincke construirten Apparat dar, welcher bestimmt ist, das Stimmgabel-a^1 (von 435 Schwingungen in der

Fig. 813.



Secunde) auszulöschen. Die Enden zweier gabelförmig gebogenen Glasröhren *obac* und *nedf* sind einerseits durch den kurzen Kautschukschlauch *ad*, andererseits durch den ungefähr 39 cm langen Kautschukschlauch *cpqf* verbunden, so dass die Differenz der Wege *edab* und *efqpcb* gleich ist der halben Wellenlänge des Tones a^1 in der Luft. Das eine Ende *o* des Apparates wird mittelst eines kurzen Kautschukrohres in den Gehörgang des einen Ohres eingesetzt, während das andere Ohr verstopft wird.

Lässt man nun den Klang einer entsprechenden Stimmgabel durch das offene Ende *s* des langen Kautschukschlauches *srn* in den Apparat eintreten, so hört man den Ton a^1 nicht, wohl aber die mitklingende Octav a^2, während a^1 sogleich kräftig ertönt, wenn man den Gummischlauch *cpqf* mit den Fingern zudrückt.

Kundt wendet seine Staubwellen an, um die Interferenz isochroner Schallschwingungen sichtbar zu machen. Durch Reiben der Glasröhre *ab*, Fig. 814 (a. f. S.), wird dieselbe zum Tönen gebracht und erzeugt in dem weiteren Röhrenstücke *ca* Luftwellen, welche durch die bekannten Staubfiguren sichtbar werden. Bei *c* treten die Luftwellen in einen

Fig. 814.

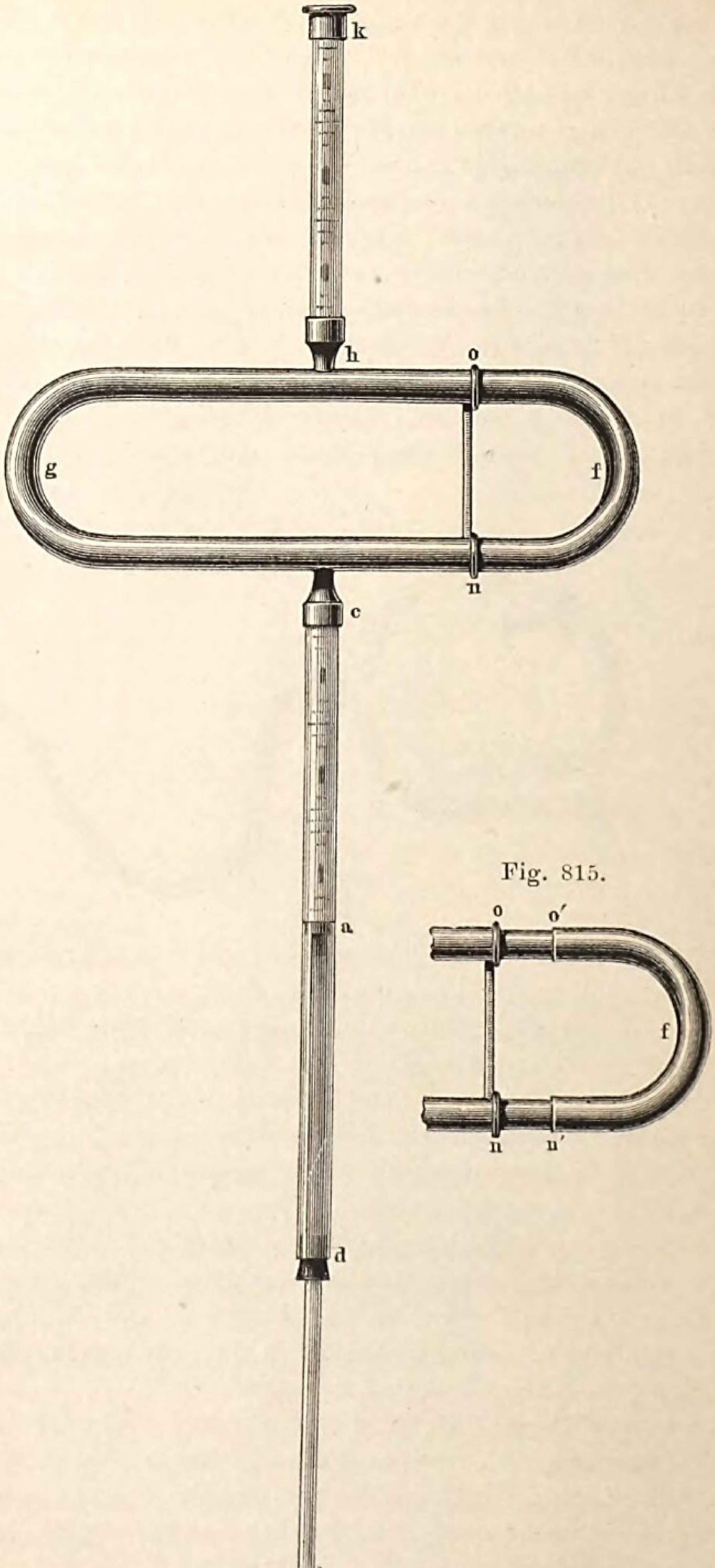


Fig. 815.

Doppelcanal von Blech und ziehen zur Hälfte über g, zur Hälfte über f nach h, um hier in das bei k verschlossene Glasrohr einzutreten. In hk werden nun ebenfalls Staubwellen erzeugt, sobald der Gangunterschied der von beiden Seiten her bei h zusammentreffenden Schallstrahlen gleich 0 oder gleich einem ganzen Vielfachen einer halben Wellenlänge ist. Wenn der Apparat so gestellt ist, wie die Fig. 814 zeigt, so ist der Weg von c über g nach h ebenso gross, wie der Weg von c über f nach h, der Gangunterschied ist 0 und in hk bilden sich die Staubwellen.

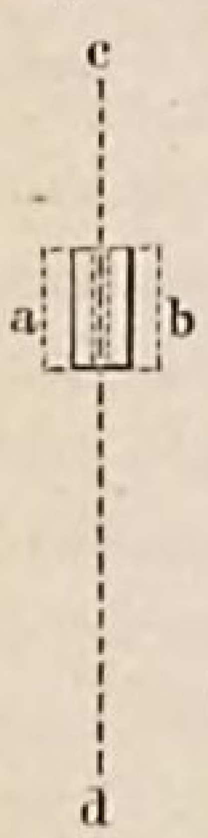
Das Röhrenstück cfh ist aber kein zusammenhängendes Ganzes, sondern das Röhrenstück nfo ist bei n und bei o in die Röhrenstücke ho und cn eingesteckt, so dass man es ausziehen kann, wie Fig. 815 erläutert. Ist ofn so weit ausgezogen, dass $oo' + nn' = \frac{1}{2}$ Wellenlänge ist (deren Grösse sich mittelst der Staubfiguren leicht bestimmen lässt), so beträgt der Gangunterschied der bei g zusammentreffenden Schallstrahlen gleichfalls $\frac{1}{2}$ Wellenlänge, ihr Zusammenwirken kann also in gh keine stehende Luftwellen, keine regelmässigen Staubfiguren erzeugen.

In Beziehung auf Fig. 814 ist übrigens noch zu bemerken, dass der Deutlichkeit wegen der Querschnitt aller Röhren doppelt so gross gezeichnet ist, als er im Verhältniss zu den Längendimensionen sein sollte.

König hat den beschriebenen Interferenzapparat mit einer manometrischen Kapsel (§. 194) in Verbindung gebracht, deren Flamme ruhig brennt oder vibrirt, je nachdem der Ton durch die Interferenz unterdrückt wird oder nicht.

Auch an der Seebeck'schen Sirene lässt sich die Interferenz zeigen, indem man zwei benachbarte Löcher von entgegengesetzter Seite gleichzeitig anbläst. Die von nahe derselben Stelle ausgehenden Schallwellen, welche einen Gangunterschied einer halben Welle haben, schwächen sich gegenseitig, so dass man fast nur das Sausen der rotirenden Scheibe hört. Dies tritt nicht ein, wenn man die benachbarten Löcher von derselben Seite gleichzeitig anbläst.

Fig. 816.



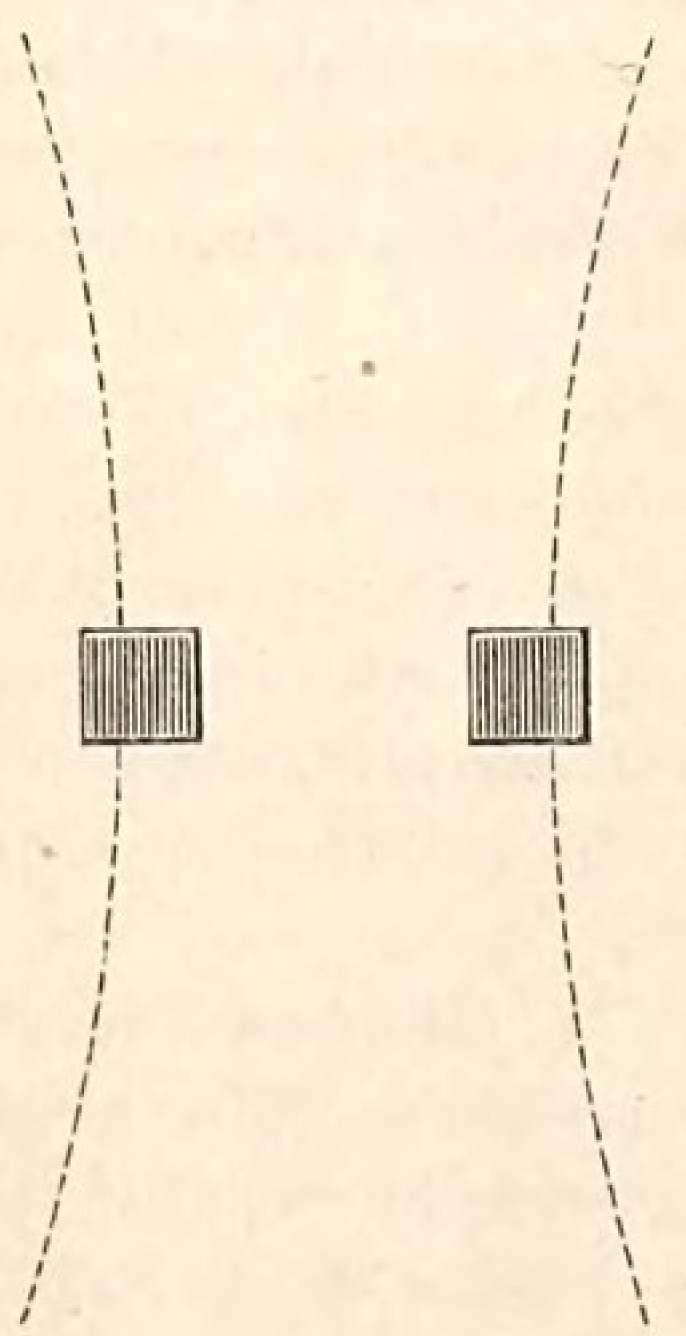
Versetzt man einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, den man an zwei Knotenstellen aufgehängt hat, durch Streichen mit einem Violinbogen in Schwingungen, so wird stets gleichzeitig auf einer Seite des Stabes die Luft verdichtet und auf der anderen Seite verdünnt. Es müssen daher von den beiden Seiten des Stabes Wellen mit einem Gangunterschiede einer halben Wellenlänge ausgehen, welche zur Interferenz gelangen. Dies wurde denn auch von W. Weber und später von Kiessling*) nachgewiesen. Stellt Fig. 816 die Endfläche des Stabes, die ganz ausgezogenen Linien seine Ruhelage, die gestrichelten Linien seine Excursionen

*) Pogg. Ann. Bd. CXXX.

vor, so sind *a* und *b* die Ausgangsstellen der Wellen. Jeder Punkt der durch die Gerade *cd* dargestellten Ebenen ist von jenen gleich weit entfernt, erhält also gleiche entgegengesetzte Impulse. Verstopft man sich ein Ohr, steckt in das andere einen Kautschukschlauch und führt die offene Mündung dieses Schlauches senkrecht auf *cd* hin und her, so verschwindet der Ton jedesmal, so oft man die Mittelebene *cd* passirt.

Dieselbe Erscheinung tritt auch an den Zinken einer Stimmgabel auf. Da von jeder Zinke nach beiden Seiten der Schwingungsebene eine solche Interferenzebene sich erstreckt, so muss auch der Ton der Stimmgabel viermal erlöschen, wenn man sie in der Nähe des Ohres einmal um ihre Achse dreht. Der Ton muss am stärksten auftreten, wenn man die Mündung der Kautschukröhre in die Symmetrieebene der Gabel bringt.

Fig. 817.



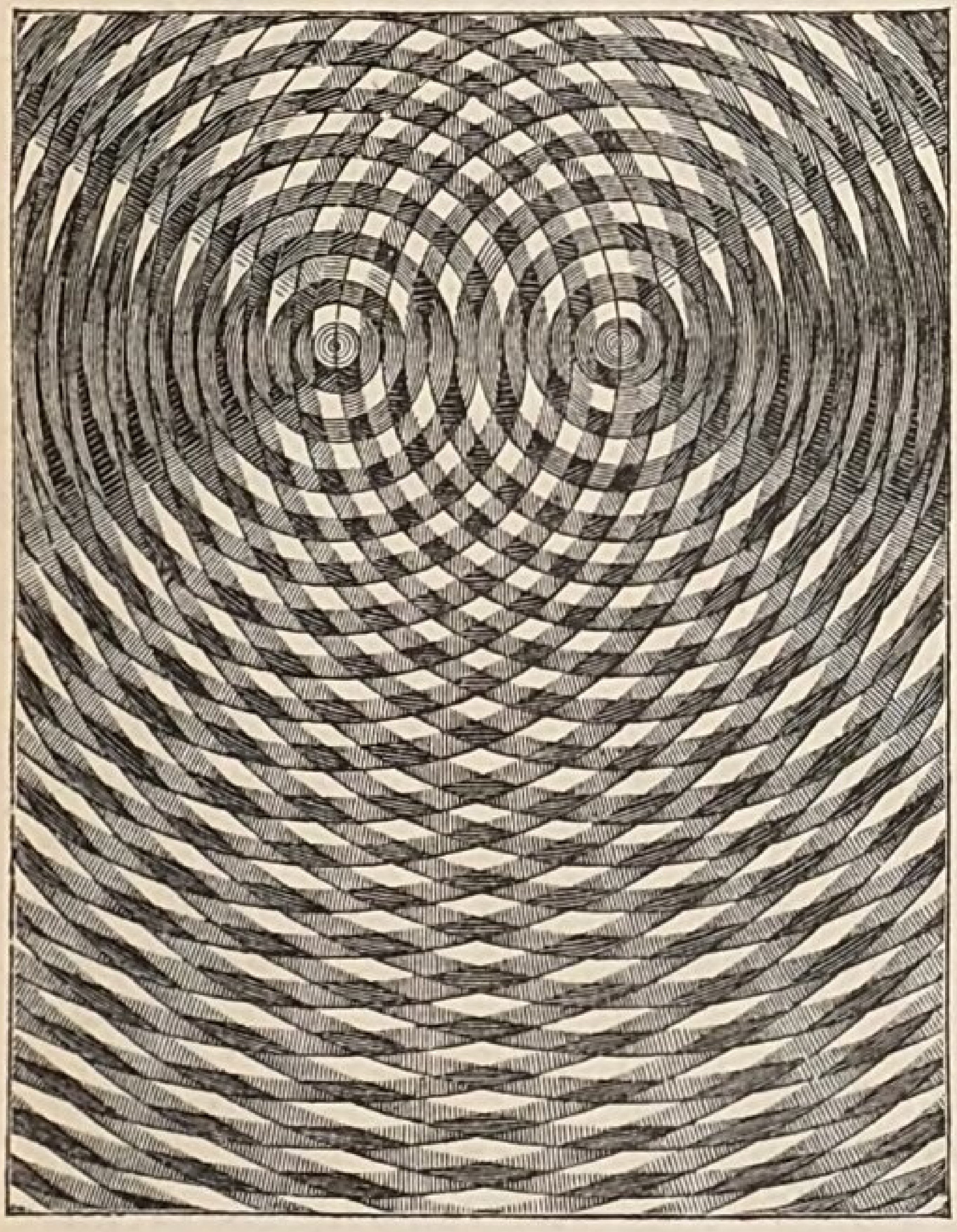
Dabei treten aber auch noch einige Complicationen auf. Die Schallwellen der einen Zinke werden an den Wänden der anderen reflectirt und ausserdem interferiren auch die von beiden Zinken ausgehenden Impulse unter einander. Wir begnügen uns mitzutheilen, dass nach Kiessling's Untersuchungen in Folge dieser Nebenumstände die von den Zinken ausgehenden Interferenzebenen nicht parallel bleiben, sondern hyperbolisch gekrümmt sind und zwar sich nach aussen von einander entfernen (Fig. 817). Bedeckt man die eine Zinke durch eine Glasröhre, so tritt an der anderen die Interferenzebene wiederum in normaler Lage auf. Da die Wellenlänge des Tones einer Stimmgabel im Verhältnisse zum Abstande der Zinken gewöhnlich sehr gross ist, so ist die Interferenz der von beiden Zinken ausgehenden Wellen in Luft nicht gut zu zeigen. Dagegen lassen sich nach Lommel*) die von den beiden Zinken in Quecksilber erregten Wellen und deren Interferenz auf folgende Weise stroboskopisch darstellen:

Zwei gleiche Wellensysteme werden auf der Oberfläche von in einer flachen Schale befindlichem Quecksilber erregt durch eine Stimmgabel, an deren Zinken, die Fortsetzung derselben bildend, zwei Eisendrähte mit Klebwachs befestigt sind. Die mit einem Resonanzkasten versehene Stimmgabel wird, mit den Zinken nach unten, von einem Stativ festgehalten, so dass die Spitzen der Eisendrähte ein wenig in das Quecksilber eintauchen. Die Stimmgabel wird mittelst einer zweiten, gleichgestimmten Gabel durch Resonanz zum Schwingen gebracht, um andere als die gewünschten Wellen, welche beim directen Anstreichen oder Anschlagen unvermeidlich entstehen würden, auszuschliessen. Das vom

*) Wied. Ann. XXVI.

Heliostaten oder der elektrischen Lampe kommende Lichtbündel wird durch eine Linse auf dem Rande einer verticalen, um ihre horizontale Achse drehbaren Metallscheibe concentrirt, welche längs ihrem Rande von einer Anzahl gleichweit abstehender Löcher durchbohrt ist. Der aus einem dieser Löcher austretende Lichtkegel wird von einem ebenen Spiegel unter einem Winkel von etwa 45^0 auf die Quecksilberoberfläche reflectirt, und das reelle, vergrösserte Bild der letzteren mittelst einer geeigneten Linse auf einem verticalen Schirme entworfen. Steht die Lochscheibe still, so sieht man auf dem Schirme die Wellenringe selbst nicht, weil dieselben zu rasch auf einander folgen; man sieht aber ein System abwechselnd hellerer und dunklerer homofocaler Hyperbeln, deren gemeinsame Brennpunkte mit den Eintauchungsstellen der Drahtspitzen zusammenfallen; die helleren Hyperbeln sind die Orte aller Punkte, in welchen die beiden Wellensysteme sich aufheben. Dreht man aber die Scheibe, so werden in der dadurch bewirkten intermittirenden Beleuchtung auch die Wellenringe selbst sichtbar, und man findet leicht eine solche Drehungsgeschwindigkeit, bei welcher die Wellen still zu stehen scheinen.

Fig. 818.



Die Fig. 818 giebt eine Darstellung der Erscheinung. Dreht man die Scheibe etwas zu langsam oder etwas zu rasch, so scheinen sich die Wellenringe nach aussen oder nach innen zu bewegen. Bei diesem Versuche würde die rotirende Scheibe vortheilhaft durch eine Mach'sche Stimmgabel (§. 208) ersetzt werden.

Abweichungen vom Princip der Coëxistenz kleiner Bewegungen; Mach's Untersuchung der Funkenwellen. 220

Die im vorausgehenden Paragraphen beschriebenen Versuche beruhen auf dem früher (§. 188) mitgetheilten Principe der Coëxistenz der kleinen Bewegungen, welchem gemäss sich die durch die componirenden Wellen hervorgebrachten kleinen Verschiebungen algebraisch addiren. Man kann dies (bei Transversalwellen) auch so ausdrücken, dass sich die Wellen über einander lagern. Fallen ihre Fortpflanzungsrichtungen

nicht zusammen, sondern durchkreuzen sie sich, so schreiten die Wellen ungestört über einander hinweg, ohne sich gegenseitig zu stören. Dort, wo Theile des Körpers, der die Wellenbewegungen fortpflanzt, von beiden Wellen zugleich bewegt werden, legen sich die Berge und Thäler der einen Welle über die Berge und Thäler der anderen Welle, wodurch freilich daselbst die Wellenform modificirt wird. Aber diese Modification schreitet nicht mit den Wellen fort. Haben sie den Kreuzungspunkt überschritten, so haben sie auch die ursprüngliche Form wieder erlangt. Man kann sich hiervon ein ungefähres Bild verschaffen, wenn man sich vorstellt, dass zwei flache Bänder aus biegsamem Stoffe, von denen jedes aus allmälig dicker und wieder dünner werdenden Stücken besteht, übers Kreuz auf einander gelegt und dann ihrer Länge nach fortgeschleift werden. An der Durchkreuzungsstelle wird sich die Oberfläche, je nachdem gerade zwei dicke oder zwei dünne Stellen oder eine dicke und eine dünne Stelle zusammentreffen, zu doppelter Höhe erheben oder niedersenken oder eine mittlere Höhe einnehmen, während die einzelnen Bänder nach wie vor ihre ursprüngliche wellige Oberfläche behalten. Dabei darf man freilich nicht vergessen, dass bei diesen Bändern auch der materielle Inhalt der Wellen fortschreitet, was bei den wirklichen Wellen nicht der Fall ist.

Dieses Princip gilt aber strenge genommen nur für Wellen mit unendlich kleinen Amplituden. Bei den Wellen mit Amplituden endlicher, aber doch relativ mässiger Grösse, wie sie in der Regel vorkommen, sind die Abweichungen von dem Principe der Coëxistenz meistens geringfügig, so dass sie nicht merklich hervortreten. Dagegen sind sie nicht mehr zu vernachlässigen bei Wellen, welche durch sehr heftige Schallerregungen entstehen, wie z. B. bei Explosionen und elektrischen Funken.

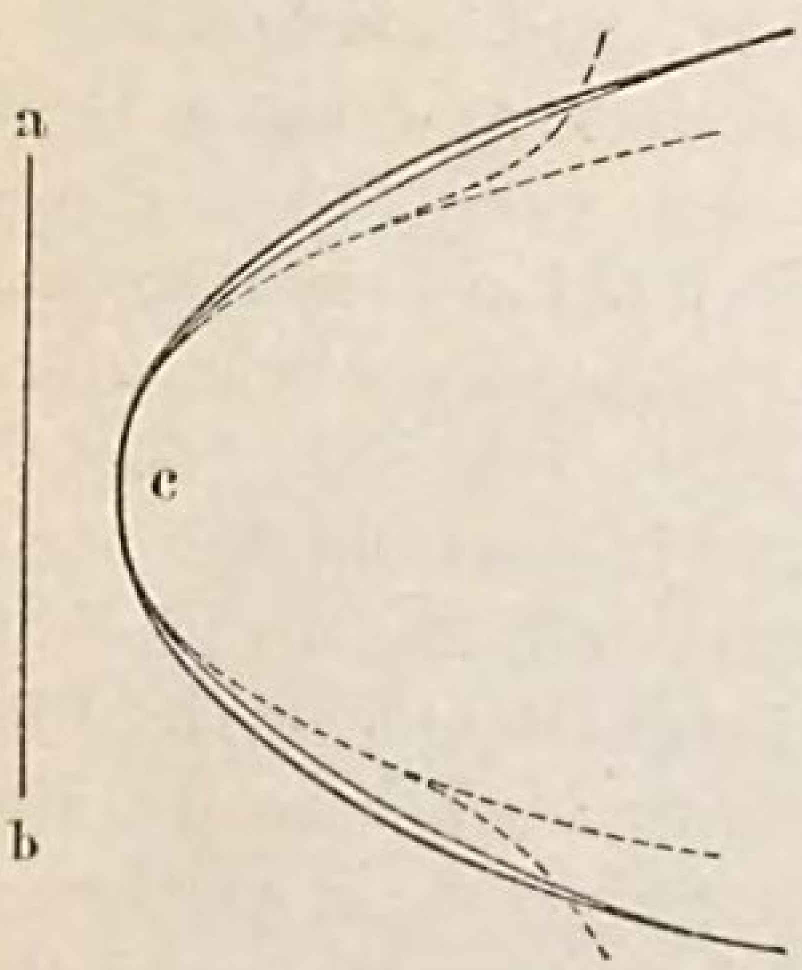
Wir haben bereits im §. 183 mitgetheilt, dass nach Régnault's Messungen die Schallwellen einer Kanone in der Nähe derselben eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben und erst nach ihrer Ausbreitung, wodurch die Intensität geschwächt, also die Amplitude verkleinert wird, einen nahezu constanten Minimalwerth der Geschwindigkeit annehmen. Daraus folgt, dass, wenn man diese Wellen rückgängig machen würde, so dass sie sich gegen die Kanonenmündung hin wieder vereinigen, mit der dadurch wachsenden Intensität der Schwingungen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder zunehmen müsste. Durch Interferenz zweier isochroner Wellen kann also unter Umständen nicht allein eine Welle mit grösserer Amplitude entstehen, sondern dieselbe kann auch eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, was durch das Princip der Uebereinanderlagerung allein nicht zu erklären ist.

Wir können diesen Gegenstand hier nicht theoretisch näher begründen, sondern müssen uns auf experimentellen Nachweis beschränken.

Einen solchen liefern die zahlreichen, sehr interessanten Interferenzerscheinungen, welche E. Mach*) an den Schallwellen beobachtet hat, die durch Explosionen oder durch elektrische Funken hervorgerufen werden. Die Beobachtungsmethode gründete sich im Anschlusse an K. Antolik**) auf die Figuren, welche eine schwach berusste Glasplatte zeigt, wenn man sie der Einwirkung der in nächster Nähe überspringenden Funken aussetzt. Die Erschütterung fegt den Russ an gewissen Stellen weg und häuft ihn an anderen an, so dass derselbe eine analoge Rolle spielt, wie der Lycopodiumstaub in den Kundt'schen Röhren oder der Sand auf den Klangfiguren.

Um wenigstens ein Beispiel anzuführen, wollen wir die Erscheinung beschreiben, welche man erhält, wenn man auf der berussten Glasplatte gleichzeitig einen elektrischen Funken auf der geradlinigen Bahn ab, Fig. 819, und einen anderen durch eine punktförmige (sehr kurze geradlinige) Bahn c überspringen lässt. Es geht dann von ab als Achse eine Cylinderwelle, von c als Mittelpunkt eine Kugelwelle aus. Die Gesammtheit der Durchschnittspunkte der beiden Wellen bildet die Interferenzfläche. Betrachtet man den Vorgang nur so weit, als er in der Ebene abc stattfindet, so schreitet von ab aus eine geradlinige, von c aus eine kreisförmige Welle fort. Da nun bekanntlich alle Punkte, die gleich weit von ab wie von c entfernt sind, eine Parabel bilden, deren Directryx ab, deren Brennpunkt c ist, so muss die Interferenzlinie eben die Form dieser Parabel haben. In der That stimmt nun die im Russ entstehende Figur mit derselben nahe überein, insbesondere wenn man die Glasplatte unbedeckt lässt. Bedeckt man sie aber mit einer zweiten Platte, wodurch die Intensität der Schallwellen, insbesondere der von ab ausgehenden, gesteigert werden muss, so bemerkt man nicht allein, dass die beiden Paraboläste etwas nach einwärts abweichen, sondern es zeigen sich dieselben in je zwei Aeste gespalten, so dass eine V-artige Ausbreitung derselben erfolgt. In der Fig. 819 zeigt die dickere Linie die theoretische Parabel, die dünnere die Interferenzlinie bei unbedeckter, die punktirte, gespaltene jene bei bedeckter Platte.

Fig. 819.



Offenbar muss die um c entwickelte Welle bei ihrer Ausbreitung rascher geschwächt werden als die von ab ausgehende. Die erstere wird daher rascher an Fortpflanzungsgeschwindigkeit abnehmen und

*) Mach u. Wosyka, Wien. acad. Ber. Band 72 (1875); Rosicky, Band 73 (1876); Mach u. Sommer, Band 75 (1877); Mach, Tumlirz u. Kögler, Band 77 (1878); Mach, Band 77, S. 819 (1878).
**) Pogg. Ann. 1875.

deshalb müssen die gleichzeitig erreichten Punkte, welche die Interferenzlinie bilden, näher an c liegen als die Punkte der theoretischen Parabel. Die V-artige Ausbreitung aber erklärt Mach auf folgende Weise. Wo sich die beiden Wellen unter hinlänglich spitzem Winkel ihrer Fortpflanzungsrichtungen treffen, da entsteht eine neue Welle von grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche gewissermaassen als Welle in der Welle selbstständig mit ihrem Geschwindigkeitsüberschuss fortschreitet. Die beiden Zweige des Parabelastes entstehen durch die Interferenz dieser neuen Welle mit den früheren.

Mit diesen Erscheinungen, deren nähere Beschreibung und Deutung in den citirten Originalabhandlungen nachzulesen ist, steht die aussergewöhnlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen und deren rasche Abnahme mit der Ausbreitung im engsten Zusammenhange. Wir haben auf diese bereits im §. 182 hingewiesen und wollen hier nur noch eine der sinnreichen Methoden beschreiben, nach welchen Mach diese Geschwindigkeiten innerhalb der Distanzen von wenigen Centimetern gemessen hat.

Eine Messingscheibe von 17 cm Durchmesser lief auf einer horizontalen Achse in Spitzen und wurde durch ein grosses massives Schwungrad mittelst Schnurlauf in rasche Rotation versetzt. Die eine Seite der Scheibe war mit einer schwachen, gleichmässigen Russschicht überzogen. Nahe am Rande wurde dieser berussten Kreisfläche ein Metallstift S und diametral gegenüber die Mündung C eines Holzcanales genähert. Diese Mündung war durch ein dünnes Plättchen mit einer kleinen runden Oeffnung von 1 mm Durchmesser geschlossen. Am rückwärtigen geschlossenen Ende des Holzcanales waren zwei Elektroden eingesetzt, zwischen denen ein elektrischer Funke überschlagen konnte. Die von diesem Funken ausgehende Schallwelle bringt bei ihrer Ankunft an der Scheibe auf der Russschicht eine kleine runde Marke hervor, indem durch den mechanischen Druck der Luft der Russ comprimirt wird. Der elektrische Funke wurde durch eine Leydenerflasche erzeugt, deren Entladung auf dem Wege über die rotirende Scheibe zur Spitze S und durch die Elektroden des Canales zurück zur Flasche vorgenommen wurde. Dadurch entsteht nun zuerst gegenüber der Spitze S eine Funkenmarke F und etwas später, nachdem die Funkenwelle den Canal durchlaufen hat, gegenüber C eine Wellenmarke W. Hat man diese beiden Marken bei rotirender Scheibe erhalten, so erzeugt man nachher dieselben nochmals bei ruhender Scheibe etwas weiter rückwärts in der Nähe der früheren. Die Winkelabstände dieser neuen Marken F' und W' von den früheren F und W werden dann mittelst eines Goniometers gemessen. Die Differenz dieser Winkelabstände $WW' - FF' = w$ giebt dann, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, die Drehung der Scheibe für denselben Zeitraum, den die Funkenwelle braucht, um den Canal zu durchlaufen.

Bei Mach's Versuchen war die Umdrehungszahl der Scheibe 63,05 pro Secunde, also die Winkelgeschwindigkeit $= 22698^0$, die Zeit, in

welcher ein Canal von der Länge l durchlaufen wird, ist also $\frac{w}{22698}$ und die mittlere Geschwindigkeit der Funkenwelle gleich:

$$v = \frac{22698}{w}\, l.$$

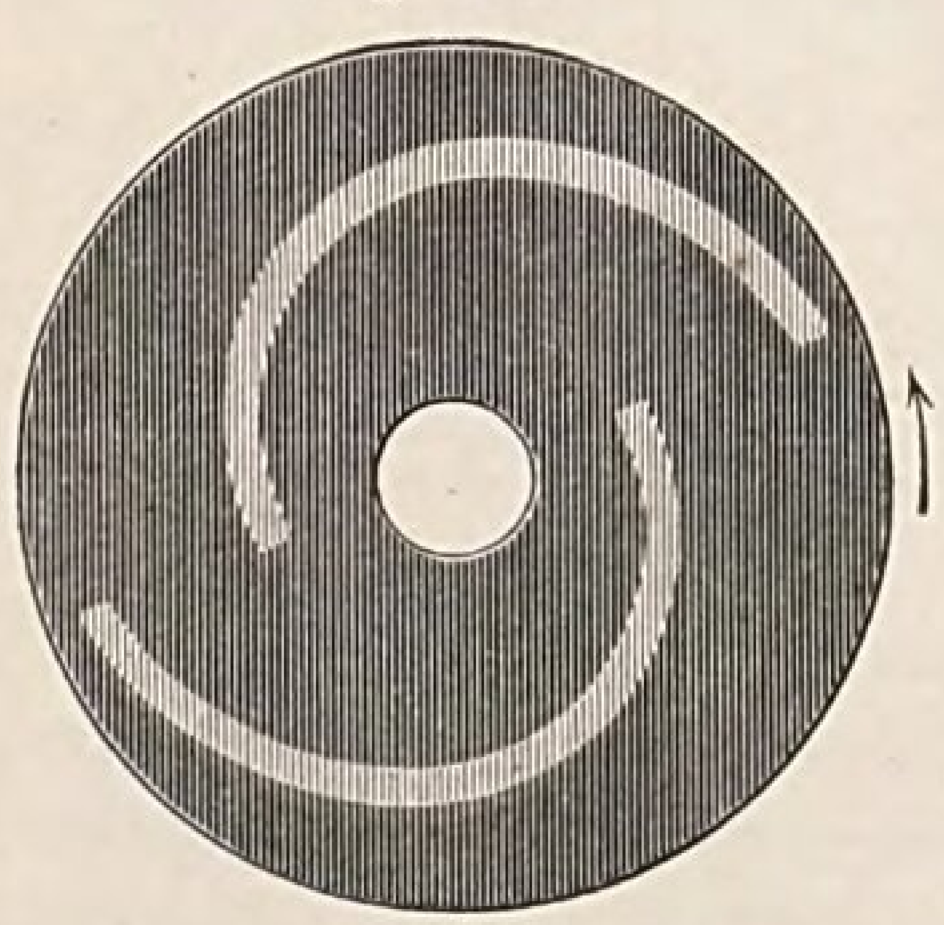
Bei einem solchen Versuche war $l = 80\,\text{mm}$, $w = 2^0\,24' = 2{,}4^0$, woraus

$$v = \frac{22698 \cdot 0{,}08}{2{,}4} = 756{,}6\,\text{m folgt.}$$

Erst bei einer Canallänge von 1 m Länge wurde die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit nahe erreicht.

Wir haben noch zu zeigen, wie Mach die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe bestimmt. Seine Methode beruht auf der optischen Vergleichung mit einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl. Die nicht berusste Seite der Scheibe trug auf schwarzem Grunde zwei glänzende Curven von beistehender Form (Fig. 820). Es sind archimedische Spiralen. Bedeckt man die Scheibe mit einem Schirm, in welchen ein Spalt nach Richtung des horizontalen Durchmessers geschnitten ist, so durchläuft der glänzende Durchschnittspunkt der Spirale mit dem Spalt den letzteren mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Centrum gegen die Peripherie und zwar während einer halben Rotation. Während der zweiten Hälfte tritt die zweite Spirale in derselben Weise auf. Betrachtet man nun die Scheibe im Spiegel einer vertical schwingenden Stimmgabel, deren ganze Schwingungsdauer gleich der Zeitdauer einer halben Scheibenrotation ist, so erscheint der glänzende Punkt in eine vollständige Sinuswelle ausgezogen. Bleibt dieselbe ruhig stehen, so wissen wir, dass obiges Geschwindigkeitsverhältniss genau eingehalten ist. Laufen dagegen per Secunde p solcher Sinuswellen vom Centrum zur Peripherie, so ist $\frac{n+p}{2}$ die Zahl der Scheibenrotationen per Secunde, wenn n die Schwingungszahl der Stimmgabel ist. Indem man den Moment abpasst, wo bei allmälig gesteigerter Geschwindigkeit der Scheibe die Sinuscurve ruhig zu stehen kommt, und in diesem Moment den Funken entladet, ist man sicher, dass gleichzeitig die Umlaufszahl $= \frac{n}{2}$ war.

Fig. 820.

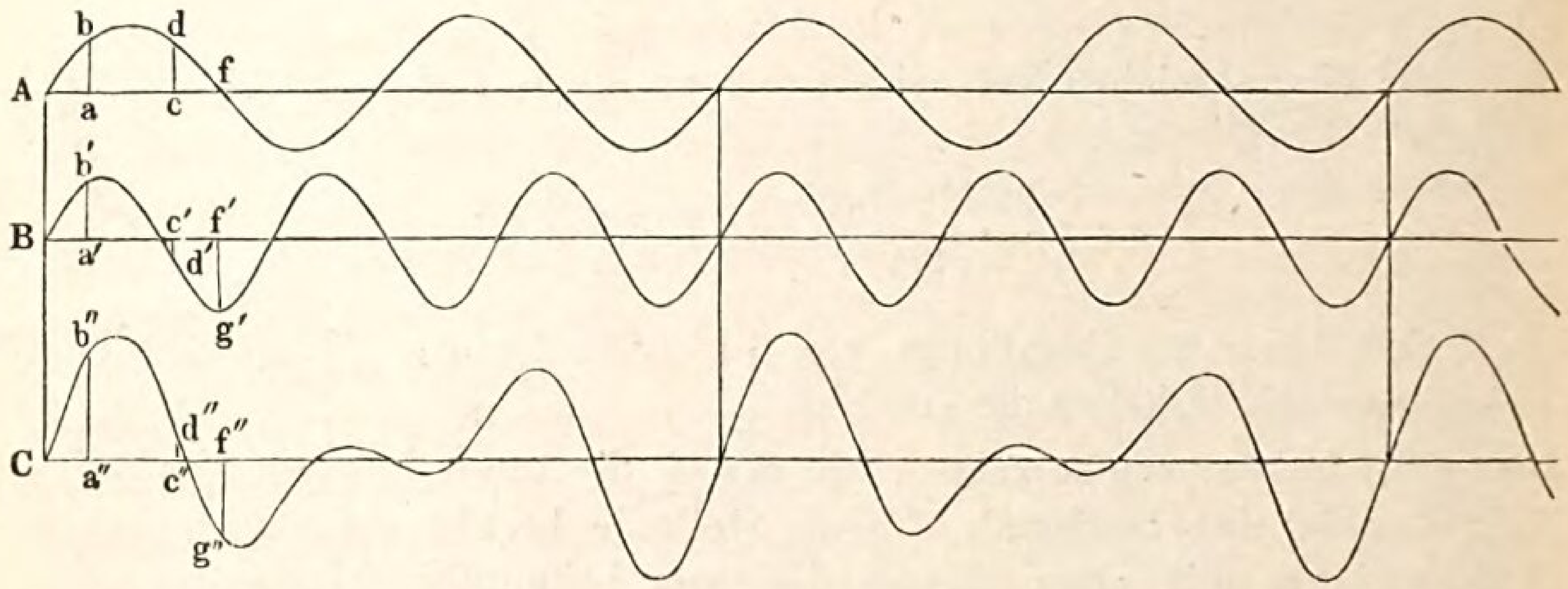


Diese Methode gestattet offenbar eine vielfache Anwendung zur Messung sehr kleiner Zeiträume.

221 Zusammensetzung von Wellen ungleicher Wellenlänge.

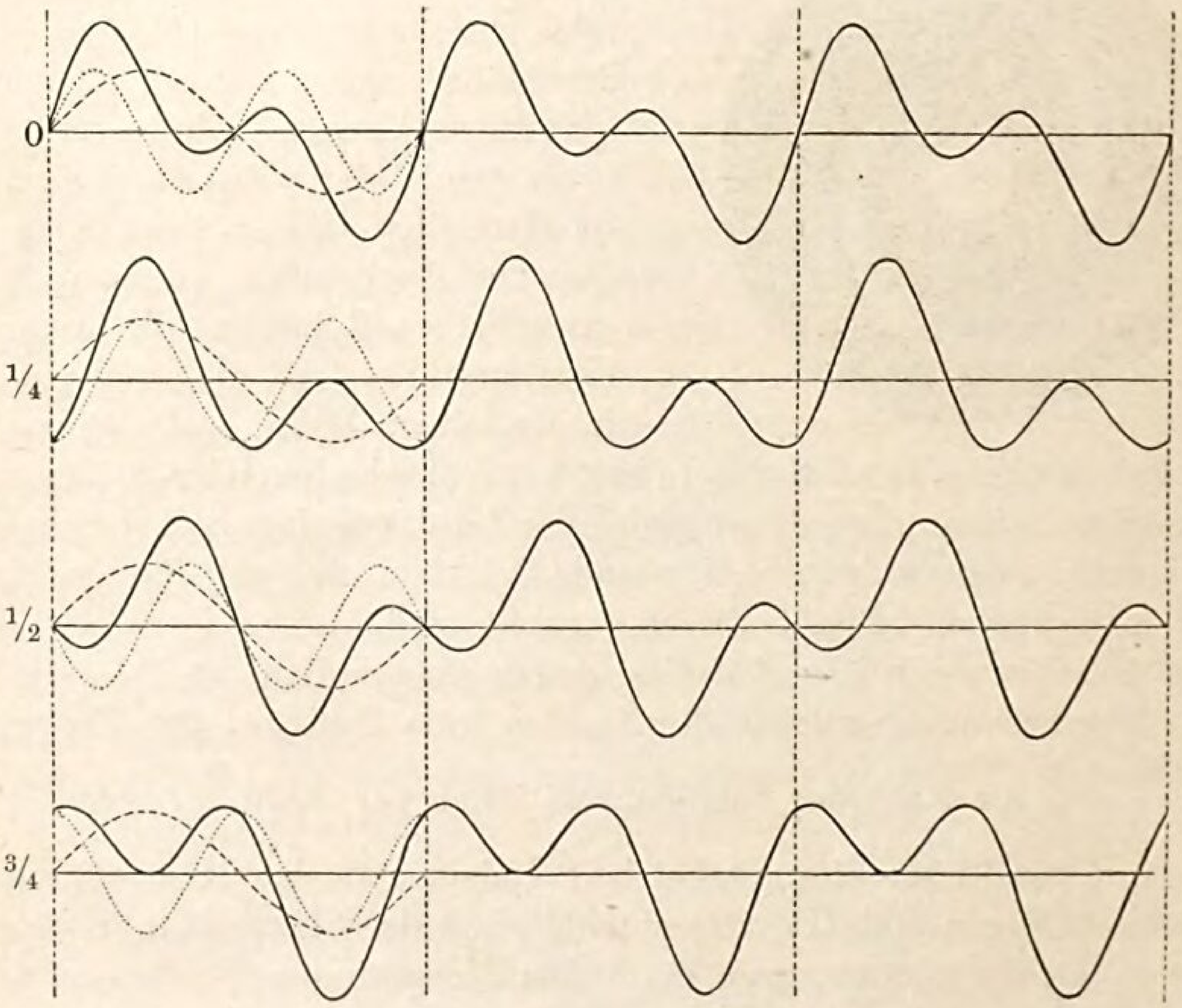
Treffen zwei Wellenzüge ungleicher Wellenlänge längs der gleichen Fortpflanzungsrichtung zusammen, so gilt für die Aufsuchung der resultiren-

Fig. 821.



den Wellenform, abgesehen von den im vorhergegangenen Paragraphen angeführten Abweichungen, dasselbe Princip der Uebereinanderlagerung, wie für isochrone Wellen.

Fig. 822.

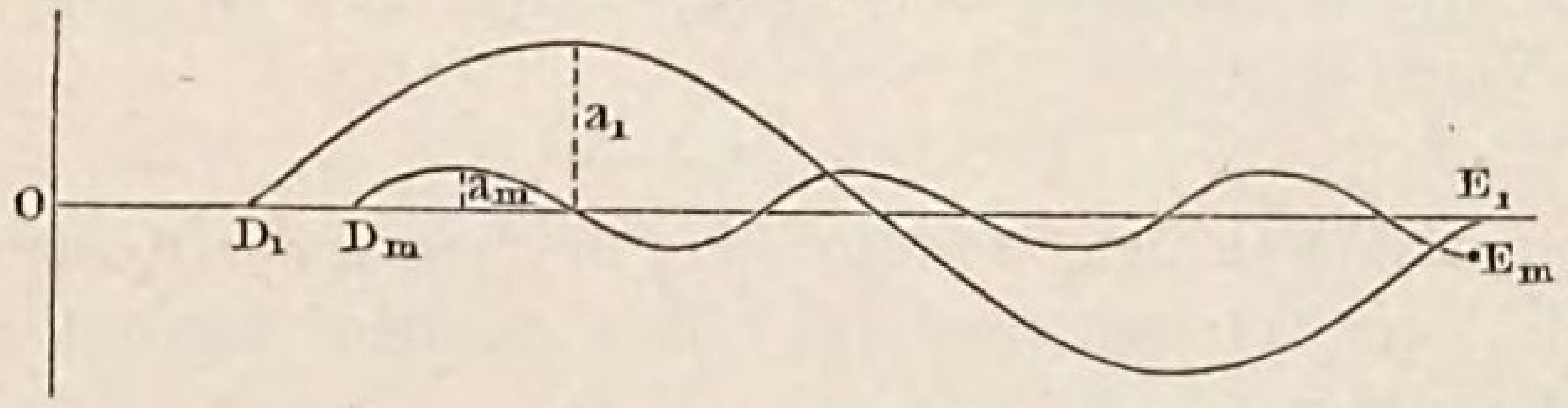


Unter dem Einfluss beider componirenden Wellen wird nämlich der Abstand jedes Theilchens des fortpflanzenden elastischen Mediums von seiner Ruhelage gleich der algebraischen Summe der Abstände, welche

durch die einzelnen Wellen hervorgebracht würden. Es seien z. B. A und B, Fig. 821, die Schwingungscurven eines Tones und seiner Quint, so ergiebt sich als Resultat des Zusammenwirkens dieser beiden Wellensysteme eine oscillirende Bewegung der Lufttheilchen, deren Schwingungscurve durch C, Fig. 821, dargestellt ist. Jede Ordinate der Curve C ist die algebraische Summe der Ordinaten der Curven A und B, welche derselben Abscisse angehören; so ist z. B. die Ordinate $a'' b''$ gleich $ab + a'b'$; ferner ist $c'' d'' = cd - c'd'$, weil $c'd'$ von der Abscissenachse nach unten gekehrt ist, während cd die entgegengesetzte Lage hat. Die nach unten gerichtete Ordinate $f'' g''$ ist gleich $f' g'$, weil die dem Abscissenpunkte f entsprechende Ordinate der Curve A gleich Null ist.

In Fig. 822 ist die Zusammensetzung zweier Wellen gleicher Amplitude, deren Wellenlängen sich wie 2 : 1 verhalten, für die Gangunterschiede = 0, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ der Länge der grösseren Welle dargestellt. Man sieht, dass die resultirende Wellenform sehr von dem Gangunterschiede der Wellen, also von der Phasendifferenz der sie erregenden Schwingungen abhängt. Da ausser dem Unterschiede in der Wellenlänge und dem Gangunterschiede auch noch eine Ungleichheit der Am-

Fig. 823.



plituden stattfinden kann, so begreift man, dass die resultirenden Wellen von unendlich grosser Mannigfaltigkeit der Form sein können.

Mag eine Welle aber was immer für eine Form haben, so lässt sich dieselbe doch stets als die Resultirende einer Reihe von Sinuswellen darstellen, welche dem Grundtone von derselben Wellenlänge und seinen Obertönen angehören.

Wir wollen diesen wichtigen Satz in mathematischer Form ausdrücken. Die Gleichung einer Sinuswelle, Fig. 823, $D_1 E_1$, deren Amplitude $= a_1$ und deren Wellenlänge $= \lambda_1$, ist gegeben durch

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_1}.$$

Wenn der Anfangspunkt der Welle um die Strecke D_1 nach rechts liegt:

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x - D_1}{\lambda_1} = a_1 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} x - \frac{2\pi D_1}{\lambda_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Für eine zweite Welle, Fig. 823, $D_m E_m$, deren Amplitude $= a_m$, deren Wellenlänge $\lambda_m = \frac{\lambda_1}{m}$, welche also dem Oberton mit der mfachen

Schwingungszahl entspricht, gilt, wenn ihr Anfang um D_m nach rechts verschoben ist

$$y_m = a_m \sin 2\pi \frac{x - D_m}{\lambda_m} = a_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot m x - \frac{2\pi D_m}{\lambda_m}\right) \quad . \; . \; . \quad 2)$$

Wählen wir den Abscissenmaassstab so, dass $\lambda_1 = 2\pi$ wird, so ist $\frac{2\pi}{\lambda_1} = 1$ zu setzen; bezeichnen wir ferner die Phasendifferenzen $\frac{2\pi D_1}{\lambda_1}$ und $\frac{2\pi D_m}{\lambda_m}$ mit ϑ_1 und ϑ_m, so lauten die Gleichungen 1) und 2):

$$y_1 = a_1 \sin(x - \vartheta_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

$$y_m = a_m \sin(m x - \vartheta_m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Nun denken wir uns eine Reihe von Sinuscurven von der Art, dass ihre Wellenlängen nach einander die Reihe

$$\lambda, \; \frac{\lambda}{2}, \; \frac{\lambda}{3}, \; \frac{\lambda}{4} \; . \; . \; . \; .$$

bilden; ihre Amplituden seien

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad . \; . \; . \; .$$

Die Schwingungszahlen der Töne, denen diese Wellen angehören, bilden die Reihe

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \; . \; . \; .$$

den Ton n nennt man den Grundton, die übrigen seien Obertöne (§. 211). Sind endlich die Gangunterschiede dieser Wellen gegenüber dem Anfangspunkt gleich:

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_4 \quad . \; . \; . \; .$$

so wird, wenn man sich diese sämmtlichen Wellen zu einer resultirenden Welle zusammengesetzt denkt, wenn also sämmtliche Ordinaten für jeden Abscissenpunkt algebraisch addirt werden, die Gleichung der resultirenden Curven lauten:

$$Y = a_1 \sin(x - \vartheta_1) + a_2 \sin(2x - \vartheta_2) + a_3 \sin(3x - \vartheta_3)$$
$$+ a_4 \sin(4x - \vartheta_4) + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Der Mathematiker Fourier hat nun bewiesen, dass sich durch diese Gleichung, wenn man nur über die Anzahl ihrer Glieder und die Werthe der Grössen

$$a_1, \; a_2, \; a_3 \; . \; . \; . \; . \quad \vartheta_1, \; \vartheta_2, \; \vartheta_3 \; . \; . \; . \; .$$

unbeschränkt verfügen kann, jede beliebige periodische Curve darstellen lasse; dass ferner jede solche Curve nur auf eine einzige Weise durch eine Gleichung aus solchen Gliedern dargestellt werden könne *). Daraus

*) Der Fourier'sche Satz, mitgetheilt vom Entdecker in seiner Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, ist bei verschiedenen physikalischen Problemen von Wichtigkeit. Nach Thomson und Tait kann er in folgenden Worten ausgedrückt werden: „Eine zusammengesetzte harmonische Function, mit einer hinzugefügten Constanten, kann zur mathematischen Darstellung einer

folgt also, dass jede beliebige Curve, wenn sie nur die eine Eigenschaft hat, dass sie sich in lauter unter sich congruente Stücke (Wellen) von der Abscissenlänge λ zerlegen lässt, aufgebaut werden kann durch Uebereinanderlagerung einer Reihe und zwar nur dieser einen Reihe von Sinuscurven, deren Wellenlängen gleich λ, $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{3}$ sind, deren Amplituden a_1, a_2, a_3 und Gangunterschiede ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 von Fall zu Fall aus der gegebenen Curve berechnet werden können *).

Obertöne, Theiltöne. Nach dem im vorigen Paragraphen Vorgetragenen spielen bei den zusammengesetzten Schwingungen die Obertöne eines Grundtones eine hervorragend wichtige Rolle. Wir müssen bezüglich derselben und ihrer Bezeichnung noch einige Bemerkungen beifügen. 222

Sind für eine Reihe von Tönen die Schwingungszahlen

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad mn$$

so nennt man n den gemeinschaftlichen Grundton, die übrigen seine (harmonischen) Obertöne. Die ganze Reihe heisst eine Reihe harmonischer Töne. Damit ist natürlich nicht gemeint, dass alle diese Töne miteinander harmonisch klingen, d. h. Consonanz geben. Der Ton $6n$ und der Ton $7n$ z. B. stehen mit einander in Dissonanz. Das Wort harmonisch ist hier lediglich eine conventionelle Bezeichnung für die Töne mit Schwingungszahlen, welche ganze Multipla der Schwingungszahl des gewählten Grundtones sind.

Insofern nun diese Obertöne als Bestandtheile eines Tongemisches, eines Klanges auftreten, heisst man sie auch Partialtöne oder Theiltöne des Tongemisches oder Klanges. Der erste Partial- oder Theilton eines Klanges ist dann sein Grundton selbst, der gewöhnlich der stärkste ist. Der erste Oberton wäre demnach der zweite Partialton u. s. f.

Die harmonischen Obertöne von c als Grundton (mit 128 Schwingungen per Secunde) sind also:

1. Oberton	$= c^1$	mit	256	Schwingungen	(Octave)
2. „	$= g^1$	„	384	„	(Duodecime)
3. „	$= c^2$	„	512	„	(Doppeloctave)
4. „	$= e^2$	„	640	„	(Terz der Doppeloctave)
5. „	$= g^2$	„	768	„	(Quint der Doppeloctave)
6. „	$= b^2$	„	896	„	
7. „	$= c^3$	„	1024	„	
8. „	$= d^3$	„	1152	„	
9. „	$= e^3$	„	1280	„	u. s. w.

jeden beliebigen periodischen Function und folglich auch einer jeden beliebigen anderen Function zwischen bestimmten Werthen der Veränderlichen gebraucht werden."

*) Nach der „Methode der unbestimmten Coëfficienten".

Ausser den harmonischen Obertönen können aber in einem Tongemische, selbst in einem solchen, welches von einem einzigen schwingenden Körper ausgeht, auch unharmonische Obertöne enthalten sein, weil sich die Körper manchmal, ja in der Mehrzahl der Fälle, in schwingende Theile abtheilen, welche nicht genau den Schwingungszahlen der harmonischen Obertöne gemäss schwingen. Dem Fourier'schen Theorem gemäss können aber dann diese Töne zusammen keinen einheitlichen Klang von constanter Klangfarbe geben. Die Klangfarbe muss vielmehr von Welle zu Welle des Grundtones wechseln, was sich auch durch die wechselnde Form der entsprechenden Tonschriften bestätigt, welche sich nicht in congruente Theile von der Wellenlänge des Grundtones zerlegen lässt. So z. B. giebt die Stimmgabel, insbesondere wenn sie schwache Zinken hat und mit hartem Körper angeschlagen wird, solche unharmonische Obertöne, ebenso Klangplatten, Glocken u. s. w.

Bei den Orgelpfeifen und den Saiten sollten die Obertöne der einfachen Theorie nach harmonische sein. Dies ist aber insbesondere bei ersteren nicht strenge der Fall. Die wirklichen Obertöne der Orgelpfeifen sind stets etwas höher als die berechneten Obertöne, so zwar, dass der achte Oberton fast mit dem neunten berechneten zusammenfällt. Bei den Saiten aus Metall ist die Abweichung gering, bei Darmsaiten oft sehr beträchtlich.

König*) hat vorgeschlagen, den Namen Theiltöne für diese unharmonischen Obertöne allein zu gebrauchen, weil sie stets nur durch die Schwingungen von Theilen des Körpers entstehen, während die harmonischen Obertöne durch die Zerlegung der Schwingungsform des als Ganzes schwingenden Körpers entstehen und deshalb strenge den Multiplen der Schwingungszahl des Grundtones entsprechen. Wir möchten aber gegen diese Nomenclatur den Einwand erheben, dass die harmonischen Obertöne doch auch als Theiltöne aufzufassen sind. Eine gestrichene Violinsaite beispielsweise schwingt zwar als Ganzes, insofern alle ihre Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage gehen, trotzdem kann man sich vorstellen, dass ihre Form aus jener, welche dem Grundtone entsprechen würde, durch die Darüberlagerung der für sich schwingenden Theile der Saite entstanden ist. Da überdies der Name Partialton oder Theilton bereits allgemein in der Bedeutung als Oberton (Grundton als ersten Partialton mit eingeschlossen) gebräuchlich ist, so wollen wir ihn künftig auch in dieser Bedeutung verwenden und für Theilton im Sinne König's die bestimmtere Bezeichnung unharmonischer Oberton gebrauchen.

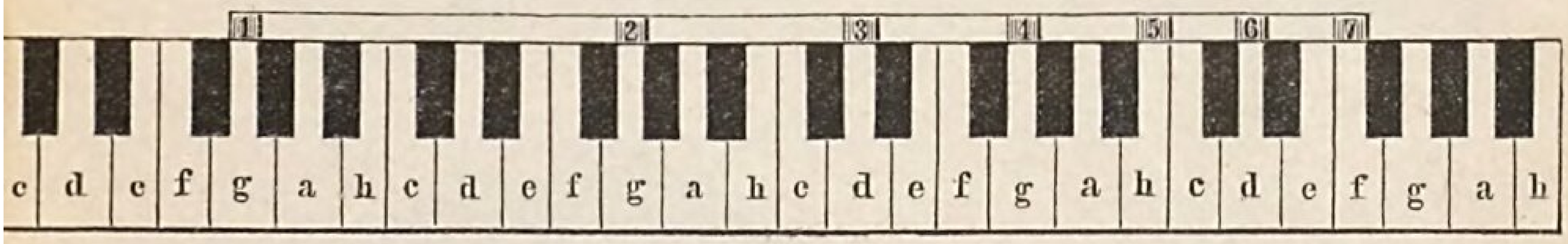
Das Vorhandensein von Obertönen in den meisten Klängen der musikalischen Instrumente ist für Besitzer eines feinen Gehörs ohne besondere Hülfsmittel nachzuweisen. Am Pianoforte lassen sich diesbezüglich leicht folgende Versuche anstellen.

*) „Bemerkungen über die Klangfarbe", Wied. Ann. Bd. XIV, S. 369 (1881).

Man schlage z. B. die Taste c^{-2} (= $\underline{C}$) an und halte den Ton längere Zeit, bis er verklingt; man wird dann neben dem Grundton noch leise die Töne $c^{-1}\ g^{-1}\ c^0\ e^0\ g^0\ b^0\ c^1\ d^1$ (= $C, G, c, e, g, b, \bar{c}, \bar{d}$) hören. Es ist aber oft nöthig, die Aufmerksamkeit auf jenen Ton zu lenken, den man hören soll, was am besten dadurch geschieht, dass man ihn leise und auf ganz kurze Zeit auf seiner eigenen Taste ertönen lässt. Nach dem Erlöschen desselben hört man ihn dann im Klange des Grundtones leichter als vorher.

Um diese Versuche auf andere Grundtöne auszudehnen und die zugehörigen Obertöne schnell aufzufinden, ist es recht bequem, sich einer von E. Mach angegebenen Methode zu bedienen. Man fertigt sich das Bild einer Claviatur, Fig. 824, welche sich von den üblichen Claviaturen nur dadurch unterscheidet, dass die weissen und schwarzen Tasten am rückwärtigen Rande gleich breit gemacht sind, wodurch die Breiten der weissen Tasten am vorderen Rande zwar ungleich werden, aber ein Vortheil für die Einfachheit der Darstellung gewonnen wird.

Fig. 824.



Schreitet man auf dieser Claviatur um gleiche Abstände von links nach rechts, so schreitet auch die musikalische Tonhöhe um gleiche Intervalle fort, während die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe fortschreiten*) Wir können demgemäss Rechnungsoperationen, die an den Schwingungszahlen durch Multiplication oder Division vorzunehmen wären, auf der Claviatur durch Addition oder Subtraction vornehmen, d. h. durch Vorrücken um gleiche Abstände nach rechts oder links in Ausführung bringen, so etwa wie bei einem logarithmischen Rechenschieber. Daraus folgt nun auch, dass der Abstand eines Obertones von seinem Grundton auf der Claviatur immer derselbe bleibt, wenn wir den Grundton beliebig wo wählen. Der erste Oberton wird immer um 12 Tasten, der zweite um 19, der dritte um 24 Tasten weiter nach rechts hin liegen als der Grundton, von dem man ausgehen will.

Fertigt man sich demnach eine verschiebbare Leiste, welche, wie in der Figur angedeutet, am oberen Rande der Claviatur verschoben werden kann, und an den Stellen der Obertöne mit schwarzen Feldern bemalt ist, so braucht man nur das unterste mit 1 bezeichnete Feld auf den gewählten Grundton einzustellen, um sofort die ersten sechs Ober-

*) Dabei wird natürlich eine Stimmung nach gleichschwebender Temperatur vorausgesetzt, deren Abweichung von der reinen hier vernachlässigt werden muss.

töne aufzufinden. Diese Vorrichtung wird uns später noch einmal gute Dienste leisten.

223 **Beispiele für die Zusammensetzung ungleich langer Wellen, Saitenschwingungen.** Da wir den mathematischen Beweis des Fourier'schen Theorems hier nicht ausführen können, so wollen wir dafür an einigen Beispielen zeigen, dass sich wirklich durch Uebereinanderlagerung von Sinuscurven die verschiedenartigsten Wellenformen herstellen lassen.

So zeigen beispielsweise die Figuren 825 I. und II. die Zusammensetzung zweier Wellen von den Gleichungen

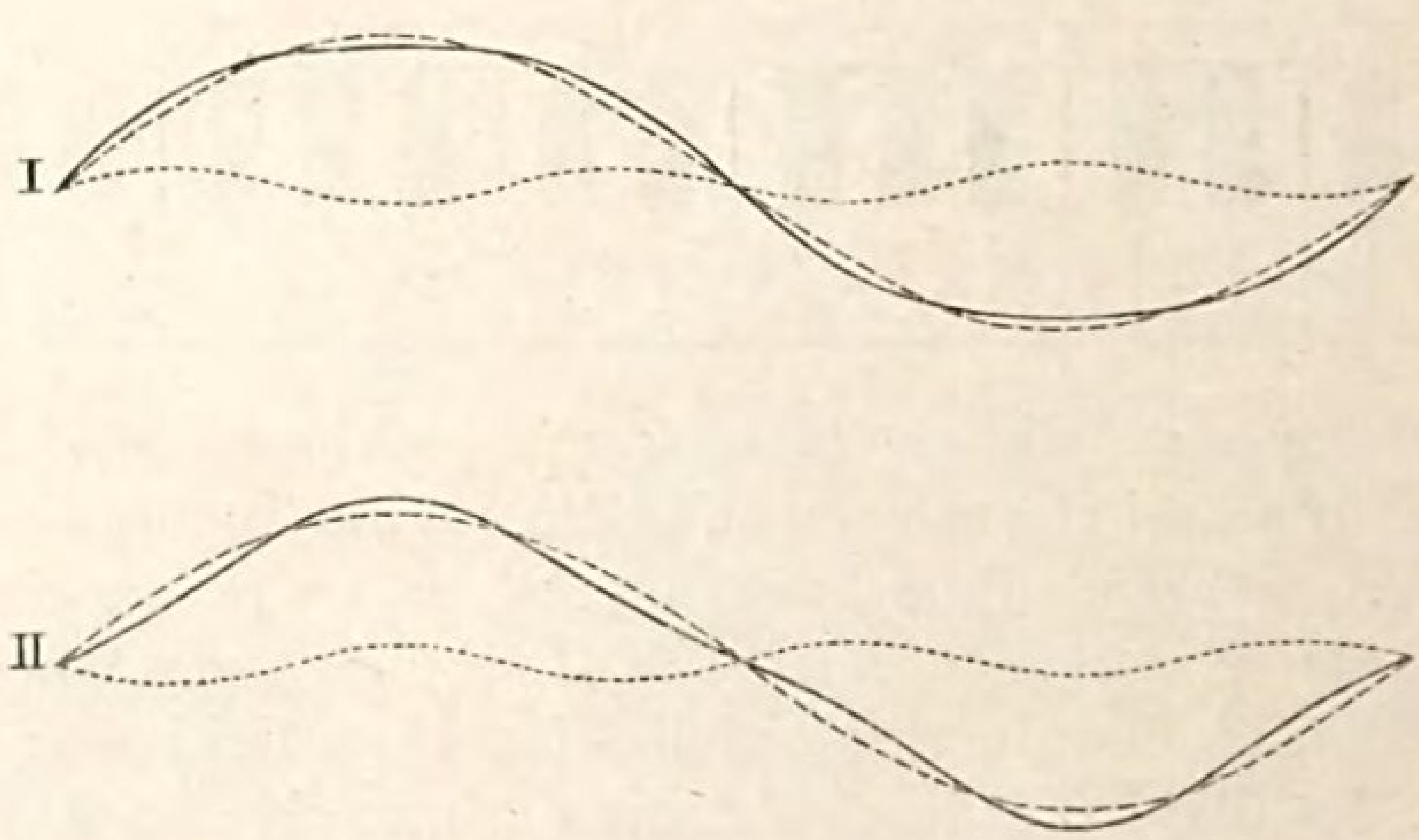
$$y = \sin x$$

und

$$y = {}^1/_9 \sin 3x.$$

Während aber in Fig. 825 I. der Gangunterschied = Null ist, beträgt derselbe in Fig. 825 II. $^1/_6$ der Welle des Grundtons oder die Hälfte

Fig. 825.



der Welle des Obertons. In Fig. 825 I. entsteht also die resultirende Welle

$$Y = \sin x + {}^1/_9 \sin 3x.$$

In Fig. 825 II. dagegen

$$Y = \sin x + {}^1/_9 \sin (3x - \pi)$$
$$= \sin x - {}^1/_9 \sin 3x.$$

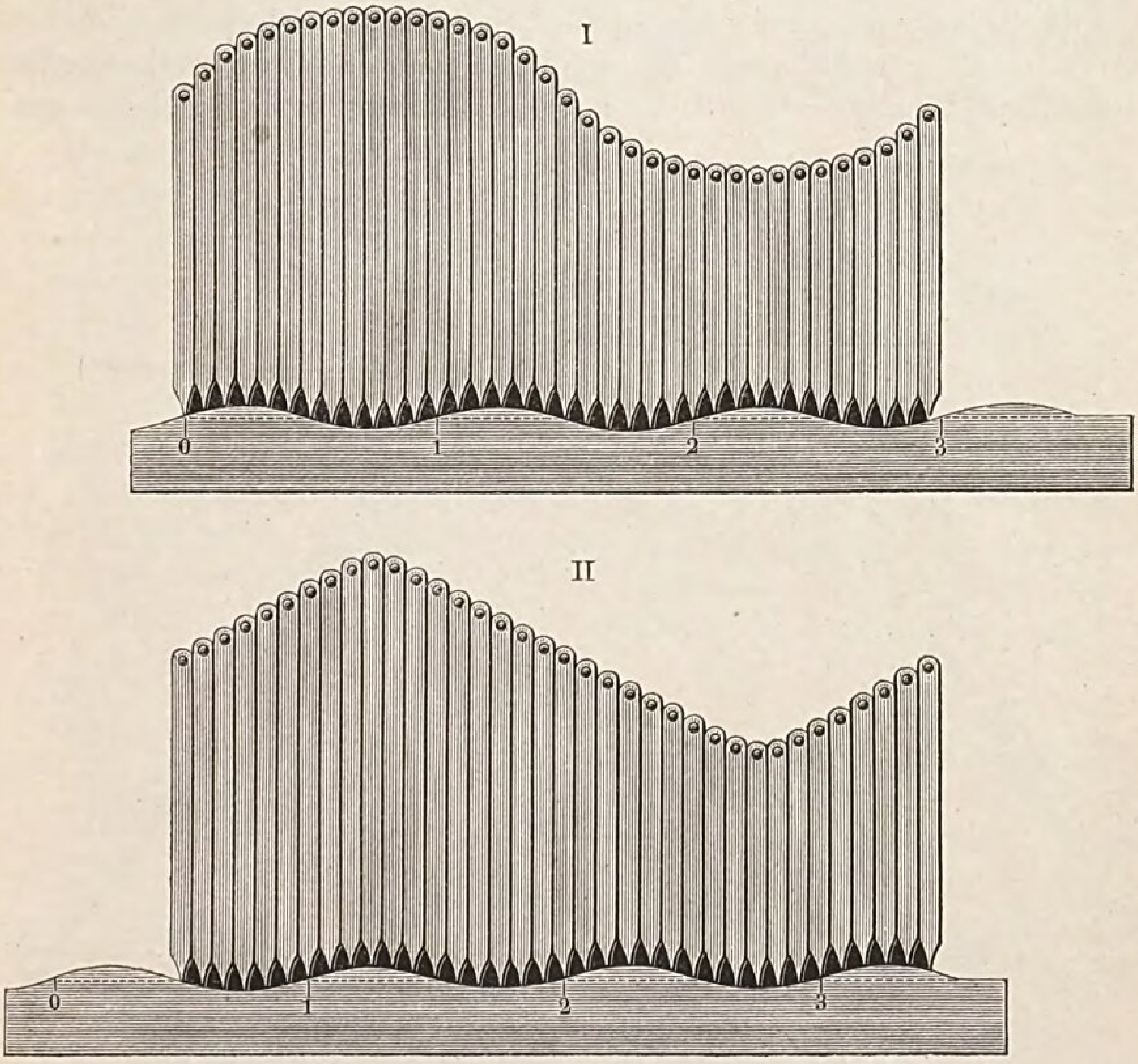
Man sieht, dass in Fig. 825 I. sich die resultirenden (ganz ausgezogenen) Curven mehr der Form von Kreisbögen, dagegen in Fig. 825 II. jener von Dreiecksseiten nähern.

Statt diese Zusammensetzungen durch geometrische Zeichnung zu demonstriren, was immer mühsam und zeitraubend ist, kann man sich mit Vortheil des von mir construirten, Seite 655 beschriebenen Apparates bedienen. Derselbe gestattet sofort solche Zusammensetzungen je zweier Wellen mit allen beliebigen Gangunterschieden auszuführen, wenn man

nur über die zugehörigen Wellenschablonen verfügt, welche an Stelle der Schablone WW', Fig. 651, unter die Stäbchen einzuschieben sind.

Die Figuren 826 I. und II. zeigen, mit Weglassung des nebensächlichen Details, diese Anwendung in denselben zwei Fällen, welche in den Figuren 825 I. und II. dargestellt sind.

Fig. 826



In Fig. 827 (a. f. S.) sind Wellen zusammengesetzt, deren Wellenlängen die Reihe

$$\lambda, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{5}, \frac{\lambda}{7}$$

bilden und deren Amplituden wie die Quadrate der Wellenlängen abnehmen, also

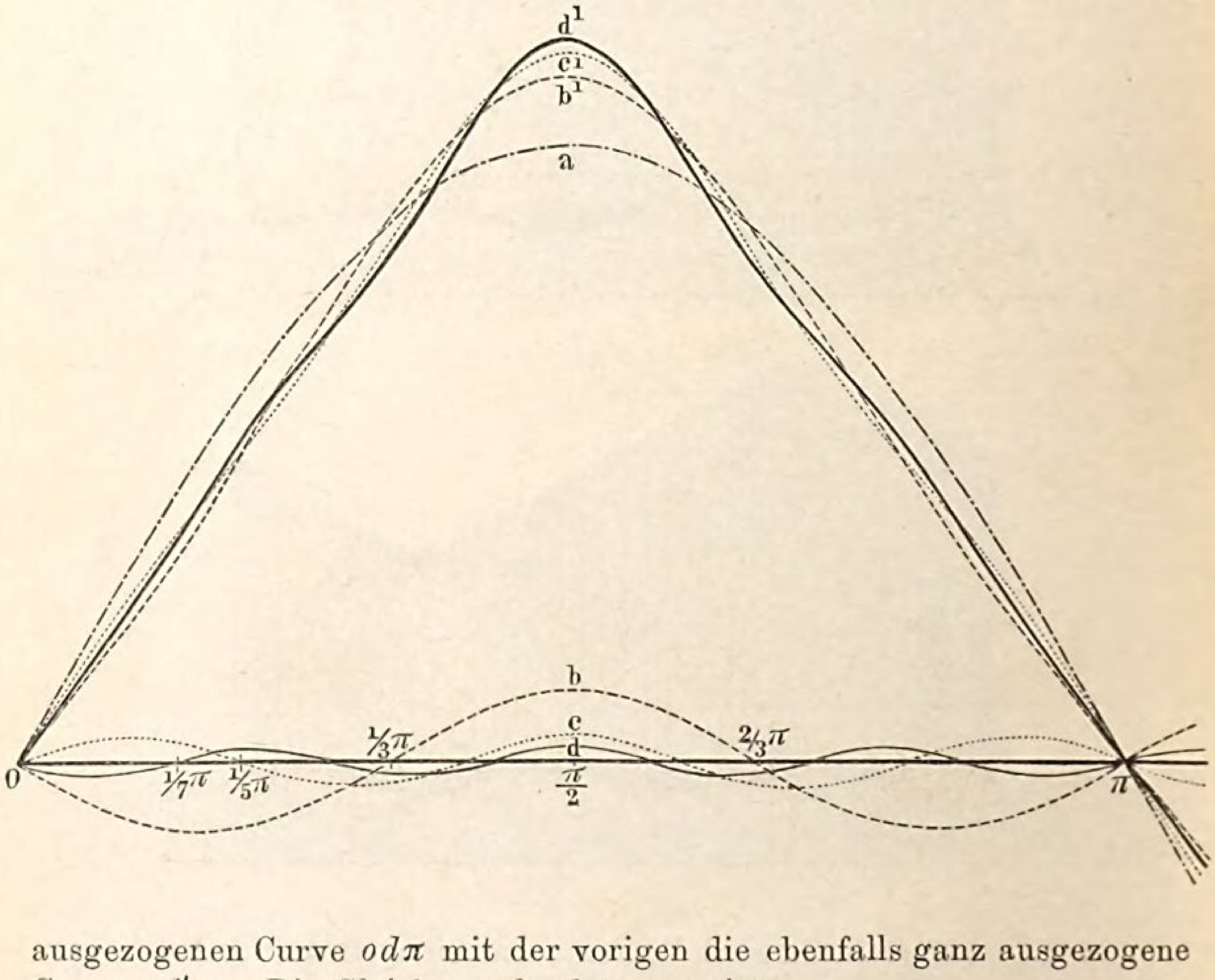
$$= a, \frac{a}{9}, \frac{a}{25}, \frac{a}{49}$$

sind. Die Gangunterschiede der einzelnen Wellen sind so gewählt, dass alle in der Mitte der grossen Halbwelle bei $\frac{\pi}{2}$ ebenfalls einen Berg

haben. (In der Figur ist der Raumersparniss wegen nur die Hälfte der ganzen Construction ausgeführt, die fehlende rechtsseitige Hälfte ist symmetrisch nach abwärts gerichtet hinzuzudenken.)

Man denke sich zuerst die mit — · — · — · — ausgezogene Sinuscurve $o\,a\,\pi$ vorhanden, deren Gleichung $y = \sin x$ ist. Combinirt man mit dieser die gestrichelte Curve $o\,b\,\pi$, welche längs der Geraden $o\,\pi$ drei halbe Wellen enthält, so entsteht die obere gestrichelte Curve $o\,b'\,\pi$. Combinirt man mit dieser die in fünf Halbwellen vorhandene punktirte Curve $o\,c\,\pi$, so erhält man die punktirte Curve $o\,c'\,\pi$. Endlich erhält man durch Combination mit der in sieben Halbwellen vorhandenen ganz

Fig. 827.



ausgezogenen Curve $o\,d\,\pi$ mit der vorigen die ebenfalls ganz ausgezogene Curve $o\,d'\,\pi$. Die Gleichung der letzteren ist

$$Y = \sin x - {}^1\!/_9 \sin 3x + {}^1\!/_{25} \sin 5x - {}^1\!/_{49} \sin 7x.$$

Je mehr man weitere Curven dieser Reihe in die resultirende Curve einbezieht, desto mehr nähert sich die Gestalt der letzteren den Schenkeln eines Dreiecks. Die Biegungen der Saiten compensiren sich gegenseitig immer mehr und die Kuppe bei d wird durch Aufsetzung immer schmälerer Berge immer spitziger.

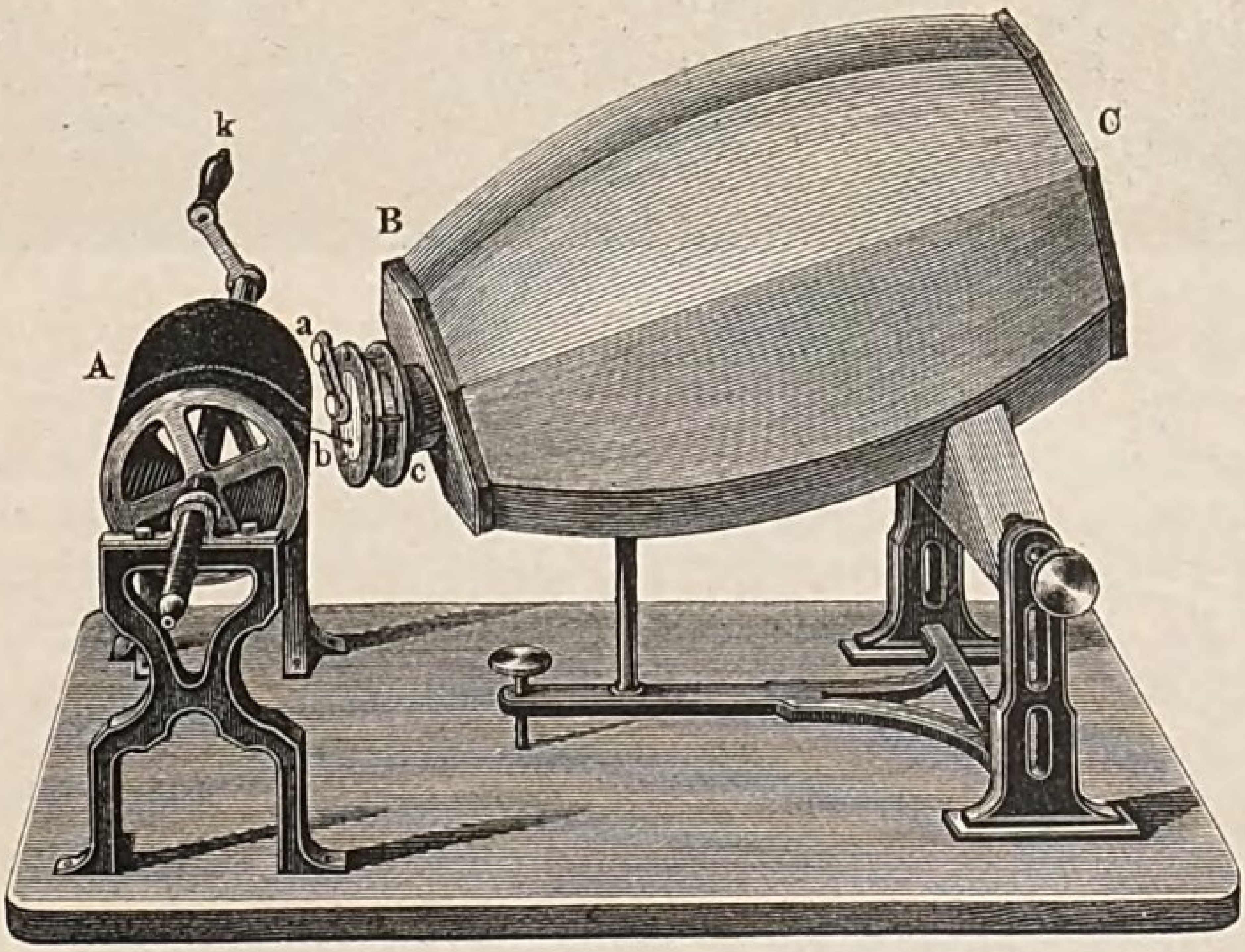
Es hätte keine Schwierigkeit, auch dieses interessante Beispiel der Zusammensetzung mehrerer Wellen mittelst des Apparates Fig. 651 zu demonstriren. Es müssten zu diesem Zwecke die Stäbchen von vorn

herein drei Reihen von Knöpfen (etwa in verschiedener Farbe) über einander tragen. Sobald die Stäbchen unten auf der horizontalen Leiste aufstehen, würden die Knopfreihen von oben an die Curven $o\,a\,\pi$, $o\,b\,\pi$ und $o\,c\,\pi$ darstellen. Man schiebt nun zuerst eine Wellenschablone von der Form der Welle $o\,d\,\pi$ unter die Stäbchen, dann zeigt die unterste Knopfreihe die Combination von $o\,d\,\pi$ mit $o\,c\,\pi$. Hierauf wird eine andere Schablone, welche der so erhaltenen combinirten Curve gleicht, eingeschoben, worauf die zweite Knopfreihe die Combination von $o\,d\,\pi + o\,c\,\pi + o\,b\,\pi$ zeigt. Eine letzte Schablone, welche wiederum der so erhaltenen Curve gleicht, giebt dann der obersten Knopfreihe die Form $o\,d'\,\pi$.

Die in Rede stehende Schwingungsform stimmt mit jener der Mitte einer gestrichenen Saite überein. Im §. 210 haben wir bereits die optische Methode beschrieben, deren sich Helmholtz bedient hat, um dies nachzuweisen. In den beiden nächstfolgenden Paragraphen werden wir noch einige andere Methoden und deren Resultate mittheilen, welche das Wissenswerthe über diesen Gegenstand ergänzen.

Anwendung der graphischen und optischen Methode zur Darstellung und Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen; Phonautograph. 224 Dass sich die zusammengesetzten Wellen auch durch die Luft fortpflanzen und andere elastische Körper in entsprechend zusammengesetzte Schwingungen versetzen können,

Fig. 828.

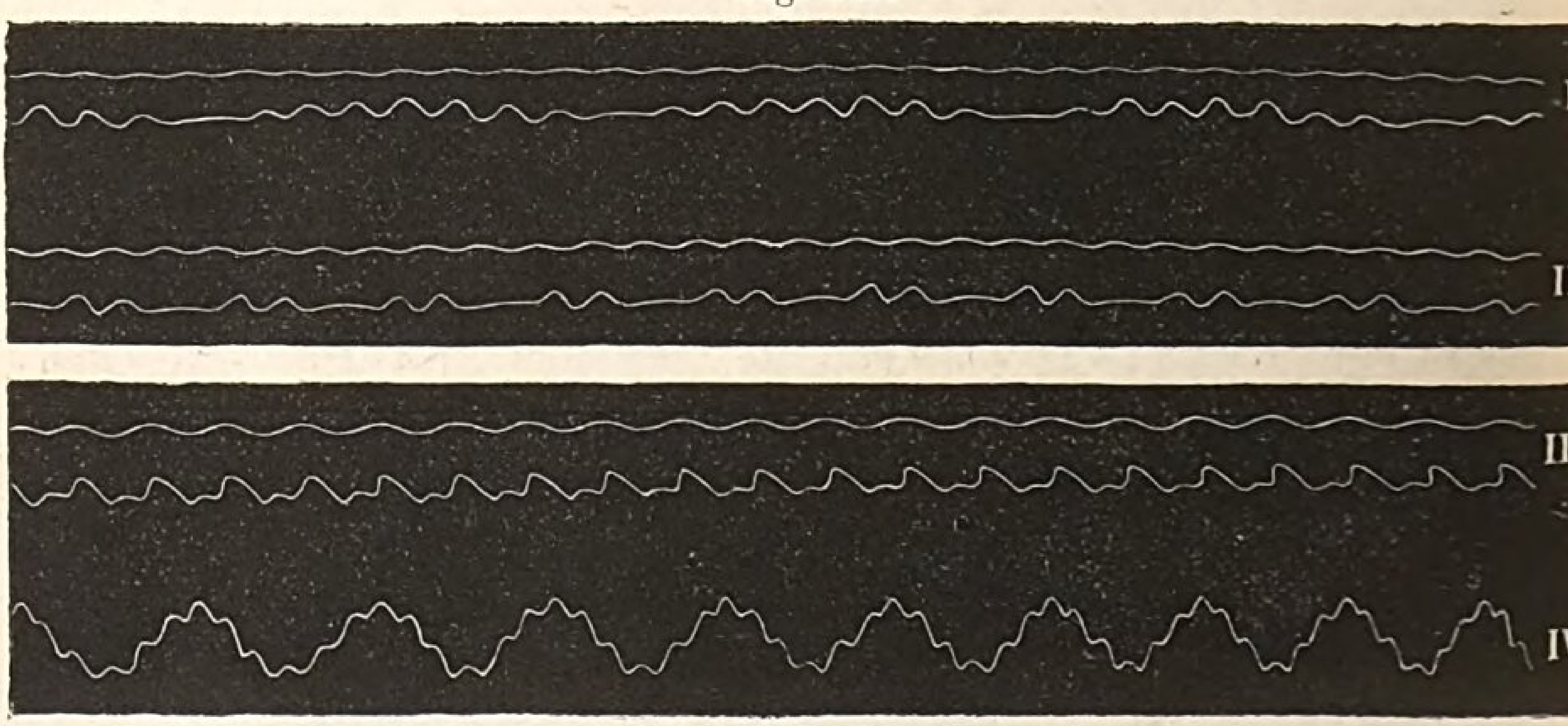


lässt sich mit Hülfe des Phonautographen von Scott und König darthun, welcher in Fig. 828 dargestellt ist. Ein ungefähr 50 cm langes hohles Ellipsoid von Gyps oder Metall ist bei C offen, am anderen Ende

bei B aber ist es durch einen festen Boden bedeckt, in dessen Mitte ein kurzes messingenes, an seiner Aussenseite durch eine elastische Membran von Goldschlägerhaut oder Kautschuk geschlossenes Rohr eingesetzt ist. Auf dieser Membran, deren Spannung nach Bedürfniss abgeändert werden kann, ist ein leichtes steifes Stielchen b aufgekittet. Das verschiebbare Stäbchen a, welches mit seinem einen Ende auf die Membran drückt, muss so gestellt werden, dass sich das Stielchen b während der Vibrationen der Membran auf einem Bauche derselben und nicht auf einem Knoten befindet.

Diese Vorrichtung hat, wie man sieht, Aehnlichkeit mit dem Ohr; die Membran repräsentirt das Trommelfell, während das Ellipsoid dem Gehörgange entspricht. — Wenn nun die Wellen irgend eines Tones bei C eintreten, so wird die Membran sammt dem Stiftchen in Schwingungen versetzt, welche unisono mit dem einfallenden Tone sind; wenn aber gleichzeitig die Schallwellen zweier Töne bei C einfallen, werden

Fig. 829.



die Vibrationen der Membran der Combination der beiden Wellensysteme entsprechen.

Der eben besprochene Apparat wird nun, wie Fig. 828 zeigt, an den mit berusstem Papier überzogenen Cylinder A herangerückt, welchen wir bereits in §. 204, S. 718 kennen lernten (das Stielchen b steht aber weder normal zur Membran, noch normal zum Cylinder, wie die Fig. 828 zeigt, sondern es ist in entsprechender Weise schräg gestellt), und man erhält eine graphische Darstellung der von der Membran ausgeführten Oscillationen, wenn der Cylinder gedreht wird, während die Membran unter dem Einfluss bestimmter, bei C einfallender Töne vibrirt.

In Fig. 829 sind die unteren Curven in Nr. I, II und III die Copien von Curven, welche mit dem Apparate geschrieben wurden, als zwei durch Orgelpfeifen erzeugte Töne gleichzeitig bei C einfielen. Nr. I entspricht der Combination des Grundtons mit einem um einen ganzen Ton ($^9/_8$) höheren. Nr. II entspricht der Combination des Grundtons

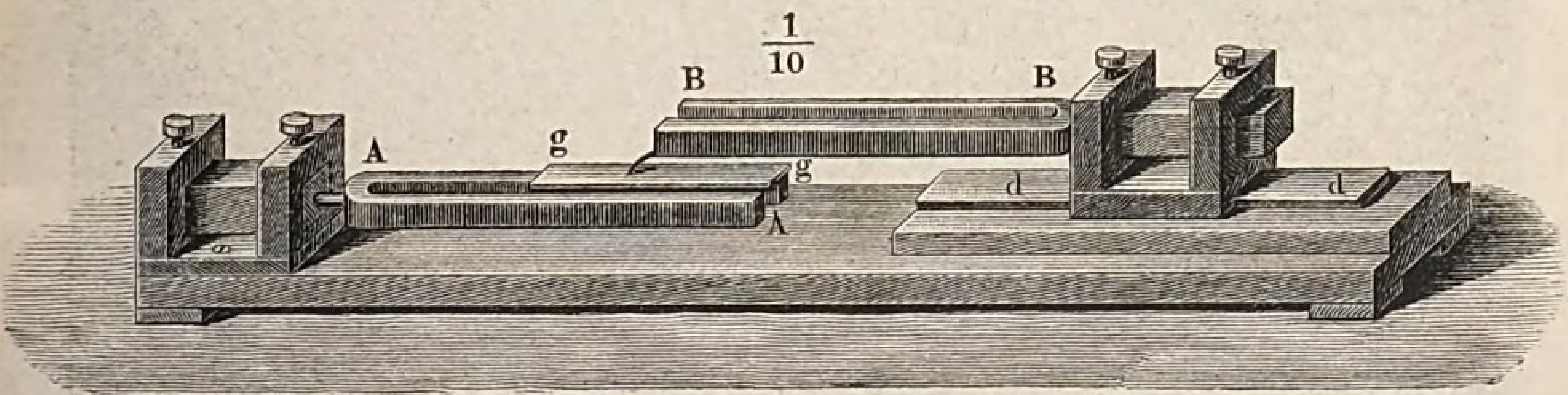
mit der Quint und Nr. III der Combination des Grundtons mit seiner Octav. Die obere Curve jeder Abtheilung ist gleichzeitig direct durch eine Stimmgabel geschrieben, welche unisono war mit dem tieferen der beiden bei *C* einfallenden Pfeifentöne.

Nr. IV ist ohne Vermittelung der Membran des Scott'schen Phonautographen erhalten; es zeigt die Schwingungen einer Stimmgabel, deren Grundton stark von einem Oberton begleitet war.

Hier sind es die Combinationscurven von II und III, welche uns näher interessiren. In der unteren Curve Nr. II erkennt man leicht alle charakteristischen Eigenschaften der theoretisch construirten Curve *C*, (Fig. 821, Seite 804), d. h., dass sich nach je zwei Schwingungen des Grundtons stets dieselbe Form der Combinationscurve wiederholt.

So stimmt auch die Curve Nr. III, Fig. 829, welche von dem Phonautographen unter gleichzeitigem Ertönen des Grundtons und seiner Octav geschrieben wurde, im Wesentlichen mit der theoretischen Curve, Fig. 822, überein. Nach jeder Schwingung des Grundtons wiederholt sich die gleiche Form der Combinationscurve.

Fig. 830.

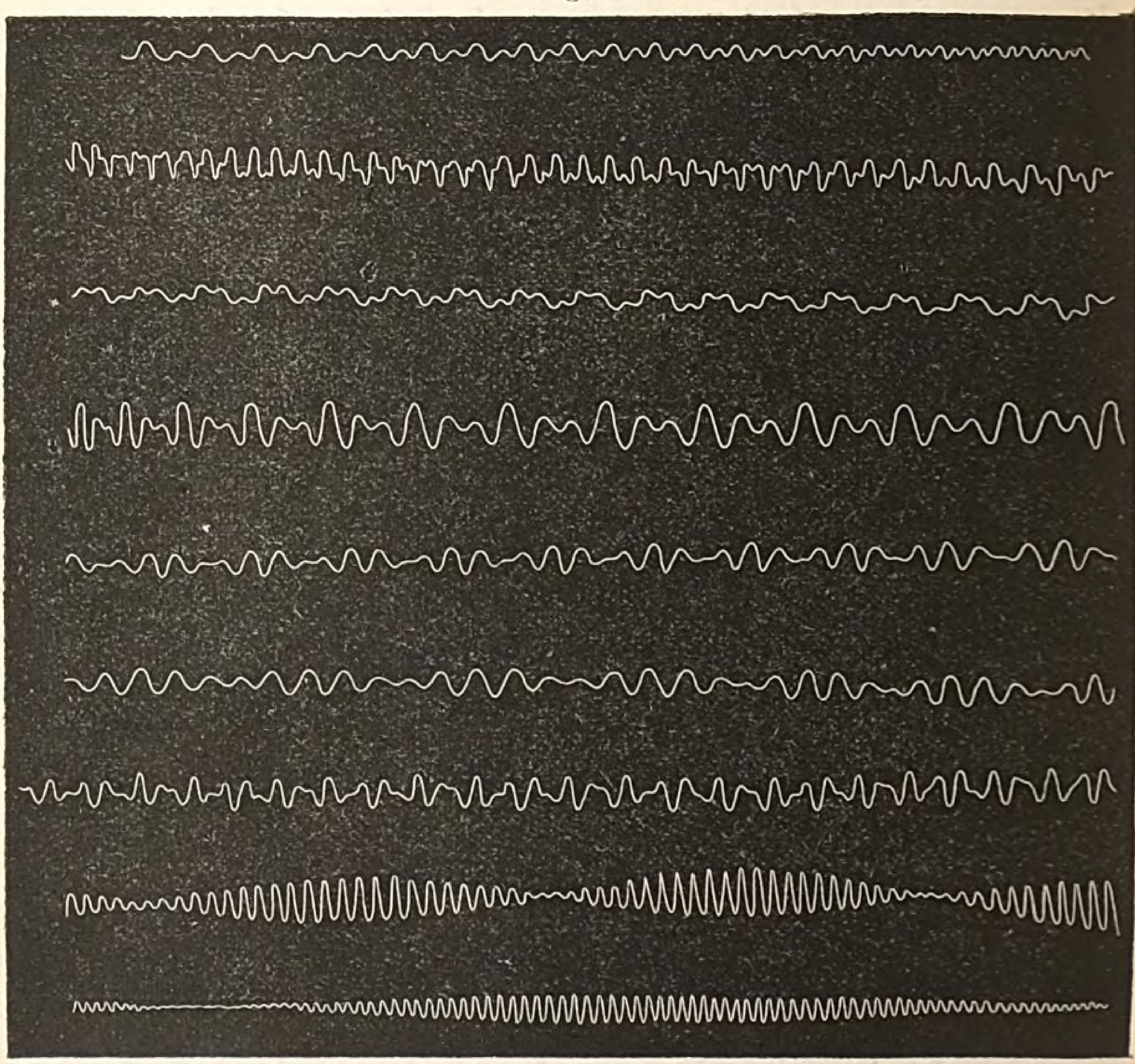


Was hier von den Vibrationen eines Lufttheilchens gesagt ist, welches gleichzeitig durch die Schallwellen zweier oder mehrerer Töne afficirt wird, gilt auch von den Vibrationen eines materiellen Punktes, welcher einem tönenden Körper angehört, der gleichzeitig neben seinem Grundton auch noch einen oder mehrere Obertöne hören lässt, wie dies z. B. auch durch die auf die rotirende Trommel geschriebene Schwingungscurve Nr. IV, Fig. 829, erläutert wird, welche die Vibrationen des äussersten Endes einer Stimmgabel darstellt, die neben dem Grundton auch noch den siebenten Partialton hören lässt. In diesem Falle kann das Ohr ebenso leicht den Oberton neben dem Grundton hören, wie das Auge in der Schwingungscurve Nr. IV, Fig. 829, die Vibrationen des Obertons verfolgen kann.

Während der Phonautograph dazu bestimmt ist, die auf ihn aus der Luft eindringenden zusammengesetzten Wellen aufzuzeichnen, ist das folgende Verfahren dazu bestimmt, solche Zeichnungen auf mechanischem Wege zu erzeugen, ohne dass die componirenden Wellen in der Luft zur Combination gelangen. Man lässt die schwingende Zinke einer Stimmgabel auf einer schwingenden Schreibfläche, welche von der Zinke einer

anderen Gabel getragen wird, schreiben. Fig. 830 zeigt einen dazu geeigneten Apparat. Er besteht aus zwei grossen Stimmgabeln *A* und *B*, von welchen die erstere feststeht, während die letztere in einem Schlitten befestigt ist, dem das Brettchen *d* in der Weise zur Führung dient, dass die Stimmgabel *B* sich selbst parallel über die Stimmgabel *A* weggezogen werden kann. Die feste Stimmgabel trägt einen schmalen Streif *g* von dünnem Spiegelglas, welcher berusst wird, oder auf welchem noch besser ein berusster Papierstreifen befestigt ist. An dem einen

Fig. 831.



Arm der Stimmgabel *B* ist in der früher beschriebenen Weise ein Schreibfederchen in der Weise befestigt, dass es auf der berussten Fläche seine Spur zurücklässt, wenn die Stimmgabel *B* über das Brettchen *d* abgezogen wird.

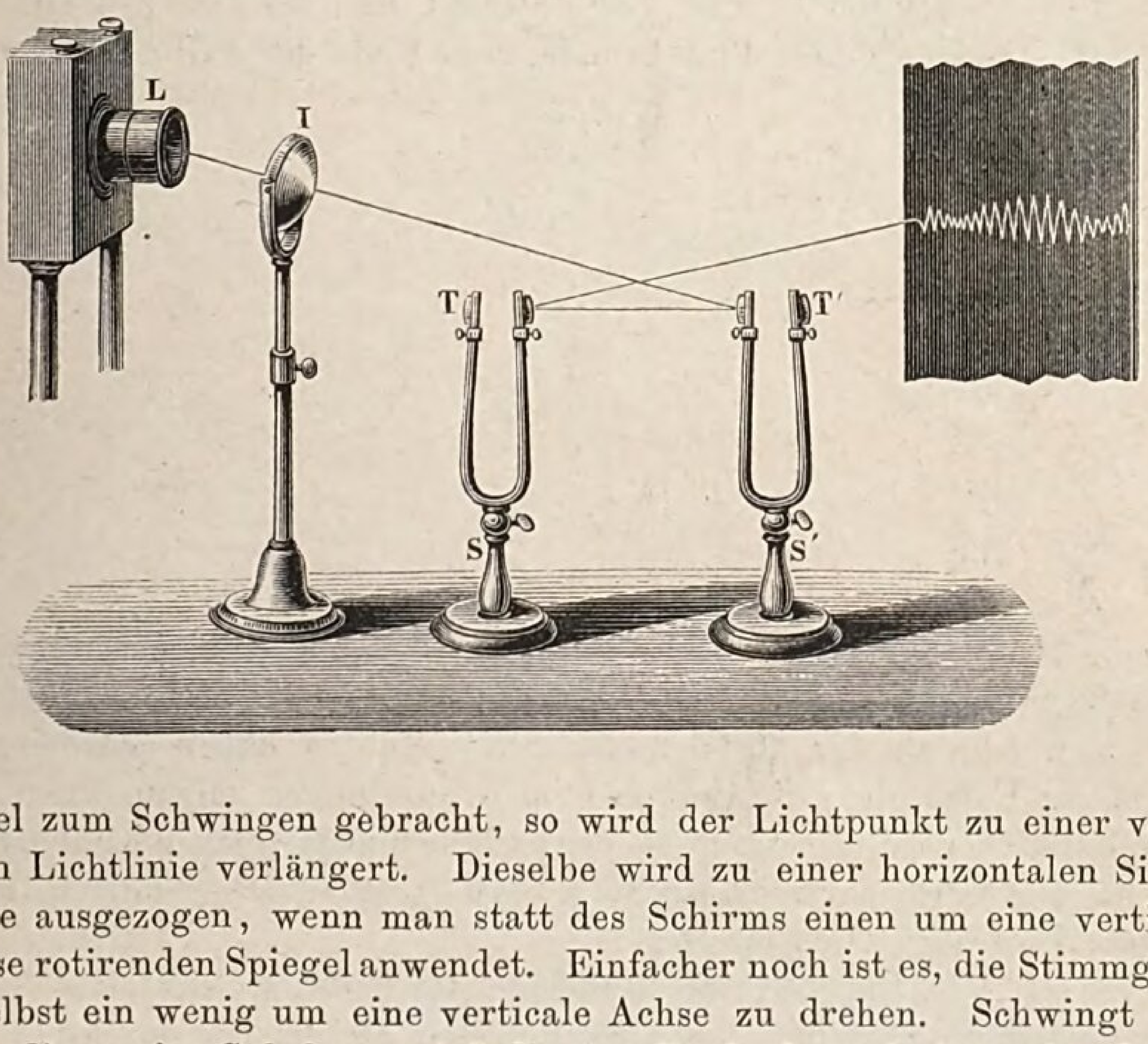
Die Fig. 831 zeigt eine Anzahl auf diese Weise (von König) erhaltener Curven. Das Verhältniss der Schwingungszahlen ist daneben verzeichnet. Man wird unter denselben mehrere der früher abgeleiteten Curven wieder erkennen. Bei der zweiten Curve von oben ist das Verhältniss 1 : 2 nicht genau eingehalten. In Folge dessen ändert sich im

Verlaufe derselben der Gangunterschied und deshalb auch allmälig die Form der Wellen, was unter Hinweis auf die frühere Figur 822, S. 804, keiner weiteren Erklärung bedarf.

Auch die optische Methode kann benutzt werden, um ähnlich wie bei der Zusammensetzung rechtwinkelig auf einander stattfindender Schwingungen, diesmal die parallel stattfindenden Schwingungen zu combiniren.

Die Fig. 832 zeigt die hierzu dienliche Versuchsanordnung. Das durch eine Oeffnung *L* der Lampe ausgehende Strahlenbündel wird durch die Convexlinse *J* etwas convergent gemacht, so dass auf einem entfernten Schirme ein scharfes Bild der Oeffnung entsteht. Bevor das Strahlenbündel dahin gelangt, wird es in der ersichtlichen Weise von den Spiegeln der beiden Stimmgabeln *T* und *T'* reflectirt. Wird nur eine

Fig. 832.



Gabel zum Schwingen gebracht, so wird der Lichtpunkt zu einer verticalen Lichtlinie verlängert. Dieselbe wird zu einer horizontalen Sinuscurve ausgezogen, wenn man statt des Schirms einen um eine verticale Achse rotirenden Spiegel anwendet. Einfacher noch ist es, die Stimmgabel *T* selbst ein wenig um eine verticale Achse zu drehen. Schwingt nun auch die zweite Gabel, so wird die Amplitude des schwingenden Lichtpunktes periodisch veränderlich, ausser wenn die Gabeln unisono gestimmt sind. Bei dem Ausziehen zur Curve erhält man die combinirten Wellen.

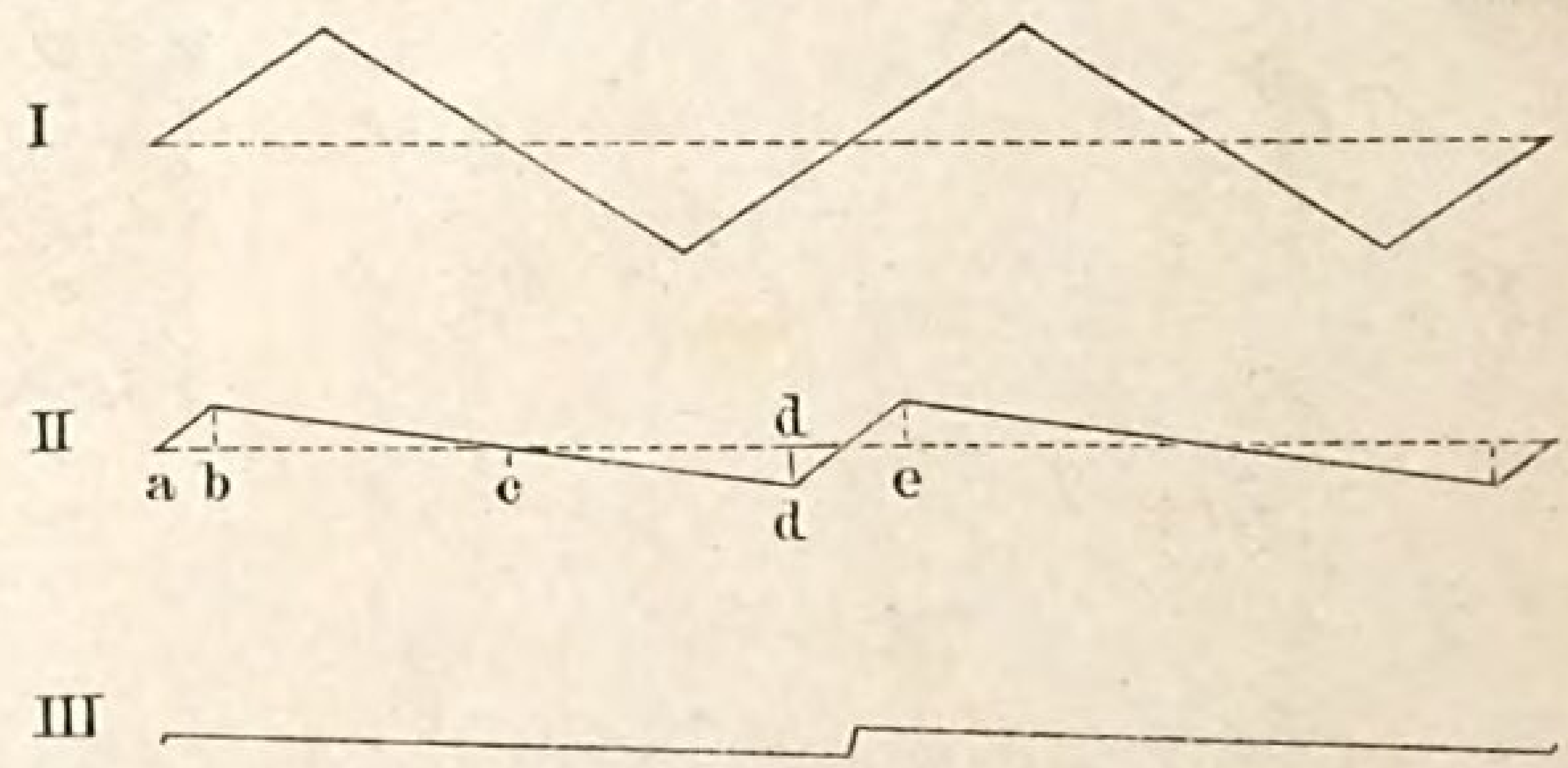
Genauere Untersuchung der Saitenschwingungen. Ein viel untersuchtes Object, welches zur Anwendung zahlreicher, mitunter höchst sinnreicher Methoden Anlass gegeben hat, sind die Saitenschwingungen. 225

Helmholtz hat, wie oben §. 210 beschrieben, mittelst des Vibrationsmikroskops die Gesetze der mit dem Bogen gestrichenen Saite untersucht. Die wesentlichen Resultate sind folgende:

1. Die Mitte der Saite schwingt so, wie es die Schwingungscurve Fig. 833 I darstellt. Demgemäss erfolgt der Hin- und Hergang der Saite daselbst mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit.

2. Die Punkte der Saite, die nicht in der Mitte liegen, beschreiben Schwingungen, deren Gesetz durch die Curve Fig. 833 II dargestellt ist. Die Saite folgt nämlich während des Streichens gleichförmig dem Bogen, und bewegt sich dann, nachdem sie sich plötzlich losgerissen, mit ebenfalls gleichförmiger, aber grösserer Geschwindigkeit zurück. Die Zeit für den ersten Theil der Bewegung bd verhält sich zu der Zeit für die Rückbewegung de, wie der längere Abschnitt der Saite zum kürzeren zu beiden Seiten des beobachteten Punktes. Die Curve II z. B. entspricht einem Punkte, der um $^1/_6$ vom Ende absteht, da $ab:bc = 1:5$ ist. Die Curve III dagegen einem Punkte nahe dem Ende der Saite.

Fig. 833.



3. Die Stelle, wo der Bogen angreift, ist von geringem Einfluss auf die Bewegung der Saite. Der Umstand, dass jene Obertöne ausfallen müssen, welche an der gestrichenen Stelle Knoten haben würden, hat jedoch zur Folge, dass die Curven feine Kräuselungen zeigen, wenn man einen Punkt der Saite beobachtet, der zwischen zwei solchen Knoten liegt.

4. Die Form der schwingenden Saite*) muss sich demnach in folgender Weise darstellen lassen:

Es sei AB, Fig. 834, die Ruhelage der Saite, welche sie während jeder Schwingung zweimal mit allen Punkten gleichzeitig durchschreitet. Die Senkrechte 3 bis 9 stellt die (im Verhältnisse übertrieben gross gezeichnete doppelte) Amplitude der Saitenmitte dar. Wir theilen diese sowie die Saitenlänge in sechs gleiche Theile und denken uns die ganze Schwingungsdauer in zwölf Zeitabschnitte abgetheilt. Dann ist die Form der Saite, wenn sie zur Zeit 0 die Ruhelage nach aufwärts passirt, zur Zeit

*) Nicht zu verwechseln mit der „Schwingungsform eines Saitenpunktes", unter welcher man das graphisch dargestellte Gesetz versteht, nach welchem die Elongationen mit der Zeit sich ändern (Schwingungscurve Fig. 833).

$^1/_{12}$ der Schwingungsdauer gleich der gebrochenen Linie $A\,1\,B$, dann so fort hat sie

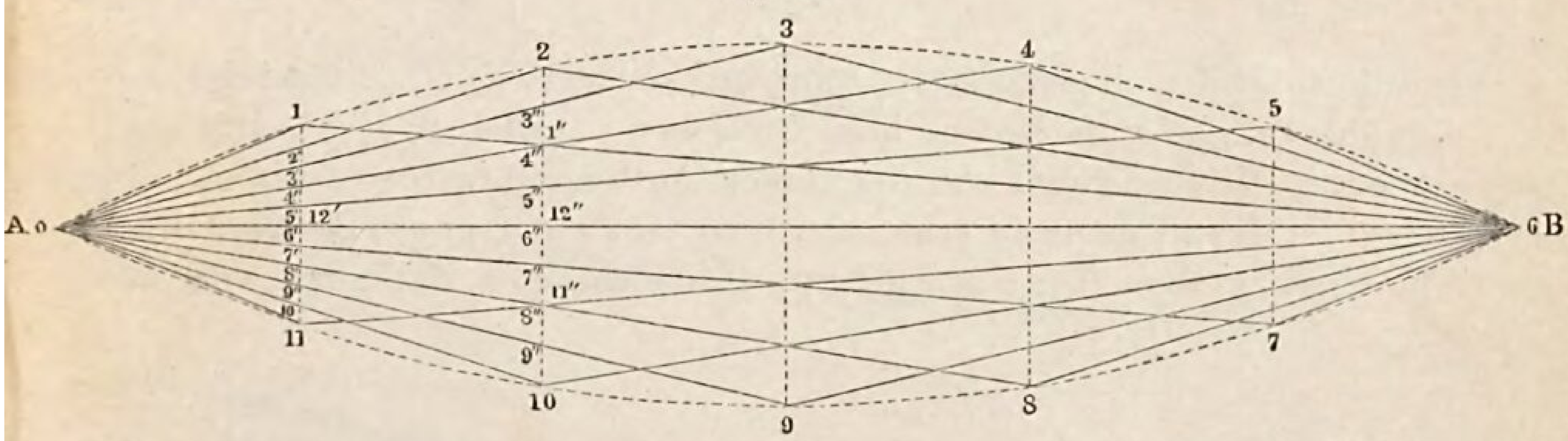
zur Zeit $^2/_{12}$ die Form $A\,2\,B$
" " $^3/_{12}$ " " $A\,3\,B$
" " $^4/_{12}$ " " $A\,4\,B$
" " $^5/_{12}$ " " $A\,5\,B$
" " $^6/_{12}$ " " $A\,B$
" " $^7/_{12}$ " " $A\,7\,B$ und so fort.

Man kann sich also vorstellen, dass zwischen A und B der Fusspunkt einer Ordinate mit gleichförmiger Bewegung hin und her gehe, während sich das andere Ende der Ordinate auf der Curve (Parabelbogen) A, 1, 2, 3 . . . nach B und unten über 7, 8, 9 zurück nach A bewege.

Die Saite verbindet dann stets dieses Ordinatenende mit den Enden A und B.

Dass diese Lage der Saite wirklich dem unter 1 und 2 angegebenen Gesetze entspricht, lässt sich leicht aus der Fig. 834 ablesen. Man

Fig. 834.



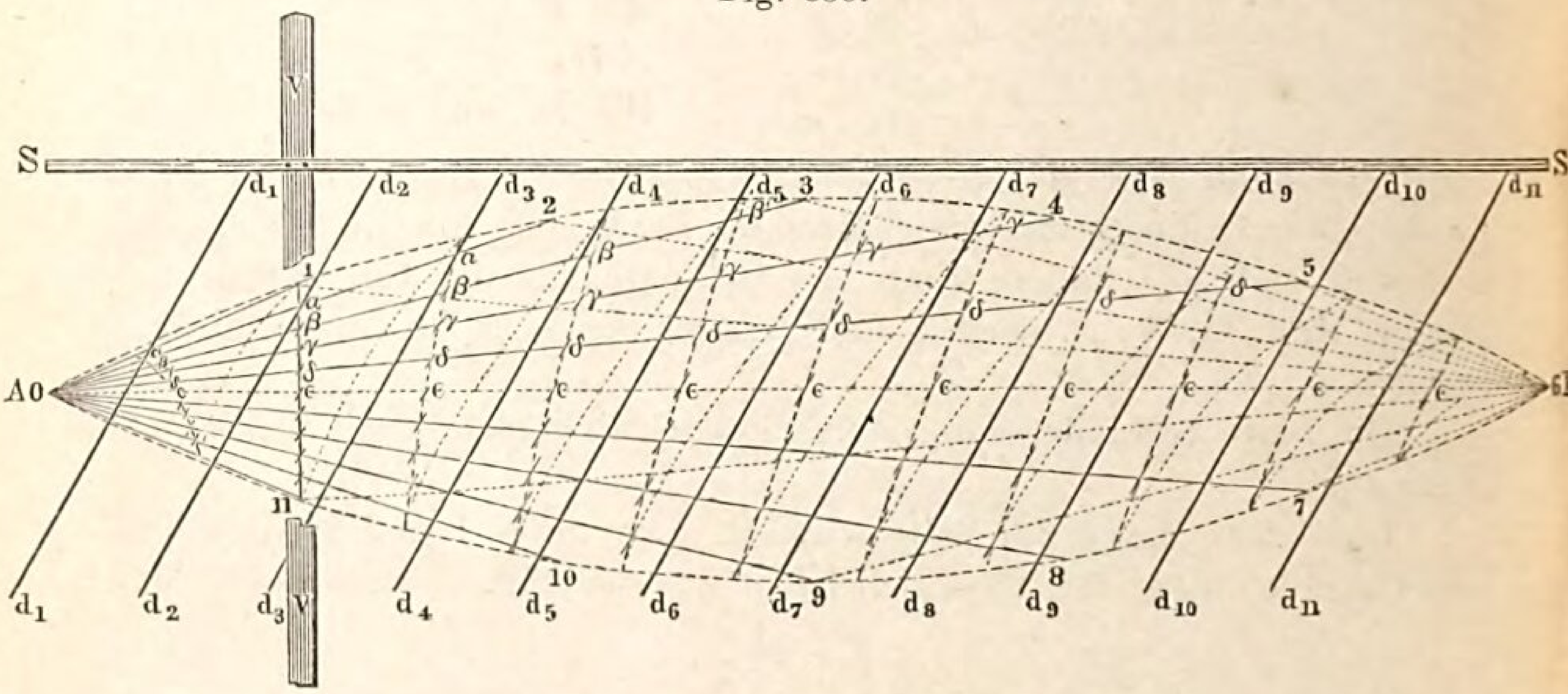
sieht, dass die Saitenmitte in jedem Zwölftel der Schwingungsdauer genau gleich lange Wege beschreibt. Beachten wir dagegen einen Punkt der Saite, welcher beispielsweise um $^1/_6$ der Saitenlänge von A absteht! Zur Zeit $^1/_{12}$ ist er in 1, zur Zeit $^2/_{12}$ in $2'$, zur Zeit $^3/_{12}$ in $3'$ und so wandert er mit gleichförmiger Geschwindigkeit, welche aber kleiner ist, als jene in der Mitte der Saite, in $^{10}/_{12}$ der Schwingungsdauer von 1 bis 11. Von dort aber geht er als Bestandtheil der Geraden $B\,11$ im nächsten Zwölftel bis $12'$ und im letzten Zwölftel bis 1. Er macht also in einem Sechstel der Schwingungsdauer nach aufwärts denselben Weg, welchen er in $^5/_6$ dieser Zeit nach abwärts zurücklegt. Seine Geschwindigkeiten beim Auf- und Niedergange verhalten sich also wie 1 : 5, nämlich wie die Abstände nach A und nach B.

Diese Resultate der Untersuchung von Helmholtz sind bestätigt und ergänzt worden durch eine in Mach's Laboratorium ausgeführte Arbeit von Cl. Neumann *). Derselbe hat sowohl die graphische Me-

*) Wiener Akadem. Ber., Bd. LXI, 2. Abth. (1870), S. 89.

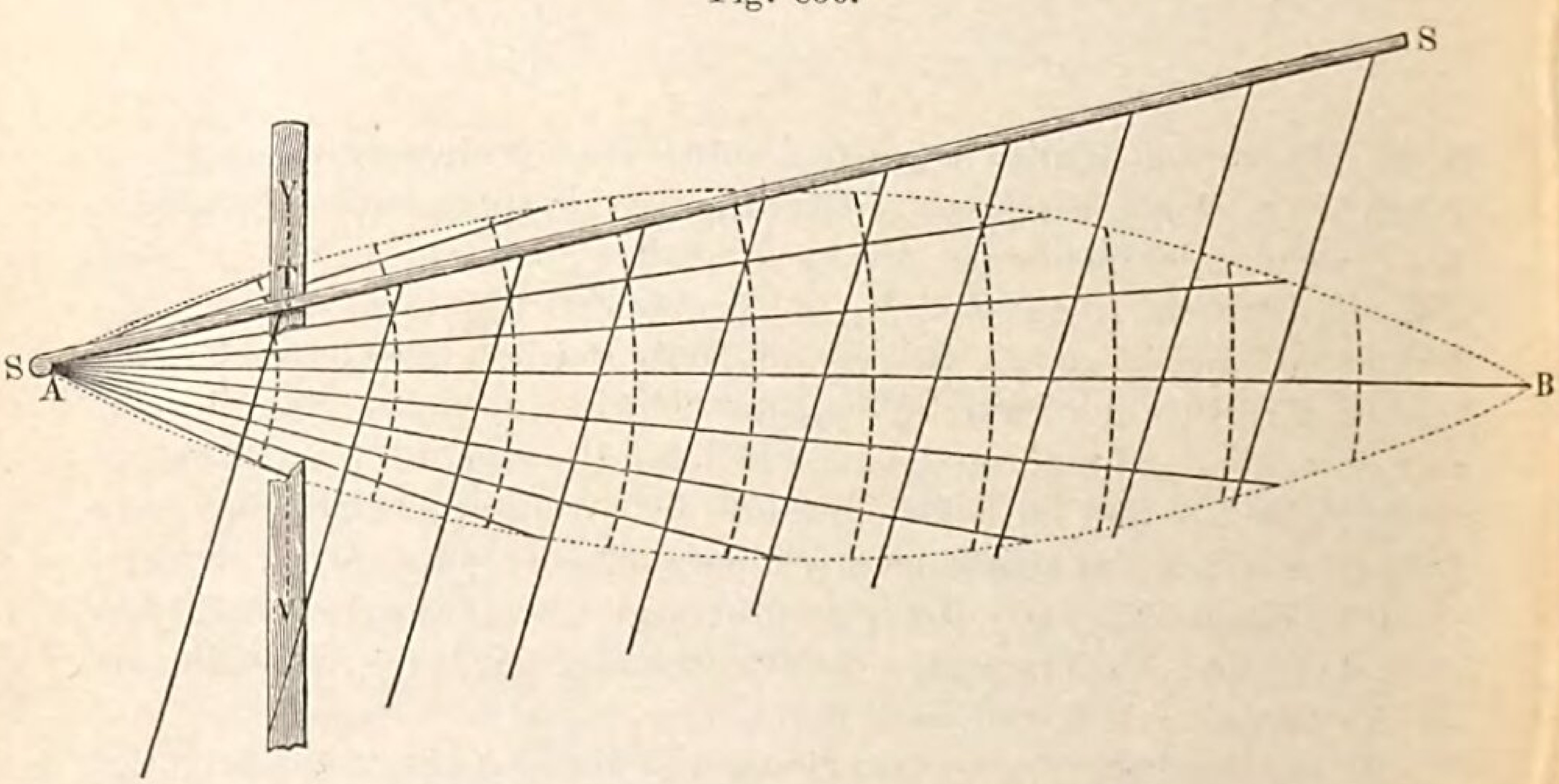
thode als eine Reihe von zum Theil neuen optischen Methoden angewendet, von denen hier noch folgende beschrieben werden soll. *AB*, Fig. 835, stelle wiederum die schwingende Saite, *VV* den Fiedelbogen vor. Quer über demselben wird die Leiste *SS* mit den unter sich

Fig. 835.



parallelen schief eingesteckten Drahtstücken $d_1 d_1$, $d_2 d_2$... befestigt, so dass der so gebildete Kamm beim Streichen parallel zu sich selbst und zur Saite gleich schnell wie der Bogen fortbewegt wird. Da die Saite weiss, der Grund dagegen schwarz ist, so erhält das ganze Schwingungsfeld einen grauen Ton, aus dessen gleichmässiger Helligkeit von der

Fig. 836.



Ruhelage der Saite bis gegen die Grenzen des Feldes schon auf die gleichförmige Geschwindigkeit der Bewegung geschlossen werden kann. Durch die Ueberkreuzung der weissen Saite mit den schwarzen Drahtstücken entstehen aber dunkle Punkte, welche beim Schwingen zu

dunkeln Linien ausgezogen werden. Die unter der Annahme, dass die Saite auf dem Wege 1, α, β, γ ... bis 11 dem Fiedelbogen folge und im Uebrigen sich nach der früher beschriebenen Weise bewege, construirten Curven für die erwähnten dunkeln Durchschnittspunkte haben die in der Figur durch gestrichelte Linien angedeutete Lage, aus welcher man unschwer entnehmen kann, dass die Saitenpunkte links vom Bogen langsamer, jene rechts schneller als der Bogen sich bewegen *). Die punktirten Curven entsprechen der Rückbewegung.

Das Verhältniss der Geschwindigkeiten der verschiedenen Saitenpunkte lässt sich noch einfacher aus dem in Fig. 836 dargestellten Versuche entnehmen. Der Kamm *SS* wird um den Punkt *A* drehbar angebracht und von dem Fiedelbogen bei *T* mitgenommen. Die sämmtlichen Durchschnittspunkte der Drahtstücke mit den Saitenlagen bilden dann parallele Linien (die in der Figur erscheinenden Bogen erscheinen bei wirklicher Ausführung wegen der kleinen Amplitude geradlinig). Daraus folgt sofort, dass sich die Geschwindigkeiten der Saitenpunkte beim Abwärts-

Fig. 837.



gehen verhalten, wie die Abstände von *A* (beim Rückwege wie die Abstände von *B*).

Am elegantesten ist die schon oben (§. 208) beschriebene stroboskopische Methode von Mach. Die durch eine elektromagnetisch schwingende Stimmgabel gleicher Tonhöhe zweimal während der Schwingungsdauer beleuchtete Saite erscheint während des Streichens wie Fig. 837. Dabei ist angenommen, dass man, um die Amplitude vergrössert erscheinen zu lassen, den Schatten der Saite schief auf einen Schirm projicirt habe. Bei kleinem Phasenunterschiede vollführt dann die Saite langsam dieselbe Bewegung, welche sie in Wirklichkeit schnell ausführt **).

Bei dicken und deshalb steifen Saiten zeigten die Beobachtungsresultate von Neumann merkliche Abweichungen von der Theorie.

Bei den durch Anschlag oder Zupfen zum Tönen gebrachten Saiten hängt, wie Helmholtz nachgewiesen hat, die Zusammensetzung des

*) Je rascher sich die Saite abwärts bewegt, desto mehr muss ihr Durchschnittspunkt mit dem Drahtstück nach links rücken.

**) Quincke hat für die stroboskopische Trommel Zeichnungen gefertigt, welche diese Saitenschwingungen darstellen.

Klanges sowohl von der Anschlagstelle, als von der Dauer des Anschlages, sowie von der materiellen Beschaffenheit und Breite des Körpers (Hammers, Zitherringes) ab, durch den der Anschlag oder das Zupfen (Reissen) geschieht.

Durch Anschlag an einer bestimmten Stelle der Saite werden nämlich alle jene Obertöne beseitigt, welche daselbst Knoten hätten.

Beim Fortepiano ist die Anschlagsstelle bei $^1/_7$ bis $^1/_9$ der Saitenlänge, wodurch die Obertöne 7 bis 9 entfallen, also gerade jene noch relativ starken Obertöne, welche zum Durdreiklang nicht passen. Anschlag in der Mitte der Saite verhindert die geradzahligen Obertöne und verursacht deshalb einen hohlen, näselnden Klang. Anschlag sehr nahe am Ende der Saite begünstigt das Hervortreten sehr hoher Obertöne und erzeugt einen leeren, klimpernden Klang. Schlägt man mit hartem, scharfkantigem Hammer, so tritt dies in noch höherem Grade ein, besonders wenn die Berührung mit der Saite nur kurz dauert. Die Theorie ergiebt, dass diejenigen Obertöne begünstigt werden, deren halbe Schwingungsdauer nahe gleich ist der Zeit, während welcher der Hammer anliegt, dass dagegen jene verschwinden, deren halbe Schwingungsdauer 3, 5, 7 ... mal so gross ist. Da nun diese Zeit von der Weichheit und Elasticität der Hammerbekleidung wesentlich abhängt, so erklärt sich der grosse Einfluss der letzteren auf den schönen Klang des Fortepiano. Aeltere Instrumente fangen an zu klimpern, weil die Filzbedeckung allmälig härter wird. Ausführlicheres hierüber in Helmholtz' Tonempfindungen.

226 **Schwebungen oder Stösse, König's Stosstöne.** Wenn zwei einander sehr nahe stehende, aber doch nicht ganz isochrone Töne unser Ohr treffen, so vernehmen wir ein periodisch abwechselndes Anschwellen und Nachlassen des Tones, welches man das Schweben der Töne nennt. Scheibler hat für diese Erscheinung die Bezeichnung der Stösse (*battement*) eingeführt.

Man hört diese Stösse sehr deutlich, wenn man gleichzeitig zwei Orgelpfeifen tönen lässt, welche sehr nahe unisono gestimmt sind. Auch mit zwei Stimmgabeln, welche einer reinen Consonanz sehr nahe stehen, lassen sich die Stösse deutlich wahrnehmen. Besonders geeignet zur Nachweisung der Stösse sind solche Stimmgabeln, welche in der Fig. 693, S. 717 dargestellten Weise auf Resonanzkästchen aufgesetzt sind. Hat man zwei solcher Stimmgabeln, welche vollkommen unisono sind, neben einander gestellt, so braucht man nur die eine mit etwas Wachs zu beschweren, um die Stösse sehr deutlich hörbar zu machen, wenn beide Stimmgabeln durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen gleichzeitig zum Tönen gebracht werden.

Der Grund dieser Erscheinung ist leicht einzusehen. Wenn in einem bestimmten Momente durch beide Töne gleichzeitig eine Verdichtung hervorgebracht wird, so wird dies Zusammenfallen bald aufhören, und nach einiger Zeit wird gleichzeitig eine Verdünnung des einen Tones

mit einer Verdichtung des anderen stattfinden. Wenn aber die Verdichtungen des einen Tones gerade mit denen des anderen zusammenfallen, so verstärken sie sich gegenseitig; sie heben sich aber gegenseitig auf, wenn die Verdichtungen des einen mit den Verdünnungen des anderen zusammentreffen.

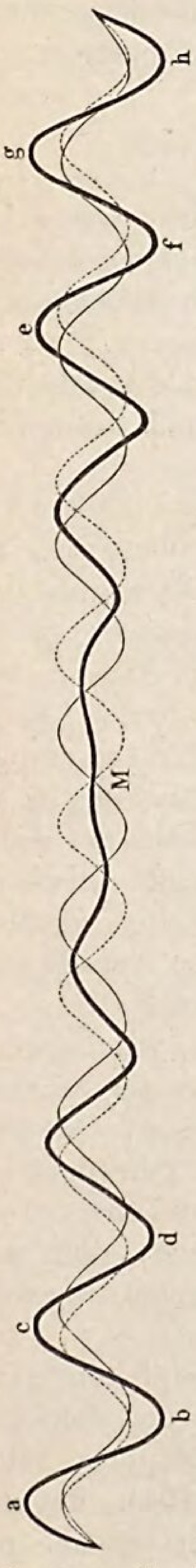


Fig. 838.

Wie bald Verdichtung mit Verdichtung und Verdünnung mit Verdünnung und dann wieder Verdichtung mit Verdünnung zusammentreffen, wenn zwei nicht ganz isochrone Töne zusammenwirken, kann man sich durch zwei nicht ganz isochron schwingende Pendel recht anschaulich machen; am deutlichsten ergiebt sich aber das abwechselnde Anschwellen und Abnehmen des Tones durch graphische Darstellung. In Fig. 838 sollen die beiden schwach gezogenen Curven die Wellensysteme der beiden nicht isochronen Töne darstellen. Die Wellenberge entsprechen den Verdichtungen, die Thäler den Verdünnungen. Summirt man die Ordinaten der beiden Curven, so erhält man für jeden Moment die Intensität der Verdünnung oder Verdichtung, mit welcher beide Wellensysteme zusammen das Ohr afficiren; auf diese Weise ist die stark gezogene Curve construirt; bei a, b, c, f, g und h werden durch das Zusammenwirken beider Wellensysteme verstärkte Verdichtungen und Verdünnungen, also ein Anschwellen des Tones, hervorgebracht. In der Nähe von M aber, wo sich die beiden Wellensysteme fast ganz aufheben, ist die resultirende Curve fast ganz flach, was einem Nachlassen des Tones entspricht.

Schon Sauveur hat die Stösse angewandt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu ermitteln. Er zählte nämlich die Stösse, welche zwei tiefe Töne mit einander geben, von denen der eine um einen kleinen halben Ton höher war als der andere. Macht der eine dieser Töne $n = 24\,m$ Schwingungen in der Secunde, so ist $25\,m$ die Schwingungszahl des anderen; und wenn p die beobachtete Anzahl der Stösse ist, so ergiebt sich

$$25\,m - 24\,m = p \text{ oder } m = p,\ n = 24\,p.$$

Nehmen wir z. B. an, man habe beobachtet, dass die Töne f^{-1} (*F*) und fis^{-1} (*Fis*) in 10 Secunden 36 Stösse mit einander machen, so ist $p = m = 3{,}6$, also die Schwingungszahl n von f^{-1} gleich $24 \,.\, 3{,}6 = 86{,}4$. Demnach wäre die Schwingungszahl von c^{-1} gleich 64,8; es wären ferner 259,2 und 432 die Schwingungszahlen der Töne c^1 und a^1.

In anderer Weise hat Scheibler die Stösse benutzt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen. Er stellte zwei Stimmgabeln

her, von denen die eine genau eine Octave tiefer war als die andere, so dass also $2n$ die Schwingungszahl der letzteren war, wenn man mit n die Schwingungszahl der ersteren bezeichnet. Alsdann verfertigte er $p - 1$ weitere Stimmgabeln, deren Töne zwischen jenen lagen, und zwar so, dass jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stösse in der Secunde machte. Daraus ergiebt sich nun:

$$2n = n + 4p \text{ oder } n = 4p.$$

Beträgt z. B. die Zahl der Stimmgabeln, welche man zwischen a^0 und a^1 einschalten muss, wenn jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stösse geben soll, 54, so ist $p = 55$, $n = 4 . 55 = 220$, also die Schwingungszahl von a^1 gleich 440.

Der Vorzug dieser allerdings etwas mühsamen Methode beruht darauf, dass das Ohr für die Reinheit der Octaven ganz besonders empfindlich ist.

Die Scheibler'sche Methode wird übrigens in neuerer Zeit in Verbindung mit der optischen Methode gebraucht und ist dann von der subjectiven Beurtheilung der Reinheit des Octavenintervalls unabhängig.

Eine andere Anwendung der Stösse ist die zur Demonstration des Doppler'schen Principes, das wir im §. 207 vorgetragen haben.

Stellt man zwei Stimmgabeln mit Resonanzkästen, welche genau unisono gestimmt sind, in einiger Entfernung von einander auf und bewegt sich, während sie beide tönen, von der einen Gabel gegen die andere, so hört man sofort Stösse, da scheinbar die Tonhöhe der Gabel, der man sich nähert, ebenso viel steigt als die andere sinkt. Bleibt der Beobachter stehen und wird dagegen die eine Gabel demselben genähert oder entfernt, so treten ebenfalls Schwebungen auf, deren Anzahl aber, wie leicht erklärlich, nur halb so gross ist, wie im vorigen Falle.

Nimmt man eine Stimmgabel mit dicken Zinken, welche einen recht kräftigen und hohen Ton (über 2000 Schwingungen per Secunde) giebt und bewegt dieselbe, nahe der Zimmerwand stehend, senkrecht gegen dieselbe hin und zurück, so hört man ebenfalls sehr deutliche Schwebungen zwischen dem directen und dem reflectirten Tone.

Um die Schwebungen dem Auge sichtbar zu machen, kann man die oben beschriebene optische Methode mittelst der Spiegel tragenden Stimmgabeln anwenden.

Auch mittelst zweier nahe gleich gestimmter Orgelpfeifen lassen sich die Schwebungen sichtbar darstellen, indem man ein und denselben Gasstrom nach einander durch die manometrischen Kapseln beider Pfeifen zu einem gemeinsamen Brenner führt (siehe §. 194). Im rotirenden Spiegel zeigt sich dann eine Reihe Flammenbilder von ab- und zunehmender Höhe.

Je näher die beiden Töne einander liegen, desto langsamer folgen die Stösse, so dass man sie bequem zählen kann. Macht der eine Ton in jeder Secunde 3, 4, 5 u. s. w. Schwingungen mehr als der andere, so

werden 3, 4, 5 Stösse in der Secunde entstehen; die Anzahl der Stösse ist gleich der Anzahl der Schwingungen, welche der eine Ton in jeder Secunde mehr macht als der andere. Wenn aber die Töne mehr und mehr ungleich werden, so werden die Stösse schneller und schneller, bis sie endlich nicht mehr als getrennte Eindrücke wahrgenommen werden können.

So lange die Schwebungen (Stösse) langsam genug sind, um ohne Schwierigkeit gezählt zu werden, machen sie auf das Ohr durchaus keinen unangenehmen Eindruck. Wenn aber die Differenz der beiden Töne bis zu einem Halbton wächst, so wächst die Zahl der Schwebungen bis zu 20 oder 30 in der Secunde; es bleibt dann dem Ohre immer noch der Eindruck getrennter Tonstösse, wenn man sie auch nicht mehr einzeln wahrnehmen oder zählen kann, aber der Gesammteindruck wird wirr. Wir werden weiter unten zeigen, wie Helmholtz auf diesem Umstande eine Theorie der Consonanz und Dissonanz der Intervalle aufgebaut hat.

R. König hat in seiner Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier Töne" *) Beobachtungen veröffentlicht, aus denen er den Schluss zog, dass Stösse nicht nur dann entstehen, wenn zwei Töne mit einander nahe im Einklange sind, sondern auch dann, wenn sie mit einander nahe ein harmonisches Intervall bilden, d. h. wenn die Schwingungszahl des einen Tones nahe ein ganzes Vielfaches der Schwingungszahl des anderen ist. König experimentirte mit einer Reihe von 56 Stimmgabeln, von denen die ersten fünf 130 kg wogen. Er hatte so Töne von 64 bis zu 4096 Schwingungen zur Verfügung, von denen die tiefsten noch durch Resonanzröhren verstärkt wurden.

Lässt man zu dem Tone 64 einen ebensolchen ertönen, dessen Schwingungszahl man allmälig erhöht, so entstehen zunächst die gewöhnlichen Schwebungen oder Stösse, deren Zahl m gleich der Differenz $n' - n$ der Schwingungszahlen der primären Töne ist. Sobald $n' = 78$ geworden, so gehen die Stösse, deren Zahl nun $78 - 64 = 14$ geworden, in ein „Rollen" über, welches bis $n' = 86$ (22 Stösse) immer schneller wird, ohne seinen Charakter zu verlieren. Darauf folgt ein lautes verworrenes „Rasseln", welches bei $n' = 108$ (44 Stösse) wieder in ein Rollen übergeht, welches langsamer wird, bis man wieder die einzelnen Stösse zählen kann, nämlich bei $n' = 118$ 10 Stösse, bei $n' = 119$ 9 Stösse u. s. f., bis bei $n' = 128$ dieselben gänzlich verschwinden.

König nennt diese letzteren Stösse die oberen Stösse, die früheren dagegen untere Stösse. Bezeichnen wir die Anzahl der letzteren mit m, die der oberen mit m', so ist die Anzahl der unteren Stösse

$$m = n' - n,$$

die Anzahl der oberen Stösse

$$m' = 2n - n'.$$

*) Poggend. Ann., Bd. 157 (1876), S. 177.

Allein damit sind noch nicht alle Stösse erschöpft, welche der Grundton 64 geben kann; denn geht man nun mit n' über die Octave 128 hinaus, so treten wiederum Stösse auf, welche König wiederum untere nennt. Bei $n' = 140$ (12 Stösse) beginnt wieder ein Rollen, bei $n' = 148$ (20 Stösse) ein Rasseln, bei $n' = 166$ erscheint eine Rauhigkeit des Tones, darauf wieder ein Rollen, das sich bald verlangsamt, bei $n' = 180$ kann man wieder 12 obere Stösse zählen, bei $n' = 186$ 6 Stösse, bei $n' = 190$ 2 Stösse, bei $n' = 192 = 3$ mal 64 verschwinden die Stösse.

Zwischen $n' = 128$ und 192 gilt also für die Zahl der unteren Stösse

$$m = n' - 2n,$$

für die Zahl der oberen Stösse

$$m' = 3n - n'.$$

Die unteren Stösse sind immer stärker als die oberen und deshalb innerhalb eines weiteren Gebietes bemerkbar.

Lässt man n' noch weiter steigen, so wiederholen sich diese Erscheinungen, doch werden die Stösse immer weniger bemerkbar. In der Periode von $n' = 7n$ bis $n' = 8n$ waren noch 4 Stösse deutlich zu hören, ja selbst bei $n' = 9n$ und $n' = 10n$ konnten noch einige wahrgenommen werden. Bedeutet h eine ganze positive Zahl, so hat man für die Zahl der unteren und oberen Stösse die Gleichungen:

Zahl der unteren Stösse $m = n' - hn$

„ „ oberen „ $m' = (h + 1)n - n'$.

Die Zahl m der unteren Stösse ist also immer gleich dem positiven Reste der Division $n' : n$, die Zahl m' gleich dem negativen Reste.

Wiederholt man die Versuche mit einem höheren Grundtone als $n = 64$, so gelten dieselben Gesetze, aber die Stösse werden so rasch, dass sie nicht mehr bei so weiten Intervallen zu beobachten sind. So z. B. sind bei $n = 512$ die unteren und oberen Stösse nur ganz in der Nähe des Grundtones und der harmonischen Obertöne als Stösse wahrzunehmen. Dagegen gehen sie nach König in Folge ihrer grossen Zahl in Töne über, welche er Stosstöne nennt. Bei dem Grundtone $n = 128$ ist die grösste Zahl der Stösse in der Mitte jeder Periode gleich 64 und es wird auch wirklich ein schwacher Ton von 64 Schwingungen gehört. Beim Grundtone $n = 256$ hört man schon, sobald n' die Terz erreicht (64 Stösse), einen schwachen Ton 64, welcher bis zum Tone 128 ansteigt, sobald n' die Quint erreicht hat. Von $n' = 384$ — 448 steigt der Stosston von 128 bis 192 und erreicht eine auffallende Stärke.

Der obere Stosston lässt sich schon bei 192 bis 128 Stössen mittelst Hülfsgabeln, mit denen er selbst wieder Stösse giebt, nachweisen.

Am geeignetsten fand König zum Studium der Stosstöne den Grundton $n = 1024$.

Fassen wir das Mitgetheilte zusammen: So oft zu einem Tone n ein höherer n' angestimmt wird, können nach König im Allgemeinen

zwei Stosstöne m und m' entstehen. Um ihre Zahlen zu berechnen, sucht man diejenigen beiden harmonischen Töne von $n = hn$ und $(h + 1)\,n$, zwischen denen n' liegt. Die Differenz $n' - hn$ giebt den unteren, $(h + 1)\,n - n'$ den oberen Stosston. Fällt diese Differenz aber kleiner als 64 aus, so entsteht nur eine Rauhigkeit, ein Rasseln oder ein Rollen, wird die Differenz klein genug, so hört man statt des Stosstones die einzelnen Stösse.

Aber damit ist das Gebiet noch nicht erschöpft, denn nach König verhalten sich zwei solche Stosstöne zu einander wie zwei primäre Töne und geben mit einander Stösse und Stosstöne zweiter Ordnung oder secundäre Stösse und Stosstöne.

Dazu sind nicht mehr als zwei primäre Töne erforderlich. Zum Beispiel lasse man den Ton $n = 256$ und seine Quint $n' = 384$ zusammenwirken, dann ist

der untere Stosston . . . $m = n' - n = 384 - 256 = 128$
„ obere „ . . . $m' = 2n - n' = 512 - 384 = 128.$

Wir brauchen also m und m', die jetzt im unisono sind, nur ein wenig zu verstimmen, damit sie Stösse geben. Nehmen wir also zu $n = 256$ ein $n' = 385$, so wird

$$\begin{aligned} m &= 385 - 256 = 129 \\ m' &= 512 - 385 = 127 \\ \hline m - m' &= 2 \end{aligned}$$

Es erfolgen demnach zwei secundäre Stösse per Secunde. Man findet so allgemein, dass, so oft der höhere Ton n' von der Reinheit der Intervalle um eine Schwingung abweicht, bei den Intervallen $^2/_3$, $^2/_5$, $^2/_7$... je zwei, bei den Intervallen $^3/_4$, $^3/_7$... und $^3/_5$, $^3/_8$... je drei, bei den Intervallen $^4/_5$, $^4/_9$... und $^4/_7$, $^4/_{11}$... je vier Stösse entstehen.

Wird die Anzahl dieser secundären Stösse hinlänglich gross, so bilden sie nach König einen secundären Stosston. Dies wurde in zwei Fällen beobachtet, so z. B. wenn der Ton 2048 mit dem Tone 2816 zusammenklingt. Man hört laut $m = 768$ und $m' = 1280$ und noch deutlich $m' - m = 512$.

Auf einen Einwand von H. Helmholtz, dass die Stösse der harmonischen Intervalle darauf zurückzuführen seien, dass der tiefere Ton n einen Oberton von nahe gleicher Höhe mit dem höheren Tone n' in seinem Klange enthalte, und dass so der höhere primäre Ton mit dem nahe gleich hohen Obertone des anderen primären Tons die Stösse verursache, hat König*) erwidert, dass seine Stimmgabeln die betreffenden Obertöne gar nicht hören liessen. Einem anderen Einwande, dass die betreffenden Obertöne erst im Ohre durch Einwirkung der starken primären Töne entstehen könnten, begegnete König mit dem Hinweise

*) „Ueber den Ursprung der Stösse und Stosstöne bei harmonischem Intervall", Wiedem. Ann., Bd. 12, S. 335 (1881).

dass die Stösse auch bei schwachen Tönen auftreten, dass ferner der Oberton, welcher die Stösse veranlassen sollte, gehört werden müsste, da der Ton einer Hülfsgabel, welcher an Stelle des Obertones die Stösse in derselben Stärke hervorruft, sehr deutlich gehört werde. Wir müssen bezüglich der weiteren Experimente von König auf die citirte Originalabhandlung verweisen*) und bemerken, dass seine theoretische Deutung der Thatsachen, welche mit der später zu besprechenden Theorie der Combinationstöne im Zusammenhange steht, noch nicht die allgemeine Zustimmung der Physiker gefunden hat.

227 **Die mehrstimmigen Sirenen von Dove und Helmholtz.** Zur Anstellung von Interferenzversuchen verschiedener Art sind von besonderem Werthe die mehrstimmige Sirene von Dove**) und die mehrstimmige Doppelsirene von Helmholtz***).

Fig. 839.

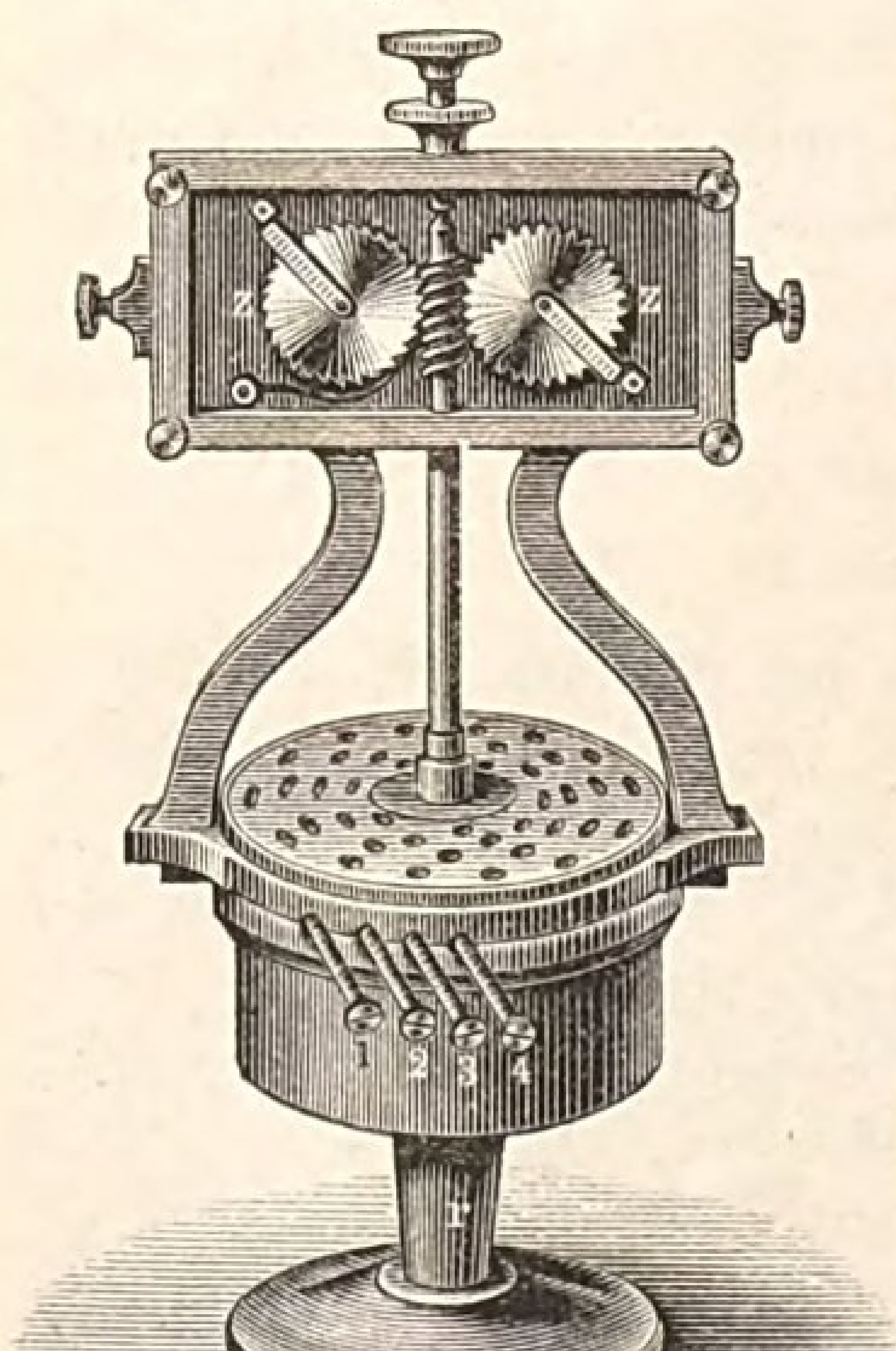
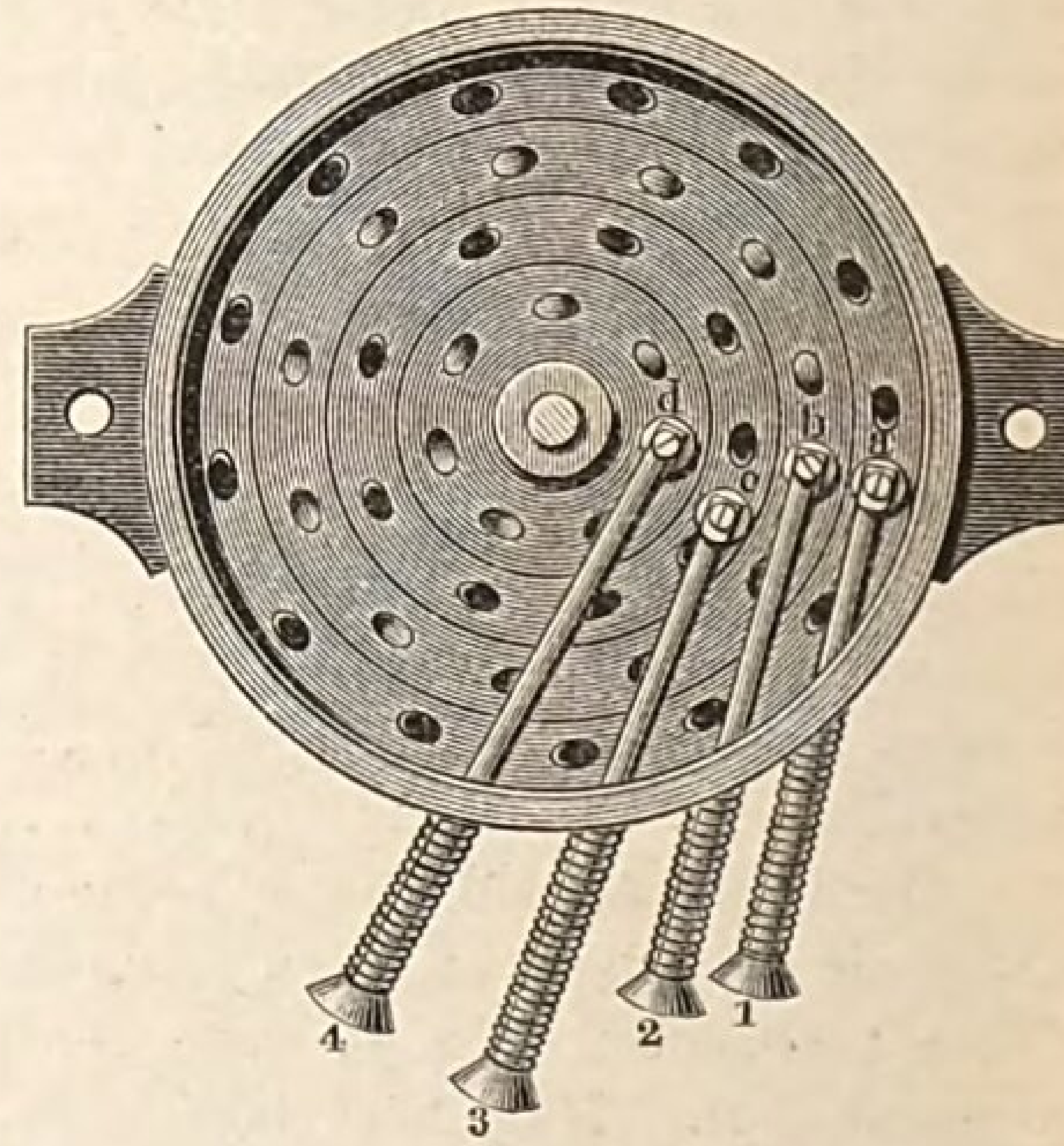


Fig. 840.



Nachdem schon früher Savart, Opelt und Seebeck mehrstimmige Sirenen theils durch Anbringung mehrerer Räder auf einer Achse, theils mehrerer Löcherreihen auf einer Scheibe construirt hatten, übertrug Dove diese Erweiterung auf die Sirene von Cagniard la

*) Dieselbe enthält auch die Beschreibung der „Wellensirene“, bei welcher statt der Löcherreihen wellenförmige Scheibenränder vor radial gestellten spaltförmigen Blaseöffnungen vorbeigeführt werden.

**) Poggend. Ann., Bd. 82 (1851)

***) Tonempfindungen, S. 241, 4. Aufl., S. 269.

Tour (§. 205). Die Dove'sche Sirene ist in Fig. 839 abgebildet, Fig. 840 zeigt die innere Einrichtung der concentrischen Ringe mit den verschiedenen Löcherreihen.

Die zum Rotiren bestimmte Scheibe, sowie die darunter befindliche fixe Platte, welche den Deckel des Windkastens bildet, haben auf vier concentrischen Kreisen von innen nach aussen 8, 10, 12 und 16 Löcher, welche wie bei der Sirene von Cagniard la Tour schief gebohrt sind, so zwar, dass sich die Bohrungen rechtwinkelig treffen. Unterhalb des fixen Deckels befinden sich vier concentrische Ringe, Fig. 840 *a*, *b*, *c*, *d*, welche genau an einander schliessen und mittelst daran gekuppelter Messingstifte 1, 2, 3, 4 in ihrer Ebene drehbar sind. Die Führung für den innersten Ring nach innen bildet eine am Deckel befestigte Scheibe, die Führung für den äussersten Ring nach aussen bildet der feste Rand des Deckels. Die Bohrung dieser vier Ringe stimmt in Zahl und Richtung der Löcher genau mit jener des darüber befindlichen Deckels überein.

Die Messingstifte 1, 2, 3, 4 sind ausserhalb mit Spiralfedern und inwendig mit Anschlagzapfen versehen, welche bewirken, dass dieselben für gewöhnlich eine solche Lage annehmen, dass dadurch die zugehörige Löcherreihe verschlossen bleibt. Drückt man aber auf einen Stift, so wird der zugehörige Ring so weit gedreht, dass seine Löcherreihe geöffnet wird.

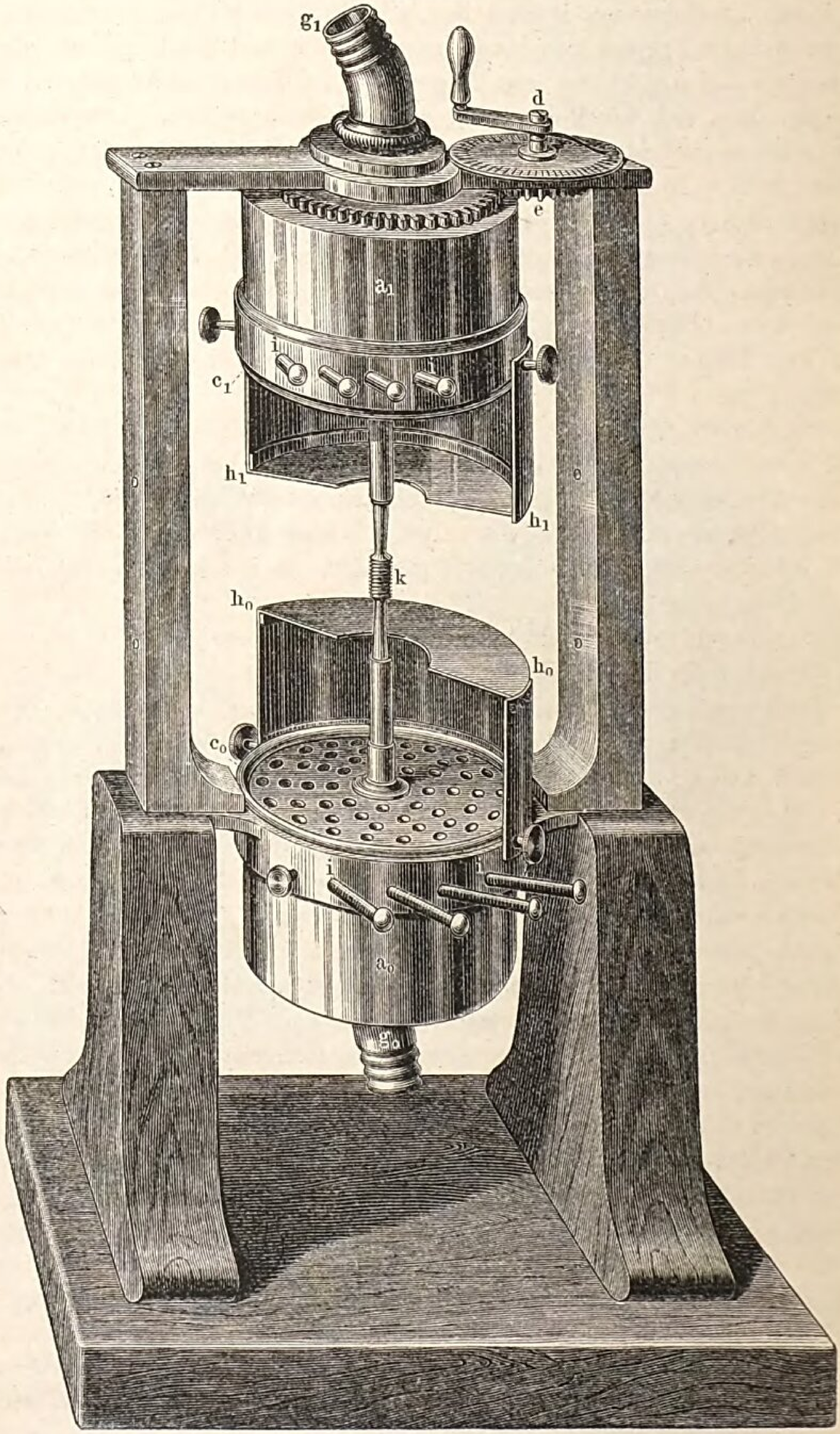
Man kann daher nach Belieben einen oder mehrere der vier Töne der Sirene allein oder zugleich anstimmen.

Die Doppelsirene von Helmholtz, Fig. 841 (a. f. S.), ist durch Zusammensetzung zweier Dove'scher Sirenen a_0 und a_1 entstanden, welche die rotirende Achse k gemeinsam haben und einander die Deckplatten zukehren. Das Zählwerk (in der Figur weggelassen) ist an die Schraube bei k anzusetzen; der Wind wird bei g_0 und g_1 zugeführt. Ausserdem ist aber noch eine Einrichtung getroffen, um den oberen Windkasten a_1 gegen den unteren um seine Achse zu drehen. Zu dem Ende ist er mit einem Zahnrade versehen, in welches das kleinere mit einer Kurbel d versehene Zahnrad e eingreift. Die Achse des Kastens a_1, um die es sich dreht, ist eine Verlängerung des oberen Windrohrs g. Fig. 842 (a. S. 831) zeigt einen Verticalschnitt durch den oberen Kasten, aus welchem die innere Einrichtung zu ersehen ist. Das Windrohr E ist fest in den Querbalken des Gestelles AA eingefügt und verlängert sich nach innen in einen hohlen Cylinder mit conisch zugeschnittenen Flächen an den Enden, auf denen entsprechende conische Aushöhlungen im Boden und Deckel des Kastens gleiten, so dass sich der letztere frei um das Windrohr drehen kann. α zeigt den Querschnitt des Zahnrades, welches am Kasten festsitzt, β das kleinere Zahnrad, γ die Kurbel, δ einen Zeiger, der an einer Randtheilung ε die Drehungswinkel ablesen lässt.

Die rotirende Achse, deren oberes Ende D in Fig. 842 sichtbar ist, läuft auf feinen Spitzen in kegelförmigen Pfannen, deren obere mittelst

der Schraube η etwas verstellbar ist. CC ist die an die Achse D befestigte rotirende Scheibe, $\varkappa\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\nu$, νo sind die vier concentrischen Ringe, welche mit schräg abgeschnittenen Rändern wie die Ringe einer

Fig. 841.

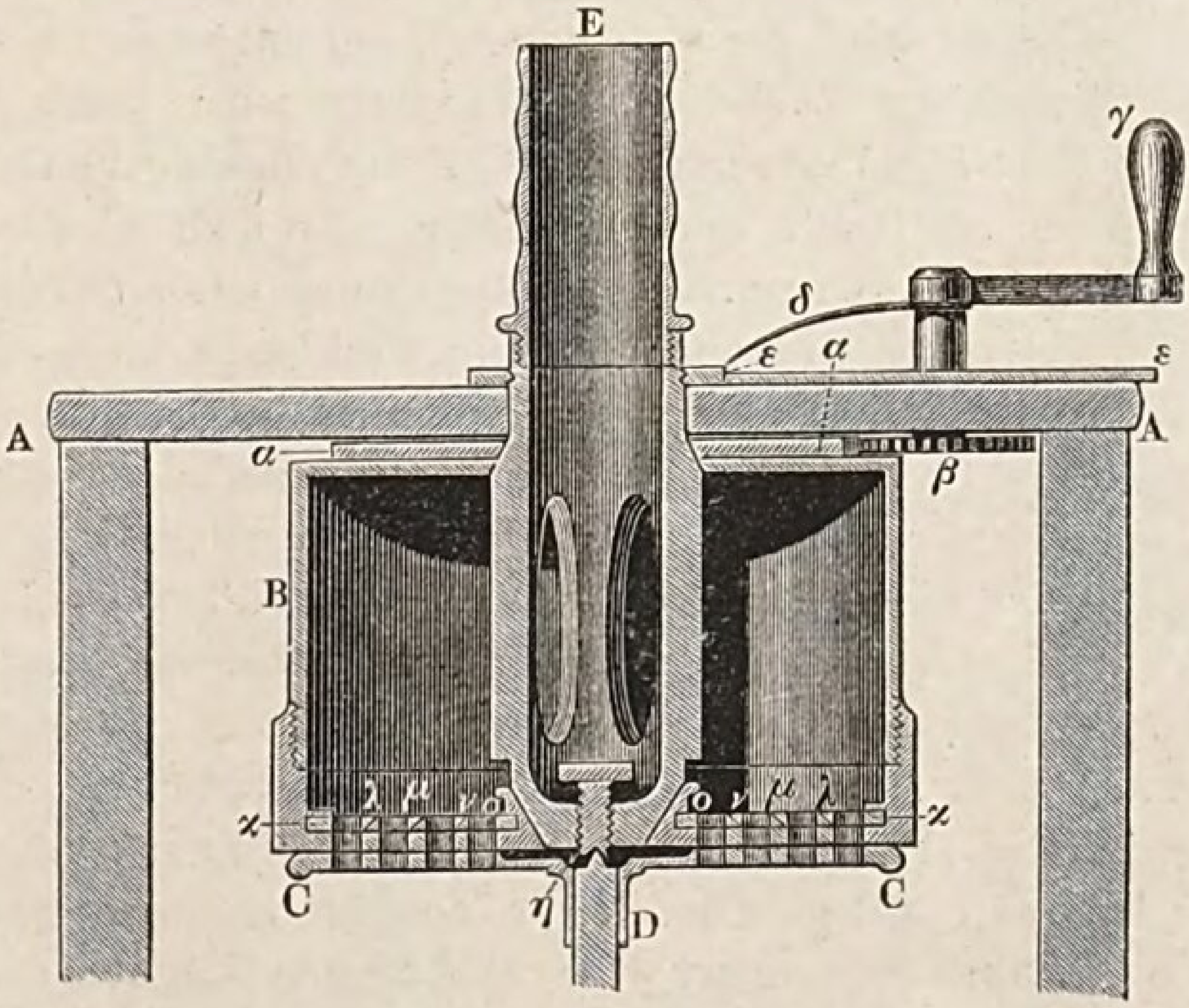


Herdplatte über einander greifen. Die übrige Einrichtung ist wie bei der Dove'schen Sirene. Die untere rotirende Scheibe hat vier Reihen mit 8, 10, 12, 18, die obere mit 9, 12, 15, 16 Löchern. Bezeichnen wir den Ton, der bei Oeffnung der 8 Löcher entsteht, mit *c*, so giebt die untere Scheibe die Töne *c*, *e*, *g*, *d'*, die obere Scheibe die Töne *d*, *g*, *h*, *c'*.

Man kann demnach die Intervalle: Unisono, Octave, Quinte, Quart, grosse Terz, kleine Terz, ganzer Ton, halber Ton hervorbringen und zwar die Mehrzahl derselben in doppelter Weise, nämlich entweder an einer der Scheiben allein, oder derart, dass der eine Ton an der einen, der andere Ton an der anderen Scheibe entsteht.

Mit diesem Instrumente lässt sich eine grosse Anzahl wichtiger Experimente anstellen, die sich zum Theil auf schon Vorgetragenes beziehen, zum Theil erst im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Fig. 842.



Um den Klang der Sirene von den darin vorhandenen Obertönen annähernd zu befreien, werden die Resonanzkästen h_0 h_0 und h_1 h_1, Fig. 841, aus je zwei Hälften bestehend aufgesetzt. Dies hat zur Folge, dass der Grundton der Sirene, sobald er die Höhe des Eigentones dieser Resonanzkästen erreicht, voll, stark und weich ertönt und sich zu Interferenzversuchen besser eignet.

Stehen beide Windkästen so, dass die Impulse der gleichen Töne gleichzeitig entstehen, also die Phasendifferenz sowohl der Grundtöne als ihrer Obertöne genau gleich Null wird, so werden alle diese Töne verstärkt. Dreht man dann aber die Kurbel um 45°, was eine Drehung des Kastens um $^1/_{24}$ der Peripherie zur Folge hat, so wird beim beiderseitigen Anblasen der Zwölflöcherreihe eine Phasendifferenz $= {^1/_2}$ stattfinden; die beiden Grundtöne vernichten sich dann. Die Phasendifferenz

der beiderseitigen ersten Obertöne (Octaven) beträgt aber zwei halbe Schwingungen oder eine ganze; diese Obertöne verstärken sich daher sowie alle anderen geradzahligen Obertöne, während alle ungeradzahligen ausgelöscht werden. Drehung der Kurbel um noch einmal 45°, also im Ganzen um 90°, stellt den ursprünglichen Zustand wieder her. Dreht man die Kurbel einmal ganz herum, so wird viermal der Grundton mit den geradzahligen Obertönen verstärkt, dazwischen viermal geschwächt und statt dessen die Octave und die übrigen ungeradzahligen Obertöne verstärkt. Der erste Oberton (die Octave) für sich allein (etwa mit Resonator) beobachtet, wird achtmal verstärkt und wieder geschwächt, die Duodecime 12 mal u. s. f.

Um die Erscheinung der Stösse oder Schwebungen zu produciren, muss man den einen Ton ein wenig verstimmen. Man erreicht dies einfach, indem man die Kurbel langsam aber constant dreht. Ist dabei die Rotationsrichtung des oberen Windkastens übereinstimmend mit der rotirenden Scheibe, so wird der Ton vertieft, bei entgegengesetzter Richtung erhöht. So oft die Kurbel um 90° gedreht wird, sinkt oder steigt die Anzahl der Schwingungen um eine, weil die zugehörige Drehung des Kastens dem zwölften Theile der Peripherie, also dem Abstande zweier Löcher entspricht. Es müssen demnach während jeder Umdrehung der Kurbel vier Schwebungen entstehen, ganz im Einklange mit der Regel, dass die Anzahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahlen.

Die subjective Tonstärke wächst mit der Anzahl der Schwingungen oder der Tonhöhe, wenn auch der Aufwand an lebendiger Kraft zur Hervorbringung der Töne gleich gross ist. Dies zeigt sich an der Sirene sehr auffallend. Unterhält man nämlich den Luftstrom ganz constant, so ist der Ton anfangs, so lange er tief ist, ziemlich schwach, nimmt mit der Höhe immer mehr an Intensität zu und wird bei etwa 880 Schwingungen unerträglich stark. Dabei ist die Zunahme am Anfange am raschesten. Daraus folgt, dass bei tiefer Tonlage in zusammengesetzten Klängen die Obertöne für unser Ohr überwiegen können. Auch dies lässt sich an der Doppelsirene (mit den Zwölflöcherreihen) leicht zeigen, da man durch die Schwebungen stets feststellen kann, welchen Ton man hört. Man weiss nämlich, dass eine Kurbelumdrehung 4 Schwebungen des Grundtones, 8 Schwebungen des ersten, 12 Schwebungen des zweiten Obertones etc. verursacht. Lässt man nun die Scheiben langsamer als gewöhnlich laufen, indem man sie durch eine mit Oel benetzte Stahlfeder bremst, so hört man bei steigender Geschwindigkeit zuerst 12, dann 8, dann erst 4 Schwebungen während einer Kurbeldrehung. Trotzdem bemerkt man am Klange nicht, dass im Anfange der Grundton fehlt. Es zeigt dies, wie leicht man sich bei der Ermittelung der unteren Tongrenze irren kann, wenn man nicht die Obertöne ausschliesst, oder die Probe mit den Schwebungen vornimmt.

Aber auch die Stösse, welche bei grösseren Intervallen durch die Obertöne auftreten, lassen sich mit der Doppelsirene demonstriren. Man

lässt z. B. an der oberen Scheibe 12, an der unteren 18 Löcher wirken, das Intervall ist 2 : 3, also Quinte. Dieselbe ertönt rein und ohne Stösse, so lange man die Kurbel unberührt lässt, dreht man sie aber, so giebt jede Umdrehung derselben 12 Stösse, woraus folgt, dass dieselben durch Interferenz des zweiten Obertones des tieferen mit dem ersten Oberton des höheren Tones entstehen. Angenommen, der Ton der Zwölflöcherreihe betrage 220, der der Achtzehnlöcherreihe also 330 Schwingungen. Der zweite Oberton des ersten beträgt daher 660, der erste Oberton des zweiten ebenfalls 660 Schwingungen, welche zusammen keine Stösse geben können. Erhöht man aber den Ton 220 durch eine Drehung der Kurbel per Secunde auf 224, so wird sein zweiter Oberton $3 \times 224 = 672$, welcher mit dem Ton 660 eine Anzahl von $672 - 660 = 12$ Schwebungen geben muss.

Combinationstöne. Wenn zwei musikalische Töne von verschiedener Höhe gleichzeitig, kräftig und gleichmässig anhaltend erklingen, so hört man häufig noch andere Töne mit, deren Tonhöhe von dem Intervall der beiden primären Töne abhängt. Diese unter dem Namen der Combinationstöne bekannten Töne sind 1740 zuerst von Sorge entdeckt, und später durch Tartini, nach welchem sie auch die Tartini'schen Töne genannt werden, allgemeiner bekannt geworden. 228

Die Schwingungszahl eines Combinationstones ist gleich der Anzahl von Stössen, welche die beiden primären Töne mit einander geben, sie ist also gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne, weshalb Helmholtz sie auch Differenztöne nennt.

So hört man die nächst tiefere Octav eines Tones mit, wenn gleichzeitig noch seine Quinte erklingt.

Bei gleichzeitigem Ertönen von Grundton und Quart hört man die tiefere Duodecime des Grundtones mit.

Grundton und grosse Terz geben einen Combinationston, welcher um 2 Octaven tiefer ist als der Grundton u. s. w. Es geben also:

c^2 und g^2 den Combinationston c^1
c^2 und f^2 „ „ f^0
c^2 und e_2 „ „ c^0.

Thomas Young versuchte die Combinationstöne auf die bereits im vorigen Paragraphen besprochenen Schwebungen zurückzuführen, indem er annahm, dass der Gesammteindruck der Stösse, welche zu schnell sind, um einzeln unterschieden zu werden, als ein eigener Ton hörbar werde. In der That stimmt die Schwingungszahl des Differenztones mit der Zahl der Stösse überein.

Diese Erklärung der Combinationstöne ist aber, wie Helmholtz in seinem mehrmals angeführten Werke gezeigt hat, nicht haltbar. Zunächst haben wir bereits im vorigen Paragraphen gesehen, dass unter

Umständen eine namhafte Anzahl von Stössen in der Secunde erfolgen kann, welche nicht als Combinationston wahrgenommen werden, sondern nur die Dissonanz der beiden gleichzeitig erklingenden Töne zur Folge haben. Dann aber ist die Vernehmbarkeit der Combinationstöne auch nicht allein von dem Intervall und der Stärke der beiden primären Töne, sondern wesentlich auch von ihrer Entstehungsweise abhängig. Die Bedingung für ihre Erzeugung ist, dass dieselbe Luftmasse von beiden Tönen in heftige Erschütterung gesetzt wird. Dies geschieht am stärksten in Dove's mehrstimmiger Sirene oder in der Helmholtz'schen Sirene, und zwar in letzterer dann, wenn die primären Töne beide an derselben Scheibe hervorgerufen werden. Die Luft im Windkasten ist verdichtet, so oft die Löcher geschlossen sind; wenn sie geöffnet werden, stürzt ein grosser Theil derselben ins Freie, es tritt eine beträchtliche Druckverminderung ein. So geräth die Luft im Windkasten in heftige Schwingungen. Werden zwei Löcherreihen angeblasen, so entstehen solche Schwingungen in der Luftmasse des Windkastens beiden Tönen entsprechend, und durch jede Reihe von Oeffnungen wird nicht ein gleichmässig zufliessender Luftstrom entleert, sondern ein Luftstrom, welcher durch den anderen Ton schon in Schwingungen versetzt ist. Die Combinationstöne, welche unter diesen Umständen sehr stark sind, existiren hier schon objectiv in der Luftmasse.

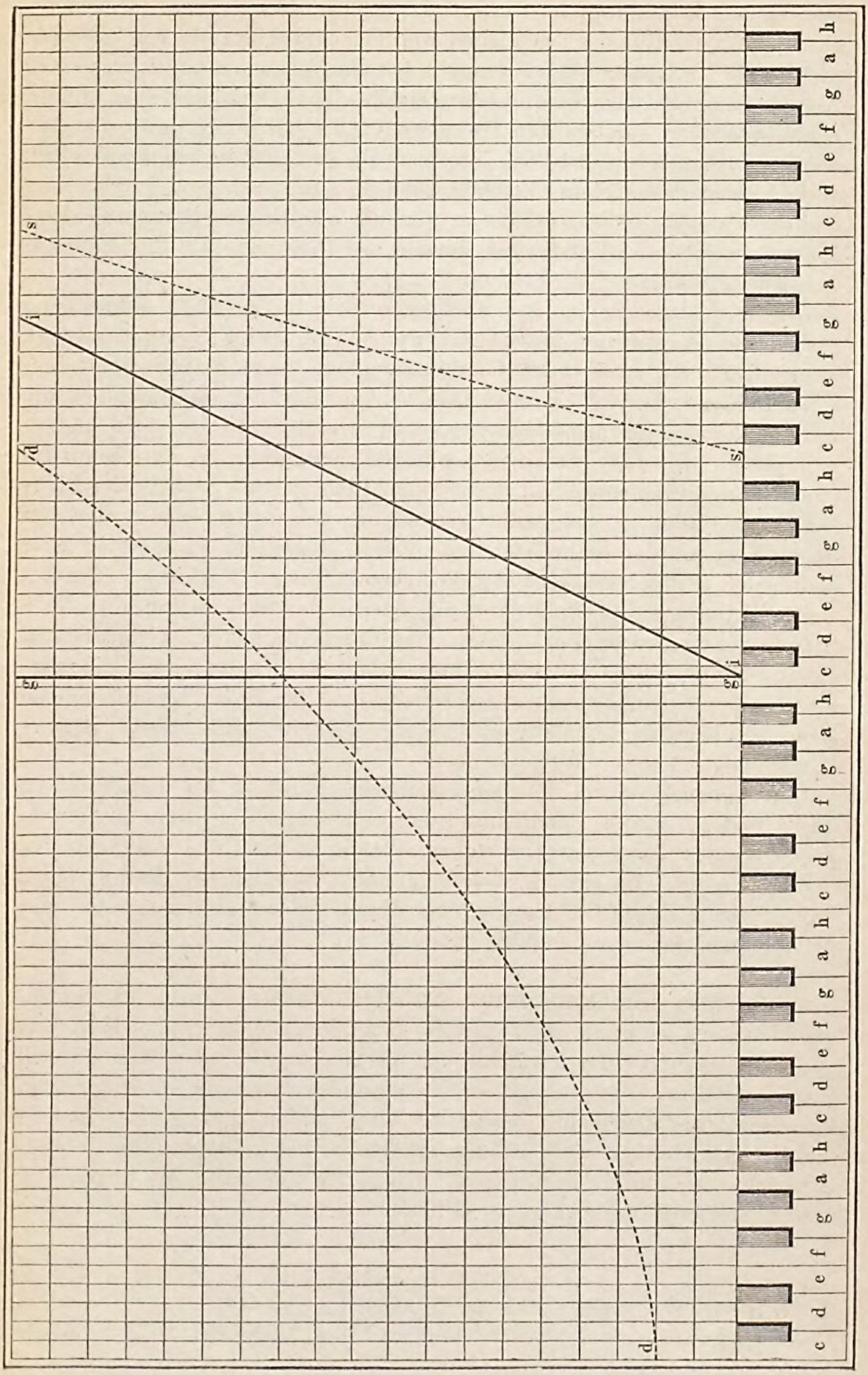
Aehnlich wie bei der Sirene sind die Verhältnisse bei der Physharmonika und dem im nächsten Paragraphen zu besprechenden Obertöne-Apparat von Appun; auch hier sind die Combinationstöne objectiv vorhanden und sehr deutlich, wenn auch nicht so stark wie bei der Sirene.

Wenn dagegen die Erregungsstellen der beiden Töne ganz von einander getrennt sind und keinen mechanischen Zusammenhang mit einander haben, wenn also z. B. zwei Singstimmen oder zwei Violinen die Töne angeben, so sind die Combinationstöne äusserst schwach und nur durch sehr geübte Ohren wahrnehmbar.

Ausser den eben besprochenen Differenztönen giebt es, wie Helmholtz zuerst theoretisch abgeleitet und dann experimentell nachgewiesen hat, noch eine zweite Art von Combinationstönen, welche er Summationstöne nannte und deren Schwingungszahl der Summe der Schwingungszahlen der combinirenden Töne entspricht. Die Summationstöne, welche übrigens nur bei scharfen Klängen mit starken Obertönen vorkommen, sind ungleich schwieriger wahrnehmbar als die Differenztöne; ihre Beobachtung am Obertöneapparat lässt sich aber mit Anwendung der im §. 231 zu besprechenden Resonatoren sehr erleichtern.

Die Erklärung, welche Helmholtz von den Combinationstönen gegeben hat, können wir hier nur kurz andeuten. Die Annahme, dass die resultirende Bewegung mehrerer Schwingungen gleich der Summe der Theilbewegungen sei, gilt nur unter der Bedingung, dass auch für die

Fig. 843.



resultirende Bewegung die Kraft, mit welcher die schwingenden Theilchen gegen die Ruhelage getrieben werden, dem Abstande von letzterer proportional sei; dies gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Bei der Combination starker Töne kommen aber grosse Amplituden vor. Indem nun Helmholtz die Rechnung unter der Annahme durchführte, dass bei letzteren die zurücktreibende Kraft nicht einfach proportional dem Abstande, sondern auch noch vom Quadrat des letzteren abhängig sei, erhielt er für die resultirende Bewegung Ausdrücke, welche die Entstehung sowohl der Differenz- als der Summationstöne erklären.

Zum Schluss wollen wir noch eine von E. Mach*) angegebene graphische Darstellung mittheilen, welche die beim Zusammenklange zweier Töne zu erhaltenden Combinationstöne recht einfach übersehen lässt. In Fig. 843 (a. v. S.) ist eine Claviatur und darüber ein Liniennetz mit zwei ganz ausgezogenen Geraden *gg* und *ii* und zwei Curven *dd* und *ss* gezeichnet. Die Claviatur denke man sich beweglich, so dass man die ganze Tastenreihe sowohl in horizontaler Richtung als auch in der Richtung *gg* parallel zu sich selber verschieben kann. Die beiden Geraden *gg* und *ii* werden dann stets am oberen Rande der Tastenreihe zwei mehr oder weniger von einander abstehende Tasten markiren. Die gestrichelte Curve *dd* markirt dann gleichzeitig den Differenzton, die punktirte Curve *ss* den Summationston, der durch die den markirten Tasten entsprechenden Töne (einer Physharmonika) zu erhalten ist. Eine Erklärung der Tafel, sowie ihres Gebrauches, um für irgend zwei gegebene Töne ihre Combinationstöne zu finden, erscheint nach diesen Bemerkungen nicht weiter nöthig.

Eine von Dvorák**) zuerst beobachtete und als Variationston bezeichnete Art von Combinationston entsteht, wenn man in einem Zimmer einen Ton erzeugt, welcher allmälig in die Höhe steigt oder in die Tiefe sinkt. Im Freien ist derselbe nicht zu erhalten. Daraus folgt, dass derselbe durch Combination der directen Schallwellen mit den von den Zimmerwänden reflectirten entsteht***).

229 **Theorie der Consonanz und Dissonanz.** Im §. 197 wurde die Thatsache erörtert, dass gewisse Tonintervalle in der melodischen und noch mehr in der harmonischen Verbindung im menschlichen Ohr eine angenehme oder unangenehme Empfindung erregen, die man mit Consonanz und Dissonanz bezeichnet hat. Schon Pytagoras suchte diese Thatsache mit dem Zahlenverhältniss der Saitenlängen in eine mystische Verbindung zu bringen. Euklides definirte die Consonanz zweier Töne als die Fähigkeit sich zu mischen, die Dissonanz als die

*) Einleitung in die Helmholtz'sche Musiktheorie. Graz 1867, S. 58.

**) Dvorák, Sitzungsber. d. Wien. Akad. LXX (1874).

***) Haberditzel, Sitzungsber. d. Wien. Akad. LXXVII (1878).

Unfähigkeit sich zu mischen, wodurch eine rauhe Gesammtwirkung entstehe.

Leibnitz suchte die Ursache der Consonanz sich zu erklären, indem er sich vorstellte, dass die Seele unbewusst die Schwingungszahlen zähle und an den einfachen Zahlenverhältnissen eine geheime (unbewusste) Freude empfinde. Einer ähnlichen Vorstellung gab sich sogar noch Euler hin. Einen wesentlichen Schritt zu einer wirklichen Erklärung machten erst Rameau und d'Alembert, welche beobachtet hatten, dass der Grundton meistens von den Obertönen Octave, Duodecime und Terz der Octave begleitet sei und deshalb die Hinzufügung derselben Töne zu einem Grundton als naturgemäss ansahen. Smith Robert endlich führte zuerst (1749) die Erklärung der Consonanz und Dissonanz auf die Schwebungen der Obertöne zurück. Da aber sein Buch nicht beachtet und vergessen worden war, so erscheint Helmholtz, der dieselbe Theorie unabhängig fand, als der Begründer der heute geltenden Theorie der Harmonie.

Im §. 226 haben wir auseinandergesetzt, dass die Schwebungen oder Stösse zweier Töne von nahe gleicher Tonhöhe einen sehr unangenehmen Eindruck in unserem Gehör verursachen, sobald deren Zahl etwa 30 bis 40 per Secunde erreicht. Das fortwährende Intermittiren eines Tones ist nämlich für den Gehörnerven ungefähr dasselbe, was ein flackerndes Licht für den Gesichtsnerven ist; er bringt, wie dieses, einen viel anstrengenderen, ermüdenderen Eindruck hervor, als ein gleichmässig andauernder Ton von selbst grösserer Stärke. Dem Tone h^1 kommen 495, dem Tone c^2 528 Schwingungen ($a^1 = 440$) zu. Die Differenz beträgt 33 und dies ist auch die Anzahl der Stösse per Secunde, welche demnach erklärt, warum das Intervall $h^1 c^2$ eine so starke Dissonanz giebt. Vergrössern wir das Intervall bis auf eine kleine Terz, indem wir den Ton h^1 bis auf a^1 erniedrigen, so wird die Anzahl der Stösse $528 - 440 = 88$. Diese erfolgen nun schon so rasch, dass sie nicht mehr im Stande sind, einen unangenehmen intermittirenden Eindruck zu machen. Es ist deshalb auch keine Dissonanz mehr zu bemerken.

Indess ist die Steigerung der Anzahl der Stösse nicht allein maassgebend, sondern auch die Grösse des Intervalles. Wir haben durch den Uebergang von $h^1 c^2$ auf $a^1 c^2$ nicht allein die Stossanzahl, sondern auch die Breite des Intervalles vergrössert. Wir können aber auch unter Beibehaltung der Intervallbreite von $h^1 c^2$ die Anzahl der Stösse vermehren, indem wir die beiden Töne um eine Octave erhöhen. Das Intervall $h^2 c^3$ giebt 66, das Intervall $h^3 c^4$ 132 Schwebungen, welche eher noch unangenehmer empfunden werden, wie die 33 Schwebungen von $h^1 c^2$.

Behalten wir die Anzahl der Schwebungen gleich 33 bei, so finden wir, dass folgende Intervalle diese Anzahl hervorrufen:

1056
990
66

der Halbton	$h^1 c^2$
die Ganztöne	$c^1 d^1$ und $d^1 e^1$
„ kleine Terz	$e^0 g^0$
„ grosse Terz	$c^0 e^0$
„ Quarte	$g^{-1} c^0$
„ Quinte	$c^{-1} g^{-1}$

Hinge nun die Dissonanz von der Stossanzahl allein ab, so müssten diese Intervalle sämmtlich Dissonanz geben, was aber nur bei den beiden ersten der Fall ist.

Helmholtz erklärt diesen Einfluss des Intervalles durch die Annahme, dass zwei Töne nur dann merklich empfundene Schwebungen geben können, wenn sie nahe genug an einander liegen, um im Ohre die nämlichen Nervenfasern zu afficiren.

Damit zwei einfache Töne mit einander Dissonanz geben, müssen dieselben also einmal zu einander in einem Intervall stehen, welches nicht über einen ganzen Ton hinausgeht und ausserdem mit einander 30 bis 40 Schwebungen geben. Innerhalb der in der Musik am meisten gebrauchten Octaven entsprechen diesen Bedingungen insbesondere sämmtliche Halbtonintervalle.

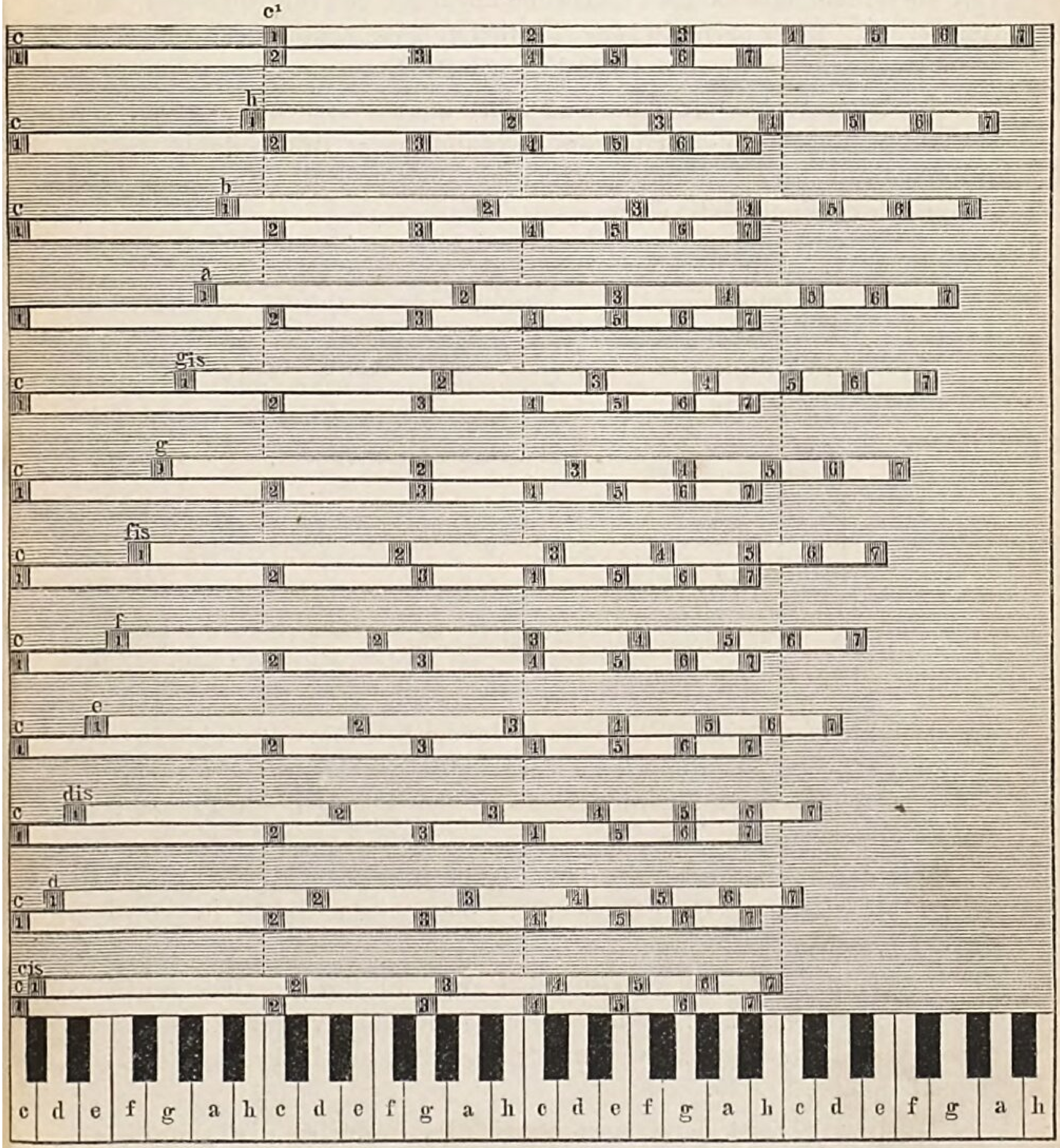
Bei den mit Obertönen ausgerüsteten Klängen kommen nun aber auch die Schwebungen zwischen den Obertönen und den Grundtönen, sowie die der Obertöne unter sich mit in Betracht. Dabei sind ganz besonders die unteren Obertöne (bis etwa zum sechsten) maassgebend, weil sie durch ihre Intensität hervorragen. Consonanz werden also diejenigen Intervalle geben, deren Grundtöne keine oder nur wenige oder doch nur schwache Obertöne von solcher Höhe enthalten, dass dieselben nur einen halben Ton von einander abstehen. Um zu übersehen, welche Intervalle aus diesem Grunde consonant oder dissonant werden, bedienen wir uns wiederum der von E. Mach angewendeten Darstellungsmethode, welche wir in §. 222 kennen lernten. In Fig. 844* ist eine Claviatur abgebildet; darüber seien zwei Stäbe verschiebbar, auf denen die Lage der Partialtöne durch dunkle Felder dargestellt ist. Die eingeschriebenen Zahlen entsprechen den Ordnungszahlen der Partialtöne. Belässt man nun das untere Stäbchen immer an derselben Stelle, so dass sein erster Partialton (Grundton) mit *c* zusammenfällt, und schiebt hierauf nach und nach das obere Stäbchen immer weiter nach rechts, so dass sein erster Partialton (Grundton) nach und nach auf alle Töne der chromatischen Scala zu liegen kommt, so übersieht man sofort, welche relative Lage die übrigen Partialtöne zu einander einnehmen. Man kann demnach vorausbestimmen, ob das Anschlagen der Taste *c* mit irgend einer anderen Taste eine Consonanz oder Dissonanz hervorbringen wird.

So z. B. ersieht man, dass wenn das untere Stäbchen auf *c* und das obere auf dessen Octav gestellt wird (in der Fig. 844 ist dieser Fall an oberster Stelle gezeichnet), jeder der sieben ersten Partialtöne des höhe-

ren Tones mit einem solchen des tieferen zusammenfällt. (Man hat sich das untere Stäbchen bis zum 14. Partialton verlängert zu denken.) Die Octave ist deshalb ein absolut consonantes Intervall.

Ganz im Gegensatz dazu sehen wir, dass beim Intervall *c cis* (zu unterst gezeichnet) alle Partialtöne des einen Tones mit allen gleich-

Fig. 844.



bezifferten des anderen in den Abstand eines halben Tones zu stehen kommen, was eine besonders starke Dissonanz geben muss.

Betrachten wir die Stellung für das Intervall *c g* (Quinte), so sehen wir zunächst den ersten Partialton des höheren Tones so weit abstehend

vom zweiten des tieferen und diesen wiederum so weit abstehend vom zweiten des höheren, dass hieraus keine störenden Schwebungen entstehen können. Der zweite oben und der dritte unten fallen ganz zusammen, ebenso der vierte oben mit dem sechsten unten. Nur der dritte oben steht mit dem vierten und fünften unten im Ganztonintervall. Dasselbe giebt aber überhaupt weniger Dissonanz als das Halbtonintervall und ausserdem haben diese Partialtöne nur mehr geringe Intensität. Die Quinte muss daher ebenfalls eine ziemlich vollkommene Consonanz geben, wenn auch nicht eine so vollständige wie die Octave.

In dieser Weise fortschliessend führt uns das Schema der Fig. 844 zur Aufstellung nachfolgender Rangesordnung der Intervalle in Bezug auf den Grad ihrer Consonanz, wobei wir auch noch die Duodecime und Doppeloctave eingereiht haben:

1.	Octave	Absolute Consonanzen
2.	Duodecime	
3.	Doppeloctave	
4.	Quinte	Vollkommene Consonanzen
5.	Quarte	
6.	Grosse Sext	Mittlere Consonanzen
7.	Grosse Terz	
8.	Kleine Terz	Unvollkommene Consonanzen
9.	Kleine Sext	
10.	Kleine Septime	
11.	Grosse Secunde	Dissonanzen.
12.	Kleine Secunde	
13.	Grosse Septime	

Die kleine Septime würde zwar für sich allein eher eine bessere Consonanz geben als die kleine Sext, aber im Accord verursacht sie lauter Dissonanzen und wird deshalb in der heutigen Musik nicht zu den Consonanzen gerechnet.

Wie das Schema erkennen lässt, fallen gerade in die Nachbarschaft jener Töne, welche die beste Consonanz geben, solche, welche die stärkste Dissonanz geben.

Ausser den Obertönen haben aber auch die Combinationstöne Einfluss auf die Consonanz. Wir müssen es uns aber versagen, dies hier näher auszuführen und verweisen diesbezüglich auf Helmholtz' „Tonempfindungen", S. 325.

Ist diese Theorie der Consonanz richtig, so dürfen einfache Töne, welche nicht so nahe an einander stehen, dass sie Schwebungen geben, keine eigentlichen Dissonanzen hervorbringen. Dies ist nach Helmholtz auch der Fall; er fand, dass zwei gedeckte Orgelpfeifen, welche auf die grosse Terz gestimmt sind, allmälig bis zur kleinen Terz verstimmt werden können, ohne dass eine Störung des Wohlklanges eintritt.

Dass König bei seinen Stimmgabelversuchen zu anderen Resultaten gekommen ist, haben wir oben (§. 226) mitgetheilt.

Mehrere Physiker *) haben darauf hingewiesen, dass nach obiger Theorie die Consonanz nur auf negative Momente basirt sei und noch einer Vervollständigung bedürfe durch Aufsuchung des jedem Intervalle charakteristischen positiven Momentes **).

Schwingungsform und Klangfarbe. Im §. 181 haben wir 230
auseinandergesetzt, dass die Töne, richtiger Klänge, in dreierlei Weise von einander verschieden sein können. Erstens durch verschiedene Tonhöhe, welche durch die Schwingungszahl, beziehungsweise durch die Wellenlänge bestimmt ist; zweitens durch die Tonstärke, welche von der Amplitude der Schwingungen abhängt, drittens durch die Klangfarbe. Was unter der letzteren zu verstehen ist, können wir uns folgendermaassen klar legen. Wenn wir nach einander den Ton der Normalstimmgabel a^1 mit 435 einfachen Schwingungen, dann die Taste für a^1 auf dem Clavier anstimmen und dann etwa noch dieselbe Note singen oder auf einer Trompete erklingen lassen, wenn wir ferner diese sämmtlichen Tonquellen in ihrer Stärke so modificiren, dass keine die andere überwiegt, so sind wir dennoch sofort im Stande, diese Klänge von einander zu unterscheiden. Sie haben einen wesentlich verschiedenen Charakter oder, wie man zu sagen pflegt, eine verschiedene Klangfarbe. In der Optik werden wir zeigen, dass die Farben sich durch die Höhe der Schwingungszahlen des Lichtes unterscheiden. Demnächst entspricht die Verschiedenheit der Farben der Verschiedenheit der Tonhöhe und erscheint deshalb die Bezeichnung Klangfarbe zur Charakteristik gleich hoher Töne nicht glücklich gewählt.

Was ist nun der physikalische Grund für die Verschiedenheit der Klangfarbe? Wir haben die Antwort darauf an mehreren Orten angedeutet. Es ist das Mitvorhandensein von Obertönen neben dem Grundtone, wobei die Intensitäten dieser Obertöne in der mannigfaltigsten Weise auftreten können und demnach die Klangfarbe modificiren. Wenn nämlich ein geübtes Ohr genau und aufmerksam einen Klang untersucht, welcher von einem tönenden Körper herrührt, dessen Oscillationen nicht dem Gesetze der Pendelschwingungen folgen, so ergiebt sich die merkwürdige Thatsache, dass dasselbe ausser dem Grundton noch eine Reihe von Obertönen dieses Grundtons mithört; kurz, das Ohr zerlegt einen solchen Klang in eine Reihe von Partialtönen, deren tiefster, nach dessen Tonhöhe wir die Tonhöhe des ganzes Klanges beurtheilen, in der Regel auch der stärkste ist; oder mit anderen Worten: das menschliche Ohr empfindet nach einem zuerst von G. S. Ohm aufgestellten

*) E. Mach, Zur Theorie des Gehörorgans. Wien. Akad. Ber. 1863. — A. v. Oettingen, Harmoniesystem in dualer Entwickelung, S. 30, E. Mach.

**) Vergleiche auch: E. Mach: „Zur Analyse der Tonempfindungen". Wien. Akad. Ber., Bd. XCII. 2. Abth. (1885).

Satze nur eine pendelartige Schwingung der Luft als einfachen Ton, und es zerlegt jede andere periodische Luftbewegung in eine Reihe von pendelartigen Schwingungen, welche als eine Reihe einfacher Töne empfunden werden.

Da aber nun die Anwesenheit der Obertöne und ihre Intensität wesentlich von der Schwingungsform abhängt, so könnte man veranlasst sein, direct diese Schwingungsform als maassgebend für die Klangfarbe zu betrachten. Sicherlich wird dieselbe Schwingungsform immer dieselbe Klangfarbe zur Folge haben; ob aber auch umgekehrt dieselbe Klangfarbe immer durch dieselbe Schwingungsform entsteht, hängt davon ab, ob die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen der Obertöne einen Einfluss auf die Klangfarbe hat. Da das Ohr die zusammengesetzten Schwingungen in einzelne Schwingungen nach dem Pendelgesetze auflöst und gewissermaassen getrennt wahrnimmt, so ist es jedenfalls denkbar, dass die Phasendifferenz ohne Einfluss auf die wahrgenommene Klangfarbe ist.

Nach H. Helmholtz ist dies auch in Wirklichkeit so der Fall. Er schloss dies aus Versuchen mit seinem Vocalapparat, den wir weiter unten beschreiben werden.

Nach R. König*) dagegen wäre die Phasendifferenz ebenfalls von merklichem Einflusse. Um dies zu zeigen, construirte König eine Wellensirene mit mehreren den Obertönen entsprechenden Scheiben, welche so eingerichtet war, dass die relativen Intensitäten der Obertöne, sowie die Phasendifferenzen derselben um $^1/_4$, $^1/_2$ und $^3/_4$ geändert werden konnten. Eine andere Versuchsreihe wurde mit einer Wellensirene angestellt, deren Wellen selbst den zusammengesetzten Schwingungscurven glichen, wobei die den verschiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Curven neben einander in Bezug auf ihre Klangfarbe verglichen werden konnten. Indem wir in Bezug auf die Ausführung dieser interessanten Experimente und der dazu gebrauchten sinnreichen Apparate auf die citirte Originalabhandlung verweisen, führen wir hier das Resultat an, welches König aus seinen Versuchen gezogen hat. Er fand: dass die Composition einer Anzahl harmonischer Töne, welche sowohl der geradzahligen als der ungeradzahligen Reihe angehören, ganz unabhängig von der relativen Intensität dieser Töne immer den stärksten und schärfsten Klang bei der Phasencoincidenz von $^1/_4$ ihrer Wellenlänge nerzeuge, dagegen den schwächsten und sanftesten bei der Phasencoincidenz von $^3/_4$ ihrer Wellenlängen. Die Klänge bei den Phasendifferenzen 0 und $^1/_2$ stehen sowohl, was ihre Intensität als auch was ihre Schärfe anlangt, immer zwischen beiden.

Bei der Composition von nur ungeradzahligen Obertönen erhält man bei den Phasendifferenzen $^1/_4$ und $^3/_4$ (wobei die Schwingungscurve gleiche Form hat) einen gleichen Klang, ebenso bei den Phasendifferen-

*) Bemerkungen über die Klangfarbe. Wiedem. Ann. XIV, S. 374.

zen 0 und $^1/_2$, doch ist der Klang im letzteren Falle weniger stark und scharf als im ersten Falle.

Gross ist übrigens der Einfluss der Phasendifferenz auf keinen Fall. König vergleicht die dadurch hervorgerufenen Unterschiede mit dem Unterschiede im Klange verschiedener Instrumente gleicher Gattung oder gleicher Vocale, welche von verschiedenen Stimmen gesungen werden.

Sollten sich die König'schen Versuche bestätigen und vor dem Einwande sicher sein, dass die angewendeten Töne selbst nicht frei von Obertönen waren, so würde daraus folgen, dass die ursprüngliche Ansicht die richtige sei, welcher gemäss die Klangfarbe von der Schwingungsform und nicht bloss von der Ordnungszahl und relativen Intensität der vorhandenen Obertöne abhängt.

Klanganalyse, Resonatoren. In seinem mehrfach citirten Werke über die Lehre von den Tonempfindungen hat Helmholtz verschiedene Methoden beschrieben, mit Hülfe deren man die Klänge der meisten musikalischen Instrumente in ihre Partialtöne zerlegen oder, mit anderen Worten, mit Hülfe deren man die in einem musikalischen Klang enthaltenen Obertöne auch einem ungeübteren Ohre wahrnehmbar machen kann. 231

Zunächst ist zu bemerken, dass man in der Regel den 3ten, den 5ten, den 7ten etc., also die ungeradzahligen Partialtöne, leichter hört als die geradzahligen, also leichter als den 2ten, den 4ten etc. So hört man die den Grundton c^0 begleitenden Partialtöne g^1 und e^2 leichter als c^1 und c^2.

Will man anfangen, Obertöne zu beobachten, so lasse man unmittelbar vor dem Klange, welcher analysirt werden soll, ganz schwach diejenige Note erklingen, welche man aufsuchen will. Sehr geeignet sind zu diesen Versuchen das Clavier und die Physharmonika, welche beide ziemlich starke Obertöne geben.

Man schlage z. B. auf einem Clavier zuerst g^1 an und indem man die Taste verlässt, so dass deren Saiten nicht mehr fortklingen können, gleich darauf kräftig die Note c^0, so wird man den Ton g^1 noch aus dem Klange c^0 heraushören. Ebenso, wenn man zuerst den fünften Partialton e^2 und dann c^0 anschlägt. Der 7te und 9te Partialton sind auf den Clavieren neuerer Construction meist schwach oder gar nicht vorhanden.

Noch geeigneter als das eben beschriebene Verfahren am Clavier ist es, an irgend einem Saiteninstrumente, Clavier, Monochord oder Violine den Ton, welchen man zu hören wünscht, erst als Flageoletton der Saite hervorzubringen, indem man sie anschlägt oder streicht, während man einen Knotenpunkt des entsprechenden Tons auf der Saite mit einem Finger oder mit den Haaren eines Malerpinsels berührt. Will man also den 3ten, den 5ten Partialton hören, so hat man einen Punkt zu berühren, welcher um $^1/_3$, um $^1/_5$ der Saitenlänge vom einen Ende der Saite entfernt ist. Indem man nun die Saite zum Tönen bringt, bald mit Be-

rührung des Knotenpunktes, bald ohne solche Berührung, bekommt man bald den gesuchten Oberton allein als Flageoletton, bald die ganze Klangmasse der Saite zu hören, und erkennt daran verhältnissmässig leicht, dass der betreffende Oberton darin enthalten ist.

Schwerer als an Saiteninstrumenten und an der Physharmonika sind die Obertöne der meisten Blasinstrumente und der menschlichen Stimme wahrzunehmen.

Das sicherste und bequemste Mittel, um die Wahrnehmung von Obertönen zu vermitteln, sind die von Helmholtz angegebenen Resonatoren (Mitklinger). Es sind dies gläserne oder messingene Hohlkugeln von der in Fig. 845 dargestellten Form. Die eine Oeffnung *a* hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere ist trichterartig und so geformt, dass man sie in das Ohr einsetzen kann.

Die in einem solchen Resonator eingeschlossene Luftmasse wird wie die Luftsäule in einer einerseits offenen, andererseits geschlossenen Röhre (s. §. 192), nur dann in den Zustand kräftiger stehender Schwingungen versetzt, wenn durch die Oeffnung *a* die Schallwellen eines bestimmten, den Dimensionen der Kugel entsprechenden Tones einfallen, den wir den Eigenton der Kugel nennen wollen. In der folgenden Tabelle sind die Dimensionen solcher Kugeln angegeben, welche den in der ersten Verticalreihe angegebenen Eigentönen entsprechen.

Tonhöhe	Durchmesser der Kugel	Durchmesser der Oeffnung	Volumen des Hohlraums
g^0	154 mm	35,5 mm	1773 ccm
c^1	130	30,2	1053
e^1	115	30	546
g^1	79	18,5	235
c^2	70	20,5	162

Eine Verengung der Oeffnung *a* hat eine Vertiefung des Eigentons des Resonators zur Folge.

Nach H. Helmholtz ergiebt sich für die Tonhöhe eines Resonators, wenn dessen Oeffnung verhältnissmässig eng ist, die theoretische Formel:

$$n = \frac{C\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt[4]{\pi^5}\,\sqrt{2\,V}},$$

worin C die Schallgeschwindigkeit, σ die Fläche der kreisförmigen Oeffnung und V das Volum des Hohlraums beträgt.

Setzt man C für mittlere Temperatur $= 340$ m, so erhält man:

$$n = 57484 \sqrt[4]{\frac{\sigma}{V^2}}\ \frac{\text{millim.}}{\text{sec.}}$$

Nach Versuchen von Sondhauss passt für Kugeln mit nicht ganz kleinen Oeffnungen besser dieselbe Formel mit dem Coefficienten 52 400.

Beträgt der Durchmesser der Oeffnung zwischen $^1/_4$ und $^1/_5$ vom Durchmesser der Kugel, so ist nach Helmholtz' Versuchen jener Coefficient = 47 000 zu setzen.

Die Resonatoren mit enger Oeffnung geben eine bedeutendere Verstärkung des Tones, erfordern aber auch eine genauere Uebereinstimmung mit der Tonhöhe des zu hörenden Tones.

Weil die aus Glas oder Messingblech verfertigten kugelförmigen Resonatoren, Fig. 845, ziemlich kostspielig sind, hat Schubring mit Erfolg versucht, solche aus cylindrischen Pappröhren ungefähr von der Form Fig. 846 herzustellen, welche noch den Vortheil bieten, dass sich nach §. 192 ihr Eigenton sehr einfach berechnen lässt, da die Länge der gedeckten Röhre nahezu $^1/_4$ von der Wellenlänge ihres Eigentones ist. In den Boden, welcher die untere Oeffnung der Röhre verschliesst, ist ein Glas-

Fig. 845.

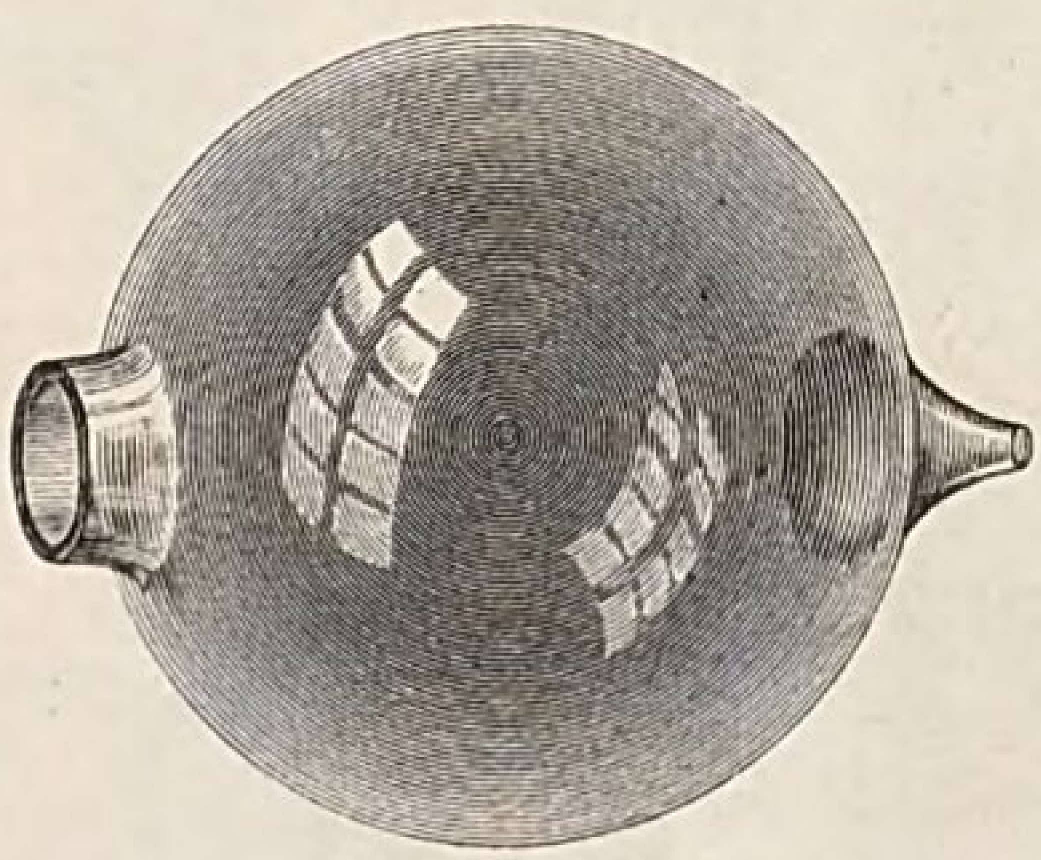
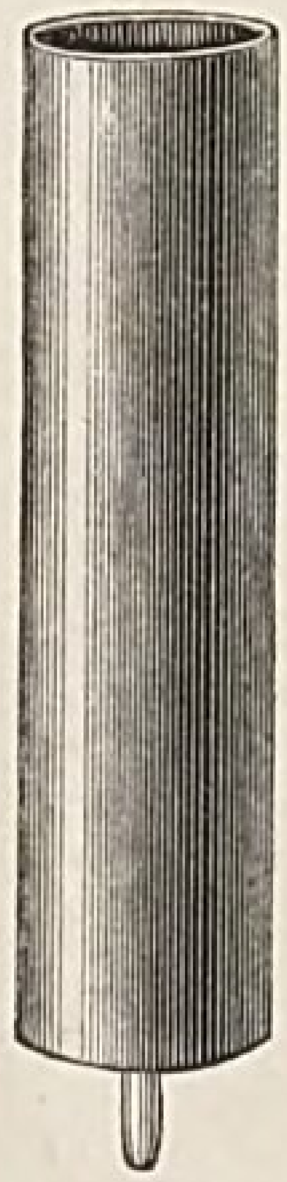


Fig. 846.



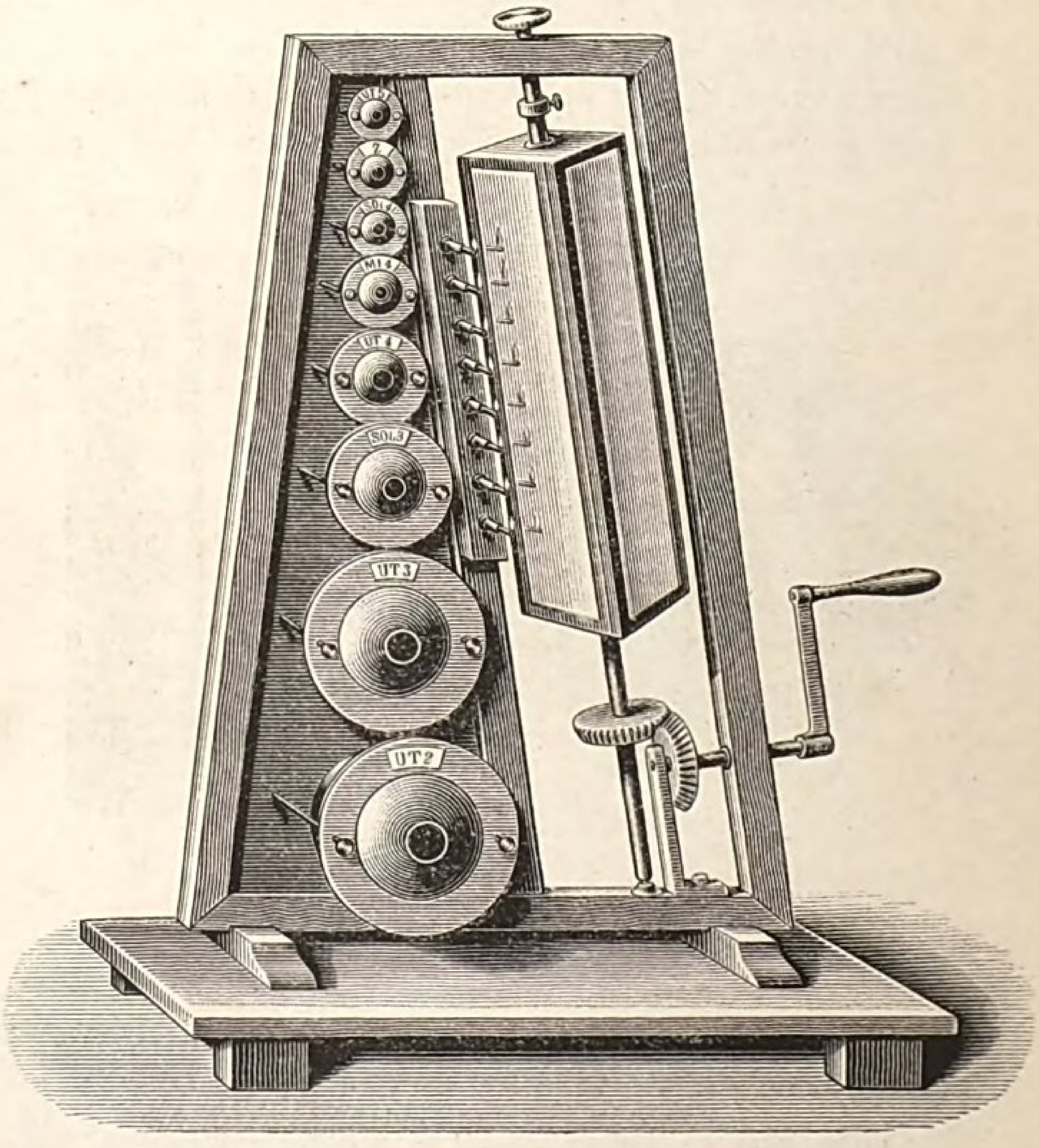
röhrchen eingesetzt, welches in den Gehörgang des einen Ohres gesteckt wird, während man das andere zuhält. Das Röhrchen kann aber auch ganz wegbleiben, so dass man nur den Boden des Rohres mit seiner centralen Oeffnung auf die Ohrmuschel aufdrückt.

Für alle Töne von c^1 aufwärts sind die Röhren oben offen. Der Resonator für c^1 (256 Schwingungen in 1 Secunde) ist 33 cm lang und 6 cm weit, der für g^1 ist 22 cm lang und 4,6 cm weit etc. Für tiefere Töne würden die cylindrischen Resonatoren unbequemere Dimensionen annehmen, wenn sie oben offen blieben; sie werden kürzer, wenn man sie durch einen Deckel mit centraler Oeffnung schliesst. Der Resonator für c^0 (128 Schwingungen) ist 38,5 cm lang und 14 cm weit, während im Deckel, der ihn oben schliesst, eine centrale Oeffnung von 4,5 cm Durchmesser angebracht ist.

Appun in Hanau verfertigt kegelförmige Resonatoren von Zinkblech, dieselben sind für die meisten Verwendungen brauchbar. Sie verstärken aber auch alle harmonischen Obertöne ihres Grundtons.

Hat man sich das eine Ohr verstopft und setzt man dann an das andere einen solchen Resonator, so hört man die meisten Töne, welche in der Umgebung hervorgebracht werden, viel gedämpfter als sonst; wird dagegen der Eigenton des Resonators angegeben, so schmettert er mit gewaltiger Stärke ins Ohr hinein. Hält man z. B. einen Resonator vor das Ohr, dessen Eigenton g^1 ist, so hört man denselben sehr deutlich, wenn c^0 auf dem Clavier angeschlagen oder auf der Violine gespielt wird,

Fig. 847.



während man diesen Ton gar nicht oder doch nur sehr schwach hört, wenn das c^0 von einer weiten gedeckten Orgelpfeife herrührt. Ebenso wenig hört man, den entsprechenden Resonator ans Ohr haltend, den Ton g^1, wenn auf dem Clavier der Ton d^0 angeschlagen wird, weil g^1 kein Oberton von d^0 ist.

Zum Nachweis der Obertöne ist kein musikalisches Instrument geeigneter als eine Zungenpfeife. Eine solche vom Grundton c^0, welche in einem Kästchen eingeschlossen mit einem Schallbecher ver-

sehen, auf eine Windlade aufgesetzt ist, giebt einen ungemein kräftigen, an Obertönen reichen Klang, welcher sich mit den entsprechenden Resonatoren leicht bis zum 16ten und 20sten wahrnehmen lässt.

Ein Apparat, bei welchem die Obertöne nicht mittelst des Gehörs, sondern durch das Gesicht wahrgenommen werden können, ist von R. König mit Hülfe der manometrischen Flammen construirt worden*). Derselbe besteht, wie Fig. 847 zeigt, aus einer Reihe von Resonatoren, deren jeder mit einer manometrischen Kapsel (§. 194) in Verbindung steht.

Sämmtliche manometrische Flammen werden durch ein und denselben rotirenden Spiegel beobachtet. Trifft ein Klang z. B. eines Vocals

Fig. 848.

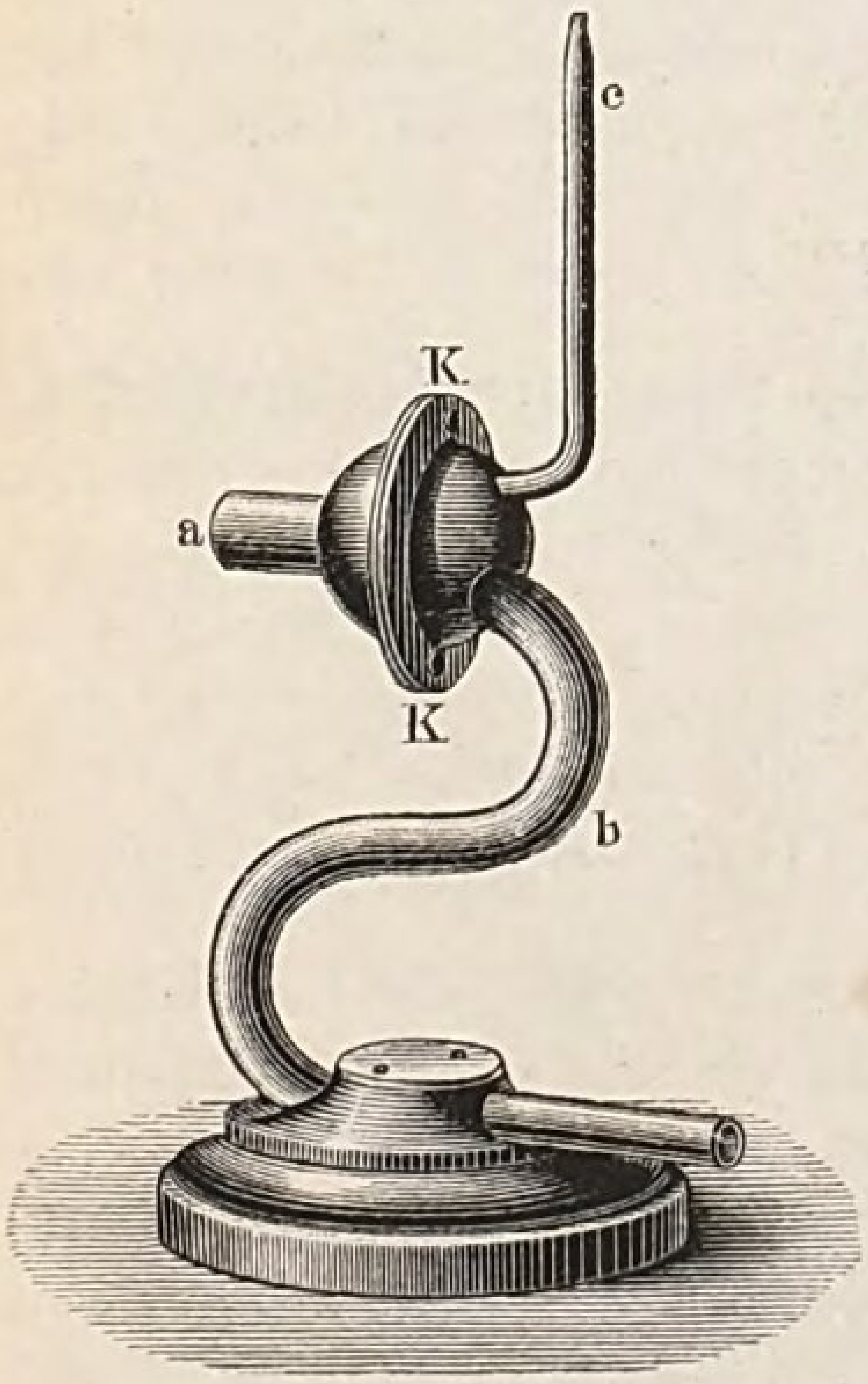
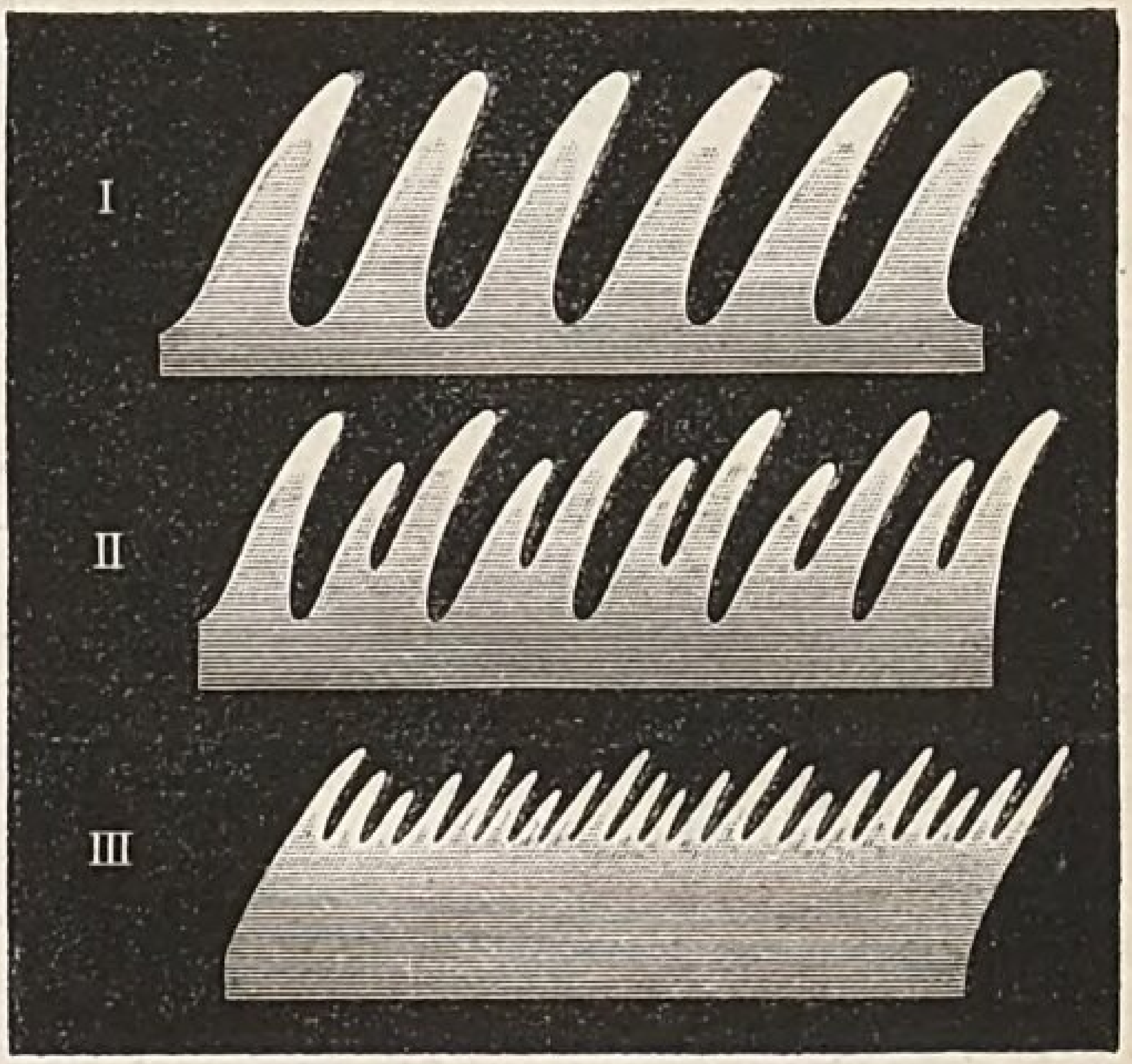


Fig. 849.



die Resonatoren, so wird der Lichtstreif derjenigen Flammen, deren Resonatoren ihren Eigenton in dem Tongemische finden, vom rotirenden Spiegel in einzelne Flammenbilder aufgelöst. Man hat mehrfach versucht, dieses Experiment dahin zu vereinfachen, dass man nur eine einzige manometrische Kapsel mit einer Flamme der Wirkung des Klanges aussetzte. Wirklich zeigen die erhaltenen Flammenbilder die Zusammensetzung aus den Flammenbildern der Partialtöne, doch ist es noch nicht gelungen, dem Experimente die wünschenswerthe Präcision zu geben. Fig. 848 zeigt einen hiezu geeigneten Apparat.

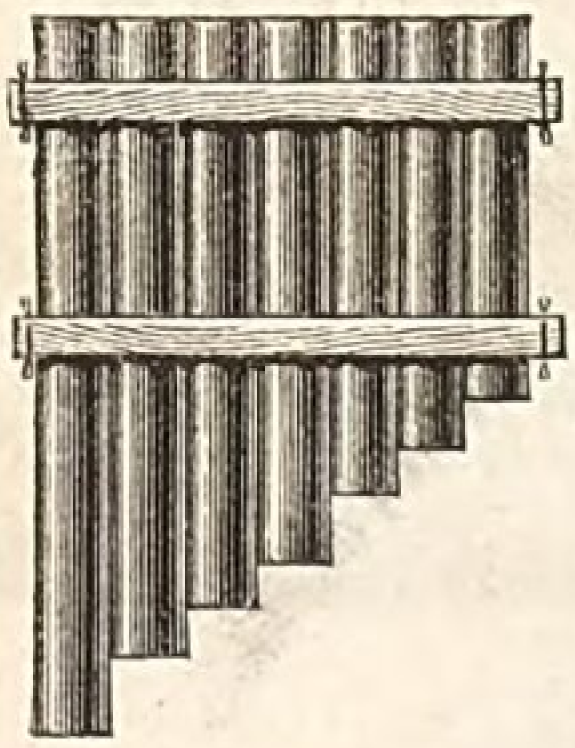
Die Kapsel *k* ist durch ein dünnes Glimmerblatt (welches einer thierischen Membran wegen der Unveränderlichkeit vorzuziehen ist) in zwei

*) Die manometrische Kapsel wurde von König 1864 erfunden. Ann. der Physik, Bd. 146, S. 161.

Kammern getheilt, deren eine mit der Gasleitung *b* und der Ausströmungsspitze *c*, die andere mit dem Schallzuleitungsrohr *a* communicirt. Letzteres wird mit einem Trichter (Schallbecher) versehen. Die Einschaltung eines Kautschukrohrs zwischen *a* und dem Trichter empfiehlt sich nicht wegen der zu starken Dämpfung des Schalles. Zündet man das bei *c* ausströmende Gas an und beobachtet die Flamme in einem rotirenden Spiegel, während die Schallwellen eines einfachen Tones durch *a* eintreten, so erhält man Flammenbilder von der in Fig. 849 I (a. v. S.) abgebildeten Form; ist der Grundton von seiner Octave begleitet, so erhält man die Form Fig. 849 II, sind mehrere Obertöne vorhanden, Fig. 849 III. Störend ist bei dieser Methode, dass die Membran sowohl als der Hohlraum vor derselben, ja auch der Schallbecher ihre besonderen Eigentöne haben, welche sie verstärken. Es muss daher jeder solcher Apparat einen speciellen Einfluss auf die erhaltenen Flammenbilder ausüben. Wir kommen auf diese Bilder bei der Vocalanalyse zurück.

232 **Die musikalischen Instrumente und ihre Klangfarbe.** Die Methoden der Klanganalyse können nun auf die verschiedenen musikalischen Instrumente angewendet werden, welche in zwei Hauptabtheilungen zerfallen, 1) solche, bei welchen der Ton durch einen Luftstrom erzeugt wird, die Blasinstrumente, und 2) solche, bei welchen der Ton von den Vibrationen eines festen Körpers herrührt.

Fig. 850.



Die Blasinstrumente selbst zerfallen wieder in zwei Classen. In die erste Classe der Blasinstrumente gehören solche röhrenförmige Vorrichtungen, in welchen die eingeschlossene Luftsäule ganz nach den Gesetzen vibrirt, welche wir in §. 192 und 194 kennen lernten, also die offenen und gedeckten Orgelpfeifen, das Flageolet und die Flöte. Auch die Rohrpfeife, die Syrinx oder Pansflöte der Alten, Fig. 850, gehört in diese Classe.

Während bei der Orgel jeder Pfeife nur ein Grundton entspricht, wird bei der Flöte mit demselben Rohr die ganze Tonreihe der chromatischen Tonleiter dadurch erzeugt, dass man durch Oeffnen der entsprechenden Seitenlöcher die Länge der tönenden Luftsäule und die Lage der Schwingungsknoten verändert.

Von den Blasinstrumenten, welche mit Zungenwerken versehen sind, haben wir bereits einige in §. 216 kennen gelernt, nämlich die Mundharmonika, die Blasbalgharmonika (Physharmonika) und die Zungenwerke der Orgeln.

Die beiden erstgenannten Instrumente haben gar kein Ansatzrohr, während der Schallbecher oder das Ansatzrohr der Orgelzungenwerke

nur den Zweck hat, den Ton zu verstärken, ohne dass dadurch die Vibrationsgeschwindigkeit der Zunge wesentlich alterirt wird.

Ganz anders verhält es sich mit solchen Instrumenten, deren Zunge aus sehr leicht beweglichem Material (meist aus dünnen Blättchen von italienischem Rohr) gebildet, sich den Schwingungen der Luftsäule accommodirt, welche in dem Ansatzrohr zum Tönen gebracht wird. Hierher gehört die Oboe, das Fagot, die Clarinette u. s. w. Das Mundstück der Clarinette wird durch ein vorn schneidenförmig verdünntes, aufschlagendes Rohrblatt gebildet, während das Mundstück des Fagots und der Oboe aus zwei Rohrblättchen besteht, deren obere schwach gewölbte Enden eine feine Spalte bilden.

Bei der Posaune, dem Horn und der Trompete treten die Lippen des Musikers an die Stelle der beiden Rohrblätter des Oboemundstücks. Das kessel- oder trichterförmige Mundstück des Instrumentes wird so gegen den Mund gepresst, dass die vorderen häutigen Theile der Lippen nur noch einen engen Spalt für den Durchgang der Luft lassen. Die Ränder der Lippen gerathen beim Anblasen selbst in Oscillationen, durch welche ein stossweises Hervorquellen der Anblaseluft bewirkt wird.

Das mehr oder weniger gebogene oder gewundene Rohr dieser Instrumente ist, den Schallbecher abgerechnet, sehr eng im Verhältniss zu seiner Länge, so dass es nie seinen Grundton, sondern nur eine Reihe von Obertönen desselben geben kann.

Bezeichnen wir die Schwingungszahl des Grundtones mit 1, so sind die Schwingungszahlen für seine Obertöne

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \text{ u. s. w.}$$

Für ein dreifüssiges offenes Rohr ist der Grundton b^{-1}, seine Obertöne sind also

$$b^0, f^1, b^1, d^2, f^2, gis^2, b^2, c^3, d^3.$$

Eine dreifüssige Trompete giebt aber als ihren tiefsten Ton f^1, also den zweiten Oberton, die Duodecime des ihrer Länge entsprechenden Grundtones. Auf diesen Ton folgen dann bei unveränderter Länge des Rohres, bei entsprechend verstärktem Anblasen, die weiteren Töne b^1, d^2, f^2, u. s. w., welche den Namen der Naturtöne führen. Erst vom achten Oberton an befolgen dieselben die Tonreihe der diatonischen Tonleiter. Um die grösseren Intervalle der tieferen Naturtöne auszufüllen und auch für diese tieferen Tonlagen die nöthigen Zwischentöne zu erhalten, hat man an diesen Instrumenten verschiedene Vorrichtungen (Züge, Klappen u. s. w.) angebracht, durch welche man die Länge des Rohres entsprechend abändern kann. Auch durch theilweises Verschliessen der erweiterten Mündung durch Einführen der Faust sucht man die gewünschte Erniedrigung der Tonhöhe zu erreichen.

Die Töne gespannter Saiten finden in der Musik eine ebenso vielfache als mannigfache Anwendung. Die Oberfläche der Saiten ist aber viel zu gering, als dass sie selbst bei den lebhaftesten Vibrationen kräf-

tige Schallwellen in der Luft erzeugen könnten, es ist deshalb nöthig, die Vibrationen der Saite auf einen leicht beweglichen festen Körper von grösserer Oberfläche zu übertragen, weshalb denn auch der Resonanzboden, wenn auch in sehr verschiedener Gestalt, bei allen Saiteninstrumenten in Anwendung gebracht wird.

Die wesentlichsten Unterschiede unter den Saiteninstrumenten sind durch die Art und Weise bedingt, wie die Saiten in Oscillationen versetzt werden; bei dem Clavier geschieht dies durch Anschlag, bei der Guitarre und der Harfe durch Zupfen, bei der Violine, dem Violoncello und der Bassgeige geschieht es durch Streichen mit dem Fiedelboden, weshalb diese letzteren Instrumente auch Streichinstrumente genannt werden.

Metallene Platten und Glocken haben für sich selbst schon eine hinlängliche Oberfläche, um kräftige Schallwellen in der Luft zu erzeugen. Als selbstständige musikalische Intrumente werden sie aber kaum gebraucht, während sie im Orchester verbunden mit anderen Instrumenten von trefflicher Wirkung sind.

Ueber die Zusammensetzung der Klänge der verschiedenen Instrumente ist das Wissenswertheste Folgendes:

Einfache Töne, also Klänge ohne Obertöne, werden am einfachsten hervorgebracht, wenn man eine angeschlagene Stimmgabel vor die Mündung einer Resonanzröhre von entsprechender Länge hält. Diese Töne sind ungemein weich und frei von allem Scharfen und Rauhen.

Die Klänge der Flöte stehen den einfachen Tönen ziemlich nahe, indem sie nur wenige und schwache Obertöne haben.

Weite gedeckte Pfeifen geben, namentlich wenn sie schwach angeblasen werden, den Grundton fast ganz rein; engere lassen neben dem Grundton auch noch die Duodecime (Quint der Octav) hören, weshalb sie auch Quintaten genannt werden.

Bei weiten, offenen Orgelpfeifen ist die Octav des Grundtones noch ziemlich deutlich, die Duodecime schon sehr schwach. Engere offene Pfeifen der Orgel lassen dagegen, namentlich wenn sie stark angeblasen werden, eine Reihe von Obertönen hören, welche den Grundton kräftig begleiten, was dem Klange den schärferen geigenähnlichen Charakter giebt (Geigenprincipal).

Die weiteren Orgelpfeifen, welche auch bei stärkerem Anblasen nicht in einen Oberton überspringen, und welche den Grundton voll und rein geben, werden Principalstimmen genannt.

Wo es darauf ankommt, ein Register von scharf durchdringender Klangfarbe anzuwenden, wie es z. B. nöthig ist, um den Gesang der Gemeinde zu begleiten, genügen die Principalregister nicht, weil ihr Ton zu mild, zu arm an Obertönen ist. Geigenregister und Quintaten genügen nicht, weil ihr Ton zwar schärfer, aber auch schwächer ist. Bei solchen Gelegenheiten wird das Mixturregister angewandt, in welchem jede Taste mit mehreren Pfeifen verbunden ist, die sie gleichzeitig öffnet,

von denen die eine den Grundton, die anderen aber die ersten Obertöne desselben (meist Octav und Duodecime) geben. — Die Klänge der meisten musikalischen Instrumente hat man sich nun in ähnlicher Weise zusammengesetzt zu denken.

Ueber die Klänge der Saiten wurde bereits im §. 211 u. 225 Näheres mitgetheilt. Bei gut construirten Clavieren sind die Partialtöne bis zum 6 ten sehr kräftig, während der 7 te und 9 te, deren Mitklingen die Harmonie der übrigen beeinträchtigen würde, ganz fehlen oder doch sehr schwach sind.

Solche Saiten, welche im Verhältniss zu ihrer Länge sehr dünn sind, geben, in entsprechender Weise angeschlagen, leicht viele hohe Obertöne. Diese vielen hohen Obertöne aber, welche einander in der Scale sehr nahe liegen, veranlassen ein eigenthümlich unharmonisches Geräusch, welches wir mit dem Worte Klimpern zu bezeichnen pflegen.

Im Klange der Streichinstrumente ist der Grundton verhältnissmässig kräftiger als beim Clavier; die ersten Obertöne sind schwächer, die höheren aber vom 6 ten bis zum 10 ten dagegen viel deutlicher, und verursachen die Schärfe des Klanges der Streichinstrumente.

Geschlagene Metallstäbe und Metallplatten der Art, wie wir sie im §. 212 betrachtet haben, lassen neben dem Grundton eine Reihe sehr hoher unharmonischer Obertöne anhaltend und im gleichmässigen Flusse mitklingen, und davon scheint die Eigenthümlichkeit herzurühren, welche man als metallische Klangfarbe, als Metallklang bezeichnet.

Der Klang der Glocken ist ebenfalls von unharmonischen Obertönen begleitet, welche aber nicht so nahe beisammen liegen wie bei den ebenen Platten.

Wenn eine Glocke nicht ganz symmetrisch in Beziehung auf ihre Achse ist, wenn z. B. die Wand an einer Stelle des Umfanges etwas dicker ist als an anderen, so giebt die Glocke beim Anschlag im Allgemeinen zwei wenig von einander verschiedene Töne, welche mit einander Schwebungen geben.

Ausser den Unterschieden der Klangfarbe bieten aber die Klänge verschiedener Instrumente auch noch andere Eigenthümlichkeiten, welche einerseits davon abhängen, wie die Töne ansetzen, verlaufen und aufhören, andererseits aber auch durch Geräusche bedingt sind, welche mit der Erzeugungsweise der Töne zusammenhängen. So hört man bei den durch einen Luftstrom unterhaltenen Klängen der Blasinstrumente meistentheils noch ein Sausen und Zischen der Luft, die sich an den scharfen Rändern der Anblaseöffnung bricht. Bei den mit dem Violinbogen gestrichenen Saiten hört man ziemlich viel Reibegeräusch u. s. w.

Was die Klangfarbe der Zungenpfeifen anlangt, so ist das Ansatzrohr von wesentlichem Einfluss auf dieselbe. Freie Zungen, d. h. solche, welche ohne Ansatzrohr angeblasen werden, haben, da sie die Luftstösse sehr abgerissen, discontinuirlich hervortreten lassen, einen

scharfen, schneidenden, knarrenden Klang, und man hört in der That mit bewaffnetem oder unbewaffnetem Ohre eine lange Reihe von Obertönen, bis zum 16ten, ja selbst bis zum 20sten. Die Stärke der Obertöne, welche eine Zunge ohne Ansatzrohr giebt, hängt aber ab von ihrer Beschaffenheit, ihrer Stellung zum Rahmen u. s. w.

Durch Ansatzröhren wird der Klang der Zungen wesentlich verändert, indem diejenigen Obertöne ausserordentlich verstärkt werden und aus der Klangmasse vortreten, welche den Eigentönen des Ansatzrohres entsprechen.

Als z. B. Helmholtz über eine Messingzunge, wie sie in Orgeln gebraucht werden, und welche b^0 gab, eine seiner grösseren Resonanzkugeln als Ansatzrohr aufsetzte, welche gleichfalls auf b^0 abgestimmt war, erhielt er bei starkem Druck im Blasebalg einen vollen, starken und weichen Klang, dem fast alle Obertöne fehlten.

Als wesentlichste Resultate der Untersuchungen über Klangfarbe stellt Helmholtz Folgendes zusammen:

1. Einfache Töne, wie Stimmgabeln mit Resonanzröhren und weite gedeckte Pfeifen klingen weich und angenehm ohne alle Rauhigkeit, aber unkräftig und in der Tiefe dumpf.

2. Klänge, welche von einer Reihe niederer Partialtöne, etwa bis zum 6ten hinauf, in mässiger Stärke begleitet sind, sind klangvoller, musikalischer. Sie haben, mit den einfachen Tönen verglichen, etwas Reicheres und Prächtigeres. Hierher gehören die Klänge des Claviers, der offenen Orgelpfeifen u. s. w.

3. Wenn nur ungeradzahlige Partialtöne da sind, wie bei engen gedeckten Pfeifen, den in der Mitte geschlagenen Claviersaiten, den Clarinetten u. s. w., so bekommt der Klang einen hohlen, und bei grösserer Zahl von Obertönen einen näselnden Charakter.

4. Wenn die höheren Obertöne jenseits des 6ten und 7ten sehr deutlich sind, so wird der Klang scharf und rauh. Bei geringerer Stärke beeinträchtigen die hohen Obertöne die musikalische Brauchbarkeit nicht, sie sind im Gegentheil günstig für den Charakter und die Ausdrucksfähigkeit der Musik. Von der Art sind die Klänge der Streichinstrumente, die meisten Zungenpfeifen, die Physharmonika u. s. w. Solche Klänge, bei welchen die hohen Obertöne ganz besonders stark sind, wie bei den Blechinstrumenten, erhalten dadurch etwas ungemein Durchdringendes.

233 **Das menschliche Stimmorgan.** Das Stimmorgan ist aus mehreren Theilen zusammengesetzt, welche ohne anatomische Betrachtung nicht vollständig studirt werden können, wir müssen uns daher hier darauf beschränken, im Allgemeinen die Anordnung der Theile kennen zu lernen, welche am directesten zur Hervorbringung der Stimme mitwirken.

Es ist bekannt, dass die Luftröhre eine Röhre ist, welche auf der einen Seite mit dem Schlunde, auf der anderen in den Lungen endigt.

Ihre wesentlichste Function ist, die Luft durchzulassen, sei es nun beim Ein- oder beim Ausathmen; sie ist fast cylindrisch und aus knorpeligen Ringen zusammengesetzt, welche durch biegsame häutige Ringe verbunden sind. Am unteren Ende theilt sie sich in zwei Röhren, die Bronchien, von denen die eine rechts, die andere links geht. Jeder dieser Aeste verzweigt sich weiter nach allen Seiten hin in das Gewebe der Lunge. Das obere Ende der Luftröhre wird durch den Kehlkopf gebildet, welcher vorzugsweise das Stimmorgan ist.

Der Kehlkopf besteht aus vier Knorpeln, welche häufig in späterem Alter verknöchern, nämlich dem Ringknorpel (Cartilago cricoidea), dem Schildknorpel (Cartilago thyreoidea) und den beiden Giesskannenknorpeln (Cartilagines arytaenoideae). Diese Knorpel sind unter sich und mit dem obersten Ringe der Luftröhre verbunden und können durch verschiedene Muskeln auf das Mannigfaltigste bewegt werden. Die innere Wand des Kehlkopfes bildet eine Verlängerung der Luftröhre, die immer enger wird, bis zuletzt nur eine von vorn nach hinten gerichtete Spalte, die Stimmritze (Glottis), übrig bleibt. Die Ränder dieser Stimmritze sind durch die Stimmbänder gebildet. Nach vorn hin sind diese Stimmbänder an dem Schildknorpel, am entgegengesetzten Ende aber ist das eine Stimmband an dem einen, das andere Stimmband an dem anderen Giesskannenknorpel angewachsen, so dass, je nachdem die Knorpel durch die entsprechenden Muskeln mehr genähert oder entfernt werden, die Stimmbänder mehr oder weniger gespannt sind und die Stimmritze weiter oder enger wird. Die Stimmbänder selbst bestehen aus einem sehr elastischen Gewebe.

Ueber den Lippen der Stimmritze befinden sich zwei sackartige Höhlungen, die eine auf der rechten, die andere auf der linken Seite, welche sich 17 bis 20 mm weit seitwärts erstrecken; es sind dies die Ventriculi Morgagni. Die oberen Ränder dieser Ventrikeln bilden gleichsam eine zweite Stimmritze, welche 11 bis 13 mm über der anderen liegt. Die obere Stimmritze kann durch den Kehldeckel (Epiglottis), welcher eine fast dreieckige Platte mit knorpeliger Grundlage ist, verdeckt werden; dieser Kehldeckel ist mit der einen Seite nach vornhin angewachsen, und verhindert, wenn er beim Schlucken sich über den Kehlkopfeingang legt, dass Speisen und Getränke in die Luftröhre gerathen können, indem diese über den Kehldeckel hinweg in den Schlund gelangen.

Der Bau des Kehlkopfes wird durch die Figuren 851 und 852 (a. f. S.) deutlicher werden.

Fig. 851 stellt die vordere Hälfte des durch einen senkrechten Schnitt getheilten Kehlkopfes, und zwar von rückwärts gesehen, dar.

Es ist:

a der Durchschnitt durch den Ringknorpel,
b der Durchschnitt durch den Schildknorpel,
c der Durchschnitt durch die unteren Stimmbänder,
d der Durchschnitt durch die oberen Stimmbänder.

Zwischen den unteren und oberen Stimmbändern sieht man in Fig. 851 deutlich die Ventriculi Morgagni. Ferner ersieht man aus dieser Figur, wie sich die Luftröhre gegen die unteren Stimmbänder hin verengt. Fig. 852 zeigt die Stimmritze von oben gesehen.

Schon Ferrein*) hat durch treffliche Versuche, die auch von Anderen bestätigt wurden, gezeigt, dass die Stimmbänder in gewisser Beziehung mit gespannten Saiten zu vergleichen seien; Biot und Cagniard de la Tour ersetzten die Stimmbänder durch elastische

Fig. 851.

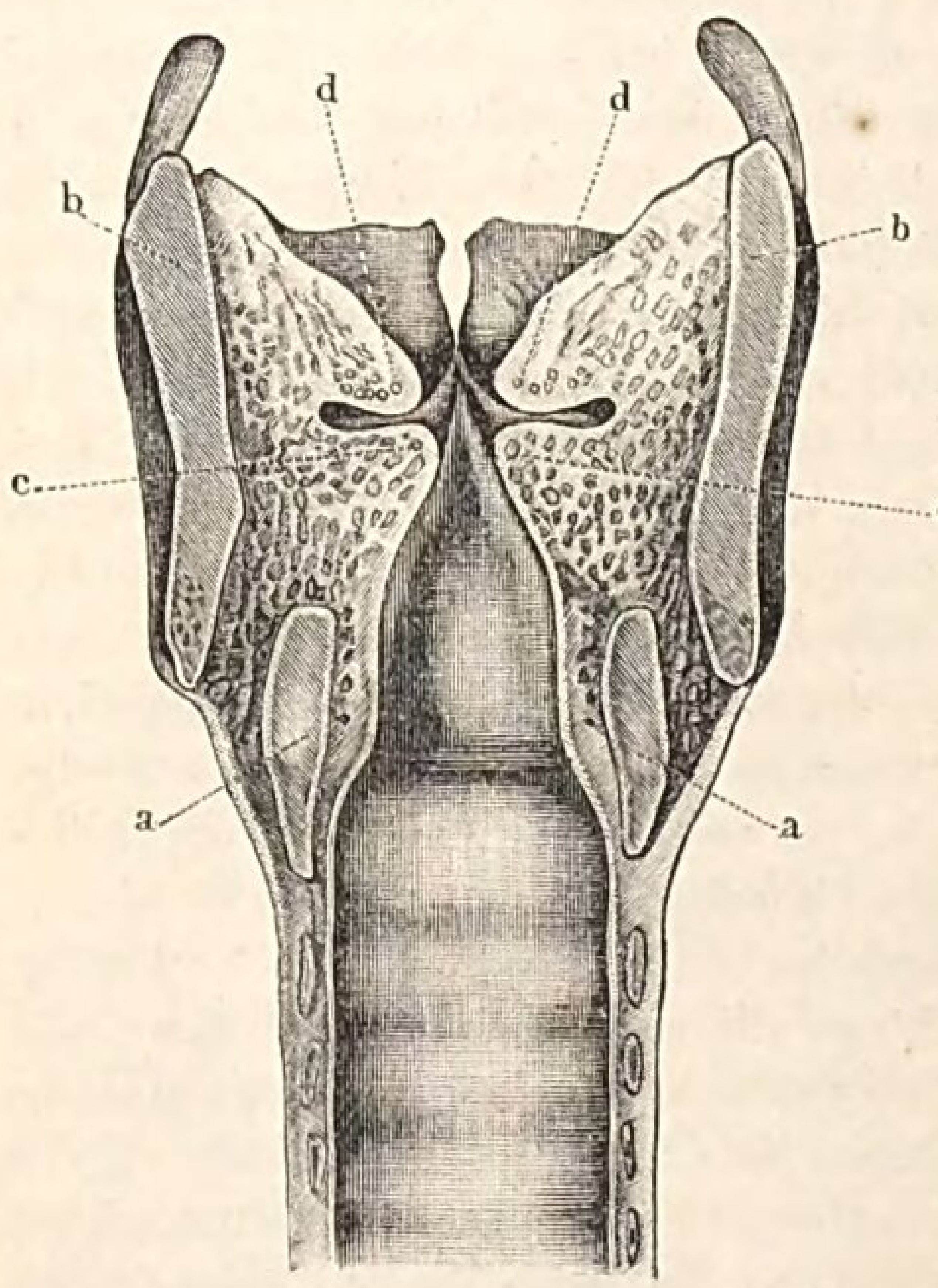


Fig. 852.

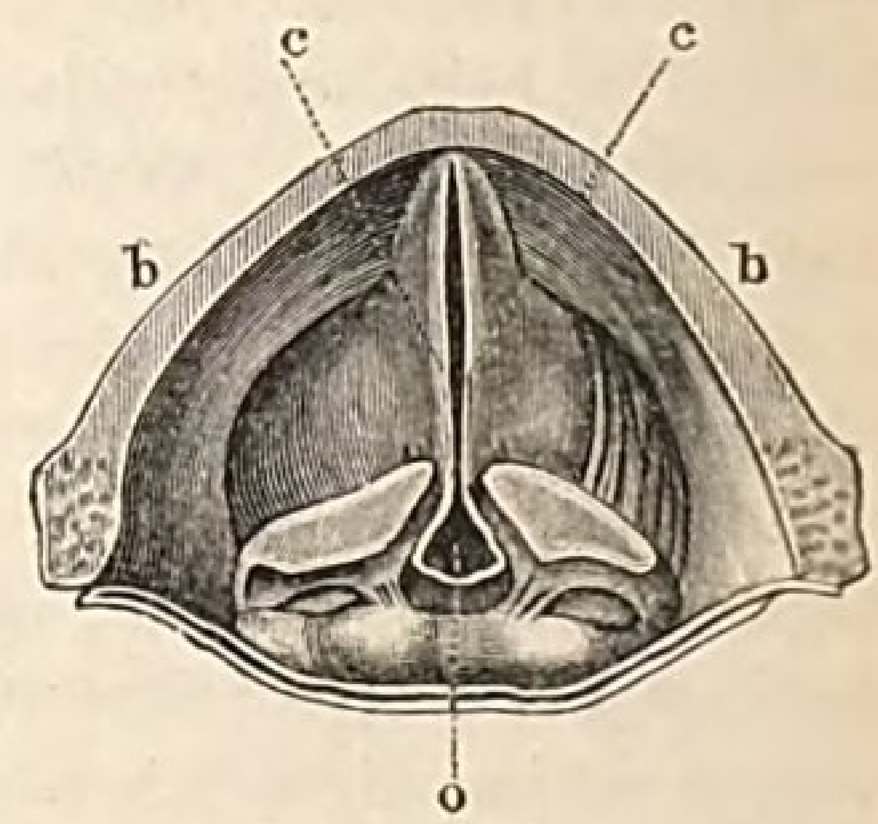
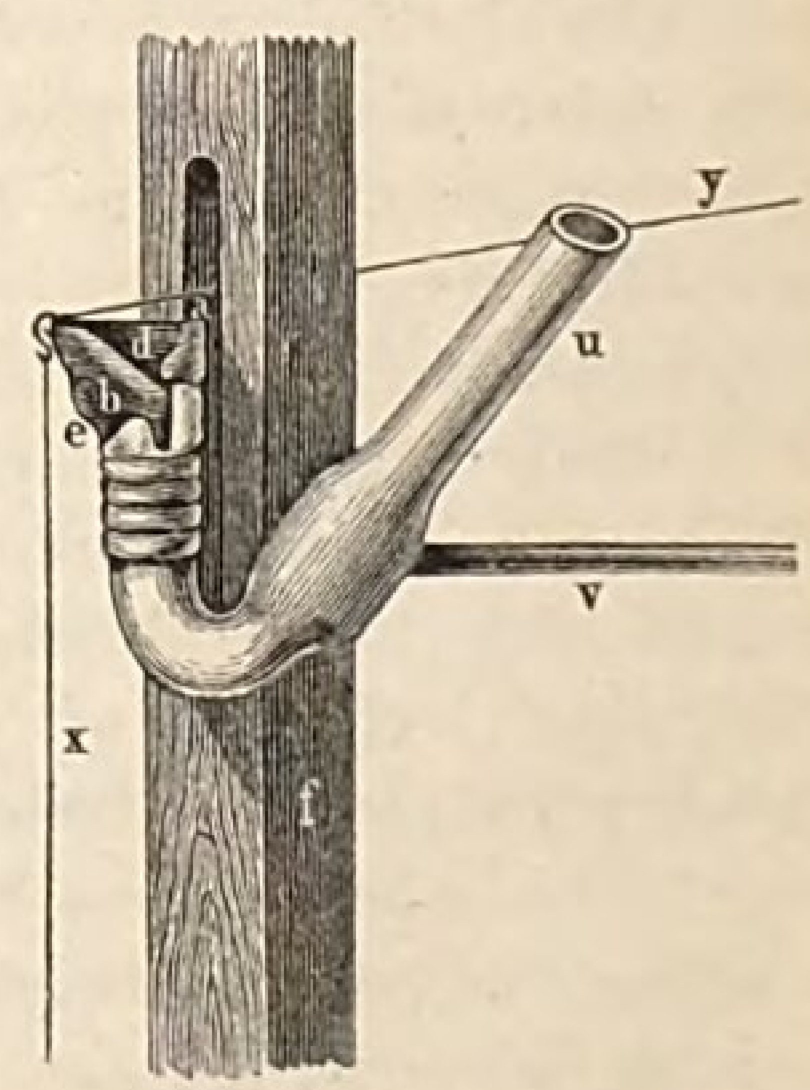


Fig. 853.



Membranen von Kautschuk, die sie über eine Röhre spannten; doch reichten diese Versuche noch nicht hin, um eine vollkommene Parallele zwischen diesen Zungenwerken und dem Stimmorgane zu begründen. Erst Johannes Müller hat es durch seine classischen Untersuchungen über diesen Gegenstand**) ausser Zweifel gesetzt, dass die Bildung von Tönen im Kehlkopfe der in membranösen Zungenpfeifen ganz analog ist, welche wir bereits in §. 217 kennen lernten.

*) Mém. de l'acad. d. sciences 1741.

**) Handbuch der Physiologie des Menschen, zweiten Bandes erste Abtheilung; und: Ueber die Compensation der physischen Kräfte am menschlichen Stimmorgan.

Sowohl Beobachtungen an lebenden Menschen und Thieren, als auch Versuche an ausgeschnittenen Kehlköpfen menschlicher Leichen zeigen, dass die Töne in der Stimmritze und weder über noch unter ihr gebildet werden. Befindet sich eine Oeffnung in der Luftröhre (also unter der Stimmritze), so hört die Stimme auf, sie kehrt aber wieder, sobald diese Oeffnung verschlossen wird; hingegen bringt eine Oeffnung in den Luftwegen oberhalb der Stimmritze eine solche Wirkung nicht hervor.

Die entscheidendsten Versuche stellte Müller mit ausgeschnittenen Kehlköpfen an, die er auf eine passende Weise auf einem Brettchen befestigte. Fig. 853 stellt einen solchen Kehlkopf von der Seite gesehen dar. *a* ist einer der Cartilagines arytaenoideae (der andere liegt hinter dem gezeichneten), *b* ist der untere Theil des Schildknorpels, *d* die innere Haut des Kehlkopfes, die in den Stimmbändern endigt, welche zwischen den Knorpeln *a* und *b* ausgespannt sind. Der obere Theil des Schildknorpels bis zu der Stelle, wo die Stimmbänder angewachsen sind, die Ventriculi Morgagni, die oberen Stimmbänder und der Kehldeckel sind weggeschnitten, damit man die Ränder der Stimmritze besser sehen kann.

Um den Kehlkopf gehörig zu befestigen, wird er mit seiner hinteren Wand auf das Brettchen gelegt und der Ringknorpel darauf festgebunden; um die Cartilagines arytaenoideae zu befestigen, wird ein Pfriemen quer durch dieselben gesteckt, so dass sie neben einander auf demselben fixirt sind und man sie nach Belieben von einander entfernen oder dicht zusammenrücken kann; der Pfriemen selbst wird alsdann durch Schnüre ebenfalls an das Brettchen unbeweglich angezogen. Ist nun auf diese Art die hintere Wand des Kehlkopfes befestigt, so lässt sich den Stimmbändern durch Anziehen des Schildknorpels jede beliebige Spannung geben. Mit so präparirten Kehlköpfen machte Müller eine Menge von Versuchen; wir können hier nur die wichtigsten seiner Resultate hervorheben.

Die unteren Stimmbänder geben bei enger Stimmritze volle und reine Töne beim Anspruch durch Blasen von der Luftröhre aus; diese Töne kommen denen der menschlichen Stimme sehr nahe; sie unterscheiden sich von denen, welche man erhält, wenn die Ventriculi Morgagni, die oberen Stimmbänder und der Kehldeckel noch vorhanden sind, nur durch ihre geringere Stärke, indem diese Theile, wenn sie vorhanden sind, stark mitschwingen und resoniren; die Ventriculi Morgagni haben offenbar nur den Zweck, die Stimmbänder von aussen frei zu machen.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder hat die grössere oder geringere Enge der Stimmritze keinen wesentlichen Einfluss auf die Höhe des Tones, nur spricht bei weiter Stimmritze der Ton schwerer an und ist weniger klangvoll.

Im Leben geschieht die Spannung der Stimmbänder hauptsächlich dadurch, dass die Musculi crico-thyreoidei den Schildknorpel gegen den Ringknorpel herabziehen, was an unserem Präparate dadurch nachgeahmt werden kann, dass man in dem Schildknorpel mittelst eines Hakens eine

Schnur *x* befestigt und diese mit Gewichten belastet. Indem Müller diese Gewichte von 8 bis 647 g vermehrte, konnte er alle Töne zwischen ais^0 und dis^3, also ungefähr $2^1/_2$ Octaven, hervorbringen.

Wenn auch der Faden *x* nicht durch Gewichte belastet ist, so sind doch die Stimmbänder noch nicht völlig abgespannt; um eine stärkere Abspannung und noch tiefere Töne zu erhalten, bringt man eine Schnur *y*, Fig. 853, an, welche über eine Rolle gehend mit den Gewichten belastet wird, um dadurch den Schildknorpel gegen die Cartilagines arytaenoideae zu ziehen, wodurch die Wirkung des Musculus thyreo-arytaenoideus nachgeahmt wird. Bei einem solchen Versuche erhielt Müller durch ein Gewicht von 5,25 g den Ton dis^1, durch Vermehrung des Gewichtes bis zu 66,5 g konnte der Ton bis h^{-1} vertieft werden; durch eine solche Abspannung der Stimmbänder kann man also die tiefsten Basstöne der Bruststimme hervorbringen.

Dass die Stimmbänder bei den Brusttönen schlaff, bei den Falsettönen gespannt sind, ist von Liskovius zuerst entdeckt worden; indessen lässt sich bei einem gewissen Grade der Abspannung bei verschiedenem Anspruche sowohl ein Brustton als ein Falsetton hervorbringen. Bei den Falsettönen schwingt aber nicht, wie bei den Flageolettönen der Saiten, ein aliquoter Theil der Länge der Stimmbänder; der wesentliche Unterschied beider Register besteht darin, dass bei den Falsettönen bloss die feinen Ränder der Stimmbänder, bei den Brusttönen die ganzen Stimmbänder lebhaft und mit grossen Excursionen schwingen. Diese Thatsache ist zuerst von Lehfeldt beobachtet worden. Der Falsetton erfolgt leichter bei ganz schwachem Blasen.

Bei grosser Abspannung sind die Stimmbänder nicht allein ganz ungespannt, sondern im Zustande der Ruhe auch runzelig und faltig; sie erhalten erst durch das Blasen die zum Schwingen nöthige Tension.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder lässt sich durch stärkeres Blasen der Ton oft bis zu einer Quinte und mehr in die Höhe treiben.

234 **Stimmorgane der Thiere.** Bei den Säugethieren sind die Stimmorgane im Wesentlichen ebenso construirt wie beim Menschen; auch bei ihnen wird der Ton durch die unteren Stimmbänder erzeugt, ja bei den Wiederkäuern fehlen die Ventriculi Morgagni und die oberen Stimmbänder sogar ganz. Bei den Affen sind die resonirenden Theile des Stimmorgans sehr eigenthümlich; so findet sich z. B. beim Orang-Utang, dem Mandrill und dem Pavian ein häutiger Sack unter dem Zungenbeine. Am grössten ist dieser resonirende Apparat bei den Heulaffen der Neuen Welt.

Die Stimme der Amphibien entsteht wie bei den Säugethieren im Kehlkopfe; sowohl die Frösche als auch die Krokodile haben Stimmbänder. Beim männlichen Frosche treten beim Tongeben zugleich häutige Säcke am Halse nach aussen, welche zur Verstärkung des Tones dienen.

Bei den Fröschen fehlt die Luftröhre; die Bronchien gehen sogleich aus dem Kehlkopfe hervor.

Bei den Vögeln befindet sich das Stimmorgan nicht am oberen, sondern am unteren Ende der Luftröhre, nämlich da, wo sie sich in die Bronchien theilt; Cuvier zeigte, dass eine Amsel, eine Elster, eine Ente nach Durchschneidung der Luftröhre noch zu schreien vermöge. Die anatomische Untersuchung bestätigt dies Resultat, denn man findet am oberen Ende der Luftröhre nur eine Verengerung, eine Spalte, welche keineswegs zur Erzeugung von Tönen geeignet ist, während man am unteren Ende einen wunderbar eingerichteten, zur Hervorbringung einer grossen Reihe hoher und tiefer Töne geeigneten Apparat findet; doch ist es nicht möglich, davon eine Idee zu geben, ohne zu sehr in anatomische Einzelheiten einzugehen.

Auch unter den Fischen, welche sonst sprichwörtlich als stumm gelten, giebt es mehrere Arten, welche Töne oder wenigstens Geräusche hervorbringen, so z. B. der bekannte Schlammpeizger, welcher ein feines hohes Quicken von sich giebt, wenn man ihn aus dem Wasser herausnimmt. Er bringt dasselbe durch Saugbewegungen der Lippen hervor. Andere Gattungen, wie z. B. die Knurrhähne (Trigla gurnardus), bringen ein knurrendes Geräusch hervor, über dessen Entstehungsweise man noch nicht im Reinen ist. Eine förmliche unterseeische Musik, die aus 40 m Tiefe noch bis zur Oberfläche des Meeres dringt, erzeugen die Umberfische (Sciaenoidei).

Als tonerzeugendes Organ wird bei diesen wie den vorhin erwähnten Gattungen die Schwimmblase vermuthet.

Die Insecten endlich besitzen ausserordentlich zahlreiche und verschiedenartige Mittel zur Erzeugung von Stimmen oder Geräuschen, auf deren Einzelheiten wir natürlich hier nicht eingehen können*).

Klangfarbe der menschlichen Sprachlaute. Die Sprachlaute des Menschen werden gewöhnlich in Vocale und Consonanten eingetheilt. Die ersteren sind wirkliche Klänge, welche beliebig lange klingen können und deshalb den betonten Theil der Silbe bilden. Die Consonanten sind fast sämmtlich nur Geräusche von kurzer Dauer, geeignet, den Vocal einzurahmen. Wir beschäftigen uns hier nur mit den Vocalen. 235

Wie so oft, so wurden auch in diesem Gebiete vor längerer Zeit von einzelnen Forschern wichtige, der Wahrheit mehr oder weniger nahe kommende Entdeckungen gemacht, die dann wieder in Vergessenheit geriethen**).

*) Landois, Thierstimmen, Freiburg i. B. 1874; Haller in der Zeitschrift „Der zoologische Garten“, XV (1874); Grützner, Physiologie der Stimme und der Sprache, 5. Cap. (II. Theil des Handb. d. Physiologie von L. Hermann).

**) Eine ziemlich ausführliche Darstellung dieser älteren Entdeckungen, sowie der ganzen hier abzuhandelnden Materie ist von P. Grützner in seiner

Dass in den Vocalen Töne verschiedener Höhe enthalten seien, hat schon W. v. Kempelen (um 1780) entdeckt. Auch gelang es ihm schon, durch Verbindung einer aufschlagenden Zunge mit geeigneten Hohlräumen, Vocale künstlich nachzuahmen; ja er construirte sogar eine förmliche Sprechmaschine, welche später von Faber verbessert unter dessen Namen in den grösseren Städten Deutschlands gezeigt wurde*). Chr. Gottl. Kratzenstein gab sich um dieselbe Zeit mit ähnlichen Versuchen ab, wobei er die erste durchschlagende Zunge construirte, kam aber der richtigen Erklärung der Vocale nicht nahe. Dies gelang erst Robert Willis**) 1830, welcher theils auf demselben Wege, theils mittelst Zahnrädern, gegen deren Zähne schwingende Federn anschlugen, Klänge ähnlich den Vocalen erzeugte und die letzteren durch das Zusammenwirken „primärer und secundärer Pulsationen“ erklärte. Die Aufeinanderfolge der Zähne lieferte die „primären Pulsationen“ (den Grundton), die Eigenschwingungen der Feder die „secundären Pulsationen“ (den Oberton). In der Zungenpfeife liefert die Zunge die primären, die Ansatzröhre die secundären Schwingungen.

Noch näher der Wahrheit kam Wheatstone 1837, welcher die „multiple Resonanz“ der Hohlräume, d. h. das Gesetz entdeckte, dass ein Resonator auch auf die Obertöne des Eigentons in Mitschwingungen gerathen kann. Er zeigte auch bereits mittelst Stimmgabeln, dass die Mundhöhle bei bestimmten Stellungen auf bestimmte Töne abgestimmt sei und dass bei den Vocalen ein Oberton im Verhältnisse zum Grundtone stärker hervortrete als bei anderen Klängen.

Im Jahre 1854 veröffentlichte Grassmann***) die Grundzüge einer Vocaltheorie, welche nicht die verdiente Beachtung gefunden hat. In derselben ist bestimmt ausgesprochen, dass die Vocale dadurch entstehen, dass durch die Schwingungen der Stimmbänder auch die Luft der Mundhöhle in Mitschwingungen versetzt wird, und die dadurch entwickelten leisen harmonischen Obertöne sich dem Grundtone der Stimmbänder beimischen. Grassmann bediente sich zur Analyse der Vocalklänge nur seines feinen Gehörs. „Ein aufmerksames Ohr hört leicht beim Uebergange von *u* durch *ü* zum *i* eine Reihe leiser harmonischer Nebentöne (Obertöne), welche von c^2 bis c^5 fortschreiten können, und welche man bei denselben Mundstellungen auch für sich hervorbringen kann. Beim Vocale *a* klingt eine ganze Reihe der harmonischen Töne mit, welche das Ohr in der Regel noch bis zur vierten Octave des Grundtones wahrnehmen kann.“

Physiologie der Stimme und der Sprache, welche den zweiten Theil des I. Bandes des Handbuches der Physiologie von L. Hermann bildet, gegeben.

*) Näheres darüber ausser bei Kempelen im Kadmus von F. K. Du Bois-Raimond, S. 129, Berlin 1862.

**) Pogg. Ann. XXIV, 397 (1832).

***) Programm des Stettiner Gymnasiums, 1854.

Grassmann hat dann später*) seine Theorie weiter ausgeführt. Ihre wesentlichen Punkte sind folgende. Die Vocale zerfallen in drei Gruppen, deren erster die Reihe U, $\ddot{U}$ und J, deren zweiter nur das A, deren dritter O, $\ddot{O}$ und E angehören.

Die Gruppe U, $\ddot{U}$, J ist dadurch charakterisirt, dass ausser dem Grundtone immer nur ein Oberton mitklingt, welcher beim U stets zwischen c^1 und c^3, beim $\ddot{U}$ zwischen c^3 und e^4, beim J von e^4 aufwärts liegt. Das folgende Schema stellt dies dar:

c^0	c^1	g^1	c^2	e^2	g^2	b^2	c^3	d^3	e^3		g^3		b^3	h^3	c^4	cis^4	d^4	dis^4	e^4	f^4			g^4	gis^4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
				U									$\ddot{U}$								J				

Wenn man also in der Tonhöhe c^0 ein U singt, wird mittelst der Stimmbänder der Grundton c^0 mit allen seinen Obertönen hervorgebracht und gleichzeitig dem Munde eine solche Form und Oeffnung gegeben, dass die Mundhöhle auf einen der Töne c^1, g^1 bis c^3 Resonanz giebt. Die Formel des U wäre also dann $c^0 + c^1$ oder $c^0 + g^1$ oder $c^0 + c^2$, d. h. es giebt für den Grundton c^0 eine ganze Reihe von U, welche desto dumpfer klingen, je tiefer, desto heller, je höher der eine Oberton ist, welcher dem Grundton beigemengt wird. Dasselbe gilt dann für $\ddot{U}$ und für J, nur dass die Reihe der Obertöne, aus welcher der charakteristische Oberton genommen werden muss, höher liegt, wie das Schema andeutet.

Wird statt des Grundtones c^0 etwa c^1 gewählt, so enthält derselbe nur mehr die Partialtöne, welche früher die geradzahligen waren, nämlich:

c^1	c^2	g^2	c^3	e^3	g^3	b^3	c^4	d^4	e^4	etc.
	U					$\ddot{U}$				

Auf den Grundton c^1 gesungene U bestehen daher alle aus c^1 und einem der nämlichen (absolut genommen gleich hohen) Obertöne wie früher, also einem solchen zwischen c^1 und c^3. Die $\ddot{U}$ bestehen wiederum aus c^1 und einem der Obertöne zwischen c^3 und c^4, die J aus c^1 und einem der Obertöne oberhalb c^4. Ist zu einem Grundtone der erforderliche Oberton nicht vorhanden, so treten die beiden benachbarten Töne für ihn ein und zwar im Verhältnisse zu ihrer Nähe; dabei wird der Klang aber ein wenig verändert.

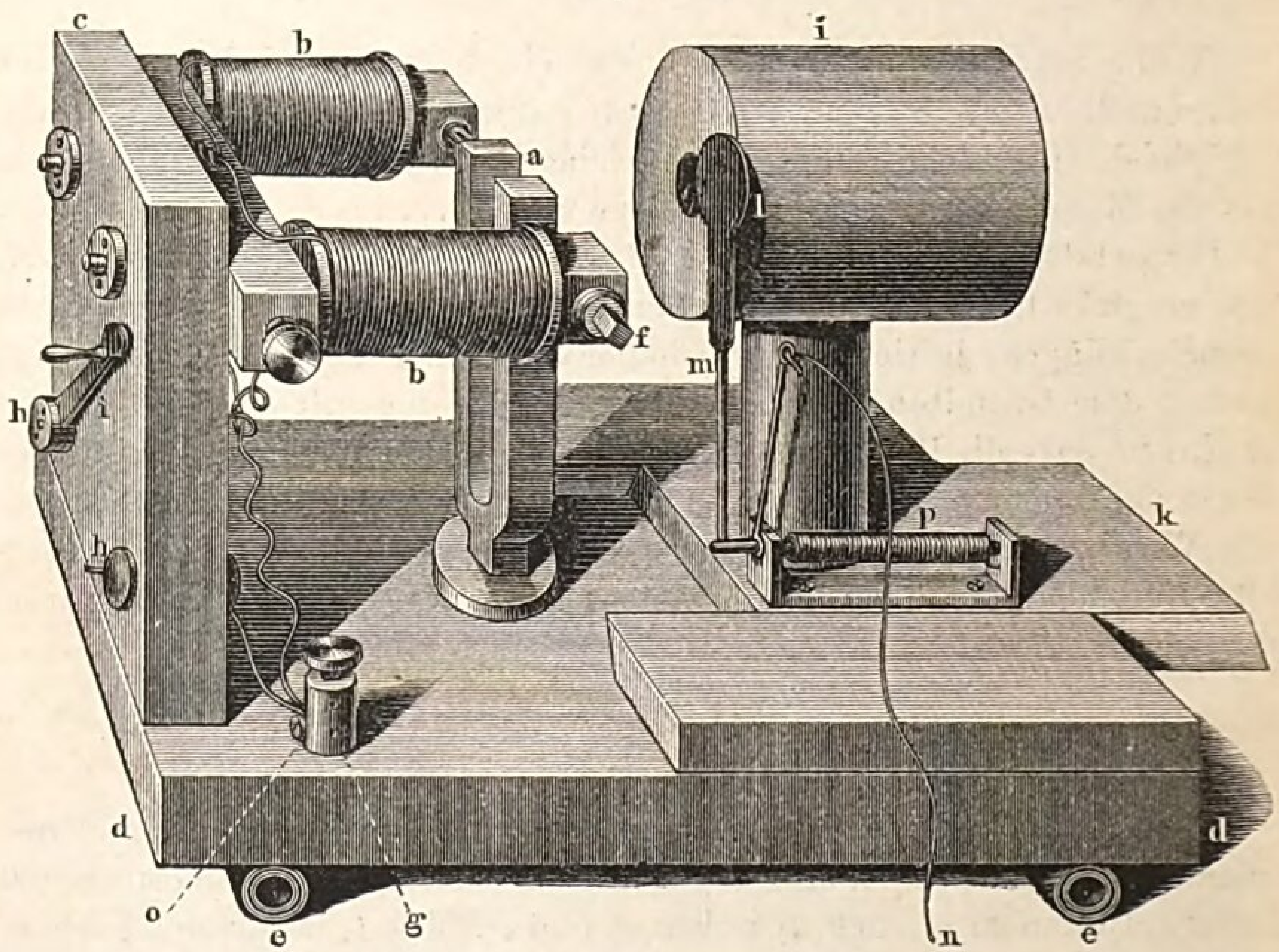
Im Gegensatze zur Gruppe U, $\ddot{U}$, J wird das A gebildet durch das Vorhandensein der ersten 8 bis 10 Obertöne des Grundtones in annähernd gleicher Stärke, wobei nur deren relative Höhe constant bleibt.

Die Vocale O, $\ddot{O}$ und E sind nach Grassmann Mittelstufen zwischen U und A, $\ddot{U}$ und a, J und a. Die Obertöne des O z. B. liegen von dem charakteristischen Tone des U, dem c^1, halb so weit entfernt, als die Obertöne des A.

*) Wiedem. Ann. I, 606 (1877).

Helmholtz*) veröffentlichte 1859 seine wichtigen Versuche über die Vocalklänge, welche dann in seinem oft citirten Werke: „Zur Lehre von den Tonempfindungen" 1863 vervollständigt erschienen. Auch nach Helmholtz entstehen die Vocale dadurch, dass aus der Klangmasse, welche von den Stimmbändern ausgeht, gewisse Obertöne durch die Höhlungen des Mundes verstärkt, die übrigen geschwächt werden. Das Unterscheidende der Vocalklänge von den Klängen der anderen Instrumente liegt nach Helmholtz darin, dass die Stärke ihrer Obertöne nicht nur von der Ordnungszahl, sondern überwiegend von deren absoluten Tonhöhe abhängt.

Fig. 854.



Helmholtz bediente sich der folgenden Methoden. Er untersuchte die Resonanztöne der Mundhöhle durch vorgehaltene Stimmgabeln, die Vocalklänge mittelst seiner Resonatoren und stellte endlich künstliche Vocale her durch gleichzeitiges Ertönenlassen von Stimmgabeln verschiedener Höhe, welche mit Resonanzröhren versehen waren. Die Fig. 854 zeigt die Anordnung einer solchen Stimmgabel. Dieselbe ist zwischen den Polen des Elektromagneten *bb* aufgestellt, welcher letztere durch den intermittirenden Strom einer Unterbrechungsgabel intermittirend magnetisirt wird und dadurch die Stimmgabel in *a* im Schwingen erhält. Ihr Ton wird aber erst dadurch laut hörbar, dass er in der Röhre *i* Resonanz findet, welche eintritt, sobald der Deckel vor der

*) Gelehrte Anzeigen d. k. bayer. Akad. d. W. 1859.

Mündung der Resonanzröhre entfernt wird, wozu der Mechanismus *mp* dient. Der Schieber *k* gestattet Annäherung oder Entfernung der Resonanzröhre. Acht bis zwölf solcher Gabeln von den Tonhöhen:

b^{-1}, b^0, f^1, b^1, d^2, f^2, as^2, b^2, d^3, f^3, as^3, b^3,

konnten auf diese Weise gleichzeitig durch die nämliche Unterbrechungsgabel, deren Tonhöhe $= b^{-1} = 120$ Schwingungen per Secunde betrug, im Schwingen erhalten werden. Mit diesem Apparate gelang es Helmholtz, mehrere Vocale künstlich nachzubilden.

Es entstand:

Mit dem Grundton b^{-1}:

Ein dumpfes *U* durch die Gabel b^{-1} allein.

Ein dem *U* ähnlicher Vocalklang durch b^{-1} mit *b* (schwach) und f^1 (schwach).

Ein schönes *O* durch b^{-1} (gedämpft), b^0 (schwach), b^1 (stark), f' (schwach), d'' (schwach).

Ein *Å* durch b^{-1}, b^0 (schwach), f^1 (schwach), d^2 (stark), f^2 (stark), as^2 (stark), b^2 (stark).

Mit dem Grundton *b*:

U durch b^0 allein.

O durch b^0 (mässig), b' (stark), f'' (schwächer).

A durch b^0, b^1 und f^2 mässig stark, b^2 und d^3 kräftig.

Ä durch b^0, b^1 und f^2 stärker, b^2 schwächer, d^3 und f^3 möglichst stark.

E durch b^0 und b^1 (mässig stark), f^3, a^3, b^3 (möglichst stark).

Die Nachahmung des *E* gelang minder gut, die des *J* gar nicht, weil die höheren Obertöne fehlten.

Mittelst desselben Stimmgabelapparates hat Helmholtz auch Versuche angestellt über den Einfluss der Phasendifferenz der einzelnen Theiltöne auf die Klangfarbe. Die Phase kann nämlich durch geringe Aenderung der Stimmung der Resonanzröhren bis zu $1/4$, durch Umkehrung der Stromrichtung um $1/2$ verändert werden. Das Resultat war ein negatives, d. h. die Phasendifferenz zeigte sich ohne Einfluss auf die Klangfarbe (vergl. §. 230).

Gegen die Helmholtz'sche Ansicht, dass bei den Vocalklängen die absolute Höhe der charakteristischen Obertöne maassgebend sei, sind mehrfach Einwendungen erhoben worden*). Eine neuere von F. Auerbach**) in Helmholtz's Laboratorium ausgeführte Untersuchung hat denn auch ergeben, dass beim Vocalklang sowohl die absolute Höhe, als auch die relative Höhe der Ober-

*) v. Quanten, Pogg. Ann. CLIV (1875), Schnebeli, Arch. d. sc. phys. et nat. I, p. 149 (1879).

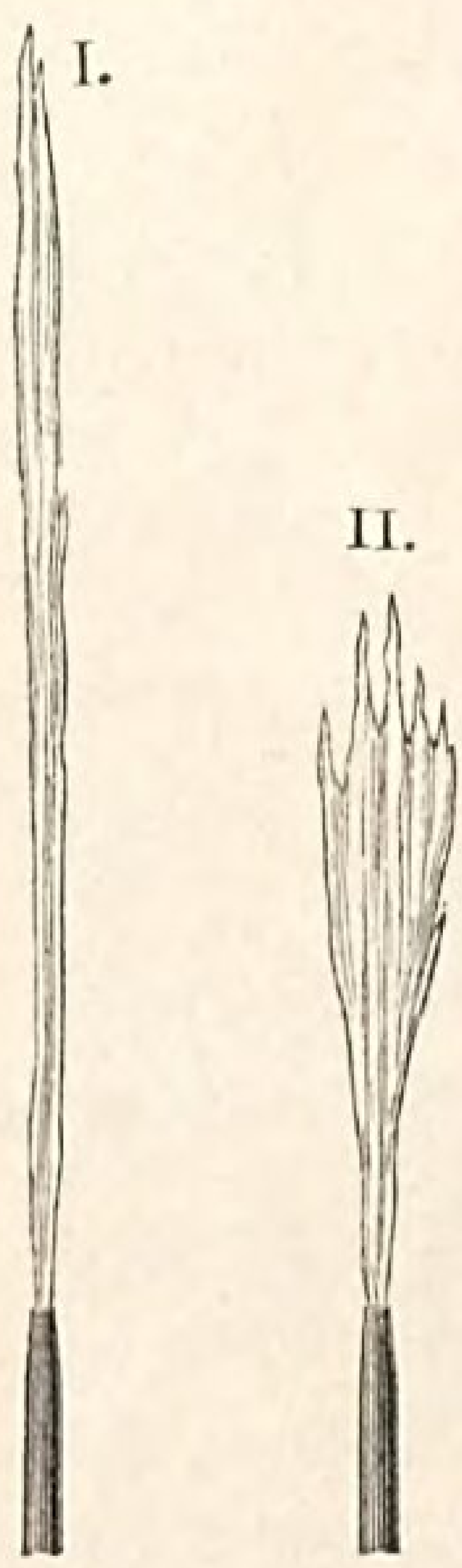
**) Wiedem. Ann., Ergänz.-Bd. VIII, S. 177 (1876).

töne in Betracht komme. Hierdurch wird freilich die Vocaltheorie eine sehr complicirte.

Dies, sowie der Umstand, dass die behandelte Frage noch immer Gegenstand der Controverse ist*), endlich die Erwägung, dass dieselbe eigentlich mehr den Physiologen und Sprachforscher, als den Physiker angeht, welcher letztere nur die Methoden der Untersuchung beizustellen hatte, veranlasst uns, diesen Gegenstand mit dem Hinweise auf die betreffende Literatur abzuschliessen**).

In experimenteller Beziehung wäre noch zu erwähnen, dass auch Helmholtz künstliche Vocale erhielt, indem er auf eine Zungenpfeife, welche b^1 gab, Hohlräume mit wechselndem Eigenton aufsetzte. Eine auf b^0 abgestimmte Resonanzkugel gab ein *U*, eine auf b^1 abgestimmte ein *O*; ein geschlossenes *A* wurde erhalten mit der Kugel b^2, ein scharfes *A* mit der Kugel d^3. Auch ist es Helmholtz gelungen, mit derselben Zungenpfeife die Vocale *A*, *E* und *J* hervorzubringen, indem er gläserne Hohlkugeln aufsetzte, in deren äussere Oeffnung noch ein 6 bis 10 cm langes Glasröhrchen eingefügt war, um die doppelte Resonanz der Mundhöhle bei diesen Vocalen nachzuahmen. Zu solchen Versuchen ist der Apparat Fig. 792 (S. 784) zu verwenden.

Fig. 855.



Zur Vocalanalyse ist auch der Phonautograph und zwar von Schneebeli benutzt worden. Endlich kann auch der in Fig. 848 (S. 847) abgebildete Apparat mit manometrischer Kapsel dazu benutzt werden, wenigstens als Vorleseexperiment den Unterschied in der Zusammensetzung der Vocalklänge zu demonstriren. Je mehr Obertöne der in dem Trichter des Apparates gesungene Vocal enthält, desto mehr Spitzen zeigt das im rotirenden Spiegel beobachtete Flammenbild. Die Fig. 849 I, II, III entsprechen den Vocalen *U*, *O*, *A*.

Als ein weiteres interessantes Vorlesungsexperiment, welches mit der Vocalanalyse in Beziehung steht, mag endlich noch Tyndall's Vocalflamme***) erwähnt werden. Wenn man Leuchtgas aus einem Kautschuksack durch ein weites, nirgends verengtes Rohr einem cylindrischen Brenner von kleinem, kreisförmigem Querschnitte zuführt und anzündet,

*) Während wir dieses schreiben, bekommen wir die Arbeit von J. Lahr in Wiedem. Ann. XXVII, S. 94, zu Gesicht, welche die Grassmann'sche Vocaltheorie aufrecht hält und durch neue Versuche zu bestätigen sucht.

**) Dieselbe findet sich in der oben citirten Physiologie der Stimme und Sprache von Grützner zusammengestellt.

***) Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. Helmholtz und G. Wiedemann, S. 287.

so erhält man bei hinlänglichem Drucke eine 50 bis 60 cm hohe schmale Flamme von der Form Fig. 855 I.

Vermehrt man die Belastung des Kautschuksackes, so fängt endlich die Flamme zu rauschen an und wird gleichzeitig kürzer. Die grösste Belastung, bei welcher diese Veränderung eben noch nicht eintritt, ist für die Versuche die geeignetste. Bei passenden Dimensionen des Brenners und unter Bedingungen, die man nicht ganz in seiner Gewalt hat und ausprobiren muss, gelingt es, eine sensible Flamme zu erhalten, welche gegen tiefere Töne ganz unempfindlich ist, dagegen beim Erklingen hoher Töne sofort bis zur Form Fig. 855 II zusammenknickt. Spricht man in der Nachbarschaft der Flamme den Vocal *U* oder *O*, so rührt sich die Flamme nicht oder nur wenig, bei *a*, *e*, *i* knickt sie aber auffallend zusammen. Dasselbe erfolgt beim Zischen, beim Schütteln eines Schlüsselbundes, beim Zerreissen von Papier, kurz bei Geräuschen, welche die passenden hohen Töne enthalten, um die der Vibration schon nahestehende Flamme vollends in Schwingungen zu versetzen.

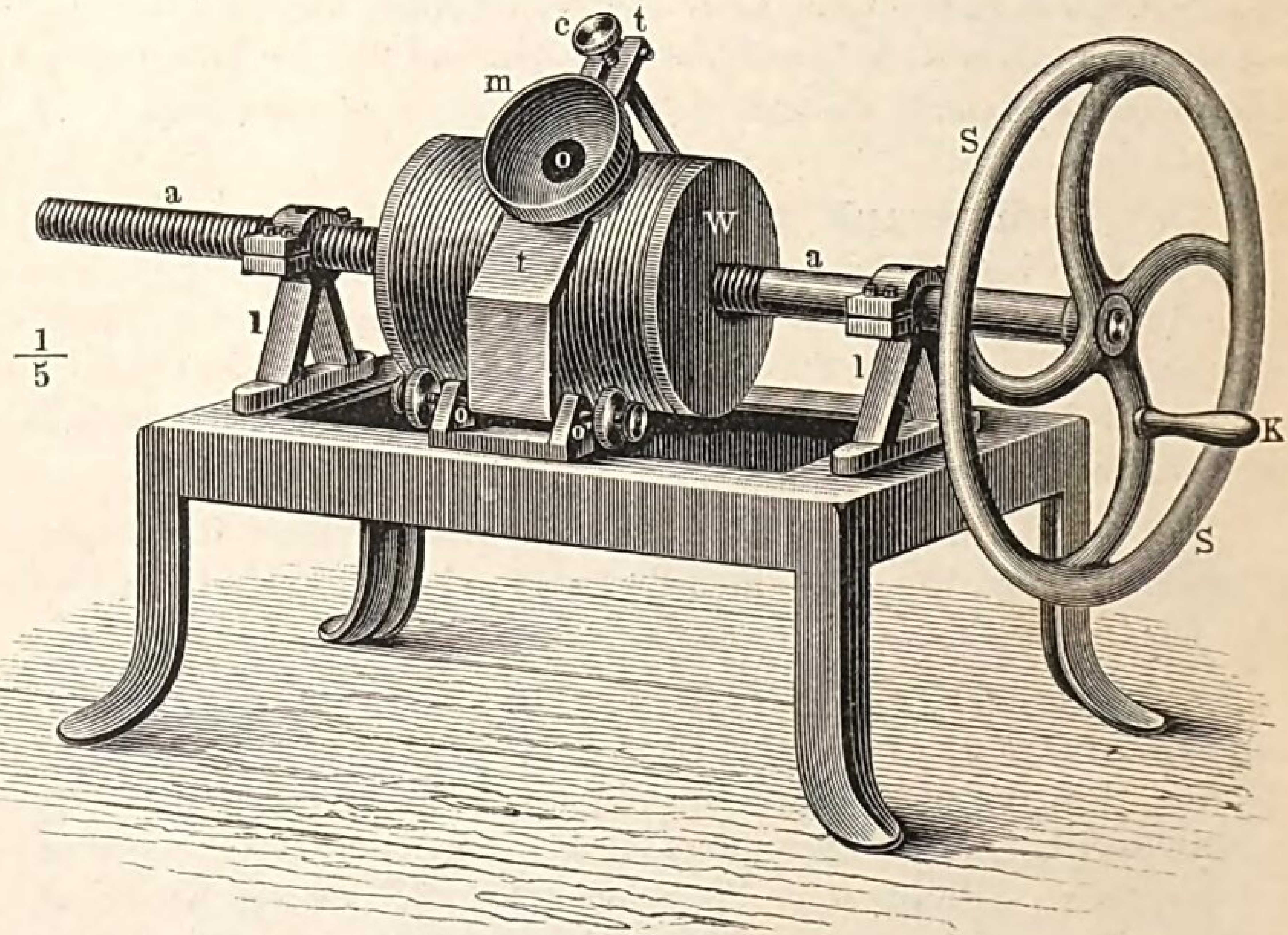
Der Phonograph von Edison. Dieser höchst interessante Apparat, eine Erfindung des Amerikaners Thomas A. Edison, welcher Ende 1877 bekannt wurde, löst, wie sein Name sagt, für den Schall dieselbe Aufgabe, wie der Photographenapparat für das Licht. Er fixirt erhaltene Schalleindrücke, welche dann zu beliebiger Zeit und beliebig oft reproducirt werden können. 236

Fig. 856 (a. f. S.) zeigt einen solchen Phonographen in perspectivischer Darstellung, Fig. 857 einen Verticaldurchschnitt durch die wichtigsten Theile desselben.

Auf einem soliden Gestelle ist die metallene Walze *w* mittelst ihrer horizontalen Achse *aa* in den Lagern *ll* drehbar. Sowohl die Walze als die Achse ist mit Schraubenwindungen gleicher Ganghöhe versehen. Das linksseitige Achsenlager bildet die Schraubenmutter für das Gewinde auf der Achse. Dreht man das Schwungrad *SS* an der Kurbel *K*, so wird die Walze bei jeder Rotation gleichzeitig um einen Schraubengang in der Achsenrichtung verschoben. Das Mundstück *m* ist eine trichterförmige Dose von Messing, welche in dem starken messingenen Träger *tt* mittelst des Zwischenstückes *rr* (Fig. 857) durch Schraubengewinde befestigt werden kann. Die Basis des Mundstückes *m* ist mit einer centralen kreisförmigen Oeffnung *o* versehen, der Boden des Zwischenstückes *rr* ist durch eine dünne Glimmerplatte *nn* (oder durch eine dünne Metallplatte oder auch eine thierische Membran) verschlossen. Auf die Mitte der Glimmerplatte ist an der Unterseite eine kleine Metallplatte mit centraler Spitze aufgekittet, gegen welche das Ende der Stahlfeder *f* angedrückt wird. Diese Feder trägt selbst wiederum eine abgerundete Stahlspitze *q*, welche gegen die Mitte einer Schraubenrinne der Walze *W* gerichtet ist.

Der Träger *t* ist aufzuklappen, wobei er um die Spitzen der Schrauben *o o'* gedreht wird. Diese Schrauben gestatten auch eine Verschiebung des Trägers parallel der Walze und eine Feststellung der so eingestellten Lage mittelst Gegenschrauben. Die Schraube *c* mit der Anschlagstelle *d* hat den Zweck, das Mundstück in die richtige Entfernung von der Walze zu stellen. Die Walze wird mit einem Blatt Stanniol von ungefähr 0,05 mm Dicke überzogen. Man schneidet dasselbe um 1 cm länger als der Umfang der Walze beträgt, so dass es an den Enden etwas übergreift, befestigt den übergreifenden Rand mit concentrirtem Schellackfirniss und sorgt durch Andrücken und Streichen mit Baumwollebauschen, dass das Stanniolblatt eine recht glatte Mantelfläche bildet. Der übergreifende Rand muss so liegen, dass er beim Vorwärtsdrehen der Walze nicht vom

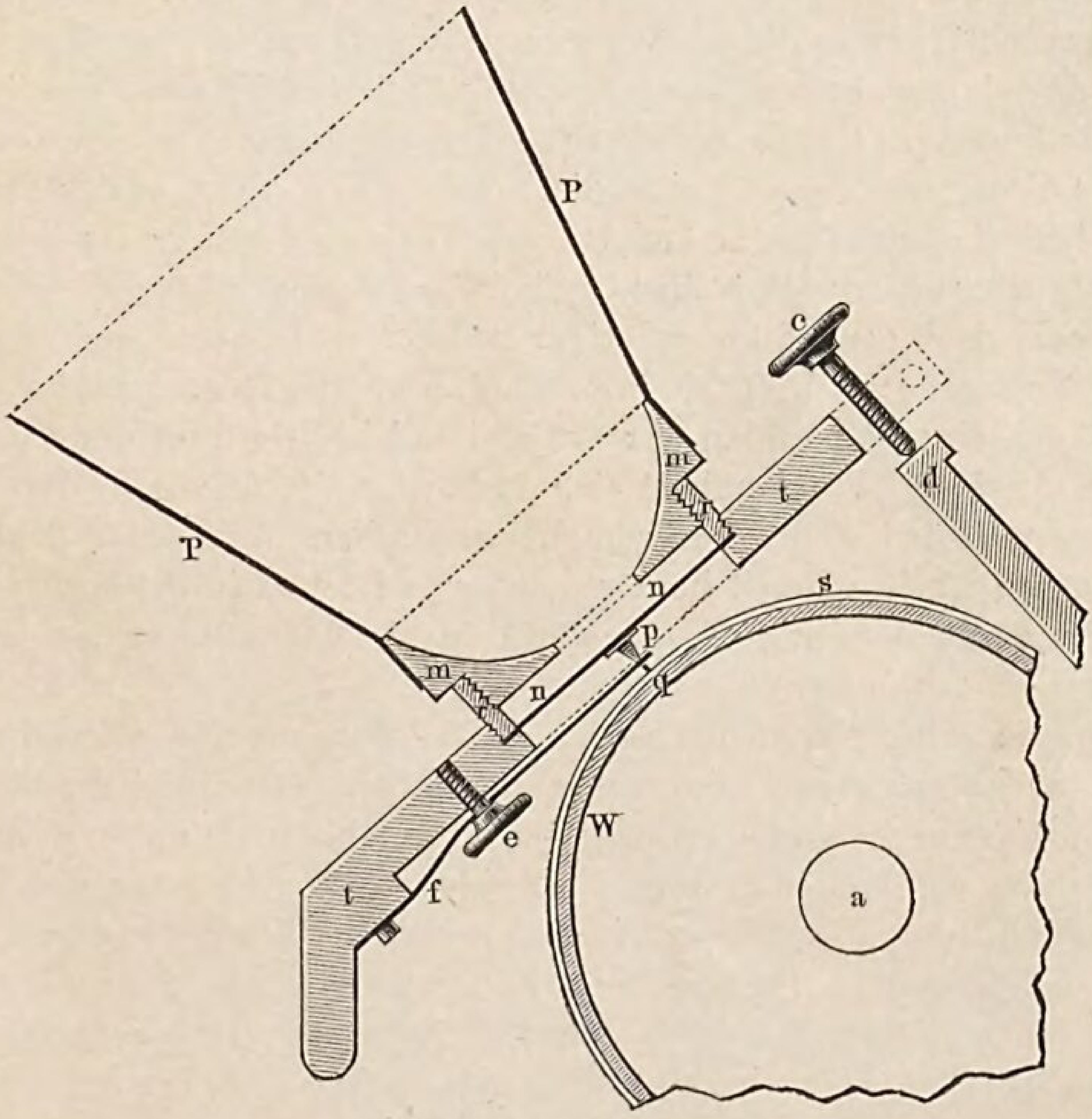
Fig. 856.



Stahlstift *g* abgestreift werden kann. Man stellt nun die Walze so, dass der Stahlstift am Anfange des Schraubengewindes steht, corrigirt, wenn nöthig, die Schrauben *o o'* so, dass der Stahlstift *g* genau auf die Mitte einer Schraubenrinne trifft und stellt endlich die Schraube *c* so ein, dass derselbe Stahlstift beim Drehen der Walze eine seichte Rinne ins Stanniol eindrückt. Der Apparat ist dann zum Versuche fertig. Giebt man nun der Walze eine gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit (ungefähr zwei Umgänge per Secunde) und spricht während dessen laut in das Mundstück, wobei man sich möglichst nähert, so übertragen sich die Luftschwingungen auf die Glimmerplatte und weiterhin auf den Stift *q*, welcher in Folge dessen in das Stanniolblatt punktförmige Vertiefungen eindrückt, die man sofort mit freiem

Auge sehen kann. Um nun die gesprochenen Worte zu reproduciren, dreht man die Walze in die Anfangsstellung zurück, bringt die Dose mit dem Stift genau in die frühere Lage, setzt zur Verstärkung noch einen Schalltrichter aus Pappe *PP* auf und dreht die Kurbel mit möglichst derselben Geschwindigkeit wie das erste Mal. Die gesprochenen Worte müssen, wenn der Versuch gut geleitet ist, so laut und so deutlich reproducirt werden, dass sie von einem ganzen Auditorium gehört und auch von solchen Personen verstanden werden, welche nicht wussten, was früher in den Apparat gesprochen wurde. Damit dies gelinge, ist insbesondere darauf zu achten, dass die Stanniolfläche glatt sei, der Stift

Fig. 857.



genau in der Mitte der Furche nicht zu tief und nicht zu hoch stehe. Ferner müssen die einzelnen Bestandtheile so fest construirt und so adjustirt sein, dass sie weder schwingen noch schlottern. Der Stift q darf weder zu spitzig noch zu stumpf sein, die Feder f muss die richtige Spannung haben. Uebrigens geben auch Apparate, bei denen die Feder f mit der Spitze q ganz fehlt und die Spitze p unmittelbar ins Stanniol drückt, gute Resultate.

Eine Erklärung der Wirksamkeit des Apparates ist nach dem, was im §. 224 über den Phonautographen gesagt wurde, wohl kaum mehr nöthig. Der Phonograph schreibt seine Schrift als Relief, während der

Phonautograph in der Ebene der Schreibfläche schreibt. Beim zweiten Drehen der Walze gleitet der Stift über das Relief, muss daher dessen Erhöhungen und Vertiefungen in derselben Reihenfolge nachgehen, also dieselben Schwingungen wiederum durchmachen, welche er vollbrachte, als er die Eindrücke in das Stanniol machte. Es muss daher auch die Membran und mit ihr die Luft oberhalb derselben die nämlichen Schwingungen, also auch dieselben Töne, wenn auch mit geringerer Intensität, reproduciren.

Weitere Versuche sind folgende:

Man giebt der Walze beim Reproduciren eine geringere oder grössere Schnelligkeit. Die Worte wiederholen sich dann nicht nur rascher, sondern sämmtliche Tonhöhen werden niedriger oder höher. Man hat deshalb versucht, durch dieses Experiment die Frage zu entscheiden, ob beim Vocalklange die absolute oder die relative Höhe der Partialtöne in Betracht komme. Haben die charakteristischen Obertöne eine constante absolute Höhe, so müssen sich die Vocale nicht bloss in der Tonhöhe, sondern im Klangcharakter ändern, sobald man schneller oder langsamer dreht als während des Sprechens. Sind aber die charakteristischen Töne der Vocale von constanter relativer Höhe, so müssen auch die vom Apparate reproducirten Vocale ihren Charakter behalten. Das Experiment giebt aber keinen Ausschlag zur ausschliesslichen Geltung der einen oder anderen Ansicht. Wohl nähert sich z. B. der Vocal *A* beim langsamen Drehen etwas dem *O*, beim schnelleren Drehen dem *Ä*; *Ü* geht beim langsameren Drehen in *U*, beim schnelleren Drehen in *J* über.

Dies zeigt, dass sowohl das absolute als das relative Moment den Vocalklang beeinflusst.

Ein zweiter Versuch besteht darin, dass man die beschriebene Stanniolfläche ablöst und dann wieder auflegt. Geschieht dies mit der nöthigen Genauigkeit und ist das Stanniol nicht zu dünn und nicht zu sehr verletzt worden, so gelingt die Reproduction. Es wäre also immerhin möglich, auf diese Weise die gesprochenen Worte zu stereotypiren, zu versenden und an irgend einem anderen Orte und zu irgend einer Zeit an einem genau gleich construirten Apparate zu reproduciren.

Ein dritter Versuch zeigt, dass eine mehrmalige Reproduction mit allmälig abnehmender Deutlichkeit möglich ist.

Bei einem vierten Versuche kann man über eine geschriebene Stelle der Walze nochmals schreiben. Sie reproducirt dann, allerdings minder deutlich, beide Wortreihen zugleich, als wären sie zugleich gesprochen worden.

Setzt man den Schalltrichter während des Sprechens auf, so werden die Eindrücke stärker, aber der Umstand, dass die Eigentöne des Schalltrichters gegenüber den anderen Tönen verstärkt werden, stört etwas die Deutlichkeit.

Ausser den Sprechlauten wird auch Gesang, Pfeifen, Trompeten etc. reproducirt. Dabei ist aber noch wichtiger als bei jenen, dass die ur-

sprüngliche Geschwindigkeit beibehalten werde, da sonst die Aenderungen der Tonhöhe störend werden. Am besten wird lautes Lachen, Nachahmung von Hundegebell, Hahnenschrei etc. wiedergegeben.

Die gebrauchten Stanniolblätter können nach sorgfältigem Glätten wohl wieder benutzt werden, aber nicht mit gleich gutem Erfolge. Die Stahlspitze wird nach längerem Gebrauch durch Abschleifen scharfkantig und muss dann wiederum abgerundet werden, da sie sonst das Stanniol aufreist.

Mehrere Physiker, so Alfred M. Mayer*), Jenkin und Ewing in Edinburgh**) und jüngstens J. Lahr***), haben das Profil der Stannioleindrücke durch Fühlhebelapparate vergrössert abgezeichnet. Die erhaltenen Curven dienten dann zu Studien über die Zusammensetzung des Vocalklanges, indem dieselben nach dem Fourier'schen Theorem in eine Reihe von Sinuscurven zerlegt und so die Ordnungszahlen und Intensitäten der Partialtöne ermittelt wurden. J. Lahr findet in den erhaltenen Resultaten eine Bestätigung der Grassmann'schen Vocaltheorie.

Das Gehörorgan besteht aus drei Haupttheilen, dem äusseren Ohre, welches durch die Ohrmuschel und den Gehörgang gebildet wird; der Trommelhöhle, welche von dem Gehörgange durch das Trommelfell getrennt ist, und dem Labyrinthe. Das Labyrinth zerfällt in das knöcherne und das häutige. Ersteres besteht aus einer Reihe complicirter, unter einander communicirender, von Knochensubstanz begrenzter Hohlräume, in welchen das häutige Labyrinth mit der Endausbreitung des Gehörnerven eingeschlossen ist. Das häutige Labyrinth hat im Allgemeinen dünne, membranöse Wandungen und ist von einer Flüssigkeit, der Endolymphe, erfüllt. Es liegt nur theilweise direct an den Wandungen des knöchernen Labyrinthes; im Uebrigen ist es durch einen von einer Flüssigkeit, der Perilymphe, erfüllten Zwischenraum von diesem getrennt. Um auf den Gehörnerven wirken zu können, müssen die Schallvibrationen der ganz von Knochen umgebenen Flüssigkeit im Labyrinthe mitgetheilt werden; dies wird durch zwei Oeffnungen des knöchernen Labyrinthes vermittelt, sie heissen das ovale und das runde Fenster; beide sind mit einem zarten Häutchen überspannt; auf die Membran des ovalen Fensters ist ein Knöchelchen aufgewachsen, welches Steigbügel genannt und von welchem sogleich näher die Rede sein wird. 237

Die Fig. 858 I †) (a. f. S.) stellt das linke knöcherne Labyrinth in ungefähr fünffach vergrössertem Maassstabe zum Theil geöffnet dar, so dass man das eingeschlossene häutige Labyrinth sehen kann. Es besteht aus drei Haupttheilen, der Schnecke, dem Vorhof und den drei halbkreisförmigen Canälen oder Bogengängen.

*) Nature, XVII, pag. 469 (1878).

**) Trans. Roy. Soc. Edinb. 28, pag. 1.

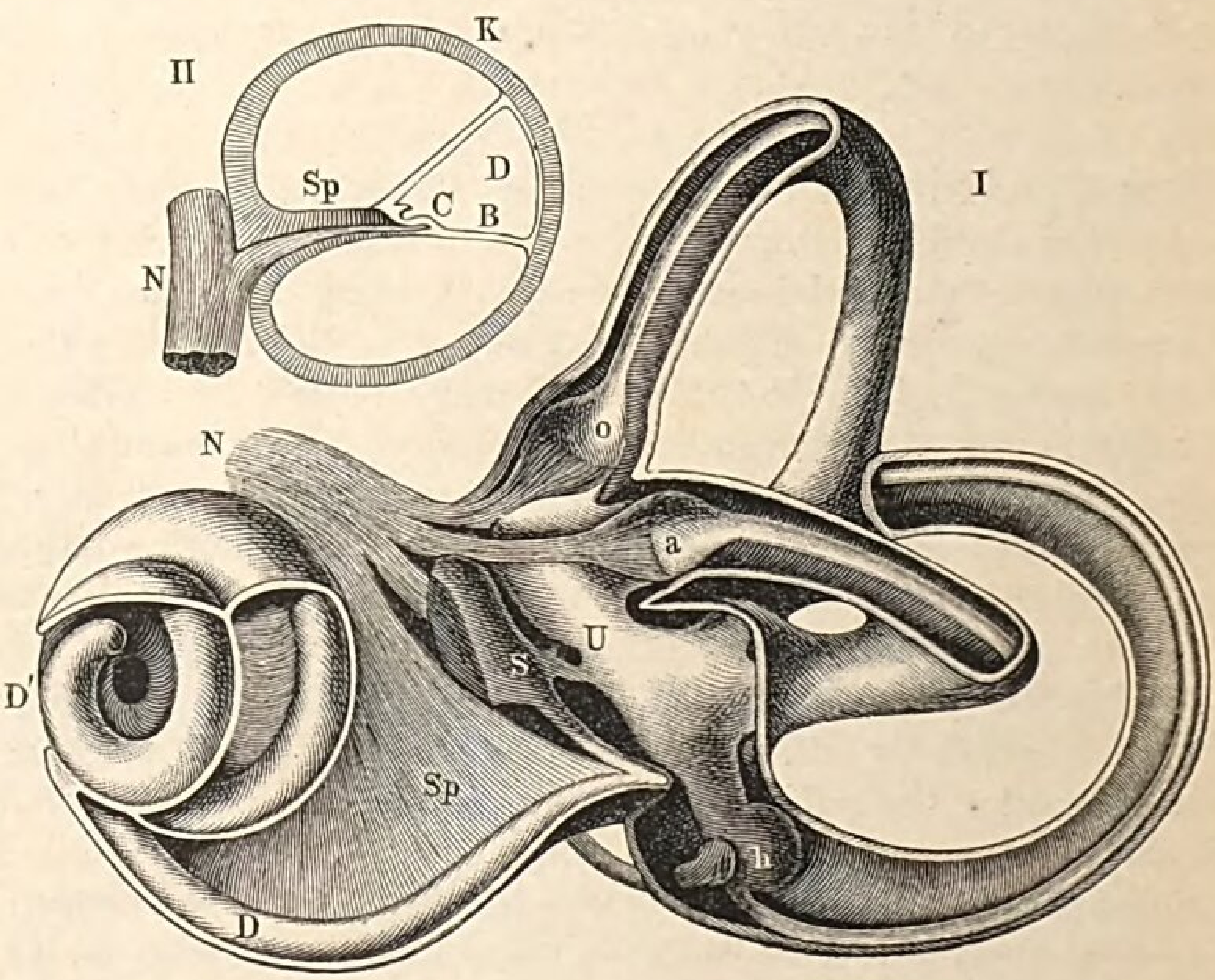
***) Wiedem. Ann. XXVII, S. 94 (1886).

†) Ich verdanke diese treffliche Abbildung meinem Freunde V. v. Ebner.

Der akustische Nerv findet seine Endausbreitung an sechs getrennten Stellen der Innenfläche des häutigen Labyrinthes. Je eine fleckenförmige an den beiden Säckchen des Vorhofes (sacculus *s* und utriculus *u*) und je eine leistenförmige an den sogenannten Ampullen, das sind flaschenförmige Erweiterungen am Beginne der häutigen Bogengänge (*o*, *a*, *h*). Die grösste Masse der Fasern des Gehörnerven geht aber in die Achse der knöchernen Schnecke, um von dort aus die ganze Länge des häutigen Schneckencanals (*D*, *D'*) mit Nervenendigungen zu versorgen.

Der häutige Schneckencanal (*D*) erscheint im Querschnitte eines Schneckenganges dreieckig, wie Fig. 858 II zeigt. Seine äussere Wand ist mit der äusseren Wand der knöchernen Schnecke (*K*) verwachsen,

Fig. 858.



seine innere und seine untere Wand sind frei. Dort, wo aber die innere und untere Wand zusammentreffen, sind beide an ein knöchernes Spiralblatt angewachsen, welches um die Achse der knöchernen Schnecke läuft und in das Innere des knöchernen Schneckenganges hineinragt (Sp. I und II). In diesem Knochenblatt gehen nun die Fasern des Schneckennerven nach aussen, um auf die innere Fläche der unteren Wand des häutigen Schneckencanales zu gelangen, wo sie in einem sehr complicirten Apparate, dem Corti'schen Organe (II, *C*) ihr Ende finden. Die untere Wand des häutigen Schneckencanales ist als Träger der Nervenenden von grösster Wichtigkeit; sie bildet die directe Fortsetzung des knöchernen Spiralblattes (Sp.) und wird als Basilarmembran (II, *B*) bezeich-

net. Dieselbe besteht in der Hauptsache aus dicht gedrängten, radiär gespannten Fasern oder Saiten. Die Saiten sind nach Hensen wahrscheinlich für bestimmte Töne abgestimmt und erregen durch Mitschwingen die auf ihnen liegenden Nervenenden. Dass in der Schnecke ein Apparat enthalten sein müsse, welcher nach dem Principe des Mitschwingens fungirt, hat zuerst Helmholtz ausgesprochen. Da die Basilarmembran von unten nach oben breiter, beziehungsweise die Saiten derselben von unten nach oben länger werden, müssen die hohen Töne von der Basis, die tiefen von der Spitze der Schnecke aufgenommen werden. Die Basilarmembran ist nach Hensen beiläufig 33,5 mm lang, ihre Breite wächst von der Basis zur Schneckenspitze von 0,041 bis 0,495 mm.

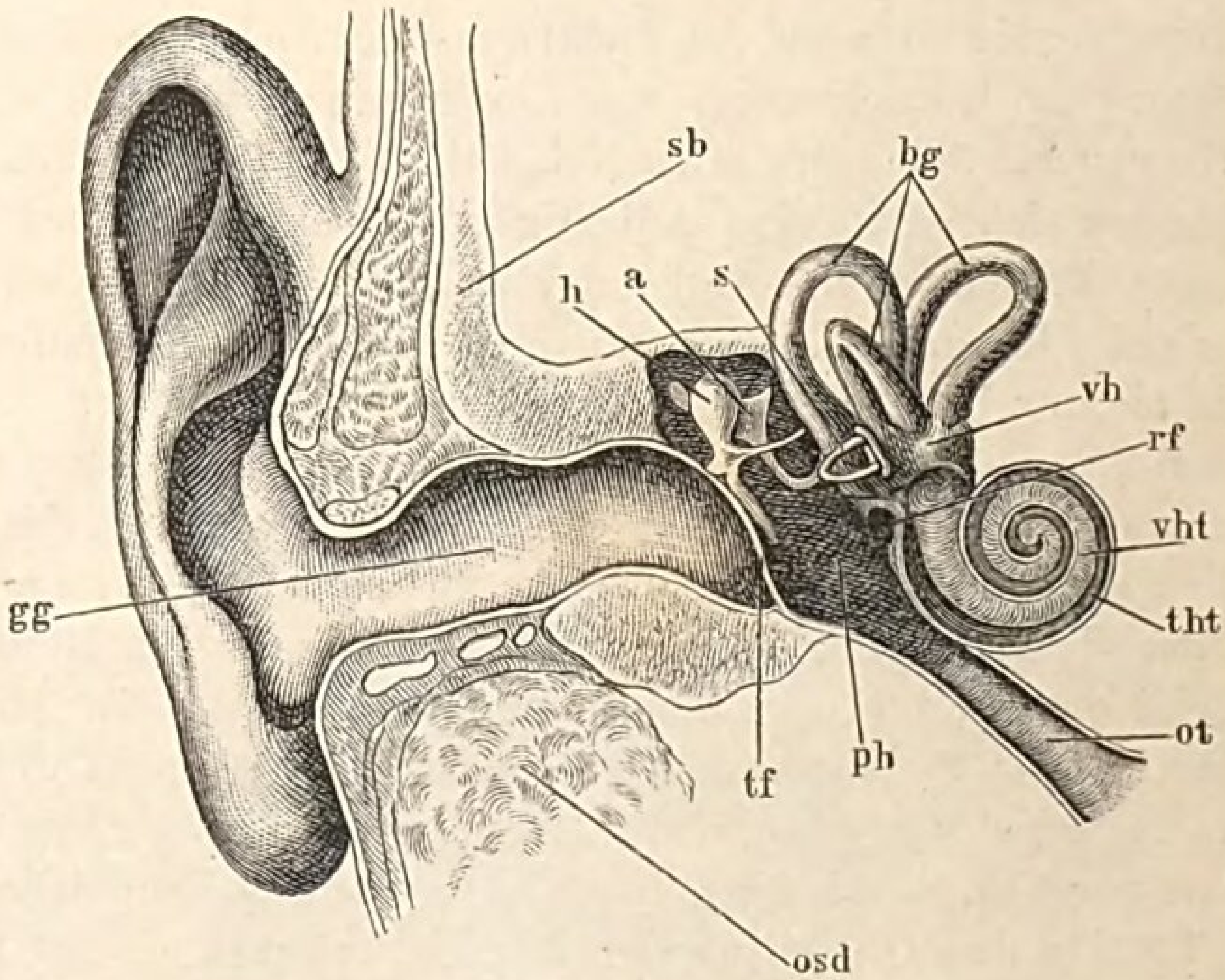
Die Nervenendstellen an den Säckchen und Ampullen sind vermöge ihrer anatomischen Einrichtungen zur Klanganalyse wohl nicht geeignet. Auf den Nervenendstellen der Säckchen, nicht aber auf jenen der Ampullen, befinden sich — in eine gallertige Masse eingeschlossen — kleine Krystalle aus kohlensaurem Kalk, der sogenannte Ohrsand. Es ist möglich, dass alle diese Nervenendstellen Geräuschempfindungen vermitteln, da sie zur Klanganalyse nicht geeignet erscheinen.

Zu dem Labyrinthe werden nun die Schallschwingungen durch die in der Trommelhöhle befindlichen kleinen Knöchelchen fortgeleitet; diese Knöchelchen sind der Hammer, welcher mit seinem Griffe an der inneren Seite des Trommelfelles angewachsen ist; an den Hammer setzt sich der Ambos an, und mit diesem hängt durch das linsenförmige Knöchelchen des Sylvius der Steigbügel zusammen, dessen Tritt gerade das ovale Fenster verschliesst. Aus der von Thomé entnommenen Uebersichtsfigur Fig. 859 (a. f. S.), in welcher der Deutlichkeit wegen die inneren Theile des Ohres unverhältnissmässig gross gezeichnet sind, ist ungefähr die gegenseitige Lage aller dieser Theile zu ersehen. *gg* ist der Gehörgang, welcher die Schallwellen von der Ohrmuschel zum Trommelfell führt. Das Trommelfell *tf* trennt die Trommelhöhle *ph* von dem Gehörgange. Durch die Ohrtrompete *ot* steht die Trommelhöhle mit der Mundhöhle in Verbindung, so dass die Luft in der Trommelhöhle stets mit der äusseren sich ins Gleichgewicht stellen kann. *h* ist der Hammer, welcher einerseits an das Trommelfell angewachsen, mit seinem anderen Ende aber an den Ambos *a* angesetzt ist. *s* ist der Steigbügel, welcher, wie man sieht, das ovale Fenster verschliesst, *rf* ist das runde Fenster; *vh* ist der Vorhof des Labyrinthes, *bg* sind die drei Bogengänge. Die Schnecke ist geöffnet, ohne ihren häutigen Inhalt, dargestellt; *tht* ist die Trommelhöhlentreppe, *vht* die Vorhofstreppe, welche durch das (in Fig. 858 II im Profil dargestellte) knöcherne Spiralblatt theilweise von der ersteren getrennt ist.

Das runde Fenster sowohl wie das ovale sind, wie bereits bemerkt wurde, durch Membranen verschlossen. Auf der Mitte der Membran des ovalen Fensters ist die Platte des Steigbügels aufgewachsen.

Die inneren Theile des Gehörorganes sind nicht so frei liegend, wie es aus Fig. 859 etwa scheinen möchte; hier ist die knöcherne Hülle, welche das Labyrinth einschliesst, der Deutlichkeit wegen ganz weggelassen. Der Gehörgang selbst geht durch den Knochen des Schläfebeines *s b* hindurch, die Trommelhöhle ist ringsum von Knochenwänden umgeben; aber auch das Labyrinth ist so vollständig in einen Knochen, welcher seiner Härte wegen den Namen des Felsenbeines trägt, eingewachsen, dass man es nur mit Mühe blosslegen kann. Um eine richtige Vorstellung davon zu geben, wie die einzelnen Theile des Gehörganges in die Knochenmasse eingewachsen sind, ist in Fig. 860 ein wirklich anatomischer Hori-

Fig. 859.



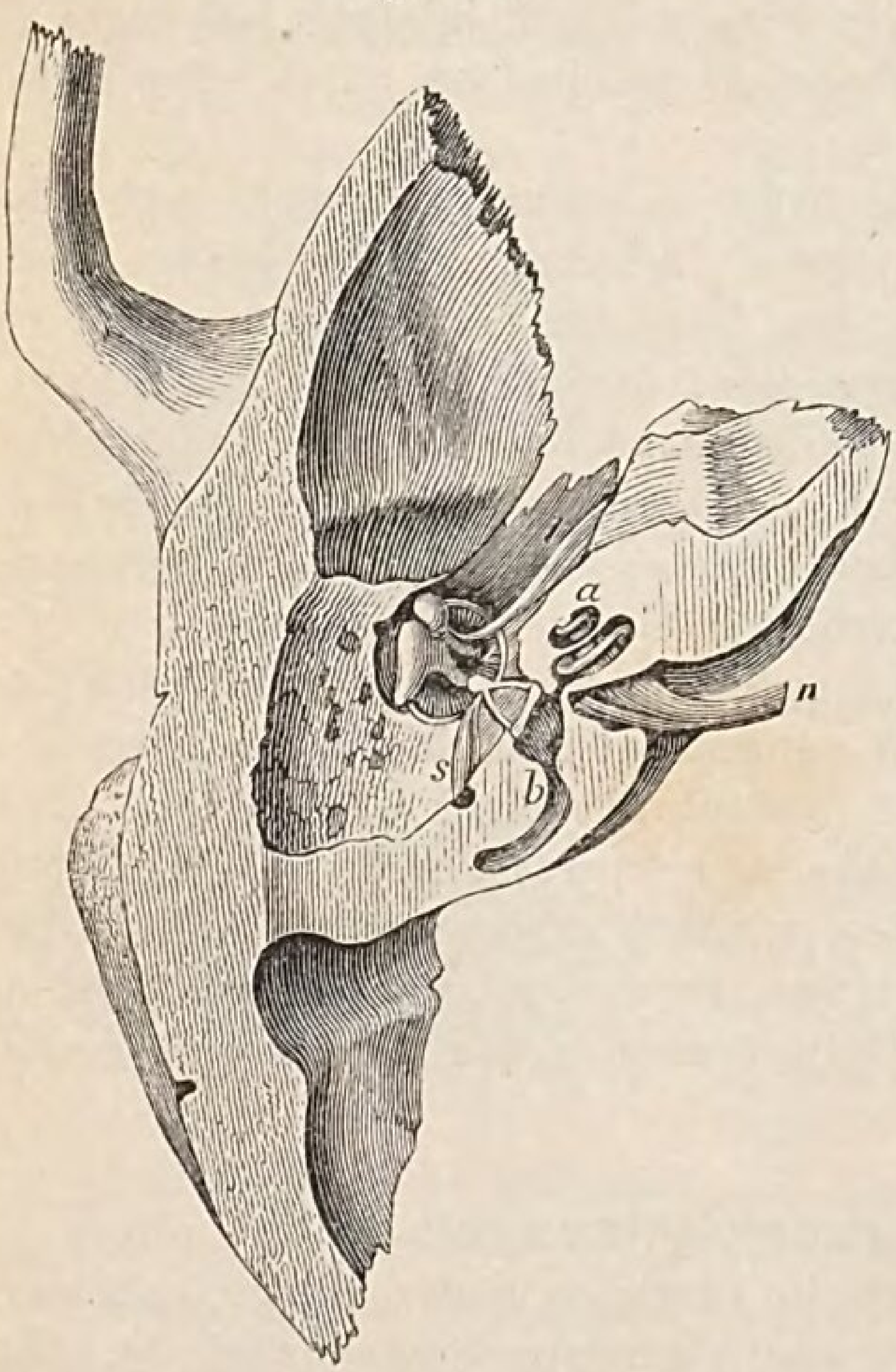
zontaldurchschnitt desselben von der linken Schädelhälfte in natürlicher Grösse, von oben gesehen, dargestellt. *a* ist der Durchschnitt der Schnecke, *b* einer der halbzirkelförmigen Canäle, *n* der akustische Nerv, *t* das Trommelfell; auch der Hammer, Ambos und der Steigbügel sind in Fig. 860 deutlich zu erkennen.

Die Ohrmuschel dient dazu, die Schallwellen aufzunehmen und durch den Gehörgang zum Trommelfelle hinzuleiten; dadurch nun wird das Trommelfell in Vibrationen versetzt, die durch die Gehörknöchelchen zum Labyrinthe geleitet werden. Durch einen Muskel (Fig. 860, *l*) kann das Trommelfell mehr oder weniger gespannt und nach innen gezogen, durch einen anderen Muskel (*s*, Fig. 860) kann der Steigbügel bewegt, dadurch aber auch natürlich die Intensität der Mittheilung des Schalles modificirt werden.

Was die Functionen des runden Fensters betrifft, so war man früher der Ansicht, dass es bestimmt sei, solche Schallschwingungen aufzunehmen und der Schnecke zuzuführen, welche sich von dem Trommelfell auf

die Luft in der Trommelhöhle fortgepflanzt haben. Eduard Weber hat aber gezeigt, dass diese Ansicht irrig sei. Nach ihm ist die Fenestra rotunda eine Gegenöffnung des Labyrinthes, welche dazu dient, die Mittheilungen der Bewegungen des Steigbügels an das Labyrinthwasser möglich zu machen. Wenn die Höhle des Labyrinthes nur eine Oeffnung, das ovale Fenster, hätte, so könnten die Bewegungen des auf der verschliessenden Membran dieser Oeffnung befestigten Steigbügels nur dadurch dem Labyrinthwasser mitgetheilt werden, dass diese fast incompressible Flüssigkeit comprimirt und dilatirt würde, was die schwachen Bewegungen des Steigbügels nicht zu leisten im Stande sind. Die Stösse des Steigbügels werden vielmehr von dem ovalen Fenster zum runden Fenster durch das Labyrinthwasser hindurch fortgepflanzt und setzen die dasselbe verschliessende Membran in entsprechende Schwingungen. Indem die Membranen des ovalen und des runden Fensters synchronisch hin und her schwingen, wird das zwischen ihnen befindliche Labyrinthwasser mechanisch, d. h. ohne Verdichtungs- und Verdünnungswellen, hin und her bewegt und mit ihnen die Nervenendapparate des häutigen Labyrinthes.

Fig. 860.



Das Wesentlichste am Gehörorgane ist der Gehörnerv; daher kann das Trommelfell verletzt und die Reihe der Gehörknöchelchen unterbrochen sein, ohne dass deshalb das Gehör ganz aufhört; ja bei manchen Thieren, wie bei den Krebsen, besteht das Gehörorgan nur aus einem mit Flüssigkeit gefüllten Bläschen, auf welchem sich der Hörnerv ausbreitet.

Säckchen und Bogengänge finden sich bei allen Wirbelthieren in guter Ausbildung, dagegen bleibt die Schnecke bei den Fischen ganz rudimentär und erreicht auch bei den Amphibien und den meisten Reptilien nur eine geringe Entwickelung.

Die Kette der Gehörknöchelchen des Menschen und der Säugethiere ist bei Vögeln und Reptilien durch ein einziges Knochenstäbchen, welches vom Trommelfell bis zum ovalen Fenster reicht, ersetzt.

Dass das Trommelfell in der That ganz dieselbe Rolle spielt, wie die elastische Membran des Phonautographen, Fig. 829, d. h. dass sie ganz nach den in §. 224 besprochenen Principien durch die in den Gehörgang eintretenden Schallwellen in Vibrationen gesetzt wird, geht auch daraus hervor, dass Politzer ganz ähnliche Zeichnungen, wie die in Fig. 830 dargestellten, einfach dadurch hervorbrachte, dass er den Scott'schen Phonautographen ohne Weiteres durch das Gehörorgan ersetzte. Das schreibende Stielchen war entweder auf dem Hammer, oder auf dem Ambos, oder endlich an der unteren Fläche des Steigbügels befestigt; die Töne wurden durch Orgelpfeifen erzeugt und im Ohre durch einen Helmholtz'schen Resonator verstärkt.

Dass das Gehörorgan sowie das Gesichtsorgan doppelt vorhanden, ist für die Physiologie von grösster Bedeutung. Die beiden Ohren leisten nämlich viel mehr als das Doppelte eines Ohres. Professor A. Steinhauser*) hat nachgewiesen, dass durch das doppelte Vorhandensein des Gehörorgans, sowie insbesondere durch die Winkelstellung der Ohrmuscheln und die dadurch bedingten Intensitätsunterschiede der Schallempfindungen in den beiden Ohren es ermöglicht wird, Richtungswahrnehmungen zu machen, welche mit einem einzigen Ohre unmöglich wären. Der genannte Autor hat auch einen Apparat, Homophon genannt, construirt, welcher zum experimentellen Nachweise dieser Entdeckung geeignet ist. Derselbe besteht aus einer Vorrichtung, um in beiden Ohren gleichzeitig verschieden intensive aber sonst gleichartige Schallempfindungen hervorzurufen, wodurch subjective Täuschungen über die Schallrichtung veranlasst werden, welche mit den Täuschungen des Stereoskops, welche wir in der Optik kennen lernen werden, eine gewisse Analogie besitzen.

238 **Akustische Bewegungserscheinungen.** Dass durch die Wellen, welche von einer Schallquelle ausgehen, andere Körper in Schwingungen versetzt werden können, worauf eben deren Resonanz beruht, haben wir bereits erfahren. Dass durch sehr heftige Wellenbewegungen, z. B. durch einen Kanonenschuss oder eine Explosion, mechanische Wirkungen, Zertrümmerung von Glasscheiben etc. hervorgebracht werden, ist allbekannt. Weniger bekannt dagegen sind eine Anzahl von Versuchen mehrerer Physiker**), durch welche mittelst Schallwellen continuirliche Bewegungen, z. B. fortdauernde Rotationen, bewirkt werden.

Wir wollen hier nur einige Beispiele beschreiben, welche Dvořák***) mitgetheilt hat.

Hängt man vor die offene Mündung einer Kundt'schen Röhre (§. 194) an zwei Fäden eine beiderseits offene Glasröhre, welche auf den Ton der Kundt'schen Röhre abgestimmt ist, so auf, dass die Achsen

*) Die Theorie des binaurealen Hörens, Wien 1877.

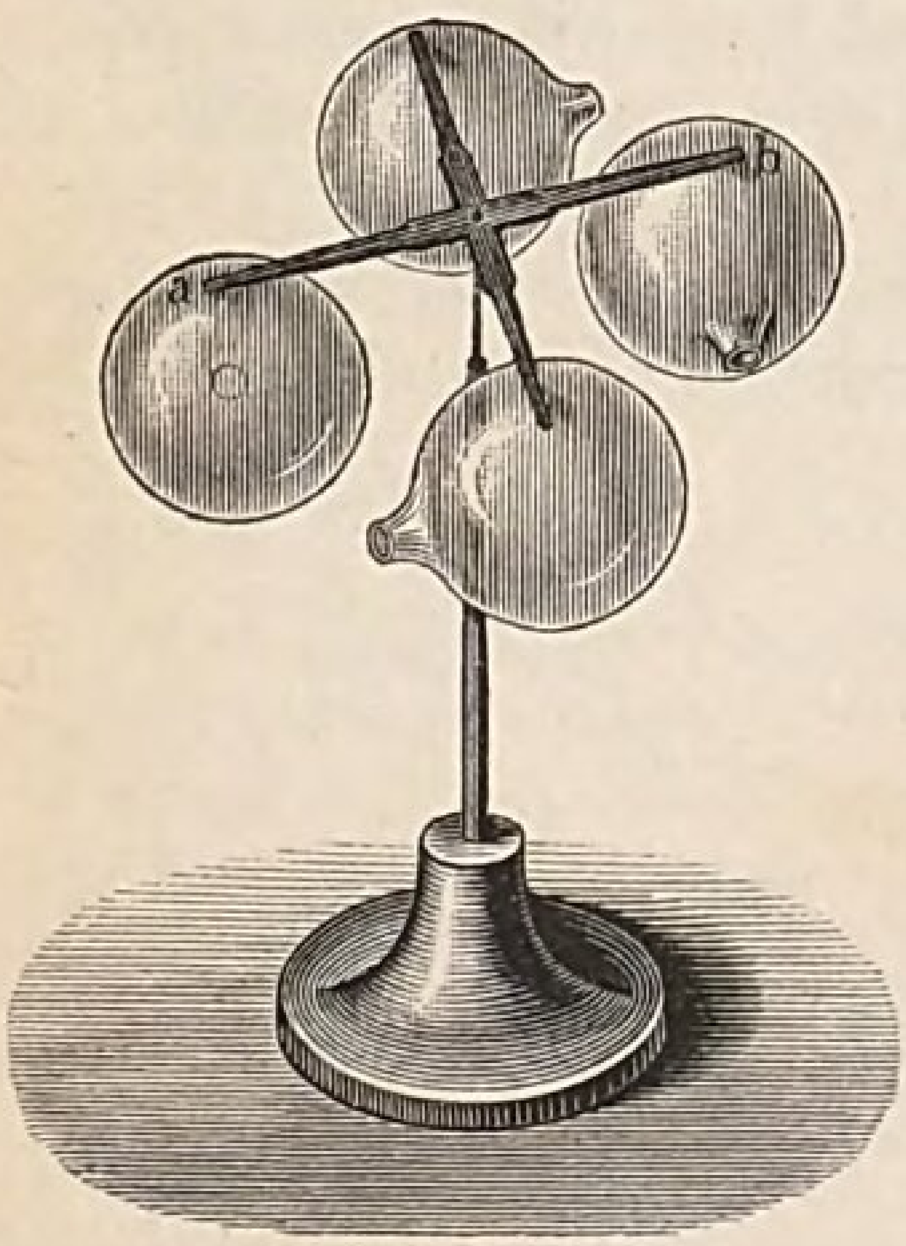
**) Lord Rayleigh, A. M. Mayer, E. Mach, A. Haberditzel, Dvořák.

***) Wien. Akad. Ber. LXXII (1875).

beider Röhren zusammenfallen, so wird das Röhrchen beim Tönen heftig abgestossen. Dasselbe tritt auch bei einer einerseits geschlossenen Glasröhre auf, wo aber die Wirkung nicht so frappant ist, wie bei der beiderseits offenen Röhre, welche keinen Angriffspunkt darzubieten scheint. Der Versuch kann auch mit einem Stimmgabelresonanzkästchen angestellt werden, vor dem man einen aus Papier gefertigten cylindrischen Resonator an Fäden aufhängt.

Wenn man das oben erwähnte Glasröhrchen genügend verstimmt, so wird es angezogen statt abgestossen. In grosser Nähe der Kundt'schen Röhre sowie bei sehr starkem Tönen wird es aber auch dann abgestossen.

Fig. 861.



Um eine continuirliche Rotation hervorzubringen, befestigte Dvořák vier leichte gläserne Resonatoren von 44 mm Durchmesser und 4 mm Oeffnung an einem leichten Holzkreuz, Fig. 861, von der Grösse $ab = 85$ mm in der Weise, dass die Mündungen horizontal und tangential gleich gerichtet waren. Das Holzkreuz ruhte auf einer Spitze. Dieser Apparat kann bis auf 40 cm Abstand vom Resonanzkasten einer Stimmgabel vom Ton g^1 (392 Schwingungen) noch in Rotation versetzt werden. Jeder Resonator wird dabei stets in der Richtung seiner Achse abgestossen, so dass die Kraft gegen seine Mündung gerichtet scheint. Es kann deshalb der Apparat auch mit einem einzigen Resonator rotiren.

Ausser diesen Versuchen sind noch viele andere beschrieben, welche noch nicht alle erklärt sind. Die Erklärung der obigen beruht auf folgenden Erwägungen. Wenn ein Resonator tönt, so treten an seiner Mündung die Luftmassen aus und ein. Beim Austreten der Luftmassen findet eine Reactionswirkung statt, welche jener am Segner'schen Wasserrade analog ist, beim Einsaugen der Luft würde diese Reactionswirkung wieder durch entgegengesetzte Action aufgehoben werden, wenn diese der Action beim Austritt an Grösse gleich wäre. Gerade dies ist aber nicht der Fall.

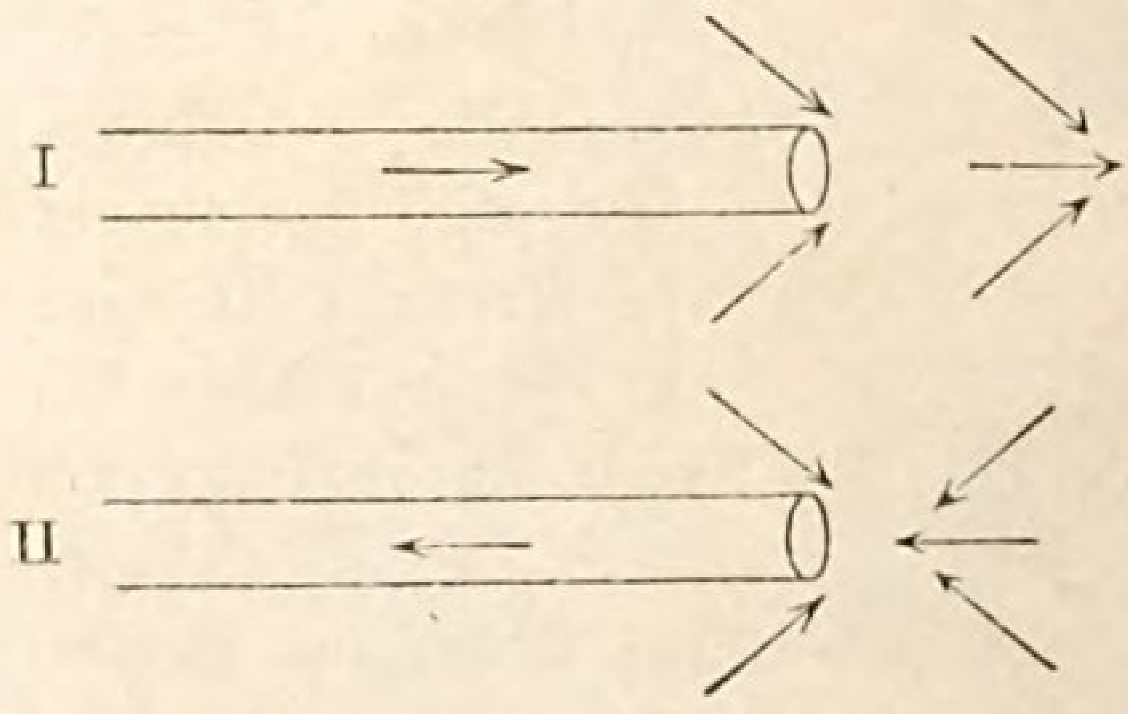
Um dies einzusehen, denken wir uns den Fall einer Kanone, welche in Folge des Schusses einen Rückstoss erleidet. Was würde nun geschehen, wenn umgekehrt das Geschoss durch Verdünnung der Luft im Rohr von der Mündung aus zurückgesaugt würde? Das Geschütz würde nur ein wenig nach vorn bewegt, käme aber sofort zur Ruhe, da das Geschoss seine nach einwärts erlangte Geschwindigkeit an das Geschütz abgeben würde. Könnte das Geschoss durch das Rohr hindurchfliegen

und seine Bewegung nach rückwärts fortsetzen, so wäre die Wirkung ein Vorstoss analog dem Rückstoss in Folge des Schusses. Dies hat schon Guericke mit seiner Verdünnungswindbüchse gezeigt.

Man braucht nur das Gesetz der Erhaltung des Schwerpunktes in Anwendung zu bringen, um dies zu verstehen. Geschütz und Kugel haben einen gemeinsamen Schwerpunkt, welcher unverrückt bleibt, wenn nicht äussere Kräfte einwirken. Wäre also keine Bodenreibung etc., so würde nach dem Schusse die Kugel nach vorn und das Geschütz nach rückwärts fortgehen, so dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt unverrückt bliebe. Denken wir uns aber jetzt die Kugel an die Mündung des evacuirten Rohres gehalten und den Luftdruck auf dieses System wirkend, so werden Geschütz und Kugel sich mit Geschwindigkeiten, welche verkehrt wie ihre Massen sich verhalten, gegen einander bewegen und durch unelastischen Stoss zur Ruhe kommen.

Ganz ähnlich verhält es sich bei einem Segner'schen Rade passender Construction, wenn man an dem Zuführungsrohre desselben abwech-

Fig. 862.



selnd bläst oder saugt. Das Blasen treibt das Rad, das Saugen nicht (oder doch nur im ersten Moment). Befestigt man daher am Zuführungsrohr einen Kautschukballen, den man abwechselnd drückt und sich wieder ausdehnen lässt, so kommt das Rad in dauernde Rotation. Der Kautschukballen kann aber nach Mach auch durch eine mit einer Membran versehene tönende Pfeife ersetzt werden.

Die Anwendung auf die Resonatoren ergiebt sich demnach von selbst. Der Rückstoss beim Austritt der Luft wird nicht durch einen gleichen Vorstoss beim Eintritt derselben ausgeglichen, daher eine andauernde Rückwärtswirkung resultiren muss.

Um die Erscheinungen an der beiderseits offenen Resonanzröhre begreiflich zu machen, müssen wir überdies an das Phänomen des ärostatischen Paradoxons erinnern (§. 163).

Hält man eine Glasröhre mit der Mündung in eine Flamme oder Rauchwolke, so kann man sich überzeugen, dass die Bewegung der Luftmassen vor der Mündung beim Blasen und Saugen nicht genau in entgegengesetzter Weise vor sich geht.

Beim Blasen wird die Luft, wie Fig. 862 I zeigt, in der Achsenrichtung fortgestossen und zugleich von seitwärts angesaugt. Beim Sau-

gen wird die Luft von allen Seiten angesaugt, Fig. 862 II. Es kann daher auch die Resultirende der beiden Wirkungen nicht gleich Null sein. Denkt man sich jetzt eine beiderseits offene Resonanzröhre, welche an beiden Enden Luft ein- und austreten lässt, während sie tönt, so könnte, wenn die Schallbewegung an beiden Mündungen gleich intensiv wäre, durch die symmetrische Wirkung der beiderseitigen Resultirenden keine Bewegung der Röhre bewirkt werden. Diese Gleichheit ist aber eben nicht vorhanden, wenn die Röhre mit der einen Mündung der Schallquelle näher ist, als mit der anderen, folglich wird es in diesem Falle zu einer Bewegung der Röhre in der Achsenrichtung kommen müssen.

Auf analoge Weise müssen auch die Rotationen der sogenannten Schallradiometer Dvořák's*) ihre Erklärung finden. Es sind dies um ihre verticale Achse rotirende, mit leichten vertical stehenden Flügeln aus Carton versehene Rädchen, bei welchen die Flügel mit conischen also nach beiden Seiten unsymmetrisch gestalteten Löchern bedeckt sind. Dieselben rotiren vor der Mündung von Resonanzkästen.

Auch Edison hat akustische Rotationsapparate gebaut.

*) Der tschechische Name Dvořák wird Dvorschak ausgesprochen. Es wäre vielleicht passender gewesen, auch so zu schreiben, da wir im Deutschen kein Interesse haben, unser Alphabet den Tschechen zu Liebe zu bereichern. Nachdem aber Seite 613 und 692 schon Dvořák gedruckt steht, muss es consequenterweise auch hier so gesetzt werden.

Berichtigungen.

Seite 10, Zeile 8 von unten, statt der früheren Schreibweise Galiläi lies die richtigere Galilei.

„ 52, „ 11 von oben, statt Müller lies Miller.

„ 97, „ 26 von oben,		
„ 98, „ 1 „ „		
„ 238, „ 7 „ „		
„ 238, „ 9 „ unten,		
„ 239, „ 20 „ oben,	statt Accelleration lies Acceleration	
„ 239, „ 2 „ unten,		
„ 249, „ 5 „ oben,		
„ 249, „ 20 „ unten,		
„ 394, „ 16 von oben,		
„ 394, „ 5 u. 7 von unten,	statt Baumé lies Beaumé.	
„ 395, „ 2 von oben,		
„ 395, in den Tabellen,		
„ 462, Zeile 17 von oben,	statt der früheren Schreibweise Galiläi lies die richtigere Galilei.	
„ 471, „ 13 u. 17 von oben,		

„ 600, „ 10 von unten, statt 0,000109 t lies 0,00109 t.

NAMENREGISTER FÜR DEN ERSTEN BAND.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

A.

d'Alembert. Zeitbegriff 19.
— Maass der Kraftwirkung 245.
— Saitenschwingungen 758.
— Consonanz 837.
Amagat. Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze 504, 513, 516, 517.
Amthor, A. Poggendorff's Wage 241.
Andrews. Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze 513.
Appun, Grenzen der Hörbarkeit 730.
— Resonatoren 845.
Arago. Methode zur Prüfung des Barometervacuums 485.
— Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze 502, 513.
— Schallgeschwindigkeit 634.
Archimedes. Princip des Auftriebes 377.
Arzberger u. Zulkowski. Wasserluftpumpe 555.
Atwood. Fallmaschine 120.
d'Aubuisson. Ausströmen der Gase 567.
— Reibung der Gase in Röhren 572.
Auerbach, F. Minimum der Anzahl von Impulsen bei Entstehung eines Tones 731.
— Vocalanalyse 861.
Avogadro. Regel über die Dampf- und Gasdichte 100.

B.

Babinet, Luftpumpenhahn 525.
v. Babo. Quecksilberluftpumpe 539.
— Palladiumocclusion 591.
Barentin, W. Poggendorff's Wage 241.
Beaumé. Aräometer 394, 395.
Baumgarten. Reflextöne 732.
Beck. Aräometer 394.
van Beck. Schallgeschwindigkeit 634.
Bede. Capillaritätsconstante 443.
v. Beetz. Seitenabweichung rotirender Geschosse 331.
Belanger. Kraftantrieb 244.
Bernoulli, D. Erhaltung der Energie 257.
— Schiffsschraube 583.
Bernoulli, J. und D. Saitenschwingungen 758.
Berthollet. Diffusion der Gase 602.
Bertsch. Form der Pfeifen 693.
Bianchi. Luftpumpe 528.
Biedermann, R. Londoner Ausstellungsbericht über Galilei's Pendeluhr 322.
Biot. Schallgeschwindigkeit 644.
— Grenze der Hörbarkeit 727.
— Stimmbänder 854.
Bohnenberger. Reversionspendel 315.
Boltzmann. Gasreibung 606.
— Stroboskopie 738.
Bosscha, J. Schallgeschwindigkeit 635.
Borda. Metermaass 43.
— Länge des Secundenpendels 324.
Bourdon. Aneroid 490.
Bouvard. Schallgeschwindigkeit 634.
Boyle. Druck der Gase 497.
Bravais. Capillardepression des Quecksilbers 487.
Breusing. Nonius 50.
Brisson. Aräometer 389.
Broch, O. J. Internationales Maass- und Gewichtsbüreau 45.
Brücke, E. Geräusche 632, 732.
— Stossapparat 648.

Brunner. Capillarsteighöhe 431.
Buff. Reibung der Gase in Röhren 572.
Bunge. Wage 220.
Bunsen. Wasserluftpumpe 552.
— Specifisches Gewicht der Gase 569. 570.
— Adsorption 590.
— Absorption 597.
— Diffusion der Gase 605.
Bunten. Barometer 482.

C.

Cagniard la Tour. Volumänderung durch Zug 342.
— Sirene 722.
— Stimmbänder 854.
Cailletet. Manometer für hohe Drucke 504.
Carrée. Luftpumpe 525.
Cartesius. Maass der Kraftwirkung 244, 245.
— Taucher 381.
Cartier. Aräometer 394.
Cavendish. Massenanziehung 110.
Charles. Luftballon 577.
Chevandier. Elasticitätsmodulus 337, 338.
— Festigkeit 345.
Chladni. Ableitung der Tonleitern 702, 703.
— Grenzen der Hörbarkeit 727, 728.
— Klangfiguren 768.
— Schallgeschwindigkeit in festen Körpern 780.
Clausius, R. Erhaltung der Energie 257.
Clavius, Chr. Erfinder des Nonius 50.
Clement und Desormes. Aërostatisches Paradoxon 572.
Colladon und Sturm. Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten 415.
— Schallgeschwindigkeit in Wasser 643.
Coriolis. Arbeit 244.
Corti. Gehörorgan 868.
Coulomb. Drehwage 343.
— Tribometer 353.
— Wälzende Reibung 356.
— Flüssigkeitsreibung 447.
Crahay. Parallelogramm der Kräfte 134.
Cuvier. Stimmorgan der Vögel 857.

D.

Delambre. Metermaass 43.
Deleuil. Luftpumpe 530.
Depretz. Abweichungen von Boyle's Gesetz 513.
Despretz. Grenzen der Hörbarkeit 728.
Desormes (Clement und). Aërostatisches Paradoxon 572.
Dittmar. Gasabsorption 596.
Döbereiner. Zündmaschine 590.
Doppler. Stroboskopische Methode 681, 737.
— Princip der Aenderung der Wellenlänge durch Bewegung 733.
Dove. Sirene 828.
Dubois-Reymond. Grenzen des Naturerkennens 1.
Duhamel. Vibrographie 718.
Dulong. Quecksilbermeniskus 420.
— Boyle's Gesetz 513.
Dutrochet. Endosmometer 452.
Dvořák. Schall unter dem Recipienten der Luftpumpe 613.
— Ventilmanometer 692.
— Variationstöne 836.
— Akustische Bewegungserscheinung 872.
— Schallradiometer 875.

E.

Ebner, V. v. Abbildung des Labyrinthes 868.
Edelmann. Fallmaschine 120.
— Pneumatometer 508.
Edison, Th. A. Phonograph 863.
Eisenlohr. Figuren von Lissajous 758.
Euklides. Consonanz 836.
Euler. Saitenschwingungen 758.
— Consonanz 837.
Exner, S. Minimum von Schallimpulsen bei Entstehung eines Tones 731.

F.

Faber. Sprechmaschine 858.
Faraday. Aërostatisches Paradoxon 573.
— Klangfiguren 774.
Ferrein. Stimmbänder 854.
Fortin. Barometer 477.
Foucault. Pendel 324.
Fourier. Theorem über die Zusammensetzung der Sinuscurven 806.
Frankenheim. Capillaritätsconstante 443.
Fuess, R. Barometer 480, 483.

G.

Galilei, G. Physikalische Methode 10.
— Graphische Darstellung der Bewegungen 80.
— Gesetz der Trägheit 86.
— Freier Fall 115.
— Fall durch die Sehne 140.
— Pendeluhr 322.
— Schwere der Luft 462.
— Luftdruck 471.
Gauss. Rectification der Wage 231.
Gay-Lussac. Volumeter 387.
— Densimeter 389.
— Alkoholometer 392.
— Adhäsion 418.
— Capillarröhren 429.
— Barometer 482.
— Luftballonfahrt 578.
— Schallabnahme in Höhen 613.
— Schallgeschwindigkeit 634.
Geissler, Quecksilberluftpumpe 532.
Gimingham. Quecksilberluftpumpe 547.
Girard. Ausfluss von Flüssigkeiten 407.
Graham. Diffusion der Flüssigkeiten 457.
— Dialyse 458.
— Occlusion 591.
— Diffusion der Gase 605.
Grassi. Compressibilität von Flüssigkeiten 416.
Grassmann. Luftpumpenhahn 528.
— Theorie der Vocale 858.
S'Gravesande. Ausdehnung in der Wärme 42.
— Elasticitätscoëfficient 335.
Greiner. Barometer 482.
Grützner. Sprachlaute 857.
Guericke. Luftpumpe 518, 531.
Gutkowski. Capillardepression 486.

H.

Hagen Bessel-. Tension des Quecksilberdampfes 488.
— Quecksilberluftpumpe 541, 551.
Hagenbach. Wasserluftpumpe 554.
Haller. Thierstimmen 857.
Handl. Reibung der Flüssigkeiten 451.
Heinen, Fr. Rotationsapparate 333.
Helmholtz, H. Ziel der Naturwissenschaften 1.
— Erhaltung der Kraft 257.
— Charakter der Dur- und Molltonart 704.
Helmholtz, H. Elektromagnetische Stimmgabel 720.
— Grenzen der Hörbarkeit 728.
— Geräusche 732.
— Vibrationsmikroskop 753.
— Saitenschwingungen 818, 821.
— Doppelsirene 829.
— Combinationstöne 833, 834, 836.
— Consonanz 837, 838, 840.
— Einfluss der Phasendifferenz auf den Klang 842.
— Klanganalyse 843, 852.
— Resonatoren 844.
— Vocalanalyse. Künstliche Vocale 860.
Henry, W. Gesetz der Absorption 596.
Hensen. Gehörorgan 869.
Herschel. Schallinterferenz 794.
Hertz. Tension des Quecksilberdampfes 488.
Hochgesang. Luftpumpe 531.
Hook. Radbarometer 494.
Hopkins. Schwingungsknoten 687.
Humboldt, A. v. Schallgeschwindigkeit 634.
— Schall zur Nachtzeit 647.
Huyghens. Cykloidenpendel 186.
— Schwingungspunkt 310.
— Barometer 493.

I.

Isenkrahe, C. Schwerkraft 110.

J.

Jenkin und Eving. Vocalanalyse mittelst Phonograph 867.
Jolly, Ph. v. Anwendung der Wage zur Messung der Gravitation 110.
— Federwage 339.
— Endosmotisches Aequivalent 453.
— Zusammensetzung der Luft 460.

K.

Kahl. Schallgeschwindigkeit 636.
Kater. Reversionspendel 315.
Kayser. Adsorption 590.
Kempelen, W. v. Vocale 858.
Kepler. Methode der Physik 10.
Kirchhoff. Schallgeschwindigkeit 635.
— Klangfiguren 777.
Kirpitschoff. Abweichungen von Boyle's Gesetz 518.
Kiessling. Schallinterferenz 797, 798.

Knoblauch. Figuren von Lissajous 758.
König, R. Schallgeschwindigkeit 635.
— Manometrische Flammen 688, 847.
— Stimmgabeln 718.
— Grenzen der Hörbarkeit 728.
— Klangfiguren 777.
— Stosstöne 825.
— Einfluss des Phasendifferenz auf den Klang 842.
— Apparate zur Klanganalyse 847.
Körting. Dampfstrahlpumpe 575.
Kohlrausch, F. Tabelle für Capillardepression 487.
— Pneumatometer 508.
Kohlrausch, W. Minimum der Schallimpulse bei Entstehung eines Tones 731.
Kopp, H. Volumenometer 508.
Kravogl. Quecksilberluftpumpe 539.
Kratzenstein. Vocale 858.
Kreil. Theilbarkeit 21.
Kries, J. Minimum der Schallimpulse bei Entstehung eines Tones 731.
Kundt. Glasfeder 550.
— Reibung der Gase 606.
— Schallröhren 684, 689.
— Schwingungsknoten 689.
— Schallventile 691.
— Schallinterferenz 795.
Kupffer, A. T. Barometerprüfung 485.
Kurz. Trägheitsmoment 299.

L.

Laboulage. Maschinen 259.
Lagrange. Metermaass 43.
— Saitenschwingungen 758.
Lahr, J. Vocalanalyse 862, 867.
Landois. Thierstimmen 857.
Lang, V. v. Capillarwage 440.
— Reibung zwischen Luft und Wasser 606.
Laplace. Metermaass 43.
— Schallgeschwindigkeit 639.
Lavoisier. Metermaass 43.
Lehfeldt. Stimmbänder 856.
Leibnitz. Lebendige Kraft 86, 244, 245.
— Consonanz 837.
Leroux. Schallgeschwindigkeit 635.
Leslie. Stereometer 508.
— Schall in Wasserstoffgas 613.
Lippich. Fallmaschine 117.
— Universalkaleidophon 757.
Liskovius. Stimmbänder 856.
Lissajous. Figuren 741, 747, 748.
Löwenherz. Wage 228.
— Barometer 485.
Lommel. Interferenz der Quecksilberwellen 798.

M.

Mach, E. Aufgabe der Naturwissenschaft 2.
— Richtung im Raume 18.
— Definition der Masse 85.
— Pendel 191.
— Poggendorff's Wage 242.
— Geschwindigkeit der Explosionswellen 636.
— Interferenzversuche an Orgelpfeifen 692.
— Doppler's Princip 735.
— Stroboskopie 737, 738.
— Funkenwellen 799.
— Obertöne 809.
— Combinationstöne 836.
— Consonanz 838, 841.
— Akustische Bewegungserscheinungen 872, 874.
Mariotte. Flasche mit constantem Ausfluss 398.
— Druckgesetz 497.
Marloye. Stimmgabel 716.
— Resonanzkasten 716.
Maskelyne. Lothabweichung 110.
Mathieu. Schallgeschwindigkeit 634.
Mayer, J. R. Erhaltung der Kraft 257.
Mayer, A. M. Vocalanalyse mittelst Phonograph 867.
Mc Leod. Quecksilberluftpumpe 547.
Méchain. Metermaass 43.
Melde. Fadenwellen 664, 668.
— Universalkaleidophon 757.
Mendéléjeff. Capillaritätsconstante 443.
— Capillardepression des Barometers 486.
— Abweichung vom Boyle'schen Gesetz 518.
Mersenne. Schwingungspunkt 310.
— Tonhöhe 633.
— Schallgeschwindigkeit 634.
— Saitenschwingungen 758.
Meyer, L. und Seubert. Atomgewichtstabelle 24.
Meyer, O. E. Flüssigkeitsreibung 447.
— Diffusion 602.
— Gasreibung 606.
Mitscherlich. Quecksilberluftpumpe 541.
Mohr, F. Wage 384.
Moll, Schallgeschwindigkeit 634.

Montgolfier. Stossheber 411.
— Luftballon 576.
Morin. Reibung 354.
Mos. Figuren von Lissajous 758.
Moser. Hauchbilder 593.
Müller, J. Capillarerhebung 431, 432.
— Reibung 454.
— Stroboskopische Scheiben 632.
— Labialpfeifen 789.
Müller, Johannes. Stimmorgan 854, 855.

N.

Neesen. Quecksilberluftpumpe 541.
Neumann, C. Beharrungsvermögen 86.
Neumann, Cl. Saitenschwingungen 819.
Newton. Methode der Physik 10.
— Rotirende Bewegung 18.
— Schwere 109.
— Princip der Wechselwirkung 114.
— Erhaltung der Energie 257.
— Schallwellen 609.
Nicholson. Aräometer 386.
Nobert. Gittertheilung 20.
Nörrenberg. Schallinterferenz 794.
Nunez Pero. Nonius 49.

O.

Oerstedt. Compression der Flüssigkeiten 415.
— Abweichungen vom Boyle'schen Gesetz 513.
Oettingen, A. v. Consonanz 841.
Ogden, N. Rood. Saitenschwingungen 765.
Ohm, G. S. Zerlegung der Schwingungen in pendelartige 841.

P.

Pascal. Bodendruck 372.
Pfaundler. Anwendung der Fallmaschine zur Demonstration einer ungleichmässig beschleunigten Bewegung 170; dito einer schwingenden Bewegung 176.
— Apparat zur Demonstration der Seitenabweichung rotirender Geschosse 331.
— Wellenmaschine 629.
— Apparat zur Demonstration der Interferenz von Wellen gleicher Länge 655.
Pfaundler. Minimum der Anzahl von Schallimpulsen bei Entstehung eines Tones 731.
— Apparate zur Erzeugung der Figuren von Lissajous 748, 754.
— Apparat zur rechtwinkeligen Zusammensetzung beliebiger Schwingungen 755.
— Apparat zur Demonstration der Zusammensetzung beliebiger Wellen 811.
Plateau. Gleichgewichtsfiguren 424.
— Stroboskopische Methode 681, 737.
Poggendorff. Wage 238.
— Erhaltung der Rotationsachse 329.
— Luftpumpe 540.
Poisseuille. Ausfluss durch Capillarröhren 407.
— Reibung in Röhren 447.
Poisson. Gleichförmige Bewegung 19.
— Adhäsion 419.
Politzer. Gehörorgan 872.
Poncelet. Arbeit 244.
Pouillet. Abweichung vom Boyle'schen Gesetz 513.
Preyer, W. Grenzen der Hörbarkeit 728, 730.
Přibram. Reibung der Flüssigkeiten 451.
Priestley. Gasabsorption 597.
Prony. Zaum (Dynamometer) 361.
— Schallgeschwindigkeit 634.
Puluy. Gasreibung 606.
Pytagoras. Tonhöhe 632.
— Consonanz 836.

Q.

Quincke. Capillaritätsconstante 422, 441, 442, 444, 445.
— Randwinkel 428.
— Stroboskopische Trommel 632, 821.
— Schallinterferenz 795.

R.

Rabs. Fallmaschine 118.
Rankine. Energie 255.
Rausch. Singende Flammen 678, 679.
Régnault. Compression der Flüssigkeiten 416.
— Tension der Quecksilberdämpfe 488.
— Gesetz von Boyle 502, 504.
— Volumenometer 508.
— Abweichungen vom Boyle'schen Gesetze 513.
— Schallgeschwindigkeit 635.

Reichert. Rotirender Spiegel 680.
Reimann. Substitutionswage 237.
Ressel, Jos. Schiffsschraube 583.
Reuleaux. Maschine 258.
— Elemente der Maschinen 296.
Röntgen, W. C. Capillarerscheinungen 442.
— Flüssigkeitsreibung 448.
— Pneumatometer 508.
Rogers. Singende Flamme 680.
Roscoe. Absorption 596.
Rueprecht. Wage 222.
Rühlmann. Theilmaschinen 51.

S.

Savart. Contraction des ausfliessenden Strahls 402.
— Resonanzapparat 676.
— Form der Pfeifen 692, 694.
— Zahnradtöne 726.
— Minimum der Schallimpulse zur Entstehung eines Tones 731.
— Klangfignren 768, 769, 773.
— Stäbe 779.
— Schallgeschwindigkeit in festen Körpern 780.
— Mittheilung der Schallschwingungen 790, 791.
Saussure. Absorption 589.
— Schall in verdünnter Luft 613.
Sauveur. Grenzen der Hörbarkeit 727, 728.
— Anwendung der Stösse 823.
Say. Stereometer 508.
Schaffgotsch. Singende Flamme 679.
Scheibler. Stimmton 713.
— Stösse 822, 823.
Schiff, R. Capillarerhebung 443, 444.
Schleiermacher. Centrifugalapparat 161.
Schmidt, A. Wassermotor 409.
Schmidt, G. G. Aräometer 389.
Schneebeli. Vocalanalyse 861, 862.
Schröder van der Kolk. Schallgeschwindigkeit 634.
Schubring. Resonatoren 845.
Schuller, A. Quecksilberluftpumpe 541.
Scott und König. Phonautograph 813.
Seebeck. Minimum der Schallimpulse bei Entstehung eines Tones 731.
— Stäbe 779.
Segner. Reactionsrad 408.
Senguerd. Hahn 524.
Seubert, K., L. Meyer und. Atomgewichtstabelle 24.
Silbermann. Luftpumpe 556.
Sims. Absorption 596.
Slotte. Reibung der Flüssigkeiten 451.
Smith, R. Consonanz 837.
Sondhaus. Bezeichnung der Tonhöhen 712.
— Resonatoren 845.
Sorge. Combinationstöne 833.
Sprengel. Quecksilberluftpumpe 533, 545.
Sprung, B. Reibung der Flüssigkeiten 450.
Stefan, J. Adhäsion 346, 347.
— Diffusion der Gase 602.
— Gasreibung 606.
Steinhauser. Jolly's Federwage 341.
— Hören mit beiden Ohren, Homophon 872.
Stevin. Statik 296, 297.
Streintz, H. Grundlagen der Mechanik 19.
— Kraft 85.
— Trägheitsgesetz 87.
— Princip der Wechselwirkung 114.
Strehlke. Klangfiguren 773, 777, 778.
Sturm. Compressibilität der Flüssigkeiten 415.
Swendsen. Abweichungen vom Boyle'schen Gesetz 513.
Swinden, van. Metermaass 44.

T.

Tailor. Saitenschwingungen 758.
Tartini. Combinationstöne 833.
Terquem. Stäbe 779.
Thiesen, M. Manometer 505.
Thomson. Energie 255.
Töpler, A. Quecksilberluftpumpe 541.
— Sichtbarkeit der Schallwellen 611.
— Stroboskopische Methode 682, 737, 738.
Töpler und Boltzmann. Dichtigkeitsänderungen in den Pfeifen 692.
Toricelli. Ausflusstheorem 395.
— Schwere der Luft 462.
— Luftdruck 471.
Tralles. Metermaass 44.
— Alkoholometer 392.
Tumlirz. Schallgeschwindigkeit 636.
Tyndall. Schallreflexion 647.
— Stehende Wellen 671.
— Singende Flammen 679.
— Vocalflamme 862.

V.

Vidi. Aneroid 491.
Vitruv. Schall 609.
Viviani. Pendeluhr 322.

W.

Waidele. Hauchbilder 593.
v. Waltenhofen. Kravogl's Quecksilberluftpumpe 539.
— Verdünnungsgrenze 548.
Warburg. Gasreibung 606.
Watt. Arbeitsmaass 248.
Weber, E. Gehörorgan 871.
Weber, Gebrüder. Wirkung des Luftdruckes auf Gelenk 495.
— Wasserwellen 616.
— Klangfiguren 777.
Weber, W. Vibrographie 718.
— Monochord 761.
— Zungenpfeifen 785.
— Schallinterferenz 797.
Weinhold, A. F. Bewegungsparallelogramm 129.
— Horizontaler Wurf 149.
— Schwungmaschine 159, 160.
— Schiefe Ebene 289.
— Quecksilberdestillirapparat 474.
— Quecksilberluftpumpe 539, 547.
— Longitudinalwellenmaschine 625.
Weisbach. Reibung 356.
Welter. Sicherheitsröhre 504.
Werner, Paul. Nonius 49.
Wertheim. Elasticitätscoëfficient 335, 338.
Wertheim. Volumveränderung durch Zug 342.
— Festigkeit 345.
— Schallgeschwindigkeit 643.
— Wasserpfeife 782.
Weston. Differentialflaschenzug 270.
Westphal. Wage 229.
Wheatstone. Kaleidophon 756.
— Klangfiguren 774, 777.
— Theorie der Vocale 858.
Wiedemann, C. Reibung der Flüssigkeiten 450.
Wild. Barometerfüllung 474.
— Gefässbarometer 483.
Wilhelmy. Capillaritätsconstante 442.
Willis, R. Theorie der Vocale 858.
Wolf. Figuren von Lissajous 758.
Wollaston. Theilbarkeit 20.

Y.

Young, Thomas. Combinationstöne 833.

Z.

Zöppritz. Theodolit 63.
Zulkowski. Wasserluftpumpe 555.

SACHREGISTER ZUM ERSTEN BANDE.

A.

Absorptiometer 598.
Absorption der Gase 588, 595.
— von Gasgemengen 601.
Absorptionscoëfficient 599.
Acceleration der Schwere 111, 113.
Accorde 702.
Achsen, krystallographische 30.
Adhäsion 346, 419.
Adsorption 588.
Aether 23.
Aequivalent, endosmotisches 453.
Aggregatzustände 27.
Akustik 609.
Alhidade 63.
Alkoholometer 390.
Ambos 869.
Amplitude 178.
Analyse 25.
Aneroid 490.
Anziehung und Abstossung, Capillare 437.
Apparate, physikalische 6.
Arbeit 243, 247.
Atome 22.
Atomgewicht 23, 24.
Auftrieb 376.
Ausdehnbarkeit 42.
Ausflussgeschwindigkeit 397, 399.
Ausflussmenge 401.
Ausströmen der Gase 565, 568.
Axiome 9.

B.

Bäuche 623.
Barometer 471, 472, 485.
Barometerprobe 520.
Baroskop 575.
Basilarmembran 869.
Beschleunigung im Allgemeinen 78.
— der Schwere 111, 113.
Bewegung, Begriff 17.
— Eintheilung 75.
— gleichförmige 75.
— gleichmässig veränderte 78.
— ungleichmässig veränderte 167.
— schwingende (harmonische) 176.
Bewegungsgrösse 243.
Bewegungsparallelogramm 127.
Bodendruck 369.
Brachydiagonale 35.
Bremsdynamometer 361.
Briefwage 341.
Brückenwage 282.
Brunnen, intermittirender 465.
Bumerrang 333.

C.

Capillardepression 426.
— des Quecksilbers 487.
Capillaritätsconstante 422, 441.
Capillaritätsgesetz 420, 425, 438.
Capillarröhren, Ausfluss durch 407.
Capillarwage 340.
Centralbewegung 152.
Centripetalkraft 154.
Centrifugalkraft 158.
Coexistenz kleiner Bewegungen, Princip der 653, 799.
Cohäsion 334.
— der Flüssigkeiten 417.
Cohäsionsdruck 421, 423.
Collimationsfehler 66.
Colloïdsubstanzen 458.
Combinationstöne 833.
Communicirende Gefässe 367.
Comparator von Lissajous 748.

Compressionspumpe 555.
Consonanz 697, 836.
Constante 7.
Cykloidenpendel 186.
Cylindergebläse 564.

D.

Dasimeter 576.
Deduction 9.
Densimeter 389
Dialysator 459.
Dialyse 458.
Dichte 99.
Differentialflaschenzug 270.
Differentialschraube 52, 294.
Differentialwellrad 272.
Differenztöne 833.
Diffusion 451.
— der Gase 602.
Diffusionsanalyse 457.
Diffusionscoëfficient 603.
Diffusionsconstante 603.
Dimensionen 16.
Diosmose 452.
Dissonanz 697, 836.
Drehpaare 197.
Drehwage 343.
Druck der Gase 463.
Druckpumpe 470.
Durscala 701.
Dynamometer 341.
Dyne 92.

E.

Echappement 342.
Echo 645.
Elasticität 334.
— der Gase 462.
Elasticitätscoëfficient 335.
Elasticitätsmodulus 335.
Elemente, chemische 20, 24.
— der Maschinen 295.
Elongation 178.
Endosmose 452, 455.
Endosmometer 452.
Energie, Begriff der 255.
— der Wassergefälle 409.
— potentielle und kinetische 258.
Erg 249.
Excentrik 290.

F.

Fall, der freie, 114.
— durch die Sehne 140.
Fallmaschine 117, 120.
Fallrinne 139.
Federwage 339.
Festigkeit 344.
Feuerspritze 558.
Flammenbilder des Vocalapparates 847.
Flammen, manometrische 684.
— singende 677.
Flaschenzug 267.
Fliehkraft 157.
Frictionsrollen 357.

G.

Gase 460, 461.
Gasbehälter 560.
Gasometer 560.
Gebläse 564.
Gefässbarometer 477.
Gefässheberbarometer 483.
Gehörorgan 867.
Geigenprincipal 850.
Geschwindigkeit, Begriff der 77.
— des Schalles in Luft 633.
— des Schalles in tropfbaren und festen Körpern 641.
— virtuelle 267.
Gesetz, empirisches 7.
— der multiplen Proportionen 23.
— von Boyle (Mariotte) 497.
— von Ohm 841.
Gewicht 96.
— specifisches 99, 104.
Gewichtsaräometer 385.
Gewichtsmaasse 47.
Giftheber 467.
Glasharmonika 767.
Gleichgewicht fester Körper 206.
— gasförmiger Körper 460.
— tropfbarer Körper 363.
Gleitmaschine 283.
Glockengasometer 562.
Gravitation 83.
Grenzen der Hörbarkeit 727.
Grundstoffe 20.
Gyroskop 328.

H.

Haarröhrchen 429, 435.
Hahnluftpumpe 526.
Hammer 869.
Harmonika, chemische 677.
Hauchbilder 593.
Hebel 276.
Heber 465.
Heberbarometer 479.
Hemiëdrie 37.
Heronsball 556.
Heronsbrunnen 556.

Hexagonales Krystallsystem 33.
Hörrohr 647.
Holosterikbarometer 490.
Homophon 872.
Hydraulische Presse 365.
— Wage 383.
Hydraulischer Widder 410.
Hypothese 8, 10.

I.

Imponderabilien 15.
Induction (logisch) 8.
Injector 575.
Instrumente, physikalische 6.
— musikalische 848.
Interferenz der Wellen 652, 661.
— isochroner Schwingungen 793.
Intervalle, musikalische 695.

K.

Kaleidophon 756.
Kathetometer 51.
Kehlkopf 853.
Keil 284.
Keilpresse 287.
Kilogramm 92, 93.
Klang 609.
Klanganalyse 843.
Klangfarbe 841.
— der Instrumente 848.
— der Sprachlaute 857.
Klangfiguren 768, 774.
Knoten 623.
Körper 1.
Kräftepaar 197.
Kräfteparallelogramm 131.
Kraft, Begriff der 82.
— Einheit der 92, 93.
— „momentane“ 106.
— constante 106.
— lebendige 243, 251.
Kraftantrieb 243.
Kreisel 326.
Krystallisation 28.
Krystallsysteme 30.
Krystalloïdsubstanzen 458.

L.

Labialpfeifen 789.
Labyrinth 867.
Längenmessen 48.
Lebendige Kraft 243, 251.
Libelle 112.
Limbus 63.
Longitudinalschwingungen 778.
Longitudinalwellen 623.
Luft, Zusammensetzung 460.
Luftballon 575.
Luftdruck 471, 489, 494.
Luftpumpe 518.
Luftwellen 620, 671.

M.

Maasssystem, absolutes 92.
— praktisches 93.
— metrisches 43.
Magdeburger Halbkugeln 35.
Makrodiagonale 35.
Manometer 503.
Materie 19.
Maschine 258, 259.
Masse 82.
Mechanik 74.
Metacentrum 382.
Metallbarometer 490.
Metermaass 43, 47.
Metronom 139.
Mikrometer 50.
Mittelpunkt des Druckes 376.
— des Wasserdruckes 381.
Mittheilung von Schallschwingungen 790.
Mixturregister 850.
Molecül 21.
Moleculargewicht 27.
Molecularkräfte in festen Körpern 334.
— in Flüssigkeiten 413.
— in Gasen 588.
Mollscala 701.
Monochord 695, 761.
Monoklinisches Krystallsystem 35.
Mostwage 393.
Mundharmonika 784.

N.

Natur 1.
Naturlehre 2, 3.
Naturtöne 849.
Naturwissenschaft 2, 3.
Nonius 48.
Normalstimmton 713.
Nutzen der Physik 13.

O.

Oberfläche, freie 368.
Oberflächenspannung 420.
Obertöne 807.
Occlusion 588.
Octaëder 31.
Orgelpfeifen 684, 692.

P.

Paradoxon, aërostatisches 572.
— hydrostatisches 373.
Parallelogramm der Beschleunigungen (Kräfte-) 130.
— der Geschwindigkeiten (Bewegungs-) 125.
Partialdruck 601.
Partialtöne 807.
Pendel, einfaches 185.
— zusammengesetztes 309.
Pendeluhr 322.
Perpetuum mobile 295.
Phasen, Phasendifferenz 178, 842.
Phonautograph 718, 813.
Phonograph 863.
Physharmonika 848.
Physik, Definition der 2, 3.
— Eintheilung der 14.
— Grundbegriffe der 16.
— Methode der 7.
— Nutzen der 13.
Piëzometer 413.
Platten, schwingende 768.
Ponderabilien 15.
Poren, Porosität 40.
Potenzflaschenzug 269.
Präcession der Aequinoctien 333.
Princip des Archimedes 377.
— der Coëxistenz kleiner Bewegungen 652.
— der Wechselwirkung 114.
— der Unabhängigkeit 125.
Principalstimmen 850.
Pyknometer 101.

Q.

Quadratoctaëder 32.
Quadratisches Krystallsystem 37.
Quecksilberdestillation 474.
Quecksilberfiltration 473.
Quecksilberluftpumpe 532.
Quintaten 850.

R.

Radius vector 155.
Räderwerke 273.
Randwinkel 425.
Raum 16.
— schädlicher 525.
Reaction ausströmender Flüssigkeiten 408.
Reflexion des Schalles 645, 647.
Reibung der Flüssigkeiten 446.
— der Gase 606.
— gleitende 352.
Reibung, wälzende 356.
Reibungscoëfficient 354.
Reibungswiderstand der Flüssigkeiten 406.
Reguläres Krystallsystem 30.
Resonanz 791.
Resonanzboden 791.
Resonanzröhre 671.
Resonatoren 844.
Reversionspendel 315.
Rhombendodekaëder 31.
Rhombisches Krystallsystem 34.
Rolle 260.
Rollende Bewegung 306.
Rotirende Körper 326.
Ruhe 17.

S.

Saitenschwingungen 758, 817.
Saugpumpe 468.
Scalenoëder 38.
Scalenaräometer 387.
Schall 609.
— in verdünnten Gasen 613.
Schallgeschwindigkeit 637.
Schallradiometer 875.
Schiefe Ebene 283.
Schiffsschraube 583.
Schneckenrad 274.
Schnellwage 278.
Schraube 291 bis 293.
Schraubendampfer 586.
Schraubentheilmaschine 50.
Schraubenturbine 583.
Schwebungen 822.
Schwere 109.
— der Gase 462.
Schwerpunkt 203.
Schwingungsdauer 178.
Schwingungsform 841.
Schwingungspunkt 309.
Schwingungsweite 178.
Schwingungszahl 178, 709, 712, 714, 715, 718.
Seifenlösung, Recept 425.
Seifenlösungsfiguren 425.
Seilmaschine 260.
Seilwellen 619.
Seitenabweichung der Geschosse 331.
Seitendruck 375.
Sirene von Seebeck 724.
— „ Cagniard la Tour 723.
— „ Dove 828.
— „ Helmholtz 828.
Spannkraft 258.
Sphenoide 39.
Spiegel, rotirender 680.
Spiralifer 587.
Sprachrohr 647.

Stabilität 209.
Stechheber 465.
Stehende Schwingungen 614.
— Wellen 620, 661, 664.
Steigbügel im Ohr 867.
Steighöhe, capillare 434.
Stereometer 508.
Stiefel 518.
Stimmgabel 716.
Stimmgabelchronograph 722.
Stimmorgan des Menschen 852.
— der Thiere 856.
Stimmpfeife 686.
Stimmritze 853.
Stimmbänder 853.
Stösse 822.
Stoff 20.
Stoss 347, 348, 350.
— des Wassers 410.
Stossheber 410.
Stosstöne 825.
Stroboskopie 736.
Stroboskopische Methode 677.
— Scheibe 681.
Substitutionswage 237.
Summationstöne 834.

T.

Tangentialkraft 154.
Tarirmethode 235.
Taucherglocke 40.
Temperatur, musikalische 711.
Tetraëder 37.
Theilbarkeit 20.
Theiltöne 807.
Theodolit 63.
Theorie im Allgemeinen 9.
Ton 609.
Tonhöhe 698.
Tonleiter 699, 703, 704, 709.
— chromatische 712.
Torsionselasticität 343.
Trägheit 86.
Trägheitsmoment 297, 301, 304.
Transfusion der Gase 603.
Transversalschwingungen von Stäben 765.
Transversalwellen 623.
Tribometer 353.
Triklinisches Krystallsystem 37.
Trommelfell 869.
Trommelhöhle 867.
Tropfenbildung 417.
Tropfengewicht 444.

U.

Unabhängigkeitsprincip 125.
Undurchdringlichkeit 40.
Universalkaleidophon 757.
Unzerstörbarkeit 20.

V.

Vacuumzapfen 551.
Variationen des Barometerstandes 492.
Variationstöne 836.
Ventilluftpumpe 521.
Ventilmanometer 691.
Verdünnungsgrenze 549.
Vernier 48.
Vibrationsmikroskop 748, 753.
Vibrographie 718.
Vocale, künstliche 860.
Vocalflamme 862.
Volumenometer 508.
Volumeter 388.

W.

Wage 212, 218, 224, 233.
— hydrostatische 383.
Wassermotor 410.
Wasserpfeife 782.
Wassertrommelgebläse 555.
Wasserwellen 615.
Wellenbewegung 657.
Wellenlänge 619.
Wellenmaschinen 625, 629, 631, 632.
Wellrad 267.
Widerstand der Flüssigkeiten und Gase 580.
Windkessel 559.
Würfel 31.
Wurf, verticaler 142.
— horizontaler 148.
— schiefer 150.

Z.

Zauberbecher 467.
Zeit 17.
Zeitmessung 69.
Zeitbestimmung 69.
Zungenpfeifen 782.
Zusammensetzung von Componenten 193.
— von Wellen 804.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Müller-Pouillet's
Lehrbuch der Physik und Meteorologie.

Achte umgearbeitete und vermehrte Auflage bearbeitet von

Dr. Leop. Pfaundler,

Dr. der Philosophie,

Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Professor der Physik an der Universität Innsbruck, correspondirendem Mitgliede der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften.

In drei Bänden.

Mit gegen 2000 Holzstichen, Tafeln, zum Theil in Farbendruck, und einer Photographie. gr. 8. geh.

Zweiter Band: **Optik und Wärme.** Preis 19 ℳ. 40 ₰

Dritter Band: **Elektrische Erscheinungen.** Preis 12 ℳ.

Lehrbuch der kosmischen Physik.

Von **Dr. Joh. Müller,**

Professor zu Freiburg im Breisgau.

Ergänzungsband zu sämmtlichen Auflagen von Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik.

Vierte Auflage. Zweite, wohlfeile Ausgabe.

Mit 431 Holzstichen und 25 dem Texte beigegebenen, sowie einem Atlas von 46 zum Theil in Farbendruck ausgeführten Tafeln.

gr. 8. geh. **Preis 12 ℳ.**

Dr. Joh. Müller's
Grundriss der Physik und Meteorologie

für Lyceen, Gymnasien, Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterrichte bearbeitet von

E. Reichert,

Professor an der höheren Bürgerschule zu Freiburg im Breisgau.

Dreizehnte vermehrte und verbesserte Auflage.

Nebst einem Anhange:

Physikalische Aufgaben und deren Auflösungen enthaltend.

Mit 622 Holzstichen und 1 Spectraltafel in Farbendruck. gr. 8. geh. Preis 7 ℳ.

Mathematischer Supplementband

zum Grundriss der Physik und Meteorologie.

Von **Dr. Joh. Müller,**

Professor zu Freiburg im Breisgau.

Nebst einer Sammlung von Aufgaben und besonders gedruckten Auflösungen.

Dritte Auflage. Mit 240 Holzstichen und 8 Tafeln. gr. 8. geh. Preis 6 ℳ.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Die Schule der Physik.

Eine Anleitung zum ersten Unterricht in der Naturlehre.
Zum Schulgebrauch und zur Selbstbelehrung von

Dr. Joh. Müller.

Zweite Auflage. Mit 293 Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 2 ℳ. 40 ₰

Lehrbuch der physikalischen Mechanik

von **Dr. Heinrich Buff,**
Professor der Physik an der Universität Giessen.

In zwei Theilen. Mit zahlreichen Holzstichen. gr. 8. geh.
Preis 21 ℳ. 50 ₰

Die physikalische Technik

oder Anleitung zur Anstellung von physikalischen Versuchen und zur Herstellung von physikalischen Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln.

Von **Dr. Joseph Frick.**

Fünfte vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 998 Holzstichen.
gr. 8. geh. Preis 12 ℳ.

Vorträge und Reden

von **Hermann von Helmholtz.**

(Zugleich dritte Auflage der „Populären wissenschaftlichen Vorträge“ des Verfassers.)

Zwei Bände. Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 12 ℳ.
Gebunden. Preis 13 ℳ. 25 ₰

Das Räthsel von der Schwerkraft.

Kritik der bisherigen Lösungen des Gravitationsproblems und Versuch einer neuen auf rein mechanischer Grundlage

von **Dr. C. Isenkrahe,**
Gymnasial-Oberlehrer.

Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 4 ℳ.

Atomistik und Kriticismus.

Ein Beitrag zur erkenntnisstheoretischen Grundlegung der Physik.

Von **Kurd Lasswitz,**
Dr. phil.

gr. 8. geh. Preis 3 ℳ. 20 ₰

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Dr. J. Frick's

Physikalische Technik

speciell Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrations-Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln.

Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage von

Dr. Otto Lehmann,

Professor der Physik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe.

In zwei Bänden. gr. 8. geh.

Erster Band. Mit 708 eingedruckten Holzstichen. Preis 15 *M.*

Substanz und Bewegung.

Von **J. Clerk Maxwell.**

Ins Deutsche übersetzt von **Dr. Ernst v. Fleischl.**

Mit Bewilligung des Autors und der Society for promoting Christian Knowledge.

Zweiter Abdruck. Mit Holzstichen. 8. geh. Preis 1 *M.* 20 *₰*

Die Spectralanalyse

in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaftlichen Nachträgen

von **H. E. Roscoe.**

Dritte Auflage, neu bearbeitet vom

Verfasser und **Arthur Schuster.**

Mit 123 Holzstichen, Chromolithographien, Spectraltafeln etc.

gr. 8. geh. Preis 16 *M.*

Die Geschichte der Physik

in Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte von

Dr. Ferd. Rosenberger.

Erster Theil. **Geschichte der Physik im Alterthum und im Mittelalter.** gr. 8. geh. Preis 3 *M.* 60 *₰*

Zweiter Theil. **Geschichte der Physik in der neueren Zeit.** gr. 8. geh. Preis 8 *M.*

Dritter Theil. **Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren.** gr. 8. geh. Preis 16 *M.* 90 *₰*

(Drei Theile complet. Preis 28 *M.* 50 *₰*)

Untersuchungen über die

Dioptrik der Linsen-Systeme

von **Dr. H. Sommer,**

Professor an der Herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig.

Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 4 *M.*

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Handbuch der theoretischen Physik

von **W. Thomson** und **P. G. Tait.**

Autorisirte deutsche Uebersetzung von

Dr. H. Helmholtz und **G. Wertheim.**

Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Erster Band. Preis 19 ℳ.

Vorlesungen
über
einige neuere Fortschritte der Physik.

Von **P. G. Tait.**

Autorisirte deutsche Ausgabe von **G. Wertheim.**

Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 5 ℳ.

Die theoretische Hydrodynamik.

Nach dem Gange ihrer Entwickelung in der neuesten Zeit in Kürze dargestellt von

Dr. Felix Auerbach,

Privatdocent an der Universität zu Breslau.

Von dem K. Venetianischen Institute der Wissenschaften etc. gekrönte Preisschrift.

Mit Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 4 ℳ.

Gasanalytische Methoden

von **Dr. Walther Hempel,**

Professor an der technischen Hochschule zu Dresden.

Zweite Auflage. Mit 101 eingedruckten Holzstichen. 8. geh. Preis 11 ℳ.

Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe.

Ein Leitfaden zum Gebrauche für Maschinentechniker, Baumeister und Ingenieure sowie zum Unterrichte an technischen Lehranstalten.

Von **Gustav Herrmann,**

Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

Nebst einem Atlas mit acht lithographirten Tafeln. gr. 4. geh.
Preis mit Atlas 6 ℳ. 20 ₰.

Tabellen
zur
Reduction eines Gasvolumens

auf 0° Temperatur und 760mm Luftdruck.

Von **Dr. med. Walther Hesse.**

gr. 4. geh. Preis 3 ℳ.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann Heinrich Jacob, / Pouillet, Claude Servais Mathias, /
Pfaundler von Hadermur, Leopold,

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie in drei Bänden

Bd.: 1

(1886)

Phys.g. 303 lk-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11880890-5